Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Funcional–Curso 2019

Práctico 6

1. Sea X un espacio normado.

   a) *Lema de Riesz.* Supongamos que Y es un subespacio cerrado propio de X, y que $\rho \in [0, 1)$. Probar que existe $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ y $\inf_{y \in Y} \|x - y\| \geq \rho$.

   b) Mostrar que si X es de Hilbert o es de dimensión finita, entonces el resultado de la parte anterior vale también para $\rho = 1$.

   c) Probar que la conclusión del Lema de Riesz no es válida en general para $\rho = 1$.

2. Mostrar que X es de dimensión finita si y sólo si la bola unidad cerrada es compacta. En otras palabras: X es de dimensión finita si y sólo si es localmente compacto (sugerencia: utilizar el Lema de Riesz).

3. Sean $a := \{(\frac{i}{2})^n\}$ y $b = \{(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} i\sqrt{2})^n\}$. Probar que $a, b \in \ell^2$, y calcular $\langle a, b\rangle$.

4. Sean H un espacio de Hilbert y $x, y \in H$ vectores linealmente independientes tales que $\|x\| = 1 = \|y\|$. Probar que $\|(1 - t)x + ty\| < 1$, $\forall t \in (0, 1)$.

5. Sea $\omega = (\omega_n)$ una sucesión de reales positivos. Se define $\ell^2_\omega := \{x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) : \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n |x_n|^2\} < \infty$. En ℓ^2_ω se define $\langle x, y\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n x_n \overline{y_n}$.

   a) Probar que $(\ell^2_\omega, \langle\, , \,\rangle)$ es un espacio de Hilbert.

   b) Exhibir un ω tal que la sucesión $(\frac{1}{n^n})$ no pertenezca a ℓ^2_ω.

6. Mostrar que la norma del supremo en $C([a, b])$ no proviene de un producto interno.

7. Se dice que una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es *casi periódica* si es el límite uniforme en $\mathbb{R}$ de una sucesión de polinomios trigonométricos de la forma $\sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k t}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Sea E el conjunto de funciones casi-periódicas. Probar que E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con las operaciones usuales. Mostrar que $\langle f, g\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s)\overline{g(s)} ds$ existe $\forall f, g \in E$, y que $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle$ define un producto interno en E, según el cual $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ es un conjunto ortonormal (no numerable).

8. Sea $(K_i)_{i\in I}$ una familia de subespacios cerrados del espacio de Hilbert H. Probar que existen dos subespacios cerrados de H, $\bigwedge_{i\in I} K_i$ y $\bigvee_{i\in I} K_i$, que satisfacen: $\bigwedge_{i\in I} K_i$ es el mayor subespacio cerrado de H contenido en cada K_i, y $\bigvee_{i\in I} K_i$ es el menor subespacio cerrado de H que contiene a cada K_i. Describir dichos subespacios, y mostrar que:

   - $(\bigwedge_{i\in I} K_i)^\perp = \bigvee_{i\in I} K_i^\perp$.
   - $(\bigvee_{i\in I} K_i)^\perp = \bigwedge_{i\in I} K_i^\perp$.

9. Probar que, para cada subconjunto J del conjunto I, $\ell^2(J)$ se identifica naturalmente con un subespacio cerrado de $\ell^2(I)$, y calcular $\ell^2(J)^\perp$. ¿Todos los subespacios cerrados de $\ell^2(I)$ son de esta forma? Si $(J_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de subconjuntos de I, describir $\ell^2(\cup_{\lambda\in\Lambda}(J_\lambda))$ y $\ell^2(\cap_{\lambda\in\Lambda}(J_\lambda))$ en términos de los $\ell^2(J_\lambda)$ y con el lenguaje del Ejercicio 8.

10. *El cubo de Hilbert.* Sea C el conjunto de vectores $x = (x_n)$ en el espacio de Hilbert real ℓ^2 tales que $|x_n| \leq \frac{1}{n}$ para cada n. Mostrar que C es convexo y compacto y, para cada $x \in \ell^2$, hallar el elemento del cubo de Hilbert cuya distancia a x es mínima.

11. En el espacio de Banach $\big(C([0,1]), \|\ \|_\infty\big)$ se considera el conjunto C formado por las funciones f que verifican

$$\int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f = 1.$$

    Probar que C es un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de $C([0,1])$ que no contiene elementos de norma mínima.

12. Probar que para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| < 1$ la funcional lineal $\varphi_\lambda : \ell^2 \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi(x) = \sum_{n\geq 0} x_n \lambda^n$ es continua, y calcular su norma.

13. *Espacios de Hilbert de núcleos reproductores.* Dado un conjunto X, se dice que H es un espacio de Hilbert de un núcleo reproductor (rkhs) sobre X si:

    - H es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(X,\mathbb{F}) := \{f : X \to \mathbb{F}\}$.
    - H está munido de un producto interno con el cual es un espacio de Hilbert.
    - Para cada $x \in X$, la funcional $\mathsf{ev}_x : H \to \mathbb{F}$, tal que $\mathsf{ev}_x(f) = f(x)$, es continua.

    Probar que si H es un rkhs sobre X, entonces:

    a) Existe un mapa $k : X \times X \to \mathbb{F}$ tal que para toda $f \in H$ y todo $x \in X$ se tiene $f(x) = \langle f, k_x\rangle$, donde $k_x \in H$ está definido como $k_x(y) = k(y,x)$.

    b) El mapa k dado por la parte anterior -que es llamado el núcleo reproductor de H- es definido positivo, es decir, para todos $x_1, \ldots, x_n \in X$, la matriz $(k(x_i,x_j))_{i,j=1}^n$ es semi-definida positiva. Deducir que $k(y,x) = \overline{k(x,y)}$ y $k(x,x) \geq 0$, $\forall x, y \in X$.

14. Sean H un espacio de Hilbert y $a \in H$, y supongamos que K es un subespacio cerrado de H. Demostrar que $\text{mín}\{\|x-a\| : x \in K\} = \text{máx}\{|\langle a,y\rangle| : y \in K^\perp, \|y\| = 1\}$.

15. Calcular $\text{mín}_{a,b,c}\{\int_{-1}^1 |t^3 - a - bt - ct^2|^2 dt\}$ y obtener $\text{máx} \int_{-1}^1 g(t)t^3 dt$, donde g está sometida a las condiciones $\int_{-1}^1 g(t)dt = \int_{-1}^1 tg(t)dt = \int_{-1}^1 t^2 g(t)dt = 0$, y $\int_{-1}^1 |g(t)|^2 dt = 1$.

16. Sea H un espacio de Hilbert.

    a) Sean M y N subespacios de H tales que M es de dimensión finita y $\dim M < \dim N$. Probar que $M^\perp \cap N \neq \emptyset$.

    b) Supongamoes que (e_n) es una base ortonormal de H, y que (f_n) es un subconjunto ortonormal de H tal que $\sum_n \|e_n - f_n\|^2 < \infty$. Probar que (f_n) también es una base ortonormal de H.