Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Funcional–Curso 2019

Práctico 5

1. Sea X de Fréchet de dimensión infinita. Probar que (X^*, w^*) no es un espacio de Baire.

2. Sean $a_0, a_1, a_2 \in C[a,b]$, y supongamos que para cada $y \in C[a,b]$ y cada par $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ el siguiente problema de valores iniciales tiene una única solución $u_{y,\alpha,\beta} \in C^2[a,b]$:
$$\begin{cases} a_0x'' + a_1x' + a_2x = y \\ x(a) = \alpha,\ x'(a) = \beta \end{cases}$$
Mostrar que $u_{y,\alpha,\beta}$ y sus dos primeras derivadas dependen de manera continua de y, α, y β; más precisamente, demostrar que para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\max\{\|y_1 - y_2\|_\infty, |\alpha_1 - \alpha_2|, |\beta_1 - \beta_2|\} < \delta$, entonces $\max\{\|u_1 - u_2\|_\infty, \|u_1' - u_2'\|_\infty, \|u_1'' - u_2''\|_\infty\} < \epsilon$, donde $u_1 = u_{y_1,\alpha_1,\beta_1}$ y $u_2 = u_{y_2,\alpha_2,\beta_2}$.

3. Sean X e Y espacios de Banach y $T \in B(X,Y)$. Mostrar que existe $\alpha > 0$ tal que $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|\ \forall x \in X$ sii $\ker T = 0$ y $T(X)$ es cerrado.

4. Mostrar que si $E : X \to X$ es una transformación lineal en el espacio de Banach X, tal que $E^2 = E$ y que ambos, $\ker E$ y $\operatorname{ran} E$ son cerrados, entonces E es acotado.

5. *Subespacios complementarios I.* Sean Y y Z subespacios cerrados de un espacio de Banach X. Probar que $Y + Z$ es un subespacio cerrado de X sii hay un isomorfismo de espacios normados entre $Y + Z$ y un cociente de $Y \times Z$. Mostrar que X es la suma directa algebraica de Y y Z sii $X = Y + Z$ y existe $\alpha > 0$ tal que $\|y\| + \|z\| \leq \alpha\,\|y + z\|$, $\forall y \in Y,\ z \in Z$. En este caso se dice que Y es un espacio complementario de Z y recíprocamente.

6. *Subespacios complementarios II.* Supongamos que los subespacios cerrados Y y Z del espacio de Banach X son complementarios (ver el Ejercicio 4). Se considera $P : X \to Y$ dado por $x \mapsto y$, donde $x = y + z$ en la descomposición $X = Y + Z$. Mostrar que $P \in B(X)$ y que P es idempotente, es decir $P^2 = P$. Recíprocamente, demostrar que si $P \in B(X)$ es un operador idempotente, entonces los subespacios $Y := P(X)$ y $Z := \ker P$ son cerrados y complementarios entre sí. Mostrar finalmente que un operador $T \in B(X)$ conmuta con P (es decir: $TP = PT$) sii $T(Y) \subseteq Y$ y $T(Z) \subseteq Z$.

7. *Subespacios complementarios III.* Supongamos que los subespacios cerrados Y y Z del espacio de Banach X son complementarios (ver los ejercicios 4 y 5). Probar que cada $T \in B(X)$ da lugar a cuatro operadores T_{ij}, $1 \leq i,j \leq 2$, donde $T_{11} \in B(Y)$, $T_{22} \in Z$, $T_{12} \in B(Z,Y)$, y $T_{21} \in B(Y,Z)$, tales que T puede ser visto como un operador matricial
$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$$
Verificar que las operaciones in $(X)\mathfrak{B}$ son compatibles con las correspondientes operaciones entre matrices. Dar condiciones necesarias y suficientes en la matriz para que $T(Y) \subseteq Y$ y $T(Z) \subseteq Z$. Comparar esta última cuestión con el Ejercicio 5.

8. Sea $p \in [1, \infty]$, y supongamos que (a_{ij}) es una matriz tal que $Tx(i) := \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x(j)$ define un elemento $Tx \in \ell^p$ para todo $x \in \ell^p$. Probar que $T \in B(\ell^p)$.

9. Sean $p, q \in (1, \infty)$ con $1 = 1/p + 1/q$ y $(x_n) \subseteq \ell^p$. Entonces $\lim_n \sum_{j=1} x_n(j)y(j) = 0$ para todo $y \in \ell^q$ sii $\sup_n \|x_n\|_p < \infty$ y $x_n(j) \to 0$ para todo $j \geq 1$.

10. Sean X e Y espacios de Banach, y $T : X \to Y$ lineal. Probar que son equivalentes:
 a) T es acotado. *b*) $\varphi \circ T \in X^*$, $\forall \varphi \in Y^*$. *c*) $T : (X, w) \to (Y, w)$ es continua.

11. Sea (e_n) una sucesión en un espacio de Banach X, tal que para todo $x \in X$ existen únicos escalares (α_n) tales que $x = \sum_n \alpha_n e_n$. Una tal sucesión se llama base de Schauder para X.

    a) Mostrar que c_0 tiene una base de Schauder, y averiguar si lo mismo ocurre con ℓ^p, $1 \leq p \leq \infty$.
    b) Probar que si X tiene una base de Schauder, entonces es separable y tiene una base formada por vectores de norma igual a 1.
    c) Supongamos que $(e_k)_{k \geq 1}$ es una base de Schauder de X, con $\|e_k\| = 1$, $\forall k \geq 1$.
    d) Sea $Y := \{(\alpha_k) \subseteq \mathbb{F} : \sum_k \alpha_k e_k$ converge en $X\}$. Probar que Y es un espacio de Banach con la norma $\|(\alpha_k)\| := \sup_n \|\sum_1^n \alpha_k e_k\|$.
    e) Mostrar que X e Y son espacios de Banach isomorfos.
    f) Sea $\varphi_n : X \to \mathbb{F}$ dada por $\varphi(\sum_k \alpha_k e_k) = \alpha_n$. Probar que $\varphi_n \in X^*$.
    g) Mostrar que $e_n \notin \overline{\operatorname{span}}\{e_k\}_{k \neq n}$.

12. Considérese el espacio de Banach complejo $X := \{x \in C[0, 2\pi] : x(0) = x(2\pi)\}$ con la norma $\| \; \|_\infty$. Para cada n sea $S_n \in B(X)$ el operador que asigna a x su n-ésima suma de Fourier $S_n x$, es decir:

$$S_n x(t) = \sum_{k=-n}^{k=n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(s) e_{-k}(s) ds \, e_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(s) D_n(t - s) ds,$$

donde $e_k(t) = \exp(ikt)$ y D_n es el núcleo de Dirichlet ($D_n(t) = \sum_{k=-n}^{k=n} e_k(t) = \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}t}$). Mostrar que $\|S_n\| = \|D_n\|_1 \to \infty$, y deducir que existen funciones $x \in X$ cuya serie de Fourier no es uniformemente convergente. Más aún, componiendo S_n con la evaluación en $t = 0$, deducir que existe $x \in X$ cuya serie de Fourier diverge en $t = 0$.

13. Sean $X := L^1[0, 2\pi]$, $x \in X$, y para cada $n \in \mathbb{Z}$ sea $\hat{x}(n)$ el n-ésimo coeficiente de Fourier de x, es decir: $\hat{x}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) e^{-int} dt$. Por el lema de Riemann–Lebesgue sabemos que $(\hat{x}(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$. Por lo tanto tenemos un operador $T : X \to c_0(\mathbb{Z})$ dado por $T(x) = (\hat{x}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$. Es bien conocido que T es inyectivo. Probar que T es acotado y que no es sobreyectivo (sugerencia: usar el núcleo de Dirichlet - ver el Ejercicio 12 - para probar que no existe $\epsilon > 0$ tal que $\|TD_n\|_\infty \geq \epsilon \|D_n\|_1$, $\forall n$).