Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Funcional–Curso 2019

Práctico 4

1. Sea $p \in (0,1]$, y sea $\ell^p := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{C} : \sum_n |x(n)|^p < \infty\}$ con la topología definida por la métrica $d(x,y) = \sum_n |x(n) - y(n)|^p$.

   a) Probar que $(\ell^p)^* = \ell^\infty$.

   b) Mostrar que si $0 < r < p < 1$, entonces $\ell^r \subseteq \ell^p$, y que la inclusión es estricta.

   c) Para cada $p \in (0,1)$, sea w_p^* la topología débil* que ℓ^∞ tiene como espacio dual de ℓ^p. Demostrar que si $r < p$, entonces w_r^* y w_p^* son diferentes (¿hay alguna de ellas que sea más débil que la otra?), aunque son iguales sobre conjuntos acotados en la norma de ℓ^∞ (sugerencia: la bola unidad cerrada de ℓ^∞ es w_p^*–compacta).

2. Sea B la bola unidad cerrada de $M[0,1]$. Para $\mu, \nu \in M[0,1]$ se define $d(\mu,\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\int_{[0,1]} x^n d\mu - \int_{[0,1]} x^n d\nu|$. Probar que d es una métrica en $M[0,1]$ que define la topología w^* en B pero no en $M[0,1]$.

3. Sea X un espacio vectorial topológico en el que X^* separa puntos. Probar que la topología débil* de X^* es metrizable si y sólo si X posee una base de Hamel finita o numerable.

4. Mostrar que para todo $1 < p < \infty$ hay sucesiones en ℓ^p que convergen débilmente pero no en norma. En el caso $p = 1$ esto no es cierto: toda sucesión débilmente convergente también converge en norma (ver Conway V §5 5.2).

5. Sea K el menor conjunto convexo de $\mathbb{R}^3$ que contiene a los puntos $(1,0,1)$, $(1,0,-1)$ y $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, $\forall\theta \in [0,2\pi]$. Demostrar que K es compacto, pero que $\operatorname{ext}(K)$ no lo es. ¿Puede existir en $\mathbb{R}^2$ un conjunto así?

6. Sean Ω un espacio topológico de Hausdorff compacto, y $M(\Omega)$ el espacio de Banach de las medidas de Borel regulares y complejas sobre Ω. Entonces $M(\Omega)$ es el dual del espacio de Banach $C(\Omega)$. Si $\mathcal{P} \subseteq M(\Omega)$ denota el conjunto de las medidas de probabilidad, probar que $\mathcal{P}$ es convexo y w^*-compacto, y hallar $\operatorname{ext}(\mathcal{P})$.

7. Mostrar que la bola unidad cerrada de ℓ^1 es la envolvente convexa cerrada de sus puntos extremales.

8. Para $p \in (1,\infty)$, probar que cada punto de la "superficie" de la bola cerrada unitaria de $L^p[0,1]$ es un punto extremal de esta bola.

9. *Teorema del punto fijo de Markov–Kakutani.* Supongamos que X es un espacio localmente convexo y de Hausdorff, $K \subseteq X$ es compacto y convexo, y que $\mathcal{F}$ es una familia de transformaciones afines continuas en X tales que $T(K) \subseteq K$ y $T_1T_2 = T_2T_1$, $\forall T_1, T_2 \in \mathcal{F}$.

a) Dado $T \in \mathcal{F}$ sea $T^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T^j$. Probar que $T^n(K) \subseteq K$ y que $T_1^m T_2^n = T_2^n T_1^m$, $\forall n, m \geq 0$, $T_1, T_2 \in \mathcal{F}$.

b) Sea $\mathcal{C} := \{T^{(n)}(K) : n \geq 0, T \in \mathcal{F}\}$. Probar que $\bigcap\{C : C \in \mathcal{C}\} \neq \emptyset$ (sugerencia: mostrar que $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de intersección finita).

c) Sea $c \in \bigcap\{C : C \in \mathcal{C}\}$. Probar que $Tc = c$, $\forall T \in \mathcal{F}$ (sugerencia: notar que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x \in K$ tal que $T^{(n)}x = c$; deducir que $Tc - c \in \frac{1}{n}(K - K)$, y recordar que todo conjunto compacto es acotado).

10. Sean G un grupo abeliano, Ω un espacio de Hausdorff compacto, y $\alpha : G \times \Omega \to \Omega$ una acción continua. Se dice que una medida de probabilidad $\mu \in M(\Omega)$ es α–invariante si $\mu(\alpha_t(E)) = \mu(E)$, $\forall E \in \mathcal{B}(\Omega)$, donde $\mathcal{B}(\Omega)$ es la σ–álgebra de borelianos de Ω. Denotaremos por M_α al conjunto de medida α–invariantes.

    a) *Existencia de medidas invariantes.* Demostrar que $\mathsf{M}_\alpha \neq \emptyset$ (sugerencia: combinar los teoremas de Banach–Alaoglu y el del punto fijo de Markov–Kakutani).

    b) *Existencia de medidas ergódicas.* Probar que existe una medida de probabilidad $\mu \in M(\Omega)$ tal que el sistema (G, Ω, α, μ) es ergódico, es decir, μ es α–invariante y además si $E \in \mathcal{B}(\Omega)$ es α–invariante, entonces $\mu(E) = 0$ o $\mu(E) = 1$ (sugerencia: mostrar que M_α es convexo y w^*–compacto, y luego acudir al teorema de Krein–Milman).

11. Mostrar que ninguno de los siguientes espacios es reflexivo: c_0, c, ℓ^∞.

12. Sea X un espacio normado. Probar que si X^* es separable entonces X también lo es (sugerencia: para cada $\varphi \in X^*$ existe $x_\varphi \in X$ tal que $\|x_\varphi\| = 1$ y $\varphi(x_\varphi) \geq \frac{1}{2}\|\varphi\|$). Deducir que ℓ^1 no es reflexivo.