Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Funcional–Curso 2019

Práctico 3

1. Sea c_0 el espacio de sucesiones complejas que tienden a cero, con su norma usual (es decir: $\| \ \|_\infty$). Dado $x \in c_0$ se define $\varphi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x(n)$.

   a) Probar que φ es una funcional lineal continua y calcular su norma.

   b) Averiguar si existe $x \in c_0$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\varphi(x) = \|\varphi\|$, y en caso afirmativo exhibir un tal x.

2. Sea $p : X \to \mathbb{R}$ sublineal. Mostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   a) p es lineal; *b*) para cada $x \in X$, $p(x) + p(-x) = 0$; *c*) para cada $x \in X$, $p(x) + p(-x) \leq 0$

3. Sean X un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $p : X \to \mathbb{R}$ una funcional sublineal. Dado $x \in X$ defínese $q : X \longrightarrow \mathbb{R}$ como: $p_w(x) = \inf\{p(x + tw) - tp(w) : t \geq 0\}$.

   a) Probar que p_w es una funcional sublineal, y que $p_w \leq p$.

   b) Mostrar que p es lineal si y solamente si es un elemento minimal de $X^\#$, donde $X^\# := \{q : X \to \mathbb{R} : q \text{ es sublineal}\}$.

4. Considérese el espacio $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_p)$, con $p \in [1, \infty]$.

   a) Si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es lineal, calcular $\|\varphi\|$.

   b) Sea Y el subespacio generado por k vectores de la base canónica, con $1 \leq k < n$, y supongamos que φ_0 es una funcional lineal definida en Y. Calcular todas las extensiones de Hahn-Banach de φ_0 a todo $\mathbb{R}^n$.

5. *El teorema de separación de Hahn-Banach en dimensión finita.* Supongamos que X es un espacio normado de dimensión finita, y que A y B son subconjuntos convexos disjuntos de X. Sea $\{a_n\}_{n \geq 1}$ un subconjunto denso de A, y para cada n considérese el conjunto $A_n := \text{conv}\{a_1, \ldots, a_n\}$. Probar que:

   a) Cada A_n es compacto, $A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall n$, y $\cup_{n \geq 1} A_n$ es denso en A.

   b) Existen $\varphi_n \in X_{\mathbb{R}}^*$ y $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que $\|\varphi_n\| = 1$ y $\varphi_n(a) \leq \alpha_n \leq \varphi_n(b)$, $\forall a \in A_n$, $b \in B$.

   c) Existen $\varphi \in X_{\mathbb{R}}^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales $\|\varphi\| = 1$ y $\varphi(a) \leq \alpha \leq \varphi(b)$, $\forall a \in A$, $b \in B$.

6. En el espacio ℓ^1 se consideran los subconjuntos $A := \{a : a(2n) = 0, \forall n\}$ y $B := \{b : b_{2n} = \frac{1}{2^n} y_{2n-1}, \forall n\}$, y el elemento $c \in \ell^1$ definido como $c_{2n-1} = 0$ y $c_{2n} = \frac{1}{2^n}$, $\forall n$.

   a) Probar que A y B son subespacios cerrados de ℓ^1, que $\overline{A + B} = \ell^1$, pero $c \notin A + B$.

   b) Verificar que $(A - c) \cap B = \emptyset$. ¿Existe algún hiperplano cerrado de ℓ^1 que separe $A - c$ de B?

   c) Considérense las mismas preguntas para ℓ^p con $1 < p < \infty$ y para c_0.

7. ¿Existe una medida μ sobre $[0,1]$ tal que $\int_0^1 p d\mu = p'(0)$ para todo polinomio de grado menor o igual a n? ¿Y para todo polinomio p?

8. Probar que para todo límite de Banach L existen $x, y \in \ell^\infty$ tales que $L(xy) \neq L(x)L(y)$.

9. *Conjuntos anuladores y preanuladores, polares y prepolares.* Sean X un espacio vectorial topológico, X^* su espacio dual, $A \subseteq X$, y $F \subseteq X^*$. Se definen los siguientes conjuntos:

$$A^\perp = \{f \in X^* : f(a) = 0, \forall a \in A\}, \qquad A^\circ = \{f \in X^* : |f(a)| \leq 1, \forall a \in A\},$$

$$^\perp F = \{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in F\}, \qquad ^\circ F = \{x \in X : |f(x)| \leq 1, \forall f \in F\}.$$

   $A^\perp$ se llama conjunto anulador de A, y A° se llama conjunto polar de A. $^\perp F$ se llama conjunto preanulador de F, y $^\circ F$ se llama conjunto prepolar de F.

   a) Probar que A° es convexo y balanceado, que $A^\perp$ es un subespacio vectorial de X^*, y que ambos son w^*–cerrados.
   b) Probar que $^\circ F$ es convexo y balanceado, que $^\perp F$ es un subespacio vectorial de X, y que ambos son w–cerrados.
   c) Probar que si A es un subespacio de X, entonces $A^\circ = A^\perp$. Establecer un resultado análogo para preanuladores y prepolares.
   d) Si $A \subseteq B \subseteq X$, entonces $A^\perp \supseteq B^\perp$ y $A^\circ \supseteq B^\circ$. ¿Qué sucede en el caso de preanuladores y prepolares?
   e) Si $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$, entonces $(\alpha A)^\circ = \alpha^{-1} A^\circ$. ¿Qué sucede para preanuladores?
   f) Probar que $A \subseteq {}^\circ(A^\circ)$, y que $F \subseteq ({}^\circ F)^\circ$.
   g) Probar que $A^\circ = ({}^\circ(A^\circ))^\circ$, y que ${}^\circ F = {}^\circ(({}^\circ F)^\circ)$.

10. Sea X un espacio normado de dimensión infinita. Si $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, probar que $\overline{S}^{w} = \overline{B}(0,1)$.

11. *Teorema bipolar.* Sean X un espacio localmente convexo, y $A \subseteq X$. Entonces ${}^\circ(A^\circ) = \overline{A_{ec}}$, la envolvente convexa, equilibrada, y cerrada de A. Deducir que si $F \subseteq X^*$, entonces $({}^\circ F)^\circ = \overline{F_{ec}}^{w^*}$.

12. Sean X un espacio localmente convexo y M un subespacio cerrado de X. En los espacios que siguen se consideran las topologías w^* y las topologías cocientes correspondientes.

   a) Probar que el mapa $\rho : X^*/M^\perp \to M^*$ dado por $\rho(\phi) := \phi|_M$ es un isomorfismo lineal y un homeomorfismo y que, si X es normado, entonces ρ es también una isometría (si M es un subespacio del espacio normado X, en X/M se considera la seminorma cociente: $\|x + M\| = d(x, M) := \operatorname{ínf}\{\|x - y\| : y \in M\}$; es fácil ver que dicha seminorma es una norma si y sólo si M es cerrado en X).
   b) Sea $\pi_M : X \to X/M$ la proyección. Probar que $\kappa : (X/M)^* \to M^\perp$, dada por $\kappa(\phi) = \phi \circ \pi_M$, es un isomorfismo lineal y un homeomorfismo y que, si X es normado, entonces κ es también una isometría.