

PRÁCTICO 2

1. Se dice que un subconjunto  $D$  de un espacio vectorial topológico  $X$  es un *disco*, o que es absolutamente convexo, si  $aD + bD \subseteq D$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{F}$  tales que  $|a| + |b| \leq 1$ . Mostrar que  $D$  es un disco si y sólo si  $D$  es convexo y equilibrado.
2. Si  $E \neq \emptyset$  es un subconjunto del espacio vectorial  $X$ , su *cápsula o envolvente balanceada*  $E_b$  es la intersección de todos los conjuntos balanceados de  $X$  que contienen a  $E$ .
  - a) Probar que  $E_b = \bigcup_{|\alpha| \leq 1} \alpha E$ .
  - b) Definir y describir la cápsula convexa y balanceada  $E_{cb}$  de  $E$  (sugerencia para la descripción: tener en cuenta la parte anterior y el Ejercicio 3 del Práctico 1).
  - c) Sea  $E := \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ . Hallar  $E_c$ ,  $E_b$ ,  $E_{cb}$ ,  $(E_c)_b$  y  $(E_b)_c$  (aquí  $A_c$  indica la envolvente convexa de  $A$ ).
3. Sea  $X$  un espacio vectorial topológico de Hausdorff. Probar que ningún subespacio no nulo de  $X$  es acotado.
4. Dado un conjunto no vacío  $S$ , se considera en el  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial  $X := \{f : S \rightarrow \mathbb{C}\}$ . Para cada  $s \in S$ , sea  $p_s : S \rightarrow [0, \infty)$  tal que  $p_s(f) := |f(s)|$ . Probar que cada  $p_s$  es una seminorma en  $X$ , y que la convergencia en la topología definida por  $\mathcal{P} := \{p_s : s \in S\}$  en  $X$  es la convergencia punto a punto. Mostrar que  $X$  contiene abiertos acotados no vacíos si y sólo si  $S$  es finito. Hallar condiciones en  $S$  que sean equivalentes a la metrizabilidad y a la normabilidad de  $X$ .
5. Sean  $(X_i)_{i \in I}$  una familia de espacios vectoriales topológicos, y  $X = \prod_{i \in I} X_i$  con la topología producto y las operaciones de suma y producto por escalares definidas punto a punto. Probar que  $X$  es un espacio vectorial topológico con esta estructura, y que  $X$  es localmente convexo si y sólo si cada  $X_i$  lo es.
6. Sean  $\mathcal{P} := \{p_n\}_{n \geq 1}$  una familia separante de seminormas en  $X$ ,  $\tau_{\mathcal{P}}$  la topología definida por  $\mathcal{P}$ , y  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  dada por  $d(x, y) := \sum_{n \geq 1} \frac{p_n(x-y)}{2^n(1+p_n(x-y))}$ ,  $\forall x, y \in X$ . Probar que  $d$  es una métrica en  $X$ , y que  $\tau_{\mathcal{P}} = \tau_d$ , donde  $\tau_d$  es la topología definida por  $d$  en  $X$ .
7. Para  $0 < p < 1$ , sea  $\ell^p := \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{F} / \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty\}$ .
  - a) Mostrar que  $\ell^p$  es un espacio vectorial.
  - b) Probar que  $d : \ell^p \times \ell^p \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n) - y(n)|^p$  es una métrica invariante sobre  $\ell^p$ , con la cual  $\ell^p$  es un  $\mathbb{F}$ -espacio.
  - c) Demostrar que  $\ell^p$  es localmente acotado.
  - d) Probar que  $\ell^p$  no es localmente convexo, y por lo tanto no es de Fréchet.