Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Funcional
Primer semestre 2008

Examen de diciembre de 2008

1. (15 puntos) Supongamos que $T : C_0(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ es una transformación lineal tal que

$$T(xy) = (Tx)y, \forall x, y \in C_0(\mathbb{R}).$$

   Probar que T es un operador acotado.

2. (20 puntos) Sea $T : X \to Y$ un operador acotado entre los espacios de Banach X e Y. Probar que T es una isometría si y sólo si si $T^*(B_{Y^*}) = B_{X^*}$ donde B_{Y^*} e B_{X^*} indican las bolas unidad cerradas de los duales de Y y X, respectivamente.

3. (30 puntos) Sea e_i la sucesión dada por $e_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

   Sea E el espacio vectorial generado por el conjunto $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. E está contenido tanto en ℓ^1 como en ℓ^2.

   a) Sea el mapa lineal $I_{12} : E \subset \ell^1 \to \ell^2$ dado por $I_{12}(e_i) = e_i$ y extendido por linealidad. Probar que el mapa es continuo y se extiende a un mapa lineal inyectivo $\tilde{I}_{12} : \ell^1 \to \ell^2$.

   b) Sea el mapa lineal $I_{21} : E \subset \ell^2 \to \ell^1$ dado por $I_{21}(e_i) = e_i$. Probar que no se puede extender a todo ℓ^2.

   c) Sea ahora el mapa lineal $A : E \subset \ell^2 \to \ell^1$ dado por $A(e_i) = \frac{e_i}{i}$. Probar que este mapa se extiende a todo ℓ^2 y es compacto.

4. (35 puntos) Sea $H := L^2([0, 1], m)$, donde m es la medida de Lebesgue, y para $x \in H$ sea $Ax : [0, 1] \to \mathbb{C}$ definida por $Ax(t) = \int_{t^2}^{\sqrt{t}} x(s)ds$.

   a) Mostrar que el operador $A : H \to H$ tal que $x \mapsto Ax$ es lineal y acotado.

   b) Probar que $Ax \in C([0, 1])$, $\forall x \in H$.

   c) Calcular A^*.

   d) Probar que dado $M > 0$, existen $x \in C^\infty([0, 1])$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $\|x\|_2 = 1$, $|\lambda| > M$, y

$$\sqrt{t}\, x'(t) + 2\lambda t\sqrt{t}\, x(t^2) - \frac{1}{2}\lambda\, x(\sqrt{t}) = 0, \qquad \forall t \in [0, 1].$$

Se recuerda que son compactos los operadores T_k en $L^2([0, 1])$, dados por

$$T_k(f) = \int_{[0,1]} k(x, y)f(y)dy,$$

donde $k \in L^2([0, 1]^2)$.