Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Funcional–Curso 2007

EXAMEN

12 de febrero de 2008

1. Sean E un espacio de Banach y $A = B(E)$ el espacio de operadores acotados en E. Dado $T \in A$, sean L_T y R_T las transformaciones lineales $L_T, R_T : A \to A$ definidas por $L_T(S) = T \circ S$ y $R_T(S) = S \circ T$. Se considera en A una norma $\| \ \|_A$ para la cual A es un espacio de Banach y L_T y R_T son continuas para todo $T \in A$.

   a) Sea $S \in A$. Probar que el conjunto
   $$\{\|L_T(S)\|_A : \|T\|_A \leq 1\}$$
   está acotado.

   b) Probar que $L : A \longrightarrow \mathcal{L}(A, \| \ \|_A)$, dado por $L(T) = L_T$, es un operador acotado.

   c) Probar que el operador L definido en la parte anterior es inyectivo y que su imagen es cerrada. (Sugerencia: observar que $\|T\|_A \leq \|L_T\| \|Id\|_A$.)

   d) Sea $\|T\|_L := \|L_T\|$ para $T \in A$. Probar que $\| \ \|_L$ y $\| \ \|_A$ son equivalentes.

2. Sean H un espacio de Hilbert, X un espacio de Hausdorff compacto y $F := B(H, C(X))$.

   a) Probar que si $\alpha : X \to H$ es w-continua, entonces $\|\alpha\| := \sup_{x\in X} \|\alpha(x)\|$ es finito.

   En adelante se denota por A el espacio normado formado por tales funciones con la norma del supremo.

   b) Dados $\alpha \in A$ y $\eta \in H$, se considera la función $\hat{\alpha}_\eta : X \to \mathbb{C}$ tal que $\hat{\alpha}_\eta(x) := \langle \eta, \alpha(x) \rangle$, $\forall x \in X$. Mostrar que $\hat{\alpha}_\eta \in C(X)$, y que el operador $T_\alpha : H \to C(X)$ dado por $T_\alpha(\eta) := \hat{\alpha}_\eta$ pertenece a F.

   c) Probar que el mapa $\mathsf{T} : A \to F$ tal que $\alpha \overset{\mathsf{T}}{\mapsto} T_\alpha$ es un isomorfismo isométrico, y deducir que A es un espacio de Banach.

3. Sean H un espacio de Hilbert y $C := \{T \in B(H) : \|T\| \leq 1\}$.

   a) Probar que si $S, T \in C$ son tales que $\operatorname{Im} S \perp \operatorname{Im} T$ y $\ker S \supseteq (\ker T)^\perp$, entonces $S + T \in C$.

   b) Deducir que si $T \in C$ no es inyectivo ni de rango denso, entonces $T \notin \operatorname{ext}(C)$.

   c) Probar que si T o T^* es una isometría entonces $T \in \operatorname{ext}(C)$.

   d) Recíprocamente a lo visto en *c)* se puede probar que $\operatorname{ext}(C) = \{T \in B(H) : T \text{ o } T^* \text{ es una isometría}\}$. Usando este hecho, demostrar que si U es un operador invertible tal que U y $U^{-1} \in C$, entonces U es unitario.

Soluciones

1. *a)* $\|L_T(S)\|_A = \|R_S(T)\|_A \leq \|R_S\|$.

   b) Por B-S $\|L_T\| \leq M$ para todo T tal que $\|T\|_A \leq 1$, que implica $\|L\| \leq M$

   c) $[L(T)](Id) = T$ implica inyectividad y $\|T\|_A \leq \|L_T\|\|Id\|_A$.

   d) Lo de arriba y $\|L_T\| \leq \|L\|\|T\|_A$

2. *a)* El conjunto $\alpha(X)$ es w-compacto, y por lo tanto w-acotado, así que es acotado en la norma.

   b) Es claro, pues α es w-continua y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

   c) Para cada $x \in X$, el mapa $H \to \mathbb{C}$ dado por $\eta \mapsto T(\eta)|_x$ es una funcional continua. Por el teorema de Riesz existe un único $\alpha(x) \in H$ tal que $T(\eta)|_x = \langle \eta, \alpha(x)\rangle$, $\forall \eta \in H$. Como $T(\eta) \in C(X)$, se tiene que $x \mapsto \alpha(x)$ es w-continua. Entonces T es sobre. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene $\|T_\alpha\| \leq \|\alpha\|$. Por otra parte, si $\alpha(x) \neq 0$:

   $$\|T_\alpha\| \geq \frac{\|T_\alpha(\alpha(x))\|}{\|\alpha(x)\|} = \sup_{y\in X} \frac{|T_\alpha(\alpha(x))|_y|}{\|\alpha(x)\|} = \sup_{y\in X} \frac{|\langle \alpha(y), \alpha(x)\rangle|}{\|\alpha(x)\|} \geq \|\alpha(x)\|.$$

   Luego $\|T_\alpha\| = \|\alpha\|$, y entonces T es una isometría. Como F es de Banach, también debe serlo A.

3. *a)* Sea $\xi \in H$, $\xi = \eta + \zeta$, con $\eta \in \ker T$ y $\zeta \in (\ker T)^\perp$. Entonces $(S+T)(\xi) = S\eta + T\zeta$. Como $S\eta \perp T\zeta$, se tiene $\|T\xi\|^2 = \|S\eta\|^2 + \|T\zeta\|^2 \leq \|\eta\|^2 + \|\zeta\|^2 = \|\xi\|^2$, de modo que $S + T \in C$.

   b) Se puede tomar $S \neq 0$ tal que T y S están en las hipótesis de (a). Por ejemplo se puede tomar $S = \theta_{\xi,\eta}$ donde $\xi \in \ker T$ y $\eta \in (\operatorname{Im} T)^\perp$ son vectores de norma 1. Entonces por (a) se tiene que $\pm S + T \in C$, de modo que T es el punto medio de $-S + T$ y $S + T$, que son distintos a T; por lo tanto $T \notin \operatorname{ext}(C)$.

   c) Se puede suponer que T es una isometría porque $\operatorname{ext}(C)$ es invariante por la adjunción. Si $T = (1-\lambda)R + \lambda S$, con $\lambda \in (0,1)$, $R, S \in C$, entonces $\|\xi\| = \|T\xi\| = \|((1-\lambda)R + \lambda S)\xi\| \leq (1-\lambda)\|R\xi\| + \lambda\|S\xi\| \leq 1$, $\forall \xi \in H$, de donde R y S también son isometrías. Si $\|\xi\| = 1$, entonces $1 = \langle T\xi, T\xi\rangle \leq (1-\lambda)|\langle R\xi, T\xi\rangle| + \lambda|\langle S\xi, T\xi\rangle| \leq (1-\lambda) + \lambda = 1$, de donde $|\langle R\xi, T\xi\rangle| = 1 = |\langle S\xi, T\xi\rangle|$, de modo que $R\xi = \alpha T\xi$ y $S\xi = \beta T\xi$, para ciertas α, β de módulo 1. Entonces $1 = (1-\lambda)\alpha + \lambda\beta$, y por lo tanto $\alpha = 1 = \beta$. Así que $R = T = S$, y T es extremal.

   d) Si $U = (1-\lambda)R + \lambda S$, con $R, S \in C$, entonces $Id = (1-\lambda)U^{-1}R + \lambda U^{-1}S$, y $U^{-1}R, U^{-1}S \in C$. Pero $Id \in \operatorname{ext}(C)$ (por ejemplo porque Id es una isometría) de modo que $Id = U^{-1}R = U^{-1}S$, o $U = R = S$, y entonces $U \in \operatorname{ext}(C)$. Por lo tanto U (o U^*) es una isometría invertible, y por lo tanto unitario.