

Examen 12/04

Salvo indicación contraria, sólo se pueden usar sin demostración los resultados vistos en el curso teórico. Si se usa un resultado de un ejercicio del práctico debe incluirse la resolución del ejercicio.

1. Sean \mathcal{H} un espacio de Hilbert y \mathcal{B} la bola unitaria cerrada en $\mathbf{B}(\mathcal{H})$.
 - a) Sean $T \in \mathcal{B}$ y $h \in \mathcal{H}$. Probar que $Th = h$ si y sólo si $T^*h = h$.
 - b) Sean $C \subset \mathcal{B}$ un conjunto no vacío tal que $ST \in C$ si $S, T \in C$ y $\mathcal{H}_C = \{h \in \mathcal{H} : Th = h \ \forall T \in C\}$. Probar que \mathcal{H}_C es un subespacio vectorial cerrado de \mathcal{H} , que \mathcal{H}_C^\perp es la clausura del subespacio generado por $\{h - Th : h \in \mathcal{H}, T \in C\}$ y que \mathcal{H}_C y \mathcal{H}_C^\perp son invariantes bajo T para todo $T \in C$.
 - c) Dado $T \in \mathcal{B}$, sea $C = \{T^k : k = 1, 2, \dots\}$. Probar que $\mathcal{H}_C^\perp = \overline{\text{Im}(I - T)}$. Sea $W_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T^k$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que $W_n h \rightarrow Ph$ para todo $h \in \mathcal{H}$, donde P es la proyección ortogonal sobre \mathcal{H}_C .
2. Sean X un espacio de Banach y $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$.
 - a) Sean D un subconjunto denso de S e $y \in X$.
 - 1) Probar que dado $\epsilon > 0$ existe $d \in D$ tal que $\|y - \|y\|d\| < \epsilon$.
 - 2) Probar que existen $a \in l^1$ y una sucesión $\{d_n\}_{n \geq 1}$ en D tales que $y = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)d_n$.
 - b) Demostrar que X es separable si y sólo si existe un subespacio cerrado Y de l^1 tal que $X \cong l^1/Y$ (como espacios de Banach).
3. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert complejo.
 - a) Sean $T_1, T_2 \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ operadores autoadjuntos tales que $T_1 T_2 = 0$. Probar que para todo $\lambda \neq 0$ se tiene que $\ker(T_i - \lambda I) \subset \ker T_j$, si $i \neq j$.
 - b) Sean T_1 y T_2 operadores compactos y positivos tales que $T_1 T_2 = 0$, y sea $T = T_1 - T_2$.
 - 1) Probar que $\|T_i\| \leq \|T\|$ para $i = 1, 2$.
 - 2) Probar que $\|T\| = \text{Máx} \{\|T_1\|, \|T_2\|\}$. (Sugerencia: si $x \in \mathcal{H}$ es un vector propio de T , $\|x\| = 1$ y $\|Tx\| = \|T\|$, probar que x es vector propio de T_1 o de T_2 .)
 - c) Sea $T \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ un operador compacto y autoadjunto. Probar que existen operadores compactos y positivos T_1 y T_2 tales que $T = T_1 - T_2$ y $T_1 T_2 = 0$.