Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Armónico Abstracto–Curso 2022

Lista 3 de ejercicios

1. Sean X un espacio toplógico y $C(X) := \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ es continua}\}$. Para cada subconjunto compacto $K \subseteq X$ y cada abierto $U \subseteq \mathbb{C}$, sea $L(K,U) := \{f \in C(X) : f(K) \subseteq U\}$. La topología τ_{ca} generada por estos conjuntos $L(K,U)$ es la topología compacto/abierto de $C(X)$. Probar que $(C(X), \tau_{ca})$ es un espacio de Hausdorff, y que una red converge en τ_{ca} si y sólo si converge uniformemente sobr subconjuntos compactos de X (DE, Lemma 3.1.2, p. 64).

2. Mostrar que un grupo LCA satisface el segundo axioma de numerabilidad si y solo si su dual lo satisface.

3. Sean G un grupo LCA conexo y $\gamma \in \hat{G}$ tal que $\gamma \neq 1$. Probar que $\gamma(G) = \mathbb{T}$.

4. Sea $G = \mathbb{R}$. En los siguientes casos verificar que la transformada de Fourier de la función dada es la que se exhibe.

   - Para $p, q, \omega \in \mathbb{R}$, con $p \leq q$, se define $f(t) = e^{i\omega x}$ para $p \leq x \leq q$, y $f(x) = 0$ en otro caso. Entonces:
   $$\hat{f}(y) = i\frac{e^{ip(\omega-2\pi y)} - e^{iq(\omega-2\pi y)}}{\omega - 2\pi y}.$$
   - Sean $\omega \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$. Se define $f(x) = e^{(-\beta+i\omega)x}$ para $x \geq 0$, $f(x) = 0$ para $x < 0$. Entonces
   $$\hat{f}(y) = \frac{i}{\omega - 2\pi y + i\beta}$$
   - Para $a > 0$ se define $f(x) = \frac{1}{a}e^{-a|x|}$. Entonces $\hat{f}(y) = \dfrac{2}{4\pi^2 y^2 + a^2}$
   - Sea $f(x) = e^{-x^2/2}$. Entonces $\hat{f}(y) = \sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2 y^2}$ (sea $g(y) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2} - iyx}dx$; verificar que $g'(y) = -yg(y)$, y luego usar que $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$).

5. *Compactificación de Bohr.* Sea G un grupo LCA. Denotamos por $\hat{G}_d$ al grupo $\hat{G}$ con la topología discreta, y por $\bar{G}$ al dual de $\hat{G}_d$. El grupo $\bar{G}$ se conoce como la compactificación de Bohr de G. Sea $\beta : G \to \bar{G}$ el mapa definido como $\beta_t(\gamma) := \gamma(t)$, $\forall t \in G$, $\gamma \in \bar{G}$. Probar que β es un isomorfismo continuo de G sobre un subgrupo denso de $\bar{G}$ (en general $\beta(G)$ no es un subconjunto localmente compacto de $\bar{G}$, y β no es un homeomorfismo).

6. Mostrar que el grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$ es un grupo LCA, y que $\widehat{\mathbb{C}^\times} = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.

7. Sea H un subgrupo del grupo LCA G. Probar que $\bar{H} = H^{\perp\perp}$.

8. Sea Γ un subgrupo de $\hat{G}$ que separa los puntos del grupo LCA G. Probar que Γ es denso en $\hat{G}$ (considerar $\gamma \in \hat{G}/\bar{\Gamma}$).

9. Sea (H_i) una familia de subgrupos cerrados del grupo LCA G. Probar que el ortogonal del subgrupo generado por los H_i es $\cap_i H_i^\perp$, y que el ortogonal de $\cap_i H_i$ es el subgrupo cerrado generado por los $H_i^\perp$.

10.
1. Sea $\phi : G \to H$ un morfismo de grupos LCA. Entonces $\overline{\phi(G)} \leq H$ y $\ker \hat{\phi} \leq \hat{H}$ son cada uno el ortogonal del otro. En particular $\hat{\phi}$ es inyectivo si y sólo si $\phi(G)$ es denso en H.
2. Sean G un grupo LCA y $k \in \mathbb{Z}$. Sean $G^{(k)}$ y $G_{(k)}$ la imagen y el núcleo del morfismo $t \mapsto t^k$ de G en G. Entonces $G_{(k)}$ y la adherencia de $\hat{G}^{(k)}$ son el ortogonal cada uno del otro.

11. Un grupo conmutativo G se dice *divisible* si para todo $t \in G$ y todo $k \in \mathbb{Z}$ existe $s \in G$ tal que $s^k = t$. Sea G un grupo LCA. Probar que

- Si G es divisible, entonces $\hat{G}$ es sin torsión.
- Si $\hat{G}$ es sin torsión y si $k \in \mathbb{Z}$, el conjunto $\{t^k : t \in G\}$ es denso en G.
- Supongamos que G es discreto o compacto. Entonces G es divisible si y solo si $\hat{G}$ es sin torsión.

12. Sea $\mu \in M(G)$ tal que $\hat{\mu} \in L^1(\hat{G})$. Probar que $\mu \in L^1(G)$, es decir, existe $f \in L^1(G)$ tal que $d\mu = f dt$ (sea $(\psi_V) \subseteq I$ una red de Dirac; entonces $\psi_V * \mu \overset{w^*}{\to} \mu$, y $\hat{\psi}_V \hat{\mu} \overset{L^1}{\to} \hat{\mu}$; luego $\psi_V * \mu = \bar{\mathcal{F}}_{\hat{G}}(\mathcal{F}_G(\psi_V * \mu)) \overset{C_0(G)}{\to} \bar{\mathcal{F}}_{\hat{G}}(\hat{\mu})$; por lo tanto $d\mu(t) = \bar{\mathcal{F}}_{\hat{G}}(\hat{\mu})(t)dt$).

13. Sean H un subgrupo del LCA G y $\mu \in M(\hat{G})$. Probar que $\hat{\mu}$ es invariante por traslaciones por elementos de H si y solo si el soporte de μ está contenido en $H^\perp$.

14. *Gelfand-Raikov.* Sea G un grupo LCH. Probar que las representaciones irreducibles separan los puntos de G, utilizando el siguiente teorema válido para C^*-álgebras: si A es una C^*-álgebra, sus representaciones irreducibles separan los puntos de A.

15. Sean K un subgrupo cerrado del grupo LCH G, $\pi : G \to B(H)$ una representación irreducible, y $H^K := \{\xi \in H : \pi(s)\xi = \xi \ \forall s \in H\}$ el subespacio de puntos fijos de π. Mostrar que si K es normal en G, entonces $H^K = H$ o $H^K = 0$.

16. Para cada $t \in \mathbb{R}$ sea $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mostrar que $A(t)$ no es conjugada a una matriz unitaria si $t \neq 0$. Mostrar que la representación (no unitaria) $t \mapsto A(t)$ no es la suma directa de subrepresentaciones. Determinar todas sus subrepresentaciones irreducibles.

17. Siguiendo los siguientes pasos, mostrar que $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ no tiene subrepresentaciones unitarias de dimensión finita excepto la representación trivial.

1. Para $m \in \mathbb{Z}^+$, $t \in \mathbb{R}$, mostrar que $\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m^{-1} \end{pmatrix} A(t) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m^{-1} \end{pmatrix}^{-1} = A(m^2 t) = A(t)^{m^2}$. Sea $\varphi : G \to U(n)$ una representación. Mostrar que los valores propios de $\varphi(A(t))$ son una permutación de sus potencias m-ésimas para cada $m \in \mathbb{Z}^+$. Concluir que tods deben ser iguales a 1.
2. Mostrar que el subgrupo normal de G generado por $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ es todo G.

Para la aprobación del curso: entregar al menos los ejercicios **1**, **6**, **8**, **10**, **12**, **14**, **17** *y dos más.*

Fecha límite: viernes 8 de julio.