Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Armónico Abstracto–Curso 2022

Lista 2 de ejercicios

1. Sea A un álgebra de Banach. Probar que:

a) Si $a_n \to a$, $\alpha_n \in \sigma(a_n)$ y $\alpha_n \to \alpha$, entonces $\alpha \in \sigma(a)$

b) $a \mapsto r(a)$ es una función semicontinua superiormente, es decir: $r^{-1}(-\infty, \alpha)$ es abierto en A, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Si además a es tal que $r(a) = 0$, entonces r es continua en a. ¿Se puede decir algo más cuando A es conmutativa?

2. Sea $A := \{a \in C[0,1] : a' \in C[0,1]\}$ con las operaciones definidas punto a punto y la norma $\|a\| := \|a\|_\infty + \|a'\|_\infty$. Probar que A es un álgebra de Banach conmutativa con unidad, y describir su espectro. Mostrar que la transformada de Gelfand no es isométrica ni sobreyectiva.

3. *Teorema de Wiener.* Supongamos que f es una función 2π-periódica tal que $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$, con $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < \infty$. Mostrar que si $f(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces existen $b_n \in \mathbb{C}$ tales que $\frac{1}{f(x)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{inx}$, con $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |b_n| < \infty$.

4. Probar que si G es un grupo localmente compacto no trivial, entonces $L^1(G)$ no es una C^*-álgebra (sugerencia: sean $V \subseteq G$ un abierto no vacío de medida finita y $f := \sqrt{\Delta_G}(\chi_V - t\chi_V)$, donde $t \in G$ es tal que $V \cap tV = \emptyset$; probar que $\|ff^*\| < \|f\|^2$).

5. Considérese el álgebra de Banach $\ell^1(\mathbb{Z})$ con el producto de convolución. Mostrar que $f^*(n) := \overline{f(n)}$ define una involución en $\ell^1(\mathbb{Z})$ que la convierte en una $*$-álgebra de Banach que no es simétrica.

6. Sean A una *-álgebra de Banach conmutativa, $\hat{A}$ su espacio de Gelfand y $\hat{A}_s := \{h \in \hat{A} : h(a^*) = \overline{h(a)}, \forall a \in A\}$.

a) Probar que $\hat{A}_s$ es un subconjunto cerrado de $\hat{A}$, y que el mapa $A \to C_0(\hat{A}_s)$: $a \mapsto \hat{a}\big|_{\hat{A}_s}$ es un *-homomorfismo de álgebras.

b) Supongamos que X es un espacio de Hausdorff localmente compacto y que $\alpha : X \to X$ es un homeomorfismo tal que $\alpha^2 = id$. Si $a \in A := C_0(X)$ definimos $a^\star \in C_0(X)$ como $a^\star(x) := \overline{a\big(\alpha(x)\big)}$, $\forall x \in X$. Probar que $(A, \star, \|\ \|_\infty)$ es una *-álgebra de Banach. Comparar $\hat{A}$ y $\hat{A}_s$.

7. Supóngase que a y b son elementos normales de dos C^*-álgebras con unidad. Probar que $\sigma(a) = \sigma(b)$ si y sólo si existe un isomorfismo $\Phi : C^*(1, a) \to C^*(1, b)$ tal que $\phi(a) = b$.

8. Sea a un elemento normal de una C^*-álgebra sin unidad A, y sea $C_0(\sigma(a)) := \{f \in C(\sigma(a)) : f(0) = 0\}$.

1. Probar que existe un único homomorfismo de C^*-álgebras $\tau_a : C_0(\sigma(a)) \to A$ tal que $\tau_a(\mathrm{inc}) = a$, donde $\mathrm{inc} : \sigma(a) \hookrightarrow \mathbb{C}$ es la inclusión.
2. Mostrar que τ_a es isométrico y que $\tau_a(C_0(\sigma(a)) \to A) = C^*(a)$, donde $C^*(a)$ es la C^*-subálgebra de A generada por a.

9. Se dice que un elemento autoadjunto a de la C^*-álgebra A es *positivo* si $\sigma(a) \subseteq [0, \infty)$.

1. Mostrar que para todo elemento positivo $a \in A$ y cada $n \in \mathbb{Z}^+$ existe un único elemento positivo $b \in A$ tal que $b^n = a$.
2. Probar que, si $a \in A$ es autoadjunto, existen elementos positivos a_+ y a_- en A, únicos tales que $a = a_+ - a_-$ y $a_+a_- = 0 = a_-a_+$.

10. Sea a un elemento autoadjunto de una C^*-álgebra A con unidad, y sea $f(z) = \sum_{n\geq 0} \beta_n z^n$ una serie de potencias que converge absolutamente para cada $z \in \sigma(a)$. Mostrar que $f(a) = \sum_{n\geq 0} \beta_n a^n$.

Para la aprobación del curso: entregar los ejercicios **3**, **8**, **9** *y al menos dos más.*
Fecha límite: viernes 20 de mayo.