Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Armónico Abstracto–Curso 2022

Lista 1 de ejercicios

1. Se dice que un subconjunto Y de un espacio topolgico X es localmente cerrado en X si existen $A \subseteq X$ abierto y $B \subseteq X$ cerrado tales que $Y = A \cap B$. Probar que si X es un espacio localmente compacto y de Hausdorff e Y es un subsepacio de X, entonces Y es localmente compacto si y sólo si Y es un subconjunto localmente cerrado en X.

2. Sean G un grupo topológico y $\mathcal{N}$ una base local de entornos de e. Probar que para todo $A \subseteq G$ se tiene $\bar{A} = \cap_{V \in \mathcal{N}} VAV$.

3. Sea H un subgrupo de un grupo topológico G. Probar que H es abierto sii $\mathring{H} \neq \emptyset$.

4. Sea $\phi : G_1 \to G_2$ un homomorfismo de grupos entre los grupos topológicos G_1 y G_2. Mostrar que ϕ es continuo si y sólo si es continuo en algún punto.

5. Probar que si G es compacto, entonces todo entorno de e contiene un entorno invariante por conjugación.

6. Sea A un subconjunto conexo del grupo topológico G, que contiene a la unidad de G. Probar que el grupo generado por A es conexo.

7. Sea G^0 la componente conexa de e en el grupo localmente compacto G. Probar que:

a) G^0 es un subgrupo cerrado en G, que también es abierto si G es localmente conexo.

b) G^0 está contenido en cualquier subgrupo abierto de G.

c) G^0 es σ-compacto.

d) G^0 es normal en G.

e) G/G^0 es un espacio totalmente inconexo.

f) Mostrar que si $G = GL_n(\mathbb{R})$, entonces $G^0 = \{a : \det(a) > 0\}$.

8. Supongamos que G es un grupo topológico tal que para todo entorno V de e se tiene $G = \cup_{n\geq 1} V^n$ (por ejemplo G conexo). Probar que si H es un subgrupo discreto de G, entonces H es normal en G sii $H \subseteq Z(G)$.

9. Sea μ una medida de Haar en el grupo localmente compacto G. Probar que las afirmaciones siguientes son equivalentes:

a) Existe $t \in G$ tal que $\mu(\{t\}) > 0$.

b) La medida μ es un múltiplo positivo de la medida de conteo.

c) G es discreto.

10. Probar que un grupo localmente compacto G es compacto sii tiene medida de Haar finita.

11. En los siguientes casos, averiguar si el grupo G es unimodular, y en caso contrario calcular la función modular y las medidas de Haar a izquierda y a derecha: $G = GL_n(\mathbb{R})$. $G = A(n)$ y $G = E(n)$. Recordar que $A(n) = \mathbb{R}^n \rtimes GL_n(\mathbb{R})$ es el grupo afín, y $E(n) = \mathbb{R}^n \rtimes O(n) \leq A(n)$ es el grupo euclidiano (dar la medida de Haar de $E(n)$ en términos de la de $O(n)$, sin calcular esta última).

12. Supongamos que $\chi : G \to (0, \infty)$ es un homomorfismo continuo de grupos.

1. Probar que existe una única medida de Radon en G tal que $\mu(xE) = \chi(x)\mu(E)$ para todo boreliano E de G.
2. Sea H un subgrupo cerrado de G. Probar que existe una medida de Radon ν en G/H tal que $\nu(xF) = \chi(x)\nu(F)$ para todo boreliano F de G/H y todo $x \in G$ si y sólo si para cada $h \in H$ se tiene $\chi(h)\Delta_G(h) = \Delta_H(h)$.

13. Sean H y G grupos localmente compactos, y $\alpha : H \times G \to G$ una acción continua por automorfismos de G. Mostrar que el mapa $H \to \mathbb{R}^+$ dado por $s \mapsto \Gamma(\alpha_s)$ es un homomorfismo continuo de grupos (aquí $\Gamma(\alpha_s)$ es el factor de expansión del automorfismo α_s de G, es decir: $\mu_G(\alpha_s(E))) = \Gamma(\alpha_s)\mu_G(E)$.

Para la aprobación del curso: entregar los ejercicios **4**, **7**, **11** *y al menos otros tres.*
Fecha límite: miércoles 20 de abril.