

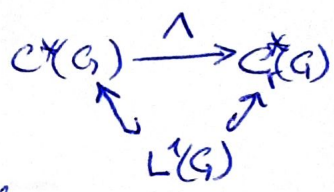
$\text{id} : (L^1(G), \|\cdot\|_u) \rightarrow (L^1(G), \|\cdot\|_r)$ es un hom. continuo de $*$ -álgebras, ya que $\|f\|_u = \sup \{ \|\pi(f)\| : \pi \text{ es rep. de } L^1(G) \}$, y por lo tanto $\|f\|_u \geq \|L_f\|_{B(L^2(G))} =: \|f\|_r$.

Entonces id se extiende por continuidad a un hom. continuo $\Lambda : C^*(G) \rightarrow C_r^*(G)$ de C^* -álgebras. Como tal, Λ tiene imagen cerrada, y como contiene a $L^1(G)$, que es denso en $C_r^*(G)$, concluimos que Λ es sobreyectiva.

Prop: Si G es un ^{grupo} LCA, entonces Λ es un isomorfismo.

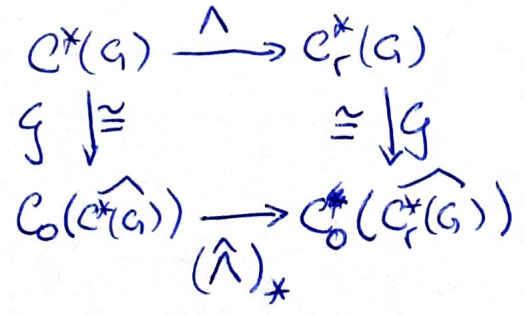
Dem.

El siguiente diagrama es conmutativo:



Y entonces $\begin{array}{ccc} \widehat{C^*(G)} & \xleftarrow{\hat{\Lambda}} & \widehat{C_r^*(G)} \\ \cong \searrow & & \swarrow \cong \\ & \widehat{L^1(G)} & \end{array}$ también lo es.

~~Por~~ En este último triángulo las dos flechas que bajan son homeomorfismos, según vimos, y por lo tanto $\hat{\Lambda}$ también lo es. Luego Λ es un isomorfismo, ya que:



Así que si G es abeliano:

$$C^*(G) \cong C_r^*(G) \cong C_0(\hat{G}).$$

Toda representación $\pi: L^1(G) \rightarrow B(H)$ tiene una extensión continua $\bar{\pi}: C^*(G) \rightarrow B(H)$.

Sea $\gamma \in \hat{G}$, es decir, $\gamma: G \rightarrow B(\mathbb{C})$ es una representación, así que induce $\pi_\gamma: L^1(G) \rightarrow B(\mathbb{C})$, rep. no degenerada.

π_γ está dada por: $\langle \pi_\gamma(f) \xi, \eta \rangle = \int_G \langle \gamma(t) \xi, \eta \rangle f(t) dt$, es

decir $\pi_\gamma(f) \xi \bar{\eta} = \xi \bar{\eta} \int_G f(t) \gamma(t) dt \Rightarrow \pi_\gamma = h_\gamma$.

Sea $\bar{\lambda}: \hat{G} \rightarrow C^*(\hat{G}) / \lambda(\gamma) = \bar{\pi}_\gamma$, la extensión continua de π_γ . Esto es la composición de dos homeomorfismos.

$$\begin{array}{ccc} \hat{G} & \xrightarrow{\lambda} & L^1(\hat{G}) \\ & \searrow & \uparrow h \\ & & C^*(\hat{G}) \end{array}$$

Tenemos:

$$\begin{array}{ccccc} & & G' & \xrightarrow{\quad} & C_0(L^1(\hat{G})) & \xrightarrow{\lambda_*} & C_0(\hat{G}) \\ L^1(G) & \xrightarrow{\quad} & & & & & \\ \downarrow j & & & & \mathcal{F} & \searrow & \\ C^*(G) & \xrightarrow{\quad} & & & C^*(\hat{G}) & \xrightarrow{\bar{\lambda}_*} & C_0(C^*(\hat{G})) \\ & \searrow g & & & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Se } f \in L^1(G): \quad \bar{\lambda}_*(g(f))(\gamma) &= g(f)(\bar{\pi}_\gamma) = (j^\wedge)_* \circ g'(f)(\bar{\pi}_\gamma) \\ &= g'(f)(j^\wedge(\bar{\pi}_\gamma)) \\ &= g'(f)(h_\gamma) \\ &= h_\gamma(f) \\ &= \hat{f}(\gamma) \\ &= \mathcal{F}(f)(\gamma) \\ \Rightarrow \bar{\lambda}_*(g(f)) &= \mathcal{F}(f) \Rightarrow \bar{\lambda}_* \circ g = \mathcal{F} \end{aligned}$$

Así extendimos la transformada de Fourier a $C^*(G)$,
que resulta un isomorfismo $\mathcal{F}: C^*(G) \longrightarrow C_0(\hat{G})$.

Lema: Sean G un ~~grupo~~ ^{LCA (+general: unimodular)}, $f \in L^p(G)$ y $g \in L^q(G)$, $1 < p < \infty$.

Entonces $\exists f * g$, y $f * g \in C_0(G)$ y $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Además $f * f^*(e) = \|f\|_2^2$
dem.

La función $s \mapsto f(s)g(s^{-1}t)$ está en L^1 $\forall t$:

$$\int |f(s)g(s^{-1}t)| ds \leq \|f\|_p \left(\int |g(s^{-1}t)|^q ds \right)^{1/q} = \|f\|_p \|g\|_q.$$

Entonces existe $f * g(t) \forall t$, y $|f * g(t)| \leq \|f\|_p \|g\|_q \forall t$,

de manera que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Entonces si $(f_n), (g_n) \in C_c(G)$ son tales que $f_n \xrightarrow{L^p} f$ y $g_n \xrightarrow{L^q} g$, entonces $f_n * g_n \in C_c(G) \forall n$, y

$$\begin{aligned} \|f * g - f_n * g_n\|_\infty &\leq \|f * (g - g_n)\|_\infty + \|(f - f_n) * g_n\|_\infty \\ &\leq \|f\|_p \|g - g_n\|_q + \|f - f_n\|_p \|g_n\|_q \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 $\|g\|_q$

Entonces $f * g \in C_0(G)$. #

$$f * f^*(e) = \int_G f(s) \overline{f(s^{-1})} ds = \int_G f(s) \overline{f(s)} ds = \|f\|_2^2 \quad \#$$

Sea G un grupo LCA.

Lema: Si $f \in L^1(G)$ y $g \in L^p(G)$, con $1 \leq p < \infty$, entonces $f * g \in L^p(G)$, y $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

dem.

Si $p=1$ ya lo sabemos, así que supongamos $1 < p < \infty$.

Sea $h \in L^q(G)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se tiene:

$$\begin{aligned} \int_G \int_G |f(s) g(s^{-1}t) h(t)| ds dt &\stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_G |f(s)| \int_G |L_s g(t)| |h(t)| dt ds \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \int_G |f(s)| \|L_s g\|_p \|h\|_q ds \\ &\stackrel{L_s \text{ es isometría en } L^p(G)}{=} \|f\|_1 \|g\|_p \|h\|_q < \infty. \end{aligned}$$

luego:

$$\int_G |f * g(t) h(t)| dt \leq \int_G \int_G |f(s) g(s^{-1}t) h(t)| ds dt \leq \|f\|_1 \|g\|_p \|h\|_q < \infty \quad \forall h \in L^q(G).$$

Entonces $L^q(G) \rightarrow \mathbb{C} / h \mapsto \int_G f * g(t) h(t) dt$ es una funcional lineal que tiene norma $\leq \|f\|_1 \|g\|_p$, o sea que es continua. Luego $\exists! k \in L^p(G) /$ esta funcional es igual a $h \mapsto \int_G k(t) h(t) dt$ (Riesz para los L^p). Pero entonces $k = f * g$ ctp, y por lo tanto $f * g \in L^p$; como además la norma p de k coincide con la norma de la funcional, y esta está acotada por $\|f\|_1 \|g\|_p$, concluimos que $\|k\|_p = \|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

#

Cordaro: Sea G un grupo LCH unimodular. Entonces

$L^1(G) \cap L^p(G)$ es un $*$ -ideal denso en $L^1(G)$, $\forall p \in [1, \infty)$.

dem.

Por el lema anterior, $L^1(G) \cap L^p(G)$ es un ideal izquierdo de $L^1(G)$. Como $C_c(G) \subseteq L^1(G) \cap L^p(G)$, $L^1(G) \cap L^p(G)$ es denso en $L^1(G)$. Como $C_c(G) \subseteq L^1(G) \cap L^p(G)$, $L^1(G) \cap L^p(G)$ es denso en $L^1(G)$, ya que $C_c(G)$ lo es. Por otro lado, como G es unimodular, se tiene $f \in L^p(G) \Leftrightarrow f^* \in L^p(G)$:

$$\begin{aligned} \|f^*\|_p^p &= \int_G |f^*(t)|^p dt = \int_G |\Delta(t^{-1}) \overline{f(t^{-1})}|^p dt = \int_G \Delta(t^{-1})^p |f(t^{-1})|^p dt \\ &= \int_G \Delta(t^{-1}) \Delta(t)^p |f(t)|^p dt = \int_G \Delta(t)^{p-1} |f(t)|^p dt = \|f\|_p^p \end{aligned}$$

$\uparrow \Delta(t) = 1 \quad \forall t.$

Entonces $L^1(G) \cap L^p(G)$ es un ideal izquierdo cerrado por $*$, así que es un ideal derecho también (si $f \in L^1(G)$, $g \in L^1(G) \cap L^p(G)$, entonces $g * f = [(g * f)^*]^* = (f^* * g^*)^* \in [L^1(G) \cap L^p(G)]^* = L^1(G) \cap L^p(G)$). $\#$

Sea $I := \text{span} \{f * g : f, g \in L^1(G) \cap L^2(G)\}.$

Como $L^1(G) \cap L^2(G)$ es un $*$ -ideal de $L^1(G)$, I también lo es. Además $I \subseteq L^2(G) * L^2(G) \subseteq C_0(G)$, y contiene a $C_c(G) * C_c(G)$, lo que implica que I es denso en $C_0(G)$, en $L^1(G)$ y en $L^2(G)$.

(Si $f \in C_c(G)$ y δ_v es una red de Dirac, entonces $\delta_v * f \xrightarrow{v} f$ uniformemente)

Lema: Sea G un LCA.

(a) Si (φ_v) es una red de Dirac para G , entonces

$\hat{\varphi}_v \rightarrow 1$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\hat{G}$.

(b) Si $\psi_v := \varphi_v * \varphi_v$, entonces (ψ_v) es una red de Dirac contenida en I .

dem.

(a) Sea W un entorno compacto de $e \in G$, y sea $V_0 \in \mathcal{N}_e$ / $V_0 \subseteq W$. Como

$$\int_G \varphi_v(t) f(t) dt \rightarrow f(e) = \int_G f d\delta_e,$$

veamos que $\varphi_v dt \xrightarrow{W^*} \delta_e$. Luego la restricción de estas medidas a $C(W)$ cumplen lo mismo: $\varphi_v dt \xrightarrow{W^*} \delta_e$ en $C(W)^* = M(W)$. Luego $\varphi_v dt \rightarrow \delta_e$ uniformemente en subconjuntos ~~de~~ compactos de $C(W)$.

Sea ahora $K \subseteq \hat{G}$ compacto, y sea $K' := \{\bar{\delta}|_W : \delta \in K\} \subseteq C(W)$.

Este mapa es continuo: si $\delta_i \rightarrow \delta$ en $\hat{G} \Rightarrow \bar{\delta}_i \rightarrow \bar{\delta}$ uniformemente sobre W , y por lo tanto $\bar{\delta}_i|_W \rightarrow \bar{\delta}|_W$ en $C(W)$.

Luego K' es compacto en $C(W)$, y por lo tanto dado

$\varepsilon > 0$ $\exists V_\varepsilon$ / $\forall \delta \in K$ se tiene, ~~para~~ $\forall V \subseteq V_\varepsilon$, que:

$$\left| \int_G \varphi_v(t) \bar{\delta}|_W(t) - \int_W \bar{\delta} d\delta_e \right| < \varepsilon, \text{ es decir}$$

$$|\hat{\varphi}_v(\delta) - \bar{\delta}(e)| < \varepsilon \quad \forall \delta \in K \text{ y } \forall V \subseteq V_0 \cap V_\varepsilon$$

Pero $\bar{\delta}(e) = 1 \quad \forall \delta \in \hat{G}$. *

$$(b) \sup \psi_v \subseteq (\sup \psi_v)^2 \subseteq V^2.$$

$$\psi_v(t) = \varphi_v * \varphi_v(t) = \int_G \varphi_v(s) \varphi_v(s^{-1}t) ds \geq 0 \quad \forall t.$$

$$\begin{aligned} \int_G \psi_v(t) dt &= \int_G \int_G \varphi_v(s) \varphi_v(s^{-1}t) ds dt = \int_G \int_G \varphi_v(s) \varphi_v(s^{-1}t) dt ds \\ &= \left(\int_G \varphi_v(s) ds \right) \left(\int_G \varphi_v(t) dt \right) = 1^2 = 1. \end{aligned}$$

$$\varphi_v \in L^1 \cap L^2 \Rightarrow \psi_v \in I \quad \#$$

Por el lema (de la pág 4) tenemos que $\mathcal{I}_g(g) = f * g = g * f$ (ya que G es abeliano). Entendemos la notación para elementos de $C^*(G) = C_r^*(G)$, poniendo $a * g := g * a := a(g)$, $\forall g \in L^2(G)$, $a \in C^*(G)$. Una aplicación rutinaria de

Tonelli - Fubini muestra que $(a * g) * b = a * (g * b)$ $\forall a, b \in L^1(G)$, $g \in L^2(G)$. Por otro lado, estas son aplicaciones (fijado $g \in L^2(G)$) continuas $C^*(G) \times C^*(G) \rightarrow L^2(G)$:

$$\begin{aligned} \| (a * g) * b \|_2 &\leq \| a * g \|_2 \| b \|_2 \leq \| a \|_{C^*(G)} \| g \|_{C^*(G)} \| b \|_{C^*(G)} \\ \| a * (g * b) \|_2 &\leq \| a \|_{C^*(G)} \| g * b \|_2 \leq \| a \|_{C^*(G)} \| g \|_{C^*(G)} \| b \|_2 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} (a, b) \mapsto (a * g) * b \\ (a, b) \mapsto a * (g * b) \end{array} \right.$$

luego se tiene $(a * g) * b = a * (g * b) \quad \forall a, b \in C^*(G), g \in L^2(G).$

Lema: Sea $f \in I$. Entonces:

$$(i) a(f) (= a * f) \in C_0(G) \quad \forall a \in C^*(G).$$

$$(ii) \exists! \mu_f \in M(\hat{G}) / a(f)(e) = \int \mathcal{F}(a)(\gamma) d\mu_f(\gamma), \quad \forall a \in C^*(G).$$

$$(iii) \text{ Si } g \in I \Rightarrow \mathcal{F}(f)\mu_g = \mathcal{F}(g)\mu_f.$$

dem.

(i) Basta probarlo para $f = g * h$, con $g, h \in L^1(G) \cap L^2(G)$.
 En ese caso es $a(f) = a * (g * h) = (a * g) * h$ (pues $h \in L^1(G)$),
 que está en $C_0(G)$ porque $a * g \in L^2(G) \otimes h$, acudiendo
 al lema (pág 3). Y se tiene $\|a(f)\|_\infty \leq \|a\| \|g\|_2 \|h\|_2$.

(ii) Sea $C_0(\hat{G}) \rightarrow \mathbb{C}$ mapa dado por

$$\text{Sustituyendo } \mathcal{F}(a) \longmapsto a(f)(e), \quad \forall a \in C^*(G).$$

Sustituyendo f por $g * h$, $g, h \in L^1(G) \cap L^2(G)$, se tiene:

$$\begin{aligned} |a(g * h)(e)| &= |a(g) * h(e)| \leq \|a(g) * h\|_\infty \leq \|a(g)\|_2 \|h\|_2 \\ &\leq \|a\| \|g\|_2 \|h\|_2 = \|\mathcal{F}(a)\|_\infty \|g\|_2 \|h\|_2. \end{aligned}$$

luego la funcional dada es continua, así que

$$\exists! \mu_f \in M(\hat{G}) / a(f)(e) = \int_{\hat{G}} \mathcal{F}(a)(\gamma) d\mu_f(\gamma), \quad \forall a \in C^*(G).$$

(iii) Sean $f, g \in I$. Se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f) \mu_g(\mathcal{F}(a)) &= \int_{\hat{G}} \mathcal{F}(a) \mathcal{F}(f) d\mu_g = \int_{\hat{G}} \mathcal{F}(a(f)) d\mu_g \\ &= a(f) * g(e) \\ &= a(f * g)(e) \\ &= a(g * f)(e) \\ &= \mathcal{F}(g) \mu_f(\mathcal{F}(a)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{F}(f) \mu_g = \mathcal{F}(g) \mu_f$, $\forall f, g \in I$. #

Teorema (Plancherel)

Dada una medida de Haar en el grupo LCA G , existe una única medida de Haar en $\hat{G}$ (que se llama medida de Plancherel), tal que $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2 \quad \forall f \in L^1(G) \cap L^2(G)$.

Además la extensión continua de $f \mapsto \hat{f}$ de $L^1(G) \cap L^2(G)$ a $L^2(G)$ es un isomorfismo de espacios de Hilbert entre $L^2(G)$ y $L^2(\hat{G})$.

dem.

Dada $f \in I$, sea $\Omega_f := \{x \in \hat{G} \mid \hat{f}(x) \neq 0\}$. Como $\mathcal{F}(I)$ es una $*$ -subálgebra densa de $C_0(\hat{G})$, $\{\Omega_f \mid f \in I\}$ es un cubrimiento abierto de $\hat{G}$. Luego si $\psi \in C_c(\hat{G})$, existen $f_1, \dots, f_n \in I$ tales que $\text{supp } \psi \subseteq \Omega_{f_1} \cup \dots \cup \Omega_{f_n}$. Entonces $\text{supp } \psi \subseteq \Omega_f$, donde $f = \sum_{i=1}^n f_i * f_i^*$, pues $\hat{f} = \sum_{i=1}^n |\hat{f}_i|^2$. (*)

Supongamos que $f, g \in I$ son tales que $\text{supp } \psi \subseteq \Omega_f \cap \Omega_g$.

Se tiene entonces que $\frac{1}{\hat{f}} \psi \in C_c(\Omega_f)$, y $\frac{1}{\hat{g}} \psi \in C_c(\Omega_g)$.

$$\text{Además: } \int_{\Omega_f} \psi(x) \frac{1}{\hat{f}(x)} d\mu_f(x) = \int_{\Omega_f \cap \Omega_g} \psi(x) \frac{1}{\hat{f}(x)} d\mu_g(x) = \int_{\Omega_g} \psi(x) \frac{1}{\hat{f}(x)\hat{g}(x)} d\mu_g(x). \quad (†)$$

Entonces se puede definir $v: C_c(\hat{G}) \rightarrow \mathbb{C} \mid v(\psi) = \int_{\Omega_g} \psi(x) / \hat{f}(x) d\mu_g(x)$, donde $f \in I \mid \text{supp } \psi \subseteq \Omega_f$.

De acuerdo a (†) v está definida, y es obviamente lineal.

Además v es positiva, porque si f es como en (*), y $\psi \geq 0$, entonces $\frac{1}{\hat{f}} \psi$ el primer miembro de las igualdades anteriores es positivo. Veamos ahora que v es invariante.

Unas observaciones previas:

- Si $f \in L^p(\hat{G})$ y $\gamma \in \hat{G} \Rightarrow \gamma f \in L^p(\hat{G})$, y $\|\gamma f\|_p = \|f\|_p$.
- En consecuencia $f \in I \iff \gamma f \in I \forall \gamma \in \hat{G}$.
- Si $f_1, f_2 \in L^1(G)$, ~~$\gamma \in \hat{G}$~~ $\gamma \in \hat{G}$, entonces $\gamma f_1 * \gamma f_2 = \gamma \cdot (f_1 * f_2)$.

$$\begin{aligned} \gamma f_1 * \gamma f_2(t) &= \int_G \gamma(s) f_1(s) \gamma(s^{-1}t) f_2(s^{-1}t) ds \\ &= \gamma(t) f_1 * f_2(t) = \gamma \cdot (f_1 * f_2)(t) \end{aligned}$$

Entonces, si $f, g \in I$, $\gamma \in \hat{G}$ se tiene, por un lado:

$$\begin{aligned} \int_{\hat{G}} L_{\gamma}(\hat{f}\hat{g}) d\nu &= \int_{\hat{G}} L_{\gamma}(\hat{f}) L_{\gamma}(\hat{g}) d\nu = \int_{\hat{G}} \gamma \hat{f} \gamma \hat{g} d\nu = \int_{\hat{G}} \gamma \hat{f} d\mu_{\gamma g} = \gamma f * \gamma g(e) \\ &= \gamma \cdot (f * g)(e) = \gamma(e) f * g(e) = f * g(e) = \int_{\hat{G}} \hat{f} d\mu_g \end{aligned}$$

Por otro:

$$\int_{\hat{G}} L_{\gamma}(\hat{f}\hat{g}) d\nu = \int_{\hat{G}} L_{\gamma}(\hat{f}) \gamma \hat{g} d\nu = \int_{\hat{G}} L_{\gamma}(\hat{f}) d\mu_{\gamma g} = \int_{\hat{G}} \hat{f} dL_{\gamma^{-1}}(\mu_{\gamma g})$$

luego $\int_{\hat{G}} \hat{f} d\mu_g = \int_{\hat{G}} \hat{f} dL_{\gamma^{-1}}(\mu_{\gamma g}) \quad \forall f \in L^1(G)$, y por lo

tanto $\mu_g = L_{\gamma^{-1}}(\mu_{\gamma g})$, $\forall g \in I$, $\gamma \in \hat{G}$.

Ahora, dada $\psi \in C_c(\hat{G})$, sea $f = \sum_{i=1}^N f_i * f_i^* \in I$ / $\text{supp } \psi \subseteq \Omega_f$.

Entonces:

$$\int_{\hat{G}} \psi(\gamma) d\nu = \int_{\hat{G}} \psi(\gamma) \hat{f} d\mu_f$$

$$\begin{aligned} \int_{\hat{G}} \psi d\nu &= \int_{\hat{G}} \psi \frac{1}{\hat{f}} d\mu_f = \int_{\hat{G}} \psi \frac{1}{\hat{f}} dL_{\gamma^{-1}}(\mu_{\gamma f}) = \int_{\hat{G}} \psi(\gamma) \frac{1}{L_{\gamma}(\hat{f})} d\mu_{\gamma f} \\ &= \int_{\hat{G}} L_{\gamma}(\psi) \frac{1}{\hat{f}} \gamma \hat{f} d\nu = \int_{\hat{G}} L_{\gamma}(\psi) d\nu. \end{aligned}$$

Entonces ν es una medida de Haar en $\hat{G}$.

Ahora, si $f \in I$:

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 &= \int_{\hat{G}} f(x) \hat{f}^*(x) d\nu(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(x) d\mu_{f^*}(x) = f * f^*(e) \\ &= \int_G f(s) f^*(s^{-1}) ds = \int_G f(s) \overline{f(s)} ds = \|f\|_2^2.\end{aligned}$$

Luego $\mathcal{F}: I \rightarrow L^2(\hat{G})$ es isométrica, y por lo tanto se extiende a una isometría en la clausura de I en $L^2(G)$, es decir, obtenemos un mapa isométrico $\Phi: L^2(G) \rightarrow L^2(\hat{G})$.

Queremos ver ahora que Φ es sobreyectivo, para lo cual basta mostrar que $\overline{\Phi(I)} = L^2(\hat{G})$. Esto equivale a mostrar que $h \perp \Phi(I) \Rightarrow h = 0$.

Sean $f, g \in I$. Se tiene:

$$0 = \langle \hat{f} * g, h \rangle = \langle \hat{f} \hat{g}, h \rangle = \langle \hat{f} \hat{g}, \hat{h} \rangle = \int_{\hat{G}} \hat{f}(x) [\hat{g}(x) h(x)] d\nu(x).$$

Esto implica que la medida $\hat{g} h \nu$ se anula en $\mathcal{F}(I)$ (notar que $\hat{g} h \in L^1(\hat{G})$), que es denso en $C_0(\hat{G})$. Por lo tanto $\hat{g} h = 0$ ν -c.p. Reemplazando g por $g * g^*$ se obtiene $\|\hat{g}\|^2 h = 0$, de modo que $h = 0$ ν -c.p. sobre π_g . Como los π_g cubren $\hat{G}$, entonces $h = 0$ ν -c.p.

Falta probar, por último, que $\hat{f} \in L^2(\hat{G})$ para toda $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$.

Sea (ψ_v) una red de Dirac contenida en I .

Por un lado $\hat{f}_v = \psi_v * f \rightarrow f$ en $L^1(G)$, y por lo tanto

$$\hat{f} = \lim_v \widehat{\psi_v * f} \text{ en } C_0(\hat{G}).$$

Por otro lado, $\psi_v * f \xrightarrow{EI} f$ en $L^2(G)$, de modo que

$$\Phi(f) = \lim_v \Phi(\psi_v * f) = \lim_v \widehat{\psi_v * f} \text{ en } L^2(\hat{G}).$$

Sea $\eta \in C_c(\hat{G})$. Se tiene $\|(\hat{f} - \Phi(f))\eta\| \leq \|(\hat{f} - \hat{f}_v) + (\Phi(\hat{f}_v) - \Phi(f))\| \|\eta\|$

Cuando $\hat{f}_v \rightarrow \hat{f}$ uniformemente y $\Phi(\hat{f}_v) \rightarrow \Phi(f)$ en L^2 ,

dado $\varepsilon > 0 \exists V_0$ / $\|\hat{f} - \hat{f}_v\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2+2\|\eta\|_1}$ y $\|\Phi(\hat{f}_v) - \Phi(f)\|_2 < \frac{\varepsilon}{2+2\|\eta\|_2}$

$\forall v \in V_0$. Luego, si $v \in V_0$:

$$\int_{\hat{G}} |(\hat{f} - \Phi(f))(\gamma) \eta(\gamma)| d\gamma \leq \int_{\hat{G}} |\hat{f}(\gamma) - \hat{f}_v(\gamma)| |\eta(\gamma)| d\gamma + \int_{\hat{G}} |\Phi(\hat{f}_v)(\gamma) - \Phi(f)(\gamma)| |\eta(\gamma)| d\gamma$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2+2\|\eta\|_1} \int_{\hat{G}} |\eta(\gamma)| d\gamma + \langle |\Phi(\hat{f}_v) - \Phi(f)|, |\eta| \rangle_{L^2(\hat{G})}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|\Phi(\hat{f}_v) - \Phi(f)\|_2 \|\eta\|_2$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ y esto es } \forall \varepsilon > 0.$$

~~Entonces $\int_{\hat{G}} (\hat{f} - \Phi(f)) \eta d\gamma = 0$ es consecuencia de $\|\hat{f} - \Phi(f)\| \leq \varepsilon$, así que se obtiene~~

Entonces $\hat{f}\eta = \Phi(f)\eta = 0$ v-cdp $\forall \eta \in C_c(\hat{G})$.

Si $\Delta = \{\gamma / \hat{f}(\gamma) \neq \Phi(f)(\gamma)\}$ tiene medida positiva, la regularidad de $\hat{f}$ implicaría que $(\hat{f} - \Phi(f))\eta \neq 0$ v-cdp para alguna $\eta \in C_c(\hat{G})^+$. #