INTRODUCCIÓN A LA TOPOLOGÍA

Guía teórico-práctica

Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

14 de julio de 2016

Estas notas son una guía del curso *Introducción a la Topología* en la modalidad teórico-práctica. Fueron elaboradas para el curso en el 2016 a cargo de Diego Armentano y Emiliano Sequeira.

La mayoría de los contenidos fueron elaborados en 2016, pero se basaron en material de cursos anteriores de Alvaro Rovella y Alejandro Passeggi.

Los ejercicios están numerados por capítulos.

Los ejercicios que están notados con * tienen cierta dificultad y se sugiere complementar con bibliografía para resolverlos.

Nota sobre modalidad teórico-práctica:
Los ejercicios fueron abordados durante el curso por los estudiantes con la colaboración de los docentes del curso. El pizarrón fue utilizado para discutir algunos ejercicios particulares, para motivar algunas definiciones, y para realzar algunas pruebas de teoremas o resultados que presentaban dificultades o ideas nuevas que estuvieran fuera del alcance de los estudiantes.

Bibliografía

- ◇ J. Munkres – "Topology"
- ◇ K. Jänich – "Topology"
- ◇ A. Hatcher – "Notes on Introductory Point-Set Topology"
- ◇ B. Abadie – "Introducción a la Topología"
- ◇ O. Viro, Ivanov, etal. – "Elementary Topology Problem Textbook"
- ◇ E. Lages Lima – "Espacios Métricos"

Índice general

Capítulo 1

CONJUNTOS

Comenzaremos este capítulo haciendo un breve repaso sobre teoría de conjuntos y funciones.

1.1. Funciones

En las siguientes lineas vamos a repasar las definiciones básicas asociadas a una función.

Definiciones. ⋄ Una *función* $f : A \to B$ entre dos conjuntos A y B, es un subconjunto de $A \times B$ que verifica que para todo $a \in A$, existe un único $b \in B$ tal que (a, b) pertenece al subconjunto. En tal caso b lo denotamos por $f(a)$.

⋄ El *gráfico* de f se define por $\mathrm{G}(f) := \{(a, b) :\ b = f(a)\}$. (Observar que estamos abusando notación dado que formalmente la función f es $\mathrm{G}(f)$.)

⋄ La *imagen* de f se define como el subconjunto de B definido por

$$\mathrm{Im}(f) := \{b \in B :\ \exists\, a \in A, f(a) = b\}.$$

⋄ Si $A' \subset A$, definimos la *restricción de f a A'* como la función $f|_{A'} : A' \to B$ que coincide con f en A', i.e., $f|_{A'}(a') = f(a')$ para todo $a' \in A'$.

⋄ Si $A' \subset A$, definimos $f(A') := \mathrm{Im}(f|_{A'}) \subset B$.

⋄ Si $B' \subset B$, definimos la *imagen inversa de B por f* como el subconjunto de A definido por

$$f^{-1}(B') := \{a \in A :\ f(a) \in B'\}.$$

⋄ Decimos que $f : A \to B$ es *inyectiva* si siempre que $a \neq a'$ en A, se tiene $f(a) \neq f(a')$.

- ◇ Decimos que $f : A \to B$ es *sobreyectiva* si para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.
- ◇ Decimos que $f : A \to B$ es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.
- ◇ Dadas $f : A \to B'$, y $g : B \to C$, donde $B' \subset B$, definimos la *composición* de f y g a la función $g \circ f : A \to C$ definida por $(g \circ f)(a) := g(f(a))$, $a \in A$.
- ◇ Dado un conjunto A definimos la función *identidad* $\mathrm{id}_A : A \to A$ como la función que satisface $\mathrm{id}_A(a) = a$ para todo $a \in A$.
- ◇ Dada $f : A \to B$ biyectiva, entonces definimos la *inversa* de f como la función $f^{-1} : B \to A$, tal que $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$. (Observar que también vale $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B$).

1.1. Si I es un conjunto y A_α es un conjunto para cada $\alpha \in I$, entonces: $(\bigcup A_\alpha)^c = \bigcap A_\alpha^c$ y $(\bigcap A_\alpha)^c = \bigcup A_\alpha^c$.

1.2. Sea $f : X \to Y$ una función, $A \subset X$, $B \subset Y$, $\{A_\alpha\}$ una colección de subconjuntos de X y $\{B_\alpha\}$ una colección de subconjuntos de Y.

a) Tomar preimágenes preserva las operaciones con conjuntos:

- $f^{-1}(\bigcup B_\alpha) = \bigcup f^{-1}(B_\alpha)$
- $f^{-1}(\bigcap B_\alpha) = \bigcap f^{-1}(B_\alpha)$
- $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

b) En el caso de las imágenes se tiene:

- $f(\bigcup A_\alpha) = \bigcup f(A_\alpha)$
- $f(\bigcap A_\alpha) \subset \bigcap f(A_\alpha)$.

Mostrar que la inclusión puede ser estricta e investigar bajo qué hipótesis sobre la f la inclusión es siempre una igualdad. Comparar $f(A^c)$ con $[f(A)]^c$.

c) Probar que $f^{-1}(f(A)) \supset A$ y que $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Mostrar que las inclusiones pueden ser estrictas y averiguar cuándo vale la igualdad.

1.3. Si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de subconjuntos de X, entonces defina el límite superior:

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k$$

y el límite inferior:

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{k \geq n} A_k$$

Probar que

a) $\bigcap_n A_n \subset \liminf A_n \subset \limsup A_n \subset \bigcup_n A_n$.

b) Si A_n es una sucesión creciente de conjuntos, entonces $\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcup A_n$. Si es decreciente, entonces $\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcap A_n$

c) Se tiene $x \in \limsup A_n$ si y sólo si x pertenece a infinitos A_n. Además $x \in \liminf A_n$ si y sólo si x pertenece a todos salvo una cantidad finita de los A_n.

d) Sea $\{a_n : n \geq 0\}$ una sucesión de números reales. Sea $A_n = (-\infty, a_n)$. Qué dan el límite superior y el límite inferior de los conjuntos A_n? Repetir el ejercicio para $A'_n = (-\infty, a_n]$ y para $B_n = (a_n, +\infty)$

1.2. Relaciones de Equivalencia.

Definiciones. $\diamond$ Una *relación* en X es un subconjunto del producto cartesiano $X \times X$. Dada una relación $\mathcal{R} \subset X \times X$ escribiremos $x\mathcal{R}y$ cuando $(x, y) \in \mathcal{R}$.

$\diamond$ Una *relación de equivalencia* en X es una relación $\mathcal{R}$ que cumple con las siguientes propiedades:

a) $x\mathcal{R}x$ para todo $x \in X$ (reflexiva)
b) $x\mathcal{R}y$ implica $y\mathcal{R}x$ (simétrica)
c) $x\mathcal{R}y$ y $y\mathcal{R}z$ implica $x\mathcal{R}z$ (transitiva)

Para notar las relaciones de equivalencia suelen usarse símbolos como $\sim$, $\equiv$, $\cong$ o $\approx$.

Ejemplo 1.2.1. Dado un entero no nulo n, definimos en $\mathbb{Z}$ la relación $\equiv_n$ por $a \equiv_n b$ si y sólo si $a - b$ es múltiplo de n. Es sencillo probar que se trata de una relación de equivalencia. La denominamos *congruencia módulo* n.

Definición. Consideremos una relación de equivalencia $\sim$ en X. La *clase de equivalencia* de un elemento $x_0 \in X$, se define como el subconjunto de X formado por

$$[x_0] := \{x \in X : x \sim x_0\}.$$

Al conjunto formado por las clases de equivalencia $\{[x] : x \in X\}$ se denomina *conjunto cociente.*

1.4. Describir $\mathbb{Z}_n$, el conjunto cociente de la congruencia módulo n.

1.5. En $\mathbb{R}$ diremos que $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Z}$. Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia. Interpretar geométricamente el conjunto cociente. ¿Qué sucede si consideramos la misma relación de equivalencia cambiando $\mathbb{R}$ por $\mathbb{Z}$?

1.6. * En $\mathbb{R}^2$ ponemos la siguiente relación: $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ si y sólo si $(x_1, x_2) - (y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^2$. Al conjunto cociente se le denomina *toro* 2-dimensional $\mathbb{T}^2$. Observar que $\mathbb{T}^2$ puede ser identificado con la superficie de la "dona".

1.7. * El toro también puede obenerse identificando los lados opuestos de un rectángulo. Encontrar la relación de equivalencia adecuada en el rectángulo de forma tal que el cociente sea el toro. Pensar de qué forma podríamos obtener otras superficies (bitoro, tritoro, etc) como cociente de un polígono por una relación de equivalencia que identifique pares de lados.

1.8. (Plano proyectivo) En $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ ponemos la siguiente relación: $x \sim y$ si y sólo si existe $\lambda \neq 0$ tal que $x = \lambda y$. Probar que es una relación de equivalencia, y describir geométricamente el conjunto de clases de equivalencia. El conjunto cociente se denomina *plano proyectivo real* y se nota $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, o $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$.

Si X es un conjunto, $\mathcal{P}(X)$ denota el conjunto de todos los subconjuntos de X.

Definición. Una *partición* en un conjunto X es una familia de subconjuntos $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ que cumple:

a) $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X$.

b) $A \bigcap B = \emptyset \; \forall A, B \in \mathcal{A}$.

1.9. El conjunto cociente de una relación de equivalencia en X es siempre una partición de X y que para toda partición en X existe una relación de equivalencia cuyo cociente es dicha partición.

1.3. Relaciones de Orden

Definición. Un *orden*, también dicho *orden parcial*, es una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto X que cumple dos propiedades:

a) $x\mathcal{R}y$ y $y\mathcal{R}z$ implica $x\mathcal{R}z$ (transitiva)

b) $x\mathcal{R}y$ y $y\mathcal{R}x$ implica $x = y$ (antisimétrica)

Ejemplo 1.3.1. Si Z es un conjunto cualquiera y $\mathcal{P}(Z)$ denota al conjunto de los subconjuntos de Z Se define $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(Z) \times \mathcal{P}(Z)$ como $A\mathcal{R}B$ si y sólo si $A \subset B$. Notar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden parcial.

Ejemplo 1.3.2. Sea $X = \{1, \ldots, n\}$ con la relación $\mathcal{R} = X \times X$. No es de orden.

Definición. Una relación es de orden *total* si dados x e y, dos elementos distintos de X, se cumple que $x\mathcal{R}y$ o $y\mathcal{R}x$. Notar que en el ejemplo anterior (de la inclusión) el orden no es total.

En general se usa una notación más sugestiva: se escribe por ejemplo $x \succ y$. Entonces suele ponerse $(X, \succ)$ para determinar que se ha considerado en X el orden $\succ$, y se llama al par $(X, \succ)$ un conjunto ordenado. En los reales $\mathbb{R}$ se tienen los órdenes usuales $\leq$, $<$, $\geq$, $>$. Notar que todos son órdenes totales.

Otro ejemplo es el orden producto, de dos conjuntos ordenados $(X, \succ_X)$ y $(Y, \succ_Y)$, definido como $(x, y) \succ (x', y')$ si y sólo si $x \succ_X x'$ y $y \succ_Y y'$. Probar que es un orden parcial y observe que aunque ambos sean totales, el orden producto no lo es. Para definir un orden total en el producto de dos conjuntos ordenados, se define el *orden lexicográfico* o de diccionario: $(x, y) \succ (x', y')$ si $x \succ_X x'$ o bien $x = x'$ y $y \succ_Y y'$. Como ejercicio, hacer un dibujo en $\mathbb{R}^2$ del conjunto de los $(x, y) \succ (2, 1)$, cuando es el orden producto y cuando es el orden lexicográfico (considerando en $\mathbb{R}$ el orden $>$).

Si $(X, \succ)$ es un conjunto ordenado, e Y es subconjunto de X, entonces Y hereda el orden $\succ$. Estudiar de que forma sucede esto.

Definiciones. $\diamond$ Si Y es subconjunto de X decimos que $a \in X$ es *cota* de Y si $a \succ y$ para todo $y \in Y$; a es *máximo* de Y si además $a \in Y$.

- $\diamond$ Un elemento $a \in Y$ es *maximal* en Y si se cumple que: "Para todo $y \in Y$ tal que $y \succ a$ se tiene $y = a$". Ver abajo en los ejercicios la diferencia entre máximo, maximal y cota.

- $\diamond$ Un elemento $x \in X$ tiene *sucesor inmediato* si el conjunto de los $s \in X \setminus \{x\}$ tales que $s > x$ tiene *mínimo* (cuya definición dejamos a cargo del lector).

- $\diamond$ Ahora, un conjunto totalmente ordenado $(X, \succ)$ es un *buen orden* si se cumple que todo subconjunto tiene mínimo. Por ejemplo $(\mathbb{R}, \geq)$ no es. Pero $(\mathbb{N}, \geq)$ sí lo es.

1.10. Sea $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de los enteros positivos. Se consideran los siguientes órdenes en el producto $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$:
a) $(x, y) \succ (x', y')$ si $y - x > y' - x'$ o bien $y - x = y' - x'$ y $y > y'$.
b) $(x, y) \succ (x', y')$ si $x + y > x' + y'$ o bien $x + y = x' + y'$ y $y > y'$.
Probar que son órdenes totales. ¿Qué elementos tienen un sucesor inmediato? ¿Hay elementos máximos? Probar que los órdenes no son equivalentes entre sí , ni al orden lexicográfico. (Dos conjuntos ordenados $(X, \succ_X)$ y $(Y, \succ_Y)$ son equivalentes si existe una biyección $h : X \to Y$ tal que $h(x) \succ_Y h(x')$ si y sólo si $x \succ_X x'$.)

1.11. Considere $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ con el orden de inclusión, es decir $A \succ B$ si $A \supset B$.

a) $\succ$ es un orden parcial, que no es total, y existe un elemento mínimo y un elemento máximo.

b) Sea Y el subconjunto de X definido por $A \in Y$ si A tiene menos de 32 elementos. Averiguar si tiene máximo, si tiene elementos maximales y elementos minimales.

c) Hallar un subconjunto infinito de X que sea totalmente ordenado.

d) Hallar un subconjunto de X que sea acotado pero que no tenga elemento maximal.

1.12. Sea $X = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \geq 2\}$ con la relación de orden $m \leq n$ si m divide a n. Probar que es efectivamente una relación de orden y hallar elementos maximales y minimales, si es que existen.

1.4. Órdenes de Infinitos.

Intuitivamente se define el cardinal de un conjunto como la cantidad de elementos del conjunto. Claro que los conjuntos infinitos en principio no se pueden contar para decir cuál tiene más elementos. Pero la cosa se pone interesante con la siguiente definición:

Definición. Decimos que un conjunto X es equipotente a otro Y si existe una función biyectiva de X en Y.

Esta sería una relación de equivalencia si no fuera por un detalle: no existe el conjunto de todos los conjuntos. Así que obviemos este problema suponiendo que tenemos una determinada colección $\mathcal{A}$ de conjuntos y observemos que la relación es de equivalencia en $\mathcal{A}$. A cada clase de equivalencia le llamamos *número cardinal*. Así, el número natural 2 puede ser visto como un número cardinal, es decir, como la clase de todos los subconjuntos de $\mathcal{A}$ que cuentan con 2 elementos. También se usa decir que dos conjuntos equipotentes tienen el mismo cardinal.

Lo más interesante es que se puede definir un orden entre los números cardinales. Decimos que un cardinal x es mayor o igual que y (que notaremos $x \geq y$) si existe un conjunto X en la clase x y uno Y en la clase y y una función inyectiva de Y a X. Para probar que es una relación de orden usamos sin demostración el siguiente:

Teorema (Bernstein)**.** *Si existe una función inyectiva de X a Y y existe una función inyectiva de Y a X, entonces existe una función biyectiva de X a Y, o sea, X e Y son equipotentes.*

1.13. a) Demostrar que está bien esa definición de orden en el conjunto de los números cardinales, es decir, que no depende de la elección de los representantes de x y de y.

b) Usando el teorema de Bernstein, probar que es una relación de orden. Investigar si esta relación corresponde a un orden total. Pensaremos que $\mathcal{A}$ es el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$.

Definición. Un conjunto X se dice *numerable* si es finito o equipotente a $\mathbb{N}$.

Ejemplo 1.4.1. El conjunto de los números pares es numerable, y $\mathbb{Z}$ también.

1.14. Los siguientes conjuntos son numerables: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, los racionales, la unión de conjuntos numerables, el conjunto de los números algebraicos (raíces de polinomios de coeficientes enteros), el conjunto de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$.

1.15. La existencia de una función $f : A \to \mathbb{N}$ inyectiva es condición necesaria y suficiente para que A es numerable.

1.16. Supongamos que existe $f : \mathbb{N} \to A$ sobreyectiva. Entonces A es numerable.

1.17. * El conjunto formado por todas las sucesiones de ceros y unos (denotado $2^{\mathbb{N}}$) no es numerable. Luego el intervalo $(0, 1)$ es equipotente a $2^{\mathbb{N}}$, de donde se deduce que $\mathbb{R}$ es equipotente a $2^{\mathbb{N}}$, y por lo tanto, $\mathbb{R}$ no es numerable.

1.18. Sea X un conjunto. Entonces 2^X es equipotente a $\mathcal{P}(X)$. Deducir que $\mathbb{R}$ es equipotente al conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$.

1.5. Producto Cartesiano y Axioma de Elección.

Definición. Dado un conjunto de índices I y un conjunto X_α para cada $\alpha \in I$, se define el *producto cartesiano* de los conjuntos X_α como

$$\Pi_{\alpha\in I} X_\alpha = \{f : I \to \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha \ : \ f(\alpha) \in X_\alpha \ \forall \alpha \in I\}$$

Por ejemplo, si X es un conjunto y $I = \{1, \ldots, n\}$ entonces el producto $\Pi_{1\le k\le n} X$ no es otra cosa que el conjunto de las n-uplas ordenadas de elementos de X, o sea, es lo que habitualmente se llama X^n. En general, si todos los X_α son iguales a un conjunto X entonces escribimos X^I como abreviación para $\Pi_{\alpha\in I} X$. Note que X^I es el conjunto de todas las funciones de I en X.

1.19. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son numerables:

a) $\mathbb{Z}^{[0,1]}$

b) $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$

c) $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$

d) El conjunto de funciones de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$ que valen 0 salvo para finitos $n \in \mathbb{Z}$.

e) El conjunto de funciones de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ que valen 0 salvo para finitos $n \in \mathbb{Z}$.

1.20. Hallar una sucesión de conjuntos infinitos X_n tales que el cardinal de X_{n+1} es mayor que el de X_n. Después hallar un conjunto Z que tenga mayor cardinal que todos los X_n.

El *Axioma de elección* dice que cualquiera que sea el conjunto I, si para cada $\alpha \in I$ se cumple que X_α es no vacío, entonces $\Pi_{\alpha\in I} X_\alpha$ es distinto del vacío. En otras palabras, si todo X_α es no vacío, entonces existe un objeto (una función) que consiste en elegir un elemento de cada conjunto. Así dicho parece que no debiera ser un axioma. La teoría de conjuntos es un área intrincada de la matemática.

1.21. Si A es infinito, entonces existe $f : \mathbb{N} \to A$ inyectiva. (Sugerencia: una manera de formalizar la construcción es observar que si $\mathcal{P}(A)^*$ es las partes de A menos el vacío, entonces usando el axioma de elección podemos elegir un punto de cada conjunto $B \in \mathcal{P}(A)^*$. Para eso basta ver que existe $g \in \prod_{B \in \mathcal{P}(A)'} B$, con $g(B) \in B$.)

1.22. Probar que un conjunto es infinito si y sólo si es equipotente a un subconjunto propio.

Lema (Zorn)**.** Sea $(X, \succ)$ un conjunto parcialmente ordenado. Si todo subconjunto totalmente ordenado tiene cota superior, entonces existe un elemento maximal en X.

El Axioma de elección se usa en la demostración del Lema de Zorn, son de hecho equivalentes. La demostración de estos hechos es algo complicada y no la haremos en este curso, (ver 1.24 donde se prueba que el Lema de Zorn implica el Axioma de elección). Por otro lado, el Axioma de elección es también equivalente al *principio de buena ordenación*, que dice que todo conjunto puede ser bien ordenado, es decir, si X es un conjunto, existe en X un buen orden. Es posible por lo tanto, hallar un orden en $\mathbb{R}$ que es un buen orden. Se tiene entonces que todo subconjunto tiene un mínimo, por lo tanto, $\mathbb{R}$ tendrá un mínimo x_0, luego $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ tendrá un mínimo x_1 y así sucesivamente hasta agotar los reales.

1.23. Usar el Axioma de elección para demostrar que si $f : X \to Y$ es una función sobreyectiva, entonces existe una inversa por derecha de f, es decir, una función $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = id_X$.
Probar que si $f : X \to Y$ es inyectiva, entonces f tiene una inversa por izquierda; se precisa el Axioma de elección?

1.24. Probar el Axioma de elección usando el Lema de Zorn. Idea: Se quiere probar que existe una función ϕ de I en $\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ tal que $\phi(\alpha) \in X_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Sea F el conjunto de las funciones f definidas en algún subconjunto D_f de I tales que $f(\alpha) \in X_\alpha$ para todo $\alpha \in D_f$. Probar que este conjunto es no vacío. Luego se ordena F de la siguiente manera: decimos que $f \geq g$ si $D_f \supset D_g$ y $f(\alpha) = g(\alpha)$ para todo $\alpha \in D_g$ (es decir, $f \geq g$ si f es una extensión de g). Probar que eso da un orden parcial en F y que todo subconjunto linealmente ordenado tiene una cota. Usando Zorn deducir que hay un elemento maximal y concluir.

1.25. Probar el siguiente principio

Teorema (Inducción transfinita)**.** *Sea $(X, >)$ un conjunto bien ordenado, y P una propiedad aplicable a los elementos de X.*
Hipótesis.

- *El mínimo elemento de X verifica la propiedad P.*
- *Si $y \in X$ y todo elemento x tal que $y > x$ verifica la propiedad P, entonces también y verifica P.*

Tesis: Todo elemento de X verifica la propiedad P.

Capítulo 2

ESPACIOS TOPOLÓGICOS

Comenzaremos este capítulo con una breve motivación de la definición de espacio topológico.

2.1. Motivación

La noción de espacio topológico surge del estudio de la continuidad de las funciones en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^n$. En el curso de *Cálculo 2* se prueba que todas las normas son equivalentes y por lo tanto la definición de continuidad de una función es independiente de la elección de la norma. En este sentido, la idea de espacio topológico se introduce para rescatar la "esencia" de la definición de continuidad y de esta manera considerar objetos donde esta definición tiene sentido. Veamos esto con el ejemplo de funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Tenemos dos definiciones equivalentes de continuidad, a saber, la $\varepsilon - \delta$ definición, y a través de sucesiones.

Decimos que $U \subset \mathbb{R}$ es un conjunto *abierto* si para todo $x \in U$, existe un intervalo (a, b) tal que $x \in (a, b) \subset U$. En particular, todo intervalo (a, b) es abierto, y no así $[a, b]$. Veamos algunos ejemplos de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$.

a) $\mathbb{R}$;

b) Complemento de conjuntos finitos en $\mathbb{R}$;

c) Complemento de conjuntos numerables en $\mathbb{R}$;

d) Si $A := \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, entonces A^c es abierto;

e) Unión arbitraria de abiertos en $\mathbb{R}$;

f) Intersección finita de abiertos (no vacía)

Observar que todo abierto es unión de abiertos: si U es abierto, entonces para todo $x \in U$ existe $(a_x, b_x) \subset U$ que contiene a x, de donde resulta $U = \cup_{x \in U}(a_x, b_x)$.

Definición. Decimos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua si para todo U abierto en $\mathbb{R}$ se tiene $f^{-1}(U)$ abierto (o vacío).

Veamos que esta definición concuerda con la definición de continuidad. Si no fuera cierto existiría U abierto tal que $f^{-1}(U)$ no es abierto. Es decir que existe $x_0 \in f^{-1}(U)$ tal que no existe ningún intervalo que lo contenga que esté incluido en $f^{-1}(U)$. Es decir que hay puntos arbitrariamente próximos a x_0 tal que sus imágenes caen fuera de U, o sea, a una distancia mayor que cierto número positivo.

Pensemos en el otro sentido. Si f es discontinua en x_0 si hay puntos arbitrariamente cerca de x_0 tal que sus imágenes están a una distancia positiva de $f(x_0)$. Digamos $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$ para esos puntos. Entonces tomando $U = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ tenemos que $f^{-1}(U)$ contiene a x_0 pero hay puntos arbitrariamente cerca de x_0 en el complemento de $f^{-1}(U)$. Lo cual implica que $f^{-1}(U)$ no es abierto.

Observar que esta definición de continuidad la podemos extender fácilmente a $\mathbb{R}^n$ asumiendo que tenemos una definición de abierto. Por ejemplo, $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto si para todo $x \in U$ existe una "bola" que contiene a x y contenida en U. Aquí bola significa $B(z, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - z\| < r\}$ donde $\|\cdot\|$ es alguna normas conocidas en $\mathbb{R}^n$. Observar que para cualquiera de las normas que el lector conozca se tiene que la definición de abierto no depende de la norma elegida.

2.2. Definiciones y Propiedades Básicas.

Definición. Sea X un conjunto. Una familia τ de subconjuntos de X es una topología de X si se cumplen:

a) El conjunto vacío y el conjunto X pertenecen a τ.

b) Si $A_1, \ldots, A_n$ pertenecen a τ, entonces $\bigcap_1^n A_j$ pertenece a τ.

c) Si I es un conjunto y A_α es un subconjunto de X que pertenece a τ para cada $\alpha \in I$, entonces $\cup_{\alpha \in I} A_\alpha$ pertenece a τ.

Si τ es una topología en X, decimos que el par (X, τ) es un espacio topológico. Los elementos de τ se llaman los *abiertos* de la topología.

Ejemplos 2.2.1. (I) Los abiertos antes definidos son una topología para $\mathbb{R}$ (¡verificar!).

(II) Si X es un conjunto y $\tau = \mathcal{P}(X)$, entonces τ es una topología en X. Se llama la *topología discreta*. Es la mayor posible.

(III) Si X es un conjunto cualquiera, $\tau = \{\emptyset, X\}$ es una topología, llamada *topología indiscreta*. Es la mínima posible.

(IV) En $\mathbb{R}^n$, si definimos τ como el conjunto de todos los abiertos, entonces τ es una topología, llamada la *topología usual* de $\mathbb{R}^n$.

(v) Considerar en $\mathbb{R}$ la topología τ formada por el vacío, y los conjuntos U tales que si $x \in U$ entonces hay un intervalo $[a, b)$ que contiene a x y contenido en U. Observar que esta topología contiene a la topología usual generado por los abiertos de $\mathbb{R}$, pero hay abiertos de esta topología que no son abiertos usuales.

(vi) Si (M, d) es un espacio métrico, entonces el conjunto de todos los abiertos de M es una topología en M. (ver definición en Capítulo 5.)

(vii) En un conjunto infinito X cualquiera, consideramos la llamada *topología de los complementos finitos*: un subconjunto de X está en τ si es vacío o su complemento es finito.

(viii) En un conjunto infinito no numerable X cualquiera, consideramos la llamada *topología de los complementos numerables*: un subconjunto de X está en τ si es vacío o su complemento es numerable.

Veamos algunas definiciones que usaremos a lo largo de este curso.

Definiciones. Sea (X, τ) un espacio topológico.

- ⋄ Un conjunto $B \subset X$ se dice *cerrado* si su complemento es abierto. Por lo tanto se tiene que la unión de una cantidad finita de conjuntos cerrados es cerrada y la intersección de una cantidad arbitraria de cerrados es cerrada.
- ⋄ Diremos que V es *entorno* de un punto x de X si se cumple que $x \in A \subset V$ para algún abierto A.
- ⋄ Un punto $x \in X$ es de *acumulación* de un subconjunto A de X si todo entorno de x contiene algún punto de A diferente de x.
- ⋄ Un punto $x \in X$ es *interior* de un subconjunto A de X si existe un entorno V de x que está contenido en A.
- ⋄ Un punto $x \in X$ es *frontera o borde* de un subconjunto A de X si todo entorno V de x intersecta a A y a A^c.
- ⋄ Una sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *converge* a un punto $x \in X$ si dado cualquier entorno V de x existe un n_0 tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq n_0$.

Observar que en las definiciones anteriores pueden sustituirse los entornos por entornos abiertos.

2.1. a) En el Ejemplo 2.2.1–(ii) suponiendo $X = \mathbb{R}$, hallar los puntos frontera del conjunto $[0, 1]$.

b) En el Ejemplo 2.2.1–(iii) hallar los puntos de acumulación de X.

c) En el Ejemplo 2.2.1–(IV), para $n = 1$, con la topología usual, hallar el conjunto de todos los puntos de acumulación de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{Q}^c$.

d) En el Ejemplo 2.2.1–(VI) , probar que V es un entorno de x si y sólo si existe $r > 0$ tal que la bola de centro x y radio r está contenida en V.

e) En el Ejemplo 2.2.1–(VII) hallar todos los puntos de acumulación de $\mathbb{N}$.

f) En el Ejemplo 2.2.1–(VIII) determinar qué sucesiones son convergentes.

2.2. Sea X un espacio topológico. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

a) Un subconjunto A de X es abierto si y sólo si todos sus puntos son interiores.

b) Un subconjunto A de X es cerrado si y sólo si contiene a todos sus puntos de acumulación.

c) Un subconjunto A de X es cerrado si y sólo si contiene a todos sus puntos frontera.

Definiciones. ⋄ Sea A un subconjunto de X. Se define la *clausura* de A como la intersección de todos los cerrados que contienen a A. Se denota $\overline{A}$. Se denota A°.

⋄ Sea A un subconjunto de X. Definimos el *interior* de A como la unión de todos los abiertos contenidos en A.

⋄ El conjunto de puntos frontera de A se llama *frontera* de A y se denota ∂A.

Observe que la clausura de A es un conjunto cerrado puesto que la intersección de cerrados es cerrada, por lo tanto es el mínimo cerrado que contiene a A. Observe que el interior de A es un conjunto abierto, por lo tanto es el máximo abierto contenido en A.

2.3. La clausura de A es la unión de A con el conjunto de puntos de acumulación de A. Se deduce que A es cerrado si y sólo si coincide con su clausura.

2.4. El interior de A es el conjunto de todos los puntos interiores de A. Se deduce que A es abierto si y sólo si coincide con su interior.

2.5. a) La clausura de la unión de finitos conjuntos es igual a la unión de las clausuras. Observar que si son infinitos sólo vale una desigualdad (mostrar ejemplo donde la desigualdad es estricta).

b) Se tiene que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, donde la desigualdad puede ser estricta.

c) Se cumplen: $[\overline{A}]^c = [A^c]^\circ$ y $\overline{[A^c]} = [A^\circ]^c$.

Definición. Un espacio topológico es de *Hausdorff* (se llama también T_2) si se cumple que para todo par de puntos distintos x e y, existen entornos V de x y W de y tales que $V \cap W = \emptyset$.

Ejemplo 2.2.1. Los espacios métricos son Hausdorff, mientras que los Ejemplos (VIII) y (VII) en general no.

La propiedad Hausdorff es un *axioma de separación*. En el Capítulo 6 se verán otros axiomas de separación y las relaciones que hay entre ellos.

2.6. Si X es un espacio topológico de Hausdorff, entonces una sucesión converge a lo más, a un punto. Usar el Ejemplo 2.2.1–(VII), para ver que una sucesión puede converger a muchos puntos en el caso de que el espacio no sea de Hausdorff.

2.7. En un espacio es Hausdorff, todo conjunto formado por un sólo punto es cerrado. Investigar el recíproco.

2.8. Sea M un espacio métrico. Un punto está en la clausura de un subconjunto A de M si y sólo si existe una sucesión en A que converge a él.

En un espacio topológico cualquiera X, si una sucesión $\{x_n\}$ está contenida en un subconjunto A de X y es convergente a un punto x , entonces $x \in \overline{A}$. Pero es posible que un punto esté en la clausura de un conjunto A y no exista una sucesión en A que converge a x (usar el Ejemplo 2.2.1–(VIII)).

2.3. Bases

En esta sección veremos cómo generar topologías a partir de otras conocidas.

Observar que cuando definimos una topología en $\mathbb{R}$ lo hicimos declarando que los abiertos son aquellos conjuntos A tales que para todo $x \in A$ existe un intervalo (a, b) tal que $x \in (a, b) \in A$. Análogamente, podríamos definir que los abiertos son los conjuntos formados por uniones de intervalos abiertos (¡verificar!). De esta manera vemos que para definir la topología antes mencionada en $\mathbb{R}$ basta con considerar los intervalos de la forma $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Al conjunto de estos intervalos se le llama *base* de la topología.

Recordar que lo que necesitamos en el Ejemplo 2.2.1–(I) para que los abiertos así definidos sean una topología en $\mathbb{R}$ era:

- $(a, b) \cap (c, d) \neq \emptyset$ implica que existe $(e, f) \subset (a, b) \cap (c, d)$;
- Para que $X = \mathbb{R}$ pertenezca a la topología sólo se necesitaba que existe un intervalo que contenga a un punto arbitrario: $\forall\, x \in \mathbb{R}$ existe (a_x, b_x) tal que $x \in (a_x, b_x) \subset \mathbb{R}$.

Esto motiva la siguinte definición.

Definición. Decimos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ es base de una topología de un conjunto X si se cumplen:
1. La unión de todos los elementos de $\mathcal{B}$ es X.
2. Dados B_1 y B_2 elementos de $\mathcal{B}$ y un punto $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Notar que si $\mathcal{B}$ es una base de una topología de X y se define τ como el conjunto de todas la uniones de elementos de $\mathcal{B}$ más el vacío, entonces τ es una topología de X, que se llama la *topología generada* por $\mathcal{B}$. La topología τ es la mínima que contiene a todos los elementos de $\mathcal{B}$. También se dice en este caso que $\mathcal{B}$ es base de τ.

Ejemplos 2.3.1. (I) El conjunto de todos los intervalos abiertos es base de la topología usual de $\mathbb{R}$.

(II) Más en general, si M es un espacio métrico, el conjunto de todas las bolas abiertas es base de la topología asociada a la métrica.

(III) En un espacio métrico, el conjunto de todas las bolas abiertas de radio racional es base de la topología métrica.

(IV) Sea $\mathcal{B}_r$ el conjunto de todos los intervalos $(a, b]$, donde a y b son reales, $a < b$. Es base de una topología τ_r de $\mathbb{R}$.
Sea $\mathcal{B}_l$ el conjunto de todos los intervalos $[a, b)$, donde a y b son reales, $a < b$. Es base de una topología τ_l de $\mathbb{R}$.

Un primer ejemplo de aplicación de esta idea para formar nuevas topologías a partir de una dada, es la topología producto:

Definición. Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) espacios topológicos. Sea $\mathcal{B}_{X\times Y}$ el conjunto de los productos $A \times B$ tales que $A \in \tau_X$ y $B \in \tau_Y$. Entonces $\mathcal{B}_{X\times Y}$ es base de una topología de $X \times Y$ que llamaremos la *topología producto* de los espacios X e Y. Observar que $\mathcal{B}_{X\times Y}$ no es una topología en general.

2.9. Si se considera a $\mathbb{R}$ con la topología usual, entonces en $\mathbb{R}^2$ la topología usual y la topología producto coinciden.

2.10. Sean X, Y, Z espacios topológicos y se consideran el producto $X \times Y \times Z$. Para darle una topología a este producto se podría proceder de dos maneras: viendo $X \times Y \times Z$ como $(X \times Y) \times Z$ o como $X \times (Y \times Z)$. Probar que en ambos casos se llega a la misma topología en $X \times Y \times Z$.

2.4. Axiomas de Numerabilidad

Definición. Un espacio topológico satisface el *segundo axioma de numerabilidad* si existe una base numerable de la topología de X.

2.11. $\mathbb{R}$ con la topología usual satisface el segundo axioma de numerabilidad.

2.12. El producto de dos espacios topológicos que satisfacen el segundo axioma también lo satisface.

2.13. Averiguar si $\mathbb{R}$ satisface el segunda axioma cuando se considera en la topología generada por la base $\mathcal{B}_r$ del Ejemplo 2.3.1–(IV).

Definición. Un conjunto A es *denso* en X si la clausura de A es X.

Por ejemplo los racionales son densos en $\mathbb{R}$ con la topología usual, y también con las topologías del Ejemplo 2.3.1–(IV).

Definición. Un espacio topológico es *separable* si contiene un subconjunto A numerable y denso en X.

2.14. Un espacio topológico que satisface el segundo axioma es separable.

2.15. Si M es un espacio métrico entonces segundo axioma y separable son equivalentes. Sin embargo hay espacios topológicos separables que no satisfacen el segundo axioma.

2.16. Si X satisface el segundo axioma, entonces todo conjunto no numerable tiene punto de acumulación.

Es también posible generar una topología a partir de un concepto de entorno, este procedimiento es un poco engorroso pero es muy práctico a la hora de decidir cuál es la topología que conviene a determinado fin.

Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico, y x un punto de X. El *sistema de entornos* de x, denotado $\mathcal{N}_\tau(x)$, es el conjunto de todos los entornos de x. Un subconjunto $\mathcal{V}$ de $\mathcal{N}_\tau(x)$ es una base de entornos de x si para todo $U \in \mathcal{N}_\tau(x)$ existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subset U$.

2.17. Probar el siguiente resultado:

Teorema. *Sea X un conjunto, y suponga que para cada $x \in X$ se tiene un conjunto no vacío $\mathcal{N}(x)$ de partes de X tal que:*

a) $x \in U$ para cada $U \in \mathcal{N}(x)$.

b) Si U y V son elementos de $\mathcal{N}(x)$, entonces existe $W \in \mathcal{N}(x)$ tal que $W \subset U \cap V$.

Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de los $A \subset X$ tales que para todo $x \in A$ existe $U \in \mathcal{N}(x)$ tal que $U \subset A$. Entonces $\mathcal{T}$ es una topología de X. Además, para cada x se cumple que $\mathcal{N}(x)$ es una base del sistema de entornos de x para esta topología.

Definición. Un espacio satisface el *primer axioma de numerabilidad* si todo punto tiene una base de entornos numerable.

2.18. Todo espacio que satisface el segundo axioma también satisface el primero. Todo espacio métrico satisface el primero, pero no necesariamente el segundo (considere la métrica discreta $d(x, y) = 0$ si $x = y$, $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ en un conjunto no numerable X).

2.19. En un espacio que cumple el primer axioma se tiene lo siguiente: x pertenece a la clausura de un conjunto A si y sólo si existe una sucesión en A que converge a x. Comparar este resultado con 2.8.

Definición (Topología relativa)**.** (X, τ) un espacio topológico e Y un subconjunto de X. Se define la *topología relativa* de Y como *subespacio* de (X, τ) diciendo que $A \subset Y$ es abierto si existe O abierto en X tal que $A = O \cap Y$.

2.20. Sea (M, d) es un espacio métrico y N es un subconjunto de M, entonces la topología relativa de N como subespacio de M coincide con la topología métrica de N. Probar que si (X, τ) es Hausdorff, entonces todo subespacio también lo es.

Capítulo 3

FUNCIONES CONTINUAS y HOMEOMORFISMOS

Definición. Una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos (X, τ_X) e (Y, τ_Y) es *continua* si $f^{-1}(A) \in \tau_X$ para cada $A \in \tau_Y$.

Obviamente la continuidad depende de las topologías en X e Y. Por ejemplo, si τ_1 y τ_2 son topologías en un conjunto X, entonces la función identidad $id : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ es continua si y sólo si $\tau_1 \supset \tau_2$, en este caso diremos que la topología τ_1 es *más fina* que τ_2. Por eso, cuando hay riesgo de confusión, escribimos $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$, para dar a entender con qué topologías estamos considerando dominio y codominio.

Definición. Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es *continua en* x si para todo entorno V de $f(x)$ existe un entorno U de x tal que $f(U) \subset V$.

Veamos algunas equivalencias:

3.1. Sea $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$. Son equivalentes:

a) f es continua.

b) f es continua en x para todo $x \in X$.

c) $f^{-1}(C)$ es cerrado en τ_X para cada C cerrado en τ_Y.

d) Para todo subconjunto $A \subset X$ se cumple que $\overline{f(A)} \supset f(\overline{A})$

3.2. Si X es un espacio métrico, la condición 3.1–d) es equivalente a la noción de continuidad por sucesiones.

3.3. Probar con ejemplos de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que no es cierto que si f es continua entonces $f(A)$ es abierto para cada A abierto, ni $f(B)$ es cerrado para cada B cerrado.

Con la definición dada es muy obvio que la composición de funciones continuas es continua.

Definición. Una función biyectiva entre espacios topológicos se dice un *homeomorfismo* si tanto f como f^{-1} son continuas. En este caso, decimos que los espacios son *homeomorfos.*

Es claro que cuando f es un homeomorfismo, entonces un conjunto A es abierto en X si y sólo si su imagen es un abierto en Y. Dos espacios homeomorfos son exactamente el mismo objeto a los ojos de un topólogo. Por ejemplo, si consideramos en todos los casos la topología usual de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$, una recta es homeomorfa a una parábola, una elipse homeomorfa a una circunferencia. La composición de homeomorfismos es también un homeomorfismo, por lo que se tiene que la relación "X e Y son homeomorfos" es de equivalencia.

3.4. Sea f una función continua y biyectiva entre espacios topológicos ¿Es f necesariamente un homeomorfismo?

3.5. Consideramos en $\mathbb{R}$ las topologías τ_1 dada por la usual, τ_2 dada por los complementos finitos, τ_3 dada por aquellos conjuntos que contienen al cero.

a) Encuentre una función continua $f : (\mathbb{R}, \tau_1) \to (\mathbb{R}, \tau_1)$ que no lo sea para $(\mathbb{R}, \tau_2)$ como espacio de salida.

b) Encuentre una función continua $f : (\mathbb{R}, \tau_1) \to (\mathbb{R}, \tau_3)$ que no lo sea para $(\mathbb{R}, \tau_2)$ como espacio de salida.

c) Muestre que toda función continua respecto $(\mathbb{R}, \tau_2)$ como espacio de salida, lo es respecto $(\mathbb{R}, \tau_1)$ como espacio de salida.

3.6. Denotemos por $C((X, \tau_X), (Y, \tau_y))$ al conjunto de las funciones continuas de (X, τ_X) a (Y, τ_y). Cuando (Y, τ_Y) sea $\mathbb{R}$ con la topología usual notaremos simplemente $C(X, \tau_X)$ o $C(X)$. Tomemos ahora en un conjunto infinito X la topología discreta τ_1, la indiscreta τ_2 y la de los complementos finitos τ_3. Describir $C(X, \tau_1)$, $C(X, \tau_2)$ y $C(X, \tau_3)$.

3.1. Funciones Abiertas

Definición. Una función $f : X \to Y$ entre los espacios topológicos X y Y es *abierta* si la imágen de un abierto es un abierto.

3.7. Un homeomorfismo es una función abierta. Importante: el recíproco no es cierto, encuentre un contraejemplo.

3.8. ¿Es una función abierta necesariamente sobreyectiva?

3.9. Si $f : X \to Y$ es continua y abierta entonces $f(\tau_X) = \tau_Y$. ¿Se cumple necesariamente que $f^{-1}(\tau_Y) = \tau_X$?

3.10. La existencia de $f : X \to Y$ continua y abierta, y de $g : X \to Y$ continua y abierta, ¿implica necesariamente que X e Y son homeomorfos?

3.11. Dados dos naturales $n < m$ existe una función abierta $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. La existencia de una función abierta $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ **no es posible**, pero dar una prueba de esto escapa las posibilidades del curso. Dicho resultado se conoce como *Invariancia de la Dimensión*.

3.12. Toda función continua y abierta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente monótona, y que si es sobreyectiva es un homeomorfismo.

3.13. ¿Será cierto que una función abierta y sobreyectiva $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo?

3.2. Continuidad en Espacios Métricos

3.14. a) Una función entre dos espacios métricos $f : (M, d) \to (N, e)$ es continua si y sólo si para todo $x \in M$ y todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ (es decir que la definición de continuidad entre espacios topológicos extiende a la noción de continuidad entre espacios métricos).

b) Sean (M_1, d_1) y (M_2, d_2) dos espacios métricos. Definimos $d_1 \times d_2 : (M_1 \times M_2)^2 \to [0, +\infty)$ por $d_1 \times d_1((x, y), (x', y')) = d(x, x') + d(y, y')$.

   a) $d_1 \times d_2$ es una métrica.

   b) En todo espacio métrico (M, d) la función distancia $d : (M \times M, d \times d) \to [0, +\infty)$ es continua.

3.3. Identificación de Algunas Superficies

3.15. a) Sean X e Y dos espacios topológicos, $A \subset X$, $B \subset Y$ y $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ dos funciones continuas tales que $f(A) = B$, $g(B) = A$ y $f\mid_A$ y $g\mid_B$ son inversa una de la otra. Entonces A y B son homeomorfos.

b) El disco abierto $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ ||x|| < 1\}$ y $\mathbb{R}^n$ son homeomorfos.

c) Los espcaios $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 < ||x|| < 2\}$, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 = 1\}$, y $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ ||x|| = 1\}$ son homeomorfos a $\mathbb{A}$, C, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ donde la topología del último espacio está generada por los conjuntos $U \times (a, b) := \{(\theta, x) \ / \ \theta \in U \ , \ x \in (a, b)\}$ siendo U una abierto relativo de $\mathbb{S}^1$.

d) El disco cerrado $\mathbb{D}^2$ y el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ son homeomorfos.

e) El disco cerrado $\mathbb{D}^2$ y un conjunto de la forma $\mathbb{D}^2 \setminus C_\theta$ con $C_\theta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > 0, \ \theta|x| < y\}$ son homoeomorfos para todo $\theta \in [0, +\infty)$. Los interiores de dichos conjuntos son homeomorfos.

f) Si consideramos ahora el disco abierto $\mathbb{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ ||x|| < 1\}$ y $\mathbb{D}^2 \setminus \{(x, y) y \geq 0\}$ ¿son estos conjuntos homeomorfos?

Capítulo 4

TOPOLOGÍA PRODUCTO

4.1. Producto Finito de Espacios

En el Capítulo 2 definimos de manera natural una topología en el producto cartesiano de dos espacios topológicos. Más precisamente, dados (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos, definimos en el producto $X \times Y$ la topología generada por la base formada por productos $U \times V$, donde $U \in \tau_X$, y $V \in \tau_Y$.

Es fácil ver que cuando las topologías τ_X e τ_Y están generadas por bases $\mathcal{B}_X$ e $\mathcal{B}_Y$ respectivamente, entonces la topología producto está generada por conjuntos de la forma $B \times B'$, donde $B \in \mathcal{B}_X$ y $B' \in \mathcal{B}_Y$.

Más en general, dados $X_1, \dots, X_n$ espacios topológicos, podemos definir la topología producto en $X_1 \times \cdots \times X_n$ como la generada por la colección $U_1 \times \cdots \times U_n$, donde U_i es abierto de X_i.

4.1.1. Proyecciones y fibras

El espacio producto $X \times Y$ tiene dos mapas[1] naturales $\pi_1 : X \times Y \to X$, $\pi_2 : X \times Y \to Y$, llamadas *proyecciones*, definidas por $\pi_1(x, y) = x$, $\pi_2(x, y) = y$.

4.1. Las proyecciones son continuas.

4.2. La topología producto es la topología más menos fina que hace a las proyecciones continuas.

Definición. Los conjuntos de la forma $\{x\} \times Y$, con $x \in X$, e $X \times \{y\}$ con $y \in Y$ se llaman *fibras* del producto $X \times Y$.

[1]En este curso hablaremos indistintamente de *mapa* o *función*. En algunos textos el término mapa se usa cuando hablamos de ciertas funciones con propiedades específicas asociadas al área donde se trabaja. (Por ejemplo, es común usar la palabra mapas entre espacios topológicos para referirse a funciones continuas.)

Para cada $y \in Y$, hay un mapa *inclusión* $i_y : X \to X \times Y$, dado por $i_y(x) = (x, y)$. (Análogamente, para cada $x \in X$ podemos tomar la inclusión $i_x : Y \to X \times Y$, dada por $i_x(y) = (x, y)$.) Observar que el conjunto imagen de i_y es la fibra $X \times \{y\}$.

4.3. Las inclusiones son continuas. Concluir que las fibras son homeomorfas al factor correspondiente.

De esta manera el espacio producto $X \times Y$ puede ser pensado como unión de fibras homeomorfas a uno de los dos factores.

4.1.2. Producto cartesiano de mapas

Una función $f : Z \to X \times Y$ tiene la forma $f(z) = (f_1(z), f_2(z))$, para ciertas funciones $f_1 : Z \to X$ y $f_2 : Z \to Y$. Observar que $f_1 = \pi_1 \circ f$ y $f_2 = \pi_2 \circ f$ son las *componentes* de f.

4.4. $f : Z \to X \times Y$ es continua si y sólo si f_1 y f_2 lo son.

4.5. Las funciones suma y producto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, dadas por $(x, y) \mapsto x + y$, y $(x, y) \mapsto x \cdot y$ respectivamente, son continuas.[2]

4.6. Si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son continuas, entonces $f + g$ y $f \cdot g$ lo son. Concluir que los polinomios en n-variables son funciones continuas.

Dos mapas $g_1 : X_1 \to Y_1$ y $g_2 : X_2 \to Y_2$ determinan un mapa $g_1 \times g_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ dado por $g_1 \times g_2\,(x_1, x_2) = (g_1(x_1), g_2(x_2))$, (*producto cartesiano de mapas*).

4.7. El producto cartesiano de mapas continuos es continuo. Se concluye que si X_i es homeomorfo a Y_i $(i = 1, 2)$, entonces $X_1 \times X_2$ es homeomorfo a $Y_1 \times Y_2$.

4.8. ¿Las proyecciones en un producto cartesiano son abiertas?. ¿Qué sucede si restringimos las proyecciones a subespacios del producto cartesiano? Considerar por ejemplo el caso de $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.

4.9. Sean $X_1, \ldots, X_n$ una familia finita de espacios topológicos. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

a) Si X_i es Hausdorff para todo $i = 1 \ldots n$ entonces $\Pi_{i=1}^n X_i$ también lo es.

b) Si X_i es separable para todo $i = 1 \ldots n$ entonces $\Pi_{i=1}^n X_i$ también lo es.

c) Si X_i es N_1 para todo $i = 1 \ldots n$ entonces $\Pi_{i=1}^n X_i$ también lo es.

d) Si X_i es N_2 para todo $i = 1 \ldots n$ entonces $\Pi_{i=1}^n X_i$ también lo es.

[2] No hay un criterio sencillo para la continuidad de una función $f : X \times Y \to Z$. Recordar del curso de Cálculo 2 que hay ejemplos de funciones discontinuas que sin embargo son continuas como función de "cada variable".

4.1.3. Ejemplos y aplicaciones

4.10. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es homeomorfo a $S^{n-1} \times \mathbb{R}$

4.11. En general si $k < n$ son dos naturales, podemos pensar a $\mathbb{R}^k$ como subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de forma natural: son los puntos para los cuales sólo las primeras k coordenadas pueden ser no nulas. La esfera S^j está definida como los puntos de $\mathbb{R}^{j+1}$ tales que su distancia euclidea al origen es igual a 1. Probar que $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k$ es homeomorfo a $S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{k+1}$

4.12. * Consideramos el conjunto de matrices $n \times n$ invertibles con coeficientes reales $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, con la topología relativa dada como subconjunto de $\mathbb{R}^{n^2}$ con la topología usual. Probar que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ es homeomorfo a $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(1, \mathbb{R})$, donde $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ es el subconjunto de matrices de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ cuyo determinante es igual a 1.
Análogamente, consideramos el conjunto $\mathcal{O}(n)$ de matrices $n \times n$ ortogonales ($A \in \mathcal{O}(n)$ si $A^t A = I_n$). Probar que $\mathcal{O}(n)$ es homeomorfo a $S\mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(1)$, donde $S\mathcal{O}(n)$ es el subconjunto de $\mathcal{O}(n)$ de matrices con determinante 1.

4.2. Producto Infinito de Espacios

Ahora queremos extender la noción de topología producto para el caso de productos arbitrarios. Consideremos $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ una familia de espacios topológicos y el producto cartesiano $\Pi_{\alpha \in A} X_\alpha$. Nuestra primer candidata será la topología τ_c generada por los conjuntos de la forma $\Pi_{\alpha \in A} U_\alpha$ con $U_\alpha \in \tau_\alpha$ para todo $\alpha \in A$. Notar que en el caso de que A sea finito τ_c es la topología producto.

4.13. Las proyecciones son continuas para la topología τ_c.

Sin embargo la topología τ_c tiene algunas propiedades no deseadas, algunas de ellas serán vistas más adelante en el curso. Llamaremos a τ_c *topología de cajas*. El siguiente ejercicio muestra que las funciones continuas con la topología τ_c no son las que tienen todas sus componentes continuas.

4.14. Sea $X = \Pi_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el espacio de sucesiones reales con la topología de cajas. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to X$ definida por $f(x)_n = nx$. Observar que las componentes $f_n = \pi_n \circ f$ son continuas pero f no es continua.

Definición (Topología producto)**.** Definimos en $\Pi_{\alpha \in A} X_\alpha$ la *topología producto* como la más gruesa que hace a las proyecciones continuas. Esta es la generada por las intersecciones finitas de conjuntos de la forma $\pi_\alpha^{-1}(U)$ donde $U \in \tau_\alpha$.

4.15. Si consideramos la topología producto en $X = \Pi_{\alpha \in A} X_\alpha$, entonces se cumple que toda función $f : Y \to X$ es continua si y sólo si las componentes $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ son todas continuas.

4.16. * Estudiar si siguen valiendo las afirmaciones de 4.9 para productos infinitos. (Para el caso de separabilidad estudiar sólo productos numerables. Cualquier otro caso es un problema difícil.)

4.2.1. Funciones del intervalo en el intervalo

Sea X el conjunto de todas las funciones de $[0,1]$ en sí mismo, es decir, $X = [0,1]^{[0,1]}$. Como espacio producto tiene una topología producto, donde en cada $[0,1]$ se considera la topología usual de $\mathbb{R}$.

4.17. a) Describir los abiertos de la base.

b) No satisface el primer axioma de numerabilidad.

c) Es Hausdorff.

d) Es separable. (Sug: funciones poligonales.)

4.18. Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge según esta topología si y sólo si converge puntualmente.

Capítulo 5

ESPACIOS MÉTRICOS

5.1. Definición y Ejemplos

Comenzaremos estas notas recordando la definición de métrica en un espacio.

Definición. Una *métrica* en un conjunto X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que

(i) $d(x, y) \geq 0$ para todo x, $y \in X$, con $d(x, x) = 0$ y $d(x, y) > 0$ si $x \neq y$.

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo x, y en X.

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo x, y, z en X.[1]

En tal caso diremos que (X, d) es un *espacio métrico*. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos 5.1.1. (I) *Métrica* $0 - 1$
Dado un conjunto X, definimos $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$, y $d(x, x) = 0$. Es fácil ver que d es una métrica en X.

(II) *Métricas en* $\mathbb{R}^n$
En $\mathbb{R}^n$ podemos definir las siguientes métricas

- ⋄ $d(x, y) := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$;
- ⋄ $d_1(x, y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;
- ⋄ $d_\infty(x, y) := \text{máx}_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i|$.

(III) *Métrica inducida*
Sea (X, d) es un espacio métrico, y $A \subset X$. La restricción de d a $A \times A$ es una métrica, y por lo tanto $(A, d_{A\times A})$ es un espacio métrico.

[1] A esta propiedad se le llama *desigualdad triangular*.

(IV) *Distancia uniforme*
Sea X un conjunto, y sea $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ el conjunto de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ acotadas.[2] En $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ definimos la métrica

$$d(f,g) := \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|.$$

(V) *Espacios normados*
Sea V un espacio vectorial real o complejo. Una *norma* en V es una función real $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ que verifica

(i) $\|x\| \geq 0$, y $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$ en V;
(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$, para todo λ escalar, y $x \in V$;
(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todo x, y en V.

Si $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio normado entonces $d(x,y) := \|x - y\|$ es una métrica en V.

Observar que las métricas definidas en $\mathbb{R}^n$ en el Ejemplo 5.1.1–(II) son métricas que provienen de las normas respectivas

- ◇ $\|x\| := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$;
- ◇ $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$;
- ◇ $\|x\|_\infty := \max_{i:1,\ldots,n} |x_i|$.

El conjunto $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ es un espacio vectorial definiendo de manera natural las operaciones punto a punto. De esta forma podemos ver fácilmente que la métrica definida en el Ejemplo 5.1.1–(IV) proviene de la norma $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|$.

Ejemplos 5.1.2. (VI) Espacios $\ell_1(\mathbb{N})$, $\ell_2(\mathbb{N})$, $\ell_\infty(\mathbb{N})$
Sea $\ell_1(\mathbb{N})$ el espacio de la sucesiones complejas $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty$. Es fácil dotar a este espacio con una estructura de espacio vectorial definiendo la suma y producto por número coordenada a coordenada. En $\ell_1(\mathbb{N})$ se define la norma $\|x\|_1 := \sum_{n=1}^\infty |x_n|$.
Análogamente se definen

- $\ell_2(\mathbb{N}) := \{\{x_n\} : \sum |x_n|^2 < \infty\}$;
- $\ell_\infty(\mathbb{N}) := \{\{x_n\} : \sup_n |x_n| < \infty\}$,

Al igual que $\ell_1(\mathbb{N})$ es fácil ver que estos conjuntos son espacios vectoriales con las operaciones habituales. Se definen para estos espacios las normas siguientes

- $\|x\|_2 := \left(\sum |x_n|^2\right)^{1/2}$, donde $x = \{x_n\} \in \ell_2(\mathbb{N})$.

[2]Decimos que $f : X \to \mathbb{R}$ es acotada si existe $K > 0$ tal que $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in X$.

- $\|x\|_\infty := \sup_n |x_n| < \infty\}$, donde $x = \{x_n\} \in ell_\infty(\mathbb{N})$.

(VII) *Pull-back de una métrica*
Sea X un conjunto, (M, d) un espacio métrico, y $f : X \to M$ una función inyectiva. Para cada x, $y \in X$, la función $d'(x, y) =: d(f(x), f(y))$ define una métrica en X. (Comparar con Ejemplo 3. más arriba).

5.1. Probar en cada caso de los ejemplos anteriores que las funciones definidas son realmente métricas.

5.2. Si consideramos el conjunto $\mathcal{R}([0, 1])$ definido por las funciones $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tales que su parte positva y negativa[3] sean integrables Riemann, entonces podemos definir $d(f, g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$. ¿Es d una métrica? En caso contrario, ¿en qué subconjunto de $\mathcal{R}([0, 1])$ sería una métrica?

5.2. Topología Métrica

Definición. Si (X, d) es un espacio métrico, definimos la *bola de centro x y radio r* como el conjunto $B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$.

Definición. Recordar que el conjunto de bolas de un espacio métrico forman una base de X (cf. Ejemplo (III) de Sección 2.3). A la topología generada por esta base se le llama *topología métrica*.[4]

5.3. La topología métrica generada por la métrica del Ejemplo 5.1.1–(I) es la topología discreta.

5.4. La topología usual de $\mathbb{R}$ es generada por la métrica $d(x, y) := |x - y|$.

Definición. Diremos que dos distancias d_1 y d_2 son *equivalentes* si existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo par de puntos $x, y \in M$ se tiene

$$\frac{1}{C} d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C d_1(x, y)$$

5.5. Verificar que la relación definida arriba es realmente una relación de equivalencia.

5.6. Dos métricas equivalentes inducen la misma topología. El recíproco no es cierto. (Sugerencia: observar que si d es una métrica entonces $d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ es una métrica que genera la misma topología que d).

5.7. Las métricas d, d_1, d_∞ definidas en $\mathbb{R}^n$ generan la topología producto en $\mathbb{R}^n$.

5.8. Las funciones reales continuas de $[0, 1]$, las topologías generadas por las distancias $d_1(f, g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$ y $d_\infty(f, g) := \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$ no son las mimsmas. ¿Alguna de las topologías generadas por estas métricas es más fina que la otra?

[3]Dada $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, la parte positiva f^+ se define como $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$. Análogamente, la parte negativa f^- se define por $f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}$. Observar que $f = f^+ - f^-$

[4]Cuando no especifiquemos la topología en un espacio métrico significa que estamos trabajando con la topología métrica asociada.

5.2.1. Funciones continuas

Recordar que la noción de continuidad de una función entre espacios topológicos generados por métricas coincide con la definición $\epsilon - \delta$ de continuidad, es decir que una función entre espacios métricos $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ es continua con respecto a las topologías métricas si y sólo si dado $x \in X$ se tiene que $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que si $d_X(x, y) < \delta$ entonces $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

5.9. Sea $f : X \to Y$, donde X es un espacio topológicos generados por una métrica. Entonces f es continua si y sólo si para toda sucesión convergente $x_n \to x$, se tiene que la sucesión $f(x_n)$ converge a $f(x)$. (Sugerencia: usar 3.1–d).)

Definición. Una función entre espacios métricos $f : (M, d_1) \to (N, d_2)$ es *Lipschitz* si existe una constante $K > 0$ tal que para todo par de puntos $x, y \in M$ se cumple

$$d_2(f(x), f(y)) \leq K d_1(x, y)$$

Diremos que es *bi-Lipschitz* si existe $C \geq 1$ tal que

$$\frac{1}{C} d_1(x, y) \leq d_2(f(x), f(y)) \leq C d_1(x, y)$$

Observar que dos métricas d_1 y d_2 en M son equivalentes si y sólo si $id : (M, d_1) \to (M, d_2)$ es bi-Lipschitz. También suele decirse que dos métricas son bi-Lipschitz equivalentes en este caso

Un ejemplo de funciones bi-Lipschitz son las isometrías.

Definición. Una *isometría* es una función sobreyectiva entre espacios métricos $f : (M, d_1) \to (N, d_2)$ que preserva la métrica, es decir, satisface $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$ para todo par de puntos $x, y \in M$. Cuando exista una isometría entre espacios métricos diremos que son *isométricos*.

Cuando dos espacios son isométricos significa que no pueden distinguirse desde el punto de vista de los espacios métricos. El siguiente ejercicio muestra en particular que espacios isométricos son espacios homeomorfos con las respectivas topologías métricas.

5.10. Las funciones Lipschitz son continuas (cf. 3.14), y una función sobreyectiva y bi-Lipschitz es un homeomorfismo.

5.3. Topologías Metrizables

Definición. Diremos que un espacio topológico es *metrizable* cuando la topología está generada por alguna métrica.

Como hemos visto a lo largo del curso, los espacios métricos tienen ciertas propiedades "agradables" que permiten estudiarlos con mayor facilidad. Es por esta razón que es razonable presguntarse cuándo un espacio topológico es metrizable.

En los siguientes ejercicios mostraremos ejemplos de espacios que son y que no son metrizables.

5.11. Recordar la definición de métrica producto dada 3.14–b). Probar que la topología inducida por el producto de finitas métricas es justamente la topología producto.

5.12. Consideremos una sucesión de espacios métricos $\{(M_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $X = \Pi_n M_n$ con la topología producto. Encontrar una métrica en X que induzca la topología producto. (Cf. 5.16)

5.13. Sea X un producto no numerable de espacios métricos . ¿Es X metrizable para la topología producto? (Sugerencia: cf. 4.17.) ¿Qué nos dice lo anterior de la "topología de la convergencia puntual" de funciones de X en Y, donde X es un conjunto no numerable e Y es un espacio métrico?

5.4. Continuidad Uniforme

Definición. Sean (M, d_1) y (N, d_2) espacios métricos. Una función $f : (M, d_1) \to (N, d_2)$ es *uniformemente continua* si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $d_1(x, y) < \delta$ implica $d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Es claro que toda función uniformemente continua es continua. Además observar que la continudad uniforme es una noción global de la función, al contrario de la noción de continuidad.

5.14. Averiguar cuáles de las siguientes funciones son uniformemente continuas:
x^2 definida en $\mathbb{R}$; x^2 definida en $[0, 1]$; $1/x$ definida en $(0, +\infty)$; $1/x$ definida en $[1, +\infty)$; $\sin(x)$ definida en $\mathbb{R}$; $\sin(x^2)$ definida en $\mathbb{R}$; $\sqrt{x}$ definida en $[0, \infty)$. (Como siempre, si no especificamos las estructuras nos referimos a las usuales.)

5.15. Una función Lipschitz entre espacios métricos es uniformemente continua. ¿Es válido el recíproco? (Considerar la función raíz cuadrada vista en el ejercicio anterior.)

5.16. Consideremos el producto cartesiano numerable $\prod_n M_n$ de espacios métricos (M_n, d_n), con la métrica $d(x, y) := \sum_n \text{mín}\{1/2^n, d_n(x_n, y_n)\}$. Las proyecciones $\pi_j : \prod_n M_n \to M_j$, $\pi_j(x) = x_j$ son uniformemente continuas. Una función $f : X \to \prod_n M_n$ definida en un espacio métrico (X, d_X) es uniformemente continua si y sólo si $\pi_j \circ f : X \to M_j$ lo son.

5.17. Una función continua de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ es continua si y sólo si es uniformemente continua. (Sugerencia: si f no es uniformemente continua, existe un $\epsilon > 0$ y sucesiones $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ tales que $|x_n - y_n| < 1/n$ pero $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ para todo n. Por ser contenida en $[0, 1]$, la sucesión $\{x_n\}$ tiene una subsucesión convergente. Probar que si x es el límite de esa subsucesión, entonces f no es continua en x.)

5.5. Completitud

5.5.1. Sucesiones de Cauchy

La noción de sucesión convergente no es una noción intrínseca de la sucesión dado que asume la existencia de un punto particular, el límite de la sucesión. La idea es construir una noción de convergencia de sucesiones que sea intrínseca.

Definición. Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico es de *Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ para todos n y m mayores que N.

Observar que intuitivamente las términos de una sucesión de Cauchy se aproximan entre si, a medida que n crece. (Comparar con la definición de sucesiones convergentes, donde los términos se aproximan a un mismo punto.)

5.18. Toda sucesión convergente es de Cauchy. Mostrar con un ejemplo que el recíproco no es necesariamente cierto.

5.19. En $\mathbb{R}$ se considera la función $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = \left| \int_x^y f(t)dt \right|,$$

donde f es una función continua, positiva y tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f$ es finita. Probar que d es una distancia. Probar que la sucesión $\{n\}$ es de Cauchy pero no converge.

5.20. Toda sucesión de Cauchy es acotada.

5.21. Si una sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente, entonces ella misma es convergente, y al mismo límite.

5.22. Toda transformación entre espacios métricos uniformemente continua transforma sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy. Mostrar con un ejemplo que una función continua puede no tener esta propiedad.

5.5.2. Espacios métricos completos

Intuitivamente, los espacios métricos completos son aquellos espacios que no le "faltan puntos". Una forma natural para describir estos espacios es via las sucesiones de Cauchy.

Definición. Un espacio métrico es *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Por ejemplo, es fácil ver que el intervalo $(-1, 1)$ con la métrica usual no es completo. Más interesante aún, el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ como espacio métrico no es completo. Sin embargo estos espacios se vuelven completos una vez que agregamos ciertos puntos (el 1 y -1 al primer ejemplo, y los irracionales en el segundo). Más abajo veremos que la "completación" de un espacio es siempre posible.

El gran ejemplo de espacio métrico completo es $\mathbb{R}$ con la distancia usual. Esto se demuestra usando el *Axioma de Completitud*: "si $A \neq \emptyset$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente, entonces A tiene supremo". Ambos enunciados son, de hecho, equivalentes: es decir, se puede sustituir el Axioma de Completitud por el enunciado '$\mathbb{R}$ es completo' y se obtiene el Axioma como resultado. Ver 5.46.

5.23. Sea (M, d) un espacio métrico completo. Un subconjunto N de M es completo con la métrica inducida si y sólo si N es cerrado en M.

5.24. El espacio ℓ_∞ de todas las sucesiones complejas acotadas (ver Ejemplo 5.1.2–(vi)), es un espacio métrico completo.
Deducir que c, el conjunto de las sucesiones complejas convergentes, y c_0, el conjunto de las sucesiones convergentes a 0 con la métrica inducida por la del ejercicio anterior, son completos. ¿Es completo el subconjunto de las sucesiones que son cero a partir de un n?

5.25. Sea X un conjunto, y consideremos el espacio métrico $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ de funciones acotadas de X en $\mathbb{R}$ con la distancia de la convergencia uniforme d_∞ (ver Ejemplo 5.1.1–(iv)). Entonces $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), d_\infty)$ es completo.

Observar que para el resultado anterior lo único que necesitamos de $\mathbb{R}$ es que es completo. En este sentido se puede probar que el conjunto $\mathcal{B}(X, Y)$, de funciones acotadas de un conjunto X en un espacio métrico completo (Y, d), es completo si consideramos la distancia $d_\infty(f, g) := \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$.

Si dotamos el conjunto X con una estructura de espacio topológico podemos estudiar el subespacio de $\mathcal{B}(X, Y)$ formado por funciones continuas. Veamos un caso particular de esto.

5.26. Sea $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, el conjunto de todas las funciones continuas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$. Entonces $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), d_\infty)$ es un espacio métrico completo.
(Sugerencia: basta ver que $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ es cerrado en $\mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$.)

5.27. El producto cartesiano $M_1 \times \cdots \times M_n$ es completo, si y sólo si, M_i es completo para todo $i = 1, \ldots, n$. (Sugerencia: usar que las proyecciones son uniformemente continuas.) Extender el resultado a productos numerables con la métrica definida en 5.16.

5.28. Probar el siguiente teorema.

Teorema (Punto fijo de Banach)**.** *Sea (M, d) un espacio métrico completo, y $f : M \to M$. Suponga que existe una constante $\lambda < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ para todos x e y en M. Encontes f tiene un único punto fijo, es decir, existe un único $z \in M$ tal que $f(z) = z$. (Sugerencia: tomar un x_0 cualquiera y trabajar con la sucesión $x_n = f(x_{n-1})$.)*

5.29. Probar el siguiente teorema.

Teorema (Encaje de Cantor)**.** *Sea (M, d) un espacio métrico. Entonces son equivalentes:*

- ◇ *(M, d) es completo.*
- ◇ *Si $\{A_n\}$ es una sucesión de subconjuntos de M que cumplen:*
  - *a) Cada A_n es cerrado no vacío.*
  - *b) Para todo n se cumple que $A_n \subset A_{n-1}$.*
  - *c) El diámetro de A_n tiende a 0 cuando $n \to \infty$.*

  Entonces $\cap_n A_n \neq \emptyset$.

5.5.3. Espacios topológicos metrizablemente completos y Teorema de Baire

Definición. Decimos que un espacio topológico es *metrizablemente completo* si su topología es generada por una métrica completa.

Por ejemplo, vimos que $\mathbb{R}$ con la topología usual es un espacio metrizablemente completo. Sin embargo, existen otras métricas en $\mathbb{R}$ que generan la misma topología pero que no son completas.

5.30. Encontrar en $(0, 1)$ una métrica que genere la topología usual, pero que sea completa.

En el siguiente ejercicio veremos que la propiedad de completitud es una propiedad métrica.

5.31. Si un espacio métrico es completo, entonces es completo con cualquier otra métrica equivalente. (Recordar que d y d' son métricas equivalentes en M si existen constantes positivas α, β tales que $\alpha d(x, y) \leq d'(x, y) \leq \beta d(x, y)$, para todo x, $y \in M$.

La propiedad de completitud se preserva entre espacios métricos isométricos (funcione biyectivas que preservan la distancia). Además vimos que la completitud de los espacios no es una característica topológica, dado que una misma topología puede ser generada por métricas completas y no completas a la vez. Desde este punto de vista, la completitud no es un invariante topológico. Sin embargo, los espacios topológicos metrizablemente completos poseen ciertas propiedades interesantes desde el punto de vista de la topología que motiva a estudiarlos en este curso.

Veamos primero cómo introducir una noción de conjunto “insignificante” para una topología. Una primera aproximación sería tomar conjuntos con interior vacío. El inconveniente de esta definición es que $\mathbb{R}$ puede escribirse como unión de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, ambos con interior vacío. Una mejor definición de insignificante sería que su clausura tiene interior vacío. El siguiente resultado muestra que unión de conjunto insignificantes es insignificante.

5.32. Sean A y B dos conjuntos en un espacio topológico. Entonces el interior de $\overline{A \cup B}$ coincide con el interior de $\overline{A} \cup \overline{B}$.

Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto A de X es *nunca denso* en X si su clausura tiene interior vacío.

Veamos algunos ejemplos de nunca densos.

Ejemplos 5.5.1. (I) $\mathbb{Z}$ es nunca denso en $\mathbb{R}$.

(II) $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, es nunca denso en $\mathbb{R}$: $\overline{A} = \{0\} \cup A$ tiene interior vacío.

(III) Puntos no-aislados en espacios T_1 (un punto x es *aislado* si $\{x\}$ es abierto).

(IV) El conjunto de Cantor en $\mathbb{R}$.

5.33. a) Subconjuntos de nunca densos son nunca denso.

b) * La frontera de un conjunto abierto es nunca denso (sin embargo el conjunto puede ser grande desde el punto de vista de la teoría de la medida, cf. "queso suizo").

c) Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces X no es nunca denso. Más aún, subconjuntos nunca densos no son nunca densos en sí mismo con topología relativa). De hecho son densos.

d) El complemento de un nunca denso continene un abierto denso.

e) Unión finita de nunca densos es nunca denso.

f) Unión numerable de nunca densos puede no ser nunca denso. ¿Conoce algún ejemplo que sea denso?

Observación 1. Del resultado c) resulta que la propiedad de ser nunca denso depende de dónde se lo mira.

Definición. Un subconjunto A de X se llama *magro*, si es unión numerable de conjuntos nunca densos.

Ejemplos 5.5.2. (I) Todo subconjunto de un magro es magro, y unión numerable de magros también lo es.

(II) $\mathbb{Q} = \cup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$ es magro en $\mathbb{R}$, y también en $\mathbb{Q}$. (Es Hausdorff y no tiene puntos aislados.)

(III) Unión numerable de rectas en $\mathbb{R}^2$.

(IV) El conjunto de Cantor es magro en $\mathbb{R}$.

5.34. a) ¿Puede un conjunto magro ser denso? (Sug: pensar en conjuntos separables en espacios métricos.)

b) ¿Puede un conjunto magro tener interior no vacío?

5.35. a) Si un conjunto es abierto y denso, entonces su complemento es nunca denso.

b) Si un conjunto es nunca denso, entonces su complemento contiene un abierto denso.

¿Puede $\mathbb{R}$ ser magro en $\mathbb{R}$? Es decir, existen cerrados $\{F_n\}$ de interior vacío tal que $\mathbb{R} = \cup_n F_n$. ¿Puede ser el conjunto de Cantor magro en sí mismo?. La respuesta a estas preguntas es no como consecuencia del Teorema de Baire que veremos más abajo.

Definición. Un subconjunto A de X se llama *residual* si es una intersección numerable de conjuntos abiertos y densos.

5.36. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es residual.

Teorema (Baire)**.** *Sea (M, d) un espacio métrico completo. Entonces todo subconjunto residual es denso.*

Demostración. Sea $A = \bigcap_n A_n$ un conjunto residual en M, donde cada A_n es abierto y denso. Sea $B_0 = B(x_0, r_0)$ una bola cualquiera en M. Se probará que $B_0 \cap A \neq \emptyset$. Por ser A_1 denso y abierto, existe una bola B_1 de radio $r_1 > 0$ cuya clausura está contenida en $B_0 \cap A_1$. Ahora, por ser A_2 abierto y denso, existe una bola B_2 de radio r_2 cuya clausura está contenida en $B_1 \cap A_2$, donde además se puede tomar $r_2 < r_1/2$. Por inducción se prueba que existe una sucesión de bolas B_n de radios $r_n < r_{n-1}/2$, tales que la clausura de B_n está contenida en $B_{n-1} \cap A_n$ para todo n.

Luego para cada n tenemos que $\overline{B_n}$ es no vacío, $\overline{B_n} \subset \overline{B_{n-1}}$ y $\operatorname{diam}(\overline{B_n}) \xrightarrow{n} 0$. Luego por el teorema de encaje de Cantor existe $z \in M$ tal que $z = \bigcap_n \overline{B_n}$. Dado que $B_n \subset A_n$ para cada $n \geq 1$ entonces $z \in B_0 \cap A$ y el teorema queda demostrado. $\square$

5.37. Ningún espacio completo es magro en sí mismo.

Por ejemplo, el conjunto de Cantor es nunca denso en $\mathbb{R}$ pero no es magro en sí mismo. $\mathbb{Q}$ es magro en sí mismo.

5.38. Averiguar si en $\mathbb{R}$ con la topología generada por la base de los intervalos semi-abiertos se cumple que todo residual es denso.

Comentarios y aplicaciones Teorema de Baire

a) El teorema de Baire es un resultado topológico y por lo tanto continuará siendo cierto en cualquier otra métrica que genere la misma topología, sin necesidad de ser completa. En particular el resultado sigue siendo cierto en $(0,1)$ con la topología usual. Por ejemplo, $(0,1)$ no puede ser expresado como $\cup_n F_n$ con F_n nunca densos.

b) Todo espacio topológico metrizablemente completo no es magro en si mismo.

c) El conjunto de Cantor es no numerable:
Es cerrado en $\mathbb{R}$ entonces completo. Además como no tiene puntos aislados, de no ser no numerable sería magro en si mismo.

d) El espacio vectorial $\mathcal{P} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f\,\text{polinomio}\}$ (con las operaciones habituales) no se puede dotar de una norma completa (es decir, no es un espacio de Banach.) Esto resulta de lo siguiente:
Si $\|\cdot\|$ es una norma completa en $\mathcal{P}$, entonces $\mathcal{P} = \bigcup_n \mathcal{P}_n$ donde $\mathcal{P}_n := \{f \in \mathcal{P},\ \text{grado}(f) \leq n\}$ es cerrado y nunca denso.

- $\mathcal{P}_n$ es un subespacio vectorial de dimensión finita y normado, entonces completo y cerrado.
- En general, todo subespacio vectorial (propio) de dimensión finita tiene interior vacío: si contiene una bola, entonces trasladando contiene una bola centrada en el origen, y entonces por escalando cualquier vector está en el subespacio.

5.6. Completación de Espacios Métricos

5.39. Sean (M,d) y (N,d') espacios métricos donde N es completo. Sea $f : A \to N$ definida en A, un subconjunto denso de M. Si f es uniformemente continua, entonces existe una única extensión continua de f a M (esto es, existe una única función continua $\widetilde{f} : M \to N$ tal que $f(x) = \widetilde{f}(x)$ para todo $x \in A$). Además la extensión resulta uniformemente continua.

Antes de la demostración, analice el siguiente ejemplo: Sea f definida en $(0,1]$ por $f(x) = 1/x$; es continua en $(0,1]$ pero no puede extenderse como una función continua a todo el intervalo $[0,1]$. Para la prueba, considerar $x \in M$ y $\{x_n\}$ una sucesión en A que tiende a x. Entonces $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en N, de donde se deduce que tiene una subsucesión convergente. Su límite es el candidato a definición de $\widetilde{f}(x)$. Entre otras cosas, hay que probar que $\widetilde{f}(x)$ no depende de la elección de la sucesión $\{x_n\}$.

Definición. Un *encaje isométrico* entre espacios métricos es una función que preserva distancias. Esto implica que una encaje isométrico es inyectivo, pero no necesariamente es sobreyectivo. Cuando es sobreyectiva resulta ser una isometría (como vimos anteriormente).

Definición. Sea (M, d) un espacio métrico. Decimos que un espacio métrico completo $(\widetilde{M}, \widetilde{d})$ es una *completación* de (M, d) si existe un encaje isométrico $i : (M, d) \to (\widetilde{M}, \widetilde{d})$ tal que $i(M)$ es denso en $\widetilde{M}$.

Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ con la distancia usual no es completo, una completación de este espacio es $\mathbb{R}$ con la distancia usual.

5.40. Sea $(\widetilde{M}, \widetilde{d})$ una completación de (M, d), siendo i el encaje isométrico de M en $\widetilde{M}$. Sea (N, d') otro espacio métrico y $f : M \to N$ una función uniformemente continua. Probar que entonces existe una función uniformemente continua $\widetilde{f} : \widetilde{M} \to N$ tal que $\widetilde{f} \circ i = f$.
Deducir que dos completaciones de (M, d) son isomorfas. Por eso se habla de *la* completación de (M, d).

5.41. Todo espacio métrico (M, d) tiene una completación. (Sugerencia: Fije un $x_0 \in M$. Considere, para cada $x \in M$ la función $f_x : M \to \mathbb{R}$ definida por $f_x(y) = d(y, x) - d(y, x_0)$. Demuestre que $f_x \in B(M)$, es decir, que f_x es una función acotada (probar aquí que $|f_x(y)| \leq d(x, x_0)$ para todo $y \in M$). Sea $i : M \to B(M)$ definida por $i(x) = f_x$. Probar que es un encaje isométrico y deducir que $(\overline{i(M)}, d_\infty)$ es una completación de (M, d).)

5.7. Miscelánea

5.42. Métricas Conformes en el Plano
Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $\rho : \Omega \to [0, +\infty)$ una función C^2. Definimos la longitud de una curva diferencible $\alpha : [a, b] \to \Omega$ como

$$long(\alpha) = \int_a^b \rho(\alpha(s))|\alpha'(s)|ds.$$

Probar que la longitud de una curva no depende de la parametrización. Observar que esta definición se puede extender a curvas diferenciables a trozos. Ahora dados dos puntos $x, y \in \Omega$ definimos $d_\rho(x, y)$ como el infimo de las longitudes de las curvas diferenciables a trozos que unen x con y. Probar que d_ρ es una métrica.

Un ejemplo clásico es el llamado *Plano Hiperbólico*: $\Omega = \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$, $\rho(z) = \frac{1}{Im(z)}$. Probar que si z_1 y z_2 tienen parte real nula entonces la distancia $d_\rho(z_1, z_2)$ es realizada por cualquier parametrización inyectiva del segmento que une dichos puntos. Concluir que el semi-eje vertical es una curva que minimiza la distancia entre cualquier par de sus puntos. Una curva con esta propiedad es llamada geodésica. Puede verse (pero no lo pedimos aquí) que las geodésicas del plano hiperbólico son las rectas verticales y las semi-circunferencias con centro en el eje real. El plano hiperbólico es un modelo de geometría no euclideana donde por un punto exterior a una geodésica pasan infinitas geodésicas que no cortan a la primera, es decir, infinitas geodésicas paralelas a la primera.

5.43. Una *cuasi-métrica* es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que cumple:

(i) $d(x, y) \geq 0$ para todo x, $y \in X$, con $d(x, x) = 0$ y $d(x, y) > 0$ si $x \neq y$.

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo x, y en X.

(iii) Existe $M \geq 1$ tal que $d(x, y) \leq M(d(x, z) + d(z, y))$ para todo x, y, z en X.

A diferencia de las métricas, las cuasi-métricas no necesariamente generan topología. Para ver un ejemplo tomemos en $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definido por

$$d(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}|x - y| & \text{si } x, y \in \mathbb{R}, \\ |x - y| & \text{si no.} \end{cases}$$

Probar que d es una cuasi-métrica cuyas bolas no son base para ninguna topología.

5.44. Sea (X, d) un espacio métrico. Consideremos $\mathcal{C}(X)$ el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en X. Decimos que $\{x_n\} \approx \{y_n\}$ si y sólo si $\lim_n d(x_n, y_n) = 0$. Probar que $\approx$ es una relación de equivalencia.

Definimos $\hat{X} = \mathcal{C}(X)/\approx$ y $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \to \mathbb{R}$ por $\hat{d}([\{x_n\}], [\{y_n\}]) = \lim d(x_n, y_n)$. El espacio métrico $(\hat{X}, \hat{d})$ resultará ser una completación de X.

a) Probar que $\hat{d}$ está bien definida y es una métrica.

b) Demostrar que $\iota : X \to \hat{X}$ definida por $\iota(x) = [\{x_n = x\}]$ es un encaje isométrico y que $\iota(X)$ es denso en $\hat{X}$.

c) Probar que $\hat{X}$ es completo. Sugerencia: para una sucesión de Cauchy $a_n = [\{x^n_m\}_{m\in\mathbb{N}}]$ considerar $z_n = x^n_{k_n}$ donde k_n es tal que para todo $m, m' \geq k_n$ se cumple $d(x^n_m, x^n_{m'}) < \frac{1}{n}$, luego probar que $\lim a_n = [\{z_n\}]$.

5.45. Curva de Peano

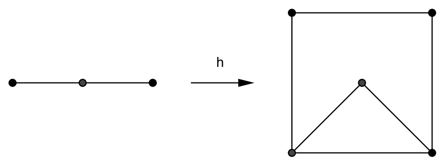
El objetivo de este ejercicio es probar el siguiente teorema.

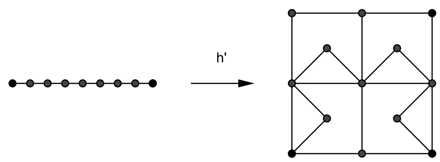
Teorema. *Sea $I = [0, 1]$. Existe un mapa contínuo y sobreyectivo $f : I \to I \times I$.*

Decimos que una curva $g : [a, a + r] \to [c, c + r] \times [d, d + r]$ es un mapa triangular si resulta de componer con una isometría del cuadrado $[c, c + r] \times [d, d + r]$ la curva $h : [a, a + r] \to [c, c + r] \times [d, d + r]$ definido por

$$h(a + t) = \begin{cases} (c + t, d + t) \text{ si } t \leq a + r/2 \\ (c + t, d + 1/2 + t) \text{ si } t > a + r/2 \end{cases}$$

Observar la figura para mejor entendimiento de los mapas triangulares.





Un mapa $g : I \to I^2$ es n-triangular si cada uno de los mapas $g|_{[k\frac{1}{4^n},(k+1)\frac{1}{4^n}]}$ son triangulares sobre los cuadrados que resultan de la división de I en 4^n cuadrados iguales.

Definimos en estos mapas una operación como sigue: dado un mapa triangular g definimos g' el mapa 1-triangular como se ve en la figura. Luego dado g n-triangular se define g' el mapa $(n+1)$-triangular resultante al aplicar la operación a cada una de las restricciones a los 4^n cuadraditos de la subdivisión.

Tomamos ahora una sucesión de funciones definidas por recursión: $f_0 = h$ y $f_{(n+1)} = (f_n)'$.

a) Observar que f_n es n-triangular y contínua para todo n.

b) Considerar en I^2 la métrica $d(x, y)$ dada por la norma del máximo y en $C(I, I^2) = \{g : I \to I^2 : g \text{ continua}\}$ la distancia $\rho(g_1, g_2) = \sup\{d(g_1(t), g_2(t)) : t \in I\}$. Observar que $(C(I, I^2), \rho)$ es completo y $\{f_n\}$ es de Cauchy.

c) Probar que $f = \lim f_n$ es sobreyectiva. Sugerencia: probar que dado x y $n \in \mathbb{N}$ existe $t_0 \in I$ tal que $d(x, f_n(t_0)) \leq \frac{1}{2^n}$, luego usando que f_n converge a f y la desigualdad triangular probar que en todo entorno de x hay un punto de $f(I)$. Luego por compacidad de $f(I)$ el punto x debe estar en la imágen de f.

5.46. Probar que el Axioma de Completitud es equivalente a decir que $\mathbb{R}$ es completo. Idea de la prueba: Probemos primero que $\mathbb{R}$ es completo usando el Axioma: Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : x < x_n \text{ para infinitos valores de } n\}$. Para empezar, note que A es acotado

superiormente porque la sucesión $\{x_n\}$ es acotada superiormente. Por otro lado, A es no vacío porque la sucesión $\{x_n\}$ está acotada inferiormente. Sea x el supremo de A. Se prueba ahora que x es el límite de la sucesión $\{x_n\}$: notar que por la definición de A, en cada entorno de x hay infinitos puntos de la sucesión. Se deduce que $\{x_n\}$ tiene una subsucesión convergente a x, y de 5.21 se deduce que converge a x.
Para probar el recíproco, sea A un conjunto acotado superiormente y no vacío. Sea x_0 el menor entero que es cota superior de A y defina por recurrencia una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ así : conocido x_n defina $x_{n+1} = x_n - 2^{-n}$ si $x_n - 2^{-n}$ es cota de A y $x_{n+1} = x_n$ si no. Entonces la sucesión x_n es de Cauchy, y por hipótesis tiene límite x. Entonces x es el supremo de A.

Capítulo 6

AXIOMAS DE SEPARACIÓN

Definición. Un espacio topológico X se dice T_0, o de *Kolmogorov*, si dados dos puntos x e y existe un entorno U de x tal que $y \notin U$ o un entorno de V de y tal que $x \notin V$.

Desde el punto de vista topológico un espacio es T_0 si los puntos son topológicamente distinguibles. Los espacios topológicas con la topología discreta, y los espacios metrizables son T_0. Sin embargo un espacio X con $card(X) > 1$ con la topología indiscreta no es T_0. Otro ejemplo de espacio no T_0 es $\mathbb{R}^2$ donde los abiertos son de la forma $U \times \mathbb{R}$, donde $U \subset \mathbb{R}$ es abierto.

6.1. Un espacio topológico X es T_0 si y sólo si para todo x, $y \in X$, $\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_y$ implica $x = y$.

Definición. Un espacio X es T_1 si dados dos puntos x e y existen U entorno de x y V entorno de y tal que $x \notin V$ y $y \notin U$.

6.2. X es T_1 si y sólo si $\bigcap_{U \in \mathcal{N}_x} U = \{x\}$. Además X es T_1 si y sólo si todos los puntos son cerrados.

Ejemplo 6.0.1. Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología dada por los conjuntos que contienen al cero. Este espacio es T_0 pero no es T_1 ya que si $x \neq 0$ no existe ningún entorno abierto de x que no contenga a 0.

Definición. Recordar que un espacio topológico X es T_2 o de *Hausdorff* si para todo par de puntos $x, y \in X$ existen entornos U y V de x e y respectivamente tal que $U \cap V = \emptyset$.

Ejemplo 6.0.2. Consideremos X un conjunto infinito con la topología de los complementos finitos. Es fácil ver que X es T_1 pero no de Hausdorff.

6.3. Todo subespacio de un espacio de Hausdorff es de Hausdorff.

Definición. El espacio X se dice *regular* o T_3 si los puntos son cerrados y dados un punto x y un cerrado C que no contiene a x existen un entorno U de x y un entorno abierto V de C tal que $U \cap V = \emptyset$.

Observar que la condición de que los puntos son cerrados es necesaria para que todo espacio regular sea de Hausdorff: si X es un conjunto de dos puntos con la topología indiscreta no es de Hausdorff pero sin embargo cumple con la segunda parte de la definición de espacio regular.

6.4. Sea X un espacio T_1. X es regular si y sólo si para todo punto x y entorno U de x existe un entorno V de x de forma tal que $\overline{V} \subset U$.

6.5. Todo subespacio de un espacio regular es también regular.

Definición. El espacio X es *normal* o T_4 si los puntos son cerrados y dados dos cerrados disjuntos C_1 y C_2 existen respectivos entornos U y V disjuntos.

6.6. Sea X un espacio T_1. X es normal si y sólo si para todo cerrado C y abierto U que contiene a C existe un abierto V tal que $C \subset \overline{V} \subset U$.

6.7. Todo espacio metrizable es normal.

Capítulo 7

CONEXIÓN

7.1. Espacios Topológicos Conexos

Definición. Una *separación* de un espacio topológico X es un par A, B, de conjuntos abiertos, no vacíos, disjuntos tal que su unión es X. Un espacio topológico X es *conexo* si no existe una separación.

Observar que la propiedad de ser conexo es un invariante topológico, esto es, es un invariante por homeomorfisomos. Esto resulta del simple hecho que una separación en un espacio induce una separación en cualquier espacio homeomorfo.

Observación 2. Diremos que un subconjunto C de un espacio topológico X es conexo, si lo es con la topología relativa.

Dado que es más fácil verificar que existe una separación de un espacio, que probar que es conexo, veamos algunos ejemplos de espacios no conexos.

7.1. Encontrar separaciones para los siguientes subespacios topológicos de la recta real: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\mathbb{Q}$; $X = [0,1) \cup (1,2]$. Más en general, probar que un espacio de más de un punto con la topología discreta, no es conexo.

7.2. Probar que el espacio $GL(n,\mathbb{R})$, de matrices reales $n \times n$ invertibles, no es conexo. (C.f. 4.12.)

7.3. Considerar el subespacio X de $\mathbb{R}^2$ dado por la unión $\mathbb{R} \times \{0\}$ y $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 1/x,\ x > 0\}$. Probar que X no es conexo.

7.4. El intervalo $[0,1]$ es conexo.
(Sugerencia: Suponer que existe una separación A y B de $[0,1]$. Suponiendo $0 \in A$, estudiar el supremo del conjunto $C := \{x \in A : \ x \leq b,\ \forall\, b \in B\}$.)

Es fácil adaptar la prueba del ejercicio anterior para concluir que $\mathbb{R}$ es conexo. En particular, todo intervalo abierto de la recta es conexo.

7.5. Sea X un espacio topológico. Son equivalentes:

a) X es conexo.

b) X no es la unión de dos conjuntos cerrados disjuntos y no vacíos.

c) Todo subconjunto de X que no es $\emptyset$ ni X, tiene frontera no vacía.

d) Si un subconjunto A de X es abierto y cerrado, entonces $A = \emptyset$ o $A = X$.

e) Toda función continua $f : X \to \{0, 1\}$ es constante.

f) Para toda $f : X \to \mathbb{R}$ continua se cumple que $f(X)$ es un intervalo.

7.6. Probar el siguiente teorema.

Teorema (Bolzano)**.** *Si $f : X \to Y$ es continua y X es conexo entonces $f(X)$ es conexo.*

7.7. Un espacio métrico conexo con más de un punto es no numerable. (Sug: considerar la función distancia a un punto.)

El teorema de Bolzano nos permite probar que ciertos espacios son conexos. Por ejemplo, el círculo S^1 es conexo, por ser imágen de una función continua con dominio $\mathbb{R}$.

7.8. La clausura de un conjunto conexo es conexo. Concluir que si $X \subset Y \subset \overline{X}$, y X es conexo, entonce Y es conexo. (Sugerencia: ¿quién es la clausura de X como subespacio de Y?)

El anterior resultado nos permite probar nuevamente que el cícrulo S^1 es conexo probando que S^1 menos un punto es homeomorfo a un intervalo abierto. Además nos permite concluir que los intervalos semi-abierto, semi-cerrados también son conexos.

7.9. Los conexos de $\mathbb{R}$ son intervalos. (Decimos que I es un intervalo si dados a, $b \in I$, con $a < b$, entonces $(a, b) \subset I$.)

Observación 3. El gráfico $G(f) \subset \mathbb{R}^2$ de la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(1/x)$ es un conexo. (Esto resulta de que G(f) es homeomorfo al dominio.) Observar que la clausura $\overline{G(f)} = G(f) \cup V$, donde V es el segmento vertical $\{0\} \times [-1, 1]$. Por lo tanto concluimos que $\overline{G(f)}$ es conexo. Sin embargo, resulta poco intuitivo que dado cualquier subjconjunto $A \subset V$ se tiene que $G(f) \cup A$ es conexo.

7.10. La unión de conjuntos conexos que tienen un punto en común es conexo. Concluir que un espacio X es conexo si y sólo sí dados dos puntos arbitrarios x, y en X, se tiene que existe un subconconjunto $X_{x,y}$ conexo que los contiene.

Del resultado anterior podemos concluir que los espacios vectoriales normados son conexos. Esto resulta de que para cualesquiera dos puntos x e y, la recta $\{x+t(y-x) : t \in \mathbb{R}\}$ es un conexo que los contiene. Resulta entonces que toda bola abierta es conexa por ser homeomorfa al espacio ambiente, y también toda bola cerrada por ser en este caso la clausura de la bola abierta. En particular $\mathbb{R}^n$ es un espacio topológico conexo, y la bolas también lo son. Observar además que esto permite probar que la esfera unidad S^{n-1} es conexa.

7.11. X e Y son espacios conexos, si y sólo si $X \times Y$ es conexo.
(Idea de la ida: Observar que las fibras del producto son conexas por ser homeomorfas a uno de los factores. Por lo tanto la unión de dos fibras de distintos factores son homeomorfas. Escribir el espacio como unión de estos conexos con un punto en común.)

El resultado anterior se extiende facilmente pare el caso de productos finitos de espacios. A continuación extenderemos este resultado a productos arbitrarios.

7.12. El producto arbitrarios de espacios, es conexo, si y sólo sí, sus factores son conexos.
(Idea de la prueba: Consideremos un punto fijo base $b = \{b_\alpha\}_{\alpha\in I} \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha := X$. Para $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ sean $X(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ el subespacio del producto formado por todos los x tal que $\pi_\beta(x) = b_\beta$, para todo $\beta \neq \alpha_i$, $(i = 1, \dots, n)$. Entonces $X(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es conexo por ser homeomorfo al producto $X_{\alpha_1} \times \cdots \times X_{\alpha_n}$. Sea $Y = \cup X(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, donde la unión se toma en las partes finitas de subíndice de I. Es fácil ver que Y es conexo, pero además es denso en X.)

7.2. Componentes Conexas

Cuando estamos en la presencia de un espacio que no es conexo, es natural preguntarse cuántas "piezas" o "componentes" tiene el espacio. Esta pregunta es de suma importancia en algunos contextos como la topología algebraica y la topología diferencial. A modo de ejemplo considere el espacio $\mathcal{C}(S^1)$ de funciones continuas de S^1 en S^1. ¿Cuáles son las componentes conexas de este espacio?

Sea X un espacio topológico, llamemos $\mathcal{C}$ al conjunto de todos los subconjuntos conexos de X (conexos como subespacios). Consideremos a $\mathcal{C}$ ordenado por la inclusión.

7.13. $\mathcal{C}$ tiene elementos maximales. (Sugerencia: usar lema de Zorn).

Definición. Los elementos maximales de $\mathcal{C}$ se denominan *componentes conexas* de X. Si las componentes conexas de X son puntos diremos que X es *totalmente disconexo.*

7.14. Las componentes conexas son cerradas. Encontrar un ejemplo en el cual no sean abiertas (Sugerencia: pensar en un espacio totalmente disconexo que no sea discreto).

El siguiente resultado nos da una definición alternativa de componente conexa.

7.15. Las componentes conexas de un espacio X son las clases de equivalencia por la relación: $x \sim y$ si y sólo si ambos pertenecen a un subespacio conexo de X. Concluir que las componenentes conexas son conexos, cerrados, disjuntos, tal que su unión es todo el espacio.

7.16. Hallar las componentes conexas de $\mathbb{Q}$, y del conjunto de Cantor.

Observar que sacando puntos a un espacio y contando la cantidad de componentes conexas, es fácil ver que el intervalo $(a, b]$ no es homeomorfo a un intervalo cerrado o abierto.

7.17. Consideramos en un espacio X dos topologías τ_1 y τ_2 con la primera mas fina que la segunda.

a) Un conjunto conexo en τ_1 lo es en τ_2. Muestre con un ejemplo que no vale el recíproco.

b) Las componentes conexas respecto τ_1 son mas chicas que las componentes conexas respecto a τ_2.

7.3. Conexión Local

Definición. Un espacio topológico se dice *localmente conexo* si para todo punto existe una base de entornos conexos.

Ejemplos 7.3.1. Consideremos $X = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ con la topología relativa. Observar que X es conexo pero no localmente conexo. Un espacio vectorial normado es localmente conexo.

7.18. Mostrar ejemplos de espacios que cumplen que son conexos pero no localmente conexos, y viceversa.

7.19. En un espacio es localmente conexo sus componentes conexas son abiertas.

7.4. Conexión por Caminos

Definición. Un espacio topológico X se dice *conexo por caminos* o *arcoconexo* si para todo par de puntos $x, y \in X$ existe una curva continua $\alpha : [0, 1] \to X$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$.

7.20. Los siguientes ejemplos son espacios conexos por caminos:
(i) $\mathbb{R}^n$; (ii) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; (iii) $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$; (iv) el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ de pares con al menos una coordenada irracional,

7.21. La imagen, por una función continua, de un conjunto conexo por caminos es conexo por caminos.

7.22. La unión de conjuntos arcoconexos, con al menos un punto en común, es arcoconexo. ¿Es el producto cartesiano de arcoconexos, arcoconexo?

7.23. Si X es conexo por caminos, entonces es conexo.

7.24. Sea X la clausura el gráfico de $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$. Probar que X es conexo pero no conexo por caminos. (Sugerencia: probar que si $\alpha : [0, 1] \to X$ es continua, entonces $\alpha^{-1}(\{0\} \times [-1, 1])$ es abierto y cerrado.)

Observar que del ejercicio anterior resulta que la clausura de un conjunto conexo por caminos no tiene por qué ser conexo por caminos.

Definición. Un espacio topológico se dice *localmente arcoconexo* si para todo punto existe una base de entornos arcoconexos. Definimos las *componentes arcoconexas* de un espacio topológico como las clases de equivalencia de la relación: $x \sim y$ si existe una curva continua que los une.

7.25. La componente arcoconexa de $x \in X$ es el conjunto arcoconexo maximal que lo contiene.

7.26. En un espacio localmente arcoconexo, las componentes arcoconexas coinciden con las componentes conexas.

Observación 4. En particular los abiertos conexos de $\mathbb{R}^n$ son conexos por caminos.

Capítulo 8

COMPACIDAD

8.1. Definición y Generalidades

Definición. Un *cubrimiento* de un espacio X es una familia de subconjuntos $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X$. En tal caso decimos que $\mathcal{U}$ *cubre* a X. Diremos que $\mathcal{U}$ es un *cubrimiento abierto* si está formado por conjuntos abiertos. Un subconjunto $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ que cubre a X es un *subcubrimiento* de $\mathcal{U}$.

Definición. Decimos que X es *compacto* si todo cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento finito.

8.1. Estudiar si los siguientes subespacios Y de $\mathbb{R}$ son compactos: $Y = \mathbb{R}$; $Y = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$; Y un subconjunto finito (¿se puede generalizar?); $Y = (0, 1]$.

8.2. $\mathbb{N}$ con la topología de los complementos finitos es compacto, más aún, todos sus subespacios son compactos.

8.3. Un subespacio Y de un espacio topológico X es compacto si y sólo sí todo cubrimiento abierto de Y por abiertos de X tiene un subcubrimiento finito que lo cubre.

8.4. Todo subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.

8.5. Sea $f : X \to Y$ es una función continua entre espacios topológicos. Si X es compacto entonces también lo es $f(X)$.

8.6. Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología de los complementos numerables.

a) Decidir si el espacio es compacto.

b) Caracterizar todos los subespacios compactos.

c) Usar la parte anterior para probar que no es conexo por caminos.

8.1.1. Compactos de la recta

8.7. El objetivo de este ejercicio es probar el teorema de Heine-Borel: *Un subconjunto de $\mathbb{R}$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

a) Probar que si $A \subset \mathbb{R}$ no es acotado, existe un cubrimiento abierto sin subcubrimientos finitos.

b) Supongamos que $A \subset \mathbb{R}$ no es cerrado. Construir un cubrimiento abierto que no tenga subcubrimientos finitos y concluir el directo del teorema. (Sug.: tomar en A una sucesión convergente a un punto de A^c y un cubrimiento formado por el complemento de dicha sucesión y entornos de cada término de la misma.) (C.f. .)

c) Observar que para probar el recíproco es suficiente probar que un intervalo cerrado es compacto.

d) Probar el recíproco. Sugerencia: Considerar $[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ con U_i abierto para todo $i \in I$. Definir $A = \{x \in [a, b] : [a, x]$ está contenido en una unión finita de $U_i\}$, probar que A es un intervalo abierto y cerrado.

8.8. Toda función continua a valores reales definida en un compacto tiene máximo y mínimo.

8.1.2. Compacidad en espacios Hausdorff

8.9. Un subconjunto compacto en un espacio Hausdorff es cerrado.

Observación 5. El resultado anterior nos permite concluir que un espacio métrico M compacto es necesariamente completo. Esto resulta de que M es un compacto es su completación $\hat{M}$, que es completo. Por lo tanto M es un subespacio cerrado en un completo, y por lo tanto completo.

8.10. La intersección arbitraria de compactos, en un espacio Hausdorff, es compacta.

8.11. Sea X un espacio compacto e Y Hausdorff. Una función $f : X \to Y$ continua es cerrada. Concluir que si f es continua y biyectiva entonces es un homeomorfismo.

Observación 6. Del resultado anterior se pueden concluir dos observaciones interesantes.

- No existe una función $f : [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$ continua y biyectiva (c.f. curva de Peano).

- La topología de un espacio compacto y Hausdorff satisface cierta propiedad de optimalidad:
  Sea (X, τ) un espacio compacto y Hausdorff. Entonces, si τ' es una topología estrictamente más fina que τ entonces (X, τ') no es compacto. En el otro sentido, si τ'' es una topología estrictamente menos fina que τ entonces (X, τ'') no es Hausdorff. (Considerar la función identidad con distintas topologías.)

8.12. Un espacio compacto y Hausdorff es normal.

8.1.3. Producto de espacios compactos

8.13. Si X e Y son espacios compactos, entonces $X \times Y$ es compacto.

8.14. Un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es acotado y cerrado.

Teorema (Tijonov)**.** *Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos. El espacio producto $X = \Pi_{i \in I} X_i$ es compacto si y sólo si cada uno de los espacios X_i es compacto.*

Antes de probar el Teorema de Tijonov probemos el siguiente lema:

Lema 1 (de Alexander)**.** Sea (X, τ) un espacio topológico. Si τ tiene una subbase $\mathcal{S}$ tal que todo cubrimiento $\mathcal{U}$ de X contenido en $\mathcal{S}$ tiene un subcubrimiento finito, entonces X es compacto.

Demostración. Supongamos que X no es compacto, probemos que no existe tal subbase $\mathcal{S}$. Sea $\mathcal{F}$ la familia de cubrimientos abiertos de X que no tienen subcubrimientos finitos. La ordenamos por inclusión. Es fácil observar que toda cadena está acotada por superiormente por su unión, luego existe un elemento maximal $\mathcal{M}$.

Consideremos A y B abiertos en X, luego se cumplen las siguientes propiedades:

a) $A \notin \mathcal{M}$ si y sólo si existen $M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{M}$ tal que $X = A \cup M_1 \cup \ldots \cup M_n$.

b) Si $A, B \notin \mathcal{M}$ entonces $A \cap B \notin \mathcal{M}$.

c) Si $A \subset B$ y $B \in \mathcal{M}$ entonces $A \in \mathcal{M}$.

La prueba de estas propiedades se deja como ejercicio.

Sea ahora $\mathcal{S}$ una subbase de τ. Sean $M \in \mathcal{M}$ y $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^{n} S_i \subset M$$

entonces por 3 se tiene $\bigcap_{i=1}^{n} S_i \in \mathcal{M}$ y por 2 $S_i \in \mathcal{M}$ para algún i. Ahora dado $x \in X$ tomamos $M_x \in \mathcal{M}$ tal que $x \in M_x$, y sean $S_i^x \in \mathcal{S}$ con $i = 1, \ldots, n(x)$ tales que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n(x)} S_i^x \subset M_x.$$

Existe $i_x \in \{1, \ldots, n(x)\}$ tal que $S_{i_x}^x \in M_x$. Luego $\{S_{i_x}^x : x \in X\} \subset \mathcal{M}$ es un cubrimiento abierto de X contenido en S que no tiene subcubrimientos finitos (ya que $\mathcal{M}$ no tiene subcubrimientos finitos). $\square$

Demostración(Tijonov). El directo es obvio ya que las proyecciones son continuas. Para el recíproco tomemos la subbase

$$\mathcal{S} = \{\pi_i^{-1}(A) : i \in I, A \in \tau_i\}.$$

Veamos que cumple las hipótesis del Lema de Alexander.

Sea $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$ un cubrimiento abierto de X. Consideramos para cada $i \in I$

$$\mathcal{U}_i = \{A \subset X_i : \pi_i^{-1}(A) \in \mathcal{U}\}$$

Podemos afirmar que existe $i_0 \in I$ tal que $\mathcal{U}_{i_0}$ es un cubrimiento abierto de X_{i_0}, pues si no lo fuera existiría para cada i un punto $x_i \in X_i$ tal que $x_i \notin \bigcup \mathcal{U}_i$. Entonces si $x \in X$ es tal que $\pi_i(x) = x_i$ se tiene que $x \notin \bigcup \mathcal{U}$, lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{U}$ es cumbrimiento de X.

Finalmente si $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{U}_{i_0}$ es un subcubrimiento finito de X_{i_0} entonces

$$\{\pi_{i_0}^{-1}(A_1), \ldots, \pi_{i_0}^{-1}(A_n)\} \subset \mathcal{U}$$

□

8.2. Caracterización de Compacidad en Espacios Métricos

8.2.1. Espacios totalmente acotados

Un espacio métrico compacto es necesariamente acotado ya que todo cubrimiento por bolas de radio 1 tiene un subcubrimiento finito. De lo visto en el capítulo anterior (para espacios Hausdorff) podemos concluir que en un espacio métrico los subconjuntos compactos son cerrados y acotados. Además vimos una descripción completa de los compactos de $\mathbb{R}^n$: los compactos son los subconjuntos cerrados y acotados (Heine-Borel). Sin embargo este resultado no es cierto en general.

8.15. Sea $X = \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2(\mathbb{N})$, donde e_n es la sucesión que en el lugar n tiene un 1 y el resto son ceros. X es cerrado, acotado, pero no compacto.

Observación 7. En particular la bola unidad cerrada de $\ell_2(\mathbb{N})$ no es compacta.

Veamos a continuación una propiedad interesante que tienen los compactos.

Definición. Decimos que un espacio métrico es *totalmente acotado* si para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que X puede descomponerse en unión finita de conjuntos con diámetro menor que ε.

Observación 8. Observar que un espacio métrico X es totalmente acotado si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ el espacio puede escribirse como $X = B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \varepsilon)$. En este sentido, un espacio métrico es totalmente acotado si para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito de puntos $x_1, \ldots, x_n \in X$ tal que todo punto $x \in X$ dista menos de ε de algún x_i.

Observación 9. Es claro que un espacio métrico totalmente acotado, es acotado. En $\mathbb{R}$, cualquier subconjunto acotado, es totalmente acotado. Sin embargo, esto no ocurre en general.

Observación 10. En un espacio métrico, si un subconjunto A es acotado entonces $\operatorname{diam}(\overline{A}) = \operatorname{diam}(A)$. Por lo tanto, en la descomposición de un espacio totalmente acotado podemos pedir que los subconjuntos sean cerrados.

8.16. Si X es un espacio métrico totalmente acotado entonces es separable. En particular, un espacio métrico compacto es separable.

8.2.2. Bolzano-Weierstrass y compacidad secuencial

Definición. Decimos que un espacio X satisface la *propiedad de Bolzano-Weierstrass* si todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación en X.

8.17. La compacidad implica la propiedad de Bolzano-Weierstrass.

Ejemplo 8.2.1. El recíproco del resultado anterior no es cierto. Un ejemplo de esto es $(\mathbb{Z}, \tau)$, con la topología τ generada por la base $\mathcal{B} := \{(-n, n) \cap \mathbb{Z} : n \in \mathbb{N}\}$. Verificar!

Definición. Un espacio X se dice *secuencialmente compacto* si toda sucesión tiene una subsucesión convergente.

8.18. Un espacio secuencialmente compacto cumple la propiedad de Bolzano-Weierstrass.

Ejemplo 8.2.2. El recíproco no es cierto. Basta considerar el espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau)$ dado en el ejemplo anterior. Verificar!

Teorema. *Sea X un espacio métrico. Entonces son equivalentes:*

(i) X es compacto;

(ii) X es satisface la propiedad de Bolzano-Weierstras;

(iii) X es secuencialmente compacto;

(iv) X es completo y totalmente acotado.

8.19. Probar el teorema. Se sugiere hacerlo en el orden establecido. Para probar (iv) implica (i) se sugiere seguir de manera análoga a la siguiente prueba del Teorema de Heine-Borel en $\mathbb{R}$.
Supongamos por absurdo que existe un cubrimiento abierto $[a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, sin subcubrimiento finito. Partiendo $[a, b]$ en dos intervalos cerrados (por el punto medio), tenemos que alguno de los dos intervalos no puede ser cubierto por una cantidad finita de U_α's. Sea $[a_1, b_1]$ dicho intervalo. De manera análoga construimos una sucesión de intervalos cerrados encajados que no tienen un subcubrimiento finito. Dado que $[a, b]$

es completo, por le teorema de encaje de Cantor tenemos que existe un único punto $c \in [a, b]$ común a todos los intervalos. Pero c pertenece a algún abierto U_α lo cual es un absurdo dado que en algún momento los intervalos son interiores a ese abierto, y por lo tanto son cubiertos por un abierto sólo.

Observación 11. Las propiedades (i), (ii) y (iii) son puramente topológicas, por consiguiente su equivalencia sigue siendo válida para espacios topológicos metrizables.

8.20. Usar la clasificación anterior para dar una prueba del Teorema de Tijonov para el caso de productos de espacios métricos numerables usando el proceso diagonal de cantor.

8.2.3. Número de Lebesgue de un cubrimiento

Definición. Dado un cubrimiento de un espacio métrico X por conjuntos C_α, $\alpha \in I$, el *número de Lebesgue* del cubrimiento es el real $\epsilon > 0$ tal que toda bola $B(x, \varepsilon)$ en X está contenida en al menos un C_α.

8.21. Todo cubrimiento abierto de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue. (Sug: considera la función distancia $d(x, U_i^c)$, definida en el 8.29, donde U_i es un abierto del cubrimiento (finito).)

8.22. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios métricos, donde X es compacto. Entonces f es uniformemente continua.

8.3. Espacios Localmente Compactos

Definición. Decimos que un espacio topológico X es *localmente compacto* (l.cc.) si todo $x \in X$ contiene un entorno compacto, i.e., existe $K \in \mathcal{N}_x$ tal que $x \in \operatorname{int}(K)$.

Ejemplos 8.3.1. Todo espacio compacto es l.cc., $\mathbb{R}$ es l.cc. Todo espacio discreto es l.cc. Todo subconjunto abierto o cerrado de un espacio métrico l.cc. es l.cc. Sin embargo $\mathbb{Q}$, $\ell_2(\mathbb{N})$ y cualquier bola cerrada de $\ell_2(\mathbb{N})$ no son l.cc.

Observación 12. Observar que la definición no es local: en general una espacio cumple una propiedad localmente si para todo $x \in X$ y todo $U \in \mathcal{N}_x$ se tiene que existe $V \in \mathcal{N}_x$ que cumple la propiedad $\mathscr{P}$ y $V \subset U$.

8.23. Sea X es un espacio topológico Hausdorff, entonces son equivalentes:

a) X es localmente compacto;

b) Para todo $x \in X$ y entorno $U \in \mathcal{N}_x$, existe $V \in \mathcal{N}_x$ tal que $\overline{V}$ es compacto y $\overline{V} \subset U$.

8.3.1. Compactificación por un punto

Definición. Una *compactificación* de un espacio X es un espacio $\tilde{X}$ compacto junto con una inmersión (homeomorfismo sobre su imagen) $\iota : X \to \tilde{X}$ que cumple $\overline{\iota(X)} = \tilde{X}$.

Ejemplo 8.3.1. Consideremos el intervalo $(0,1)$ con la topología heredada de $\mathbb{R}$. El intervalo $[0,1]$ junto con la inclusión es una compactificación de $(0,1)$. Otra compactificación de $(0,1)$ es el par (S^1, ι) donde $\iota(t) = e^{2\pi i t}$. Este ejemplo nos permite observar que la compactificación de un espacio (de existir) no es única.

Tomemos (X, τ) un espacio, Hausdorff, y no compacto. Definimos $\tilde{X} = X \cup \{X\}$, para simplificar la notación renombremos el punto agregado como $\infty = \{X\}$. Un entorno abierto de ∞ es $V_K = \tilde{X} - K$ donde K es un compacto de X. Llamemos $\mathcal{N}_\infty$ a la familia de entornos abiertos de ∞ y consideramos la toplogía $\tilde{\tau} = \tau \cup \mathcal{N}_\infty$. El espacio $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$ es la compactificación por un punto de (X, τ).

8.24. Probar que $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$ es efectivamente una compactificación de (X, τ), es decir que es compacto y que la inclusión es una inmersión con imagen densa. ¿Que sucede si no pedimos que X sea no compacto?

8.25. Sea X un espacio y $\tilde{X}$ su compactificación por un punto. $\tilde{X}$ es de Hausdorff si y sólo si X es localmente compacto.

8.26. Si $(\tilde{X}, \tilde{\tau}, \iota_1)$ y $(\hat{X}, \hat{\tau}, \iota_2)$ son dos compactificaciones de (X, τ) tal que $\tilde{X} - X$ y $\hat{X} - X$ tienen un punto, entonces $\tilde{X}$ y $\hat{X}$ son homemorfos.

8.27. La compactificación por un punto de $\mathbb{R}^2$ es homeomorfa a la esfera S^2.

8.4. Miscelánea

8.4.1. Propiedad de intersección finita

La noción de compacidad también puede ser formulada en términos de conjuntos cerrados.

Definición. Sean X un conjunto y $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{F}$ satisface la *propiedad de intersección finita* si para toda subfamilia finita $\{F_1, \ldots, F_n\} \subset \mathcal{F}$ se tiene $\cap_{i=1}^n F_i \neq \emptyset$.

8.28. Un espacio topológico X es compacto si y sólo si para toda familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita se tiene $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$.

8.4.2. Distancias a conjuntos

8.29. Sea (X, d) un espacio métrico, y $A \subset X$.

a) Recordar que el diámetro de un conjunto se define por $\operatorname{diam} A := \sup\{d(a,b) : a,\, b \in A\}$ (en caso de que exista). Probar que si A es compacto entonces el $\operatorname{diam} A$ existe, y existen a^*, $b^* \in A$ tal que $\operatorname{diam} A = d(a^*, b^*)$.

b) Si $x \in X$ se define $d(x, A) := \text{ínf}\{d(x,a) : a \in A\}$. Probar que $x \in X \mapsto d(x, A) \in \mathbb{R}$ es continua. Estudiar en qué casos esa distancia es realizada discutiendo según A cerrado, compacto. (Sug: en $\ell_2(\mathbb{N})$ considere $d((0)_{n\in\mathbb{N}}, F)$ donde $F = \{(1 + 1/n)e_n : n \in \mathbb{N}\}$.)

8.4.3. Dimensión infinita vs dimensión finita.

8.30. No existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $l^2(\mathbb{N})$ sea homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ con la distancia usual. Observar, por otro lado, que para todo natural n se tiene un encaje isométrico $i : \mathbb{R}^n \to l^2(\mathbb{N})$, donde la distancia en $\mathbb{R}^n$ es la euclídea.

8.31. a) $[0,1]^{[0,1]}$ con la topología producto no es secuencialmetne compacto, aunque si compacto.

b) $[0,1]^{[0,1]}$ con la topología producto no es homeomorfo a $[0,1]^n$ para ningún $n \in \mathbb{N}$.

c) El espacio vectorial $\mathcal{F}_b$ de las funciones acotadas del $[0,1]$ a $\mathbb{R}$ con la topología producto heredada de $\mathbb{R}^{[0,1]}$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ para ningún $n \in \mathbb{N}$.

8.32. Se define el cubo de Hilbert $H \subset l^2(\mathbb{N})$ dado por $H = \{x \in l^2(\mathbb{N}) : 0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}, \text{for all } n \in \mathbb{N}\}$. Probar que H es compacto. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que H tiene una copia del cubo n-dimensional $[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$, es decir, H contiene un subconjunto homeomorfo al cubo n-dimensional.

Capítulo 9

TOPOLOGÍA COCIENTE

9.1. Topología Final y Topología Cociente

Consideremos un espacio topológico (X, τ), $\sim$ una relación de equivalencia en X y $\pi : X \to X/\sim$ la proyección al cociente.

9.1. La familia $\tilde{\tau} = \{A \in X/\sim : \pi^{-1}(A) \in \tau\}$ es una topología y es la más fina que hace a la proyección π contínua.

A la topología del ejercicio anterior se le llama *topología cociente* de $X/\sim$. Observar que los abiertos en el cociente están definidos por el conjunto de clases de equivalencia tales que su unión es abierta en X.

En general si X es un espacio topológico y $f : X \to Y$ es una función podemos definir del mismo modo una topología en Y que resulta ser la más fina que hace a f contíua. Esta se denomina *topología final* de Y con respecto a f.

Ejemplo 9.1.1. En el 1.7 del Capítulo 1 se vió que el toro, bitoro, tritoro, etc, pueden ser vistos como el cociente de poligonos de $4n$ lados por una relación que identifica pares de lados. Observar que la topología natural de estas superficies como subespacios de $\mathbb{R}^3$ es la topología cociente.

9.2. $\tilde{f} : X/\sim \to Y$ es contínua si y sólo si $\tilde{f} \circ \pi : X \to Y$ lo es.

9.1.1. Propiedad universal del cociente y ejemplos

9.3. Propiedad Universal del Cociente. Sean X e Y dos espacios topológicos, $\sim$ una relación en X, y $f : X \to Y$ continua constante en las clases de equivalencia (i.e. $x \sim y$ entonces $f(x) = f(y)$). Entonces existe una única función contínua $\tilde{f} : X/\sim \to Y$ tal que $f = \tilde{f} \circ \pi$.

9.4. Sea X compacto e Y Hausdorff, y sea $f : X \to Y$ continua y sobreyectiva. Definimos la relación de equivalence $\sim$ en X declarando $x \sim y$ si y sólo si $f(x) = f(y)$. Entonces $X/\sim$ es homeomorfo a Y.

9.5. Se considera en $\mathbb{R}$ la siguiente relación: $x \sim$ y si y sólo si $x-y \in \mathbb{Z}$. Entonces $\mathbb{R}/\sim$ es homeomorfo a $[0,1]$ identificando 0 y 1 (Sugerencia: probar que $\mathbb{R}/\sim$ es Hausdorff). Concluir que el cociente $\mathbb{R}/\sim$ es homeomorfo al circulo S^1.

9.6. El *toro n-dimensional* $\mathbb{T}^n$ se define como el cociente $\mathbb{R}^n/\sim$ donde $(x_1,\ldots,x_n) \sim (y_1,\ldots,y_n)$ si y sólo si $x_i - y_i \in \mathbb{Z}$ para $i=1,\ldots,n$. $\mathbb{T}^n$ es homeomorfo a $(S^1)^n$.

9.7. Sea X un espacio topológico, y sea $\sim$ una relación de equivalencia en X. Las propiedades en X de ser compacto, conexo o arcoconexo son propiedades que pasan al cociente $X/\sim$.

9.2. Colapsado de Subespacios y Pegado de Espacios

9.8. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Ponemos en X la relación: $x \sim y$ si $x, y \in A$ o $x = y$. Obtenemos así un espacio $X/\sim$ al que notaremos (sólo en este curso) X/A. Observar que $\pi : X \to X/A$ es la identidad en $X - A$ y lleva el conjunto A a un sólo punto, se dice que π *colapsa* A a un punto.

Estudiar (y dibujar si es posible) los siguientes espacios:

a) S^2/A donde A es el Ecuador, es decir, $A = S^2 \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$.
b) $\mathbb{R}^2/\{(x,y) : xy = 0\}$.
c) $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
d) $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

9.9. Pegado de Espacios. Sean X e Y dos espacios topológicos, $A \subset X$ y $f : A \to Y$ una función continua. Consideremos en $X \cup Y$ la relación: $x \sim y$ si $x = y$ o $y = f(x)$. Notaremos al cociente por esta relación como $X \cup_f Y$.

Estudiar $X \cup_f Y$ en los siguientes casos:

a) $X = B[0,1] \subset \mathbb{R}^2$, $Y = \{y_0\}$ y $f : S^1 \to Y$.
b) $X = B[0,1] \times \{0\}, Y = B[0,1] \times \{1\} \subset \mathbb{R}^n$, $f : S^{n-1} \times \{0\} \to Y$, $f(x,0) = (x,1)$.
c) Sean $D \subset \mathbb{T}^2$ homeomorfo a un disco, $X = (\mathbb{T}^2 - D) \times \{0\}$ e $Y = (\mathbb{T}^2 - D) \times \{1\}$, $f : \partial D \times \{0\} \to \partial D \times \{1\}$, $f(x,0) = (x,1)$.

9.3. Miscelánea

9.10. $(\tilde{X}, \iota)$ una compactificación del espacio X (X es de Hausdorff y no compacto). Consideremos en $\tilde{X}$ la siguiente relación de equivalencia: $x \sim y$ si $x = y$ o $x, y \notin \iota(X)$. Probar que $\tilde{X}/\sim$ es homeomorfa a la compactificación por un punto de X.

9.11. Sea X un espacio topológico. Consideremos la relación: $x \sim y$ si $y \in U$ para todo $U \in \mathcal{N}_x$ y $x \in V$ para todo $V \in \mathcal{N}_y$. Observar que $X/\sim$ es siempre T_0 y que si X es T_0 entonces $X = X/\sim$. Pensar que tiene que cumplir $\sim$ para que $X/\sim$ sea T_1.

9.12. Probar que $X/\sim$ es $T1$ si y sólo si las clases de $\sim$ en X son cerradas.

9.13. Sea f una función continua y abierta entre espacios topológicos X e Y. Mostrar que Y es homeomorfo al cociente de X identificando los conjuntos de nivel.

9.14. Para $n \geq 1$ definimos $\mathbb{P}^n = S^n/\sim$, donde $x \sim y$ si y sólo si $x = y$ o $x = -y$ (i.e. se idenfican puntos antipodales). El espacio $\mathbb{P}^n$ se llama *espacio proyectico real* de dimensión n. Observar que $\mathbb{P}^n$ puede ser pensado como el conjunto de rectas por el origen. Probar los siguientes resultados

a) $\mathbb{P}^n$ es compacto y Hausdorff.
b) La proyección $\pi : S^n \to \mathbb{P}^n$ es un homeomorfismo local, esto es, cada punto $x \in S^n$ tiene un entorno abierto que es mapeado homeomorfamente por π en un entorno abierto de $\pi(x)$.
c) $\mathbb{P}^1$ es homeomorfo al círculo S^1.
d) $\mathbb{P}^n$ es homeomorfo al cociente de la bola unidad cerrada $B[0,1] \subset \mathbb{R}^n$ identificando puntos antipodales de S^{n-1}.