Una introducción a los códigos algebraicos geométricos y el problema asintótico

Dra. María Chara

Investigadora de CONICET en Universidad Nacional del Litoral

Al transmitir información a través de un canal pueden aparecer errores que dificultan la comunicación. El objetivo de la teoría de códigos es encontrar métodos eficientes para codificar la información (agregar redundancia) de manera que los errores puedan ser detectados y corregidos.

Considerando el cuerpo finito $\mathbb{F}_q$ con q elementos, podemos decir que un $\mathbb{F}_q$-*código lineal* $\mathcal{C}$ de dimensión k y longitud n es un subespacio vectorial de $\mathbb{F}_q^n$ de dimensión k.

Los parámetros n y k, junto con la distancia mínima d, son muy importantes para el estudio de la eficiencia de los códigos, ya que un k grande permite enviar mucha información (relativo a la cantidad de caracteres que se envían), mientras que d tiene que ver con la capacidad detectora y correctora de errores.

Tradicionalmente, los códigos se definían de forma algebraica o usando teoría de números. En 1977, Goppa revolucionó la teoría al introducir códigos definidos usando curvas algebraicas sobre cuerpos finitos, hoy llamados AG-códigos (por algebraic geometric), dando una manera de construir códigos con buenos parámetros (k y d grandes en comparación con n y n grande comparado con q). Su construcción requiere utilizar los puntos racionales de una curva algebraica no singular absolutamente irreducible, o equivalentemente n lugares racionales $P_1, \ldots, P_n$ de un cuerpo de funciones F sobre $\mathbb{F}_q$.

En 1982, Tsfasman, Vladut y Zink demostraron en un destacado artículo que existen secuencias de códigos lineales sobre $\mathbb{F}_{p^2}$ (siendo p un número primo) cuyos parámetros relativos cumplen con lo que hoy se conoce como la cota de Tsfasman–Vladut–Zink. Para cuerpos finitos de cardinalidad cuadrada mayor a 49, esta cota supera la conocida cota de Gilbert–Varshamov en ciertos rangos. Así, su trabajo fue el primero en mostrar la existencia de una secuencia de códigos lineales que supera la cota de Gilbert–Varshamov para infinitos cuerpos finitos.

Casi 25 años después, Stichtenoth avanzó en esta dirección al reprobar el resultado de Tsfasman, Vladut y Zink. En su trabajo, demostró la existencia de secuencias de códigos transitivos y códigos autoduales sobre cuerpos finitos $\mathbb{F}_q$ de cardinalidad cuadrada $q > 4$ que alcanzan la cota de Tsfasman–Vladut–Zink.

En esta charla, repasaremos brevemente esta evolución y presentaremos las herramientas necesarias para el estudio del problema asintótico para diferentes familias de códigos AG. Presentaremos algunos resultados recientes en los que, a partir de herramientas provenientes de la clausura de Galois de torres recursivas óptimas, se logran secuencias de códigos bloque-transitivos que alcanzan la cota de Tsfasman–Vladut–Zink, preservando propiedades estructurales explícitas. Estos resultados, generalizan los obtenidos por Stichtenoth al debilitar ligeramente la noción de transitividad.

La charla está pensada para un público matemático amplio: se introducirán todas las definiciones básicas necesarias, por lo que no se requiere conocimiento previo en teoría de códigos.