**La ecuación hipoelíptica de Kolmogorov y su relación con la fórmula de Feynman-Kac para la ecuación del calor con enfriamiento**

En 1934 Kolmogorov escribió un artículo memorable de dos páginas en el cual consideraba versiones multidimensionales de la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial^2 y} - y\frac{\partial u}{\partial x} \\ u(0,x,y) &= \delta_{x'}(x)\otimes\delta_{y'}(y) \end{aligned}$$

Si tomamos transformada de Fourier con respecto a la variable $x$ se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} &= \frac{1}{2}\frac{\partial \hat{u}}{\partial^2 y} - i\gamma y\hat{u} \\ \hat{u}(0,\gamma,y) &= e^{-i\gamma x'}\delta_{y'}(y) \end{aligned}$$

La ecuación anterior es una ecuación del calor con enfriamiento

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} &= \frac{1}{2}\frac{\partial \hat{u}}{\partial^2 y} - V(y)\hat{u} = \frac{1}{2}\frac{\partial \hat{u}}{\partial^2 y} - i\gamma c(y)\hat{u} \\ \hat{u}(0,\gamma,y) &= f(y) \end{aligned}$$

solo que aquí el enfriamiento $V(y) = i\gamma c(y)$ es imaginario puro. La variable $\gamma$ es considerada como una constante obteniendo así así una familia de ecuaciones. La solución de tales ecuaciones puede escribirse por medio de la esperanza de un funcional del Movimiento Browniano. Se cumple la siguiente fórmula de Feynman-Kac

$$\hat{u}(t,\gamma,y) = \mathbb{E}[e^{-i\gamma\int_0^t c(y+W(s))ds} f(y+W(t))].$$

La fórmula de inversión permite obtener la solución $u(t,x,y)$. En la exposición formalizaremos esta idea, resolveremos algunos ejemplos y obtendremos una fórmula asintótica cuando $t$ es pequeño.