Métodos categóricos en álgebras de Hopf

Centro Universitario de la Región Este
Universidad de la República
Maldonado, Uruguay

16 – 18 de diciembre de 2017

Resúmenes

Álgebras de Nichols sobre álgebras de Hopf básicas

Nicolás Andruskiewitsch
Universidad Nacional de Córdoba

Se muestra cómo calcular las álgebras de Nichols de módulos de Yetter-Drinfeld semisimples sobre álgebras de Hopf básicas. (Trabajo en en colaboración con Iván Angiono.)

Hopf structures for the lazy mathematician

Alain Bruguières
Universsié Montpellier II – CNRS – Universidad de la República

What does the prefix 'Hopf' mean? If a bialgebra A is Hopf, it is well known that its category of finite dimensional representations has duals in the monoidal sense (it is rigid), but the converse is false because A may have too few finite dimensional modules. One can avoid this problem by considering comodules, but avoiding the problem doesn't make it disappear. There is a better characterization in terms of internal Homs: A is Hopf if and only if the forgetful functor $U\colon \mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Vect}$ is monoidal closed, that is, it preserves internal Homs. However, for quasi- Hopf algebras, the forgetful functor U is no longer monoidal closed. I will discuss what it means to preserve internal Homs, and in particular I will introduce a notion of slack closeness which is adapted to this situation. This surprizingly weak and almost naïve notion, which can be formulated in so-called magmoidal categories (with an arbitrary functorial law), and even in the absence of internal Homs, leads naturally to the notion of a slack Hopf magmoidal monad and sheds a new light on the notion of antipode. In particular for quasi-Hopf algebras, the 'Hopfitude' and the 'quasitude' turn out to be independent properties, although they seem intertwined in Drinfeld's axioms.

In Spanish with English subtitles. Based on joint work with Mariana Haim and Ignacio López Franco.

Cohomología en categorías 2-monoidales

Javier Cóppola
Universidad de la República

Varias nociones de cohomología conocidas (de grupos, de Hochschild, de Cartier, de especies) se pueden ver en un mismo contexto general: todas son, en alguna categoría monoidal, la cohomología de un (co)monoide con coeficientes en un bi(co)módulo. Con hipótesis adicionales sobre este último también se puede describir de forma general el producto cup en estas cohomologías.

Hablaré de un trabajo que estamos desarrollando en conjunto con Mariana Pereira, en el que interpretamos algunos de estos productos cup como una convolución con respecto a una segunda estructura monoidal en la categoría.

Algebraic quantum kk-theory

Eugenia Ellis
Universidad de la República

Let $\mathcal{G}$ be an algebraic quantum group in the sense of Van Daele. We define a bivariant K-theory on the category of $\mathcal{G}$-module algebras. For each pair (A, B) of $\mathcal{G}$-module algebras we define a group $\mathrm{kk}^{\mathcal{G}}(A, B)$ and consider the category $\mathfrak{KK}^{\mathcal{G}}$ whose objects are the $\mathcal{G}$-module algebras and the morphisms from A to B are the elements of $\mathrm{kk}^{\mathcal{G}}(A, B)$. Consider the functor $j^{\mathcal{G}} : \mathcal{G}\text{-Alg} \to \mathfrak{KK}^{\mathcal{G}}$ which at the level of objects is the identity and at the level of morphisms sends $f : A \to B$ to its class $[f]$ in $\mathrm{kk}^{\mathcal{G}}(A, B)$. The category $\mathfrak{KK}^{\mathcal{G}}$ is triangulated and $j^{\mathcal{G}}$ is an excisive, homotopy invariant and $\mathcal{G}$-stable functor. Moreover, it is the universal functor for these properties.

The Green-Julg Theorem in Kasparov KK-theory states that if G is a compact group and B is a G-C^*-algebra, then there exists an isomorphism

$$\mu : \mathrm{KK}^{G}(\mathbb{C}, B) \to \mathrm{KK}(\mathbb{C}, B \rtimes G).$$

The main theorem of this talk is a version of Green-Julg Theorem for $\mathfrak{KK}^{\mathcal{G}}$ when $\mathcal{G}$ is a semisimple Hopf algebra. Let A be an algebra and B a $\mathcal{G}$-module algebra then there exists an isomorphism

$$\psi : \mathrm{kk}^{\mathcal{G}}(A^{\tau}, B) \to \mathrm{kk}(A, B\#\mathcal{G})$$

where $B\#\mathcal{G}$ denotes the smash product. In particular, we obtain that $\mathrm{kk}^{\mathcal{G}}(\mathbb{C}, B) \simeq \mathrm{KH}(B\#\mathcal{G})$.

Bicoronas y coronas emparejadas

Bojana Femic
Universidad de la República

Lack y Street introdujeron coronas en el 2002. Estas son mónadas en la 2-categoría de Eilenberg-Moore de mónadas. Vienen dadas por tres 2-celdas que satisfacen ciertos 7 axiomas, en la bicategoría inducida por una categoría monoidal C esto corresponde a tres morfismos. Productos cruzados en espacios vectoriales (Vec) son un ejemplo de coronas. En el 2014 Bulacu y Caenepeel mostraron que una variedad de construcciones conocidas en álgebra son también ejemplos de coronas. La pregunta que me surgió de estos trabajos es cómo saber qué tres morfismos sirven para tener una corona. En todos los ejemplos tratados uno de los tres morfismos es composición de dos morfismos unidad, otro es una trenza (lo que está claro porque tiene que ser una ley distributiva), pero el origen del tercero no estaba claro

En mi último trabajo introduje bimónadas en una 2-categoría K arbitraria para introducir bicoronas, como bimónadas en la 2-categoría de tipo Eilenberg-Moore de bimónadas. Desde la perspectiva de bicorona se vuelve clara la forma del tercer morfismo de arriba. Además, bicorona da lugar a conceptos de: 2-(co)cíclos, (co)módulo (co)mónadas, (co)acciones torcidas por 2-(co)cíclos y módulos de Yetter-Drinfel'd en K. De esta manera, desde el contexto de 2-categorías se revela por qué 2-cocíclos tuercen la multiplicación en muchos contextos en álgebra. Como ejemplo principal de una bicorona hallé el biproducto de Radford en K. Cuando K proviene de C trenzada, esa bicorona es biproducto de Radford en C si y solo si la bicorona es una bimónada, generalizando así el resultado conocido en Vec.

Bicoronas dieron lugar a objetos tipo bicorona (mixtos), los que generalizan al contexto de 2-categorías el producto cruzado de Sweedler, por un lado, y el concepto de coacción torcida en C trenzada, así llamada por Street en su trabajo del 2016, por el otro. Coacción torcida formaliza la definición de comódulo álgebras (de Hausser y Nill) sobre una quasi-biálgebra B, pero en el contexto donde B es biálgebra en C.

En dichas construcciones la 1-celda compuesta FB en general no es una bimónada, excepto en el biproducto de Radford en C. En mi trabajo actual introduzco coronas emparejadas que son bimónadas y cubren una mayor familia de productos cruzados conocidos en espacios vectoriales (de Majid y Schauenburg), además de dar lugar a nuevos productos cruzados no considerados previamente. Coronas emparejadas generalizan al contexto de 2-categorías a los resultados de Bespalov y Drabant hechos en C trenzada.

En esta charla pretendo mostrar los resultados de mis trabajos mencionados arriba.

Álgebras KLR (y sus deformaciones)

Agustín García
Universidad Nacional de Córdoba

Para cada dato de Cartan D, Khovanov y Lauda definen un álgebra graduada cuya categoría de módulos proyectivos categorifica la (forma integral) del álgebra de Nichols asociada a D. En la charla, estudiaremos esta construcción y discutiremos algunas ideas tendientes a generalizar esta construcción para álgebras de Nichols más generales.

Álgebras de Hopf en Teoría de Categorías

Ignacio López Franco
Universidad de la República

En esta serie de dos charlas repasaremos algunas algunas partes de la Teoría de Categorías que han sido más influenciadas por las álgebras de Hopf y pero que son menos conocidas. Cubriremos algunos de los siguientes temas: dualizaciones (Day-McCrudden-Street), categorías skew monoidales (Szlachányi, Lack, Street).

Group action on 2-categories

Marín Mombelli
Universidad Nacional de Córdoba

Given a 2-category B, I will show how a finite group can act on B. The G-equivariantization will be presented. This notion generalizes some known constructions in the theory of tensor categories, which was our main motivation for the definition of equivariantization. Some concrete examples will be shown.

Desde las álgebras de Hopf hacia las categorías tensoriales

Héctor Peña
Universidad Nacional de Córdoba

Esta charla sigue detenidamente la exposición del tema dada en [1]. Se mostrará una forma sistemática de construir categorías tensoriales a partir de las categorias de representaciones de ciertas álgebras de Hopf pasando al cociente por objetos de traza cuántica cero (proceso que fue descripto en [2]). En partícular necesitaremos que la álgebra de Hopf seá esférica, noción que se definirá y se mostraran algunas condiciones que garantizan que el álgebra de Hopf sea de este tipo. Luego estudiaremos como obtener subcategorías de fusión de estas algebras tensoriales fabricadas, en partícular se expondrá el método vía módulos de Tilting para álgebras cuasi-hereditarias [3]. Finalmente se discutirá el caso especial de grupos cuánticos con q raíz de la unidad, donde los módulos de Tilting se obtienen mediante filtraciones buenas y filtraciones de Weyl (Ver [4] y [5]).

[1] “From Hopf Algebras to Tensor Categories”. N. Andruskiewitch, I. Angiono, A. García Iglesias, B. Torrecillas and C. Vay. From 'Conformal Field Theories and Tensor Categories', Mathematical lectures from Peking University, DOI 10.10007/978-3-642-39383-9. Springer- Velag Berlin Heindelberg 2014.

[2] ”Spherical Categories” John W. Barrett and Bruce W. Westbury. Advances in Mathematics, Volume 143, Number 2, 1999. Pág 357.

[3] “The category of modules with good filtrations over quasi-hereditary algebra has almost split sequences” C.M. Ringel. Mathematische Zeitschrift Band 208, Heft 2, 1991. Pág 209.

[4] “Tensor Products of Quantized Tilting Modules” H.H. Andersen. Comm. In Mathematical Physics, Volume 149, Number 1, 1992. Pág 149.

[5] “From Quantum Groups to Unitary Modular Tensor Categories”. Eric C. Rowell. Contemporary Mathematics 2005 (`arXiv:math/0503226`).

Categorificación de quantum $\mathfrak{sl}_2$

Guillermo Sanmarco

Universidad Nacional de Córdoba

A partir de las notables propiedades de integrabilidad y positividad de las bases canónicas de los grupos cuánticos, desarrollada por Luzstig en [Lus], se impulsaron diversos trabajos interesados en realizar a (la teoría de representaciones de) $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ como el anillo de Grothendieck de una estructura categórica superior. En esta charla repasaremos las ideas desarrolladas por Lauda en [Lau1] para categorificar directamente el álgebra $\dot{U}(\mathfrak{sl}_2)$ de Lusztig. Para ello introduciremos su base canónica y repasaremos algunos aspectos de su teoría de representaciones. En particular, introduciremos la representación irreducible V^N de dimensión N+1 de $\dot{U}$. Finalmente, mostraremos las ideas usadas en [Lau3] y [Lau2] para categorificar estas representaciones mediante acciones de cocientes ciclotómicos de álgebras nilHecke.

[Lau1] Aaron D. Lauda, A categorification of quantum sl(2), Adv. Math. 225 (2010), no. 6, 3327–3424. MR 2729010 (2012b:17036).

[Lau2] ______, Categorified quantum sl(2) and equivariant cohomology of iterated flag varieties, Algebr. Represent. Theory 14 (2011), no. 2, 253–282. MR 2776785.

[Lau3] ______, An introduction to diagrammatic algebra and categorified quantum sl2. Bulletin Inst. Math. Academia Sinica, 7:165–270, 2012. `arXiv:1106.2128.`

[Lus] George Lusztig, Introduction to quantum groups, Progress in Mathematics, vol. 110, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993.

Índice de expositores