

---

# Notas de Geometría a Gran Escala

---

por Emiliano Sequeira



# Prefacio

Todo se puso raro una vez hube saltado el muro. Fue ahí cuando recordé las palabras de mi padre:

– El *cuasi-mundo* es un lugar oscuro y confuso, hijo mío –me dijo con la cara casi pegada al suelo mientras intentaba sacar de abajo del sofá un maní con chocolate que se le había caído. Antes habíamos estado hablando sobre jugar a la pelota en el baldío–. Te exhorto a que te mantengas alejad... –se detuvo un segundo para atrapar su presa e incorporarse–. A veces la curiosidad lo lleva a uno a cometer errores irreversibles, más a una edad temprana –me sonrió y me frotó la cabeza cariñosamente con la mano desocupada. Después sopló un poco sobre su otra mano, se metió el maní en la boca y se alejó caminando despacito por el pasillo.

Pero mi inconciencia de niño y mi hambre de gloria me traicionaron; y el consejo de mi padre fue tapado por la fantasía de volver triunfante con la pelota bajo el brazo como un héroe.

Una vez toqué la tierra de este lado, el muro que tenía a mi espalda se convirtió en horizonte; y entonces no tuve más que caminar hacia adelante, internarme en aquel bosque de árboles infinitamente altos y sin hojas, cuyas copas, sin embargo, cubrían su buena porción de cielo. Comenzaron así los días de presbicia y existencia trivial, y una sucesión de intentos fallidos de salir de aquel lugar. A estos, y a la desesperación posterior, siguió el temple de mi carácter y la convicción de que no había otra salida que aprender las reglas de este mundo.

Aprendí a desconfiar de la cercanía y mirar las cosas de lejos. Solo entonces empecé a hacer algunas observaciones valiosas, que intenté mezclar con los conocimientos que traía de mi mundo. Pero tuvieron que pasar varios meses, e incluso años para que la extrañeza del primer día presentara alguna señal de merma.

Encontré una tribu de nativos en medio de un espeso bosque de árboles regulares, casi todos de grado tres. Sus rostros no se distinguían entre ellos, ni del mío. De ellos aprendí cosas que el tiempo les había enseñado generación tras generación. Me propuse llevar registro de cada detalle con el objetivo de algún día encontrar la clave que me permita volver a casa.

Aquí está, pues, el resultado de mi trabajo de recolección, corregido y explicado lo mejor que he podido. Si ha caído en tus manos tal vez signifique que sos (o alguna vez fuiste) otro niño que saltó el muro buscando una pelota, y que yo ya no estoy en este mundo.

# Índice general

|          |                                                                             |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introducción</b>                                                         | <b>4</b>  |
| 1.1      | El problema de la escala . . . . .                                          | 4         |
| 1.2      | Propiedades locales vs propiedades globales . . . . .                       | 4         |
| 1.3      | Un ejemplo clásico: grupos finitamente generados . . . . .                  | 5         |
| <b>2</b> | <b>Preliminares</b>                                                         | <b>7</b>  |
| 2.1      | Espacios métricos . . . . .                                                 | 7         |
| 2.1.1    | Distancias entre subconjuntos . . . . .                                     | 8         |
| 2.1.2    | Cuasi-métricas . . . . .                                                    | 9         |
| 2.2      | Curvas en un espacio métrico . . . . .                                      | 11        |
| 2.3      | Medidas de Borel en espacios métricos . . . . .                             | 16        |
| 2.4      | Formas diferenciales . . . . .                                              | 17        |
| 2.5      | Métricas Riemannianas . . . . .                                             | 19        |
| <b>3</b> | <b>Quasi-isometrías</b>                                                     | <b>22</b> |
| 3.1      | Primeros ejemplos . . . . .                                                 | 24        |
| 3.1.1    | Crecimiento de volumen y clasificación de los espacios euclídeos . . . . .  | 25        |
| 3.1.2    | Grupos finitamente generados . . . . .                                      | 28        |
| 3.2      | Grupo de cuasi-isometrías . . . . .                                         | 34        |
| 3.3      | Cuasi-similaridades e isometrías aproximadas . . . . .                      | 35        |
| 3.4      | Comentarios finales . . . . .                                               | 37        |
| <b>4</b> | <b>Hiperbolicidad</b>                                                       | <b>38</b> |
| 4.1      | El plano hiperbólico . . . . .                                              | 38        |
| 4.1.1    | Crecimiento de volumen . . . . .                                            | 39        |
| 4.1.2    | Triángulos . . . . .                                                        | 40        |
| 4.1.3    | Borde al infinito . . . . .                                                 | 41        |
| 4.1.4    | Generalizaciones . . . . .                                                  | 42        |
| 4.2      | Condiciones de hiperbolicidad de Gromov . . . . .                           | 44        |
| 4.3      | Estabilidad de cuasi-geodésicas e Invarianza por cuasi-isometrías . . . . . | 49        |

|          |                                                         |           |
|----------|---------------------------------------------------------|-----------|
| 4.4      | Borde al infinito . . . . .                             | 56        |
| 4.4.1    | Métricas visuales . . . . .                             | 60        |
| 4.4.2    | Acción de cuasi-isometrías en el borde . . . . .        | 64        |
| 4.5      | Comentarios finales . . . . .                           | 68        |
| <b>5</b> | <b>Cohomología <math>L^p</math></b>                     | <b>71</b> |
| 5.1      | Cohomología . . . . .                                   | 71        |
| 5.1.1    | Homotopía . . . . .                                     | 72        |
| 5.1.2    | Bicomplejos . . . . .                                   | 73        |
| 5.2      | Cohomología $\ell^p$ simplicial . . . . .               | 75        |
| 5.2.1    | Invarianza por cuasi-isometrías . . . . .               | 78        |
| 5.3      | Cohomología $L^p$ de De Rham . . . . .                  | 83        |
| 5.3.1    | Lema de Poincaré $L^p$ . . . . .                        | 84        |
| 5.3.2    | Teorema de De Rham $L^p$ . . . . .                      | 89        |
| 5.4      | Algunos cálculos . . . . .                              | 93        |
| 5.4.1    | El espacio hiperbólico real $\mathbb{H}^n$ . . . . .    | 97        |
| 5.4.2    | El plano hiperbólico complejo $\mathbb{CH}^2$ . . . . . | 99        |
| 5.5      | Comentarios finales . . . . .                           | 101       |

# Capítulo 1

## Introducción

Estas notas están avocadas al estudio de las propiedades geométricas propias de las grandes escalas. Esto puede pensarse intuitivamente mediante la siguiente pregunta: ¿qué es reconocible sin importar desde qué tan lejos se observe un objeto?

Intentaremos aproximarnos paso a paso a la óptica que deseamos adoptar.

### 1.1 El problema de la escala

Consideramos dos trozos grandes de tela de idéntico color y forma extendidos sobre una pared. Si no se nos permite acercarnos demasiado podríamos sentenciar que se trata de dos trozos de la misma tela, sin embargo, podría pasar que cada una tuviese un estilo de tejido distinto. Por otro lado, si tuviésemos dos trozos muy grandes de tela que no estuvieran extendidos, podríamos observarlos de cerca y comprobar que se trata del mismo estilo de tejido pero no podríamos determinar, por ejemplo, que tienen la misma forma y dimensiones.

En el primer caso la apreciación es muy grosera, por tanto se está observando cada trozo a grandes escalas. En el segundo caso se los están observando a escalas pequeñas con una apreciación más fina.

Algo similar puede pensarse al hacer mediciones: la apreciación del instrumento permitirá distinguir las diferencias que tengan dos objetos a escalas mayores a dicha apreciación. Por tanto se escaparán las diferencias a escalas pequeñas.

A lo largo de estas notas nos concentraremos en las diferencias a escalas grandes (de hecho, a escalas arbitrariamente grande).

### 1.2 Propiedades locales vs propiedades globales

Supongamos que a la recta  $\mathbb{R}$  le quitamos un punto (por ejemplo el cero), obteniendo el espacio  $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . ¿Qué diferencias hay entre  $\mathbb{R}$  y  $X$ ?

Por ejemplo, podemos observar que:

- $\mathbb{R}$  es completo y  $X$  no,
- $\mathbb{R}$  es conexo (y arcoconexo) mientras que  $X$  es desconexo.

Ambas propiedades, la completitud y la conexión, son propiedades locales; es decir que pueden romperse modificando un subconjunto arbitrariamente pequeño del espacio. Esto las hace imperceptibles a grandes escalas. Nos interesarán principalmente las propiedades que llamaremos *globales*. Esto es, propiedades que se mantengan al modificar un subconjunto arbitrariamente grande.

Siguiendo la consigna de la sección anterior, si miramos de lejos  $\mathbb{R}$  y  $X$  no encontraremos diferencias. Pero como esto puede parecer tramposo, pues no somos capaces de ver lo que no tiene superficie, podemos pensar en los siguientes espacios:

$$Y = \mathbb{R} \times [0, 1] \quad \text{y} \quad Z = ((-\infty, 0] \cup [1, +\infty)) \times [0, 1].$$

Al mirar de lejos ambos espacios el conjunto  $(0, 1) \times [0, 1]$ , que está en  $Y$  pero no en  $Z$ , se hará despreciable y terminaremos viendo dos objetos iguales (de hecho, igual a una recta).

Entonces, ¿Qué propiedades sí son globales? De manera informal podríamos señalar el siguiente hecho común a  $\mathbb{R}$ ,  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ : en todos ellos existen dos formas de irse a infinito. Esto los diferencia por ejemplo de una semirrecta, donde hay una única manera de hacerlo.

### 1.3 Un ejemplo clásico: grupos finitamente generados

Supongamos que  $G$  es un grupo finitamente generado y  $S$  es un generador finito y simétrico (es decir, si  $S^{-1} = S$ ). Dado un elemento cualquiera  $g \in G$  se define su norma  $\|g\|_S$  como el mínimo  $\ell$  tal que existen elementos  $s_1, \dots, s_\ell \in S$  tales que  $g = s_1 s_2 \cdots s_\ell$ . La norma de la unidad se establece como 0. Esto induce una distancia, llamada *distancia de palabras* para el generador  $S$ , de la siguiente forma:

$$d_s(g, h) = \|g^{-1}h\|_S.$$

Si ahora consideramos otro generador  $S'$  obtendremos otra distancia distinta  $d_{S'}$ . Sin embargo, puede verse que  $d_S$  y  $d_{S'}$  son Lipschitz equivalentes, es decir que existe una constante  $\lambda \geq 1$  tal que para todo par de elementos  $g, h \in G$  se tiene

$$\lambda^{-1} d_S(g, h) \leq d_{S'}(g, h) \leq \lambda d_S(g, h).$$

Por otro lado, si  $H$  es un subgrupo de  $G$  de índice finito, puede verse que también es finitamente generado y por lo tanto está dotado con una familia de distancias de palabras (en la misma clase Lipschitz). ¿Qué relación (métrica) hay entre  $G$  y  $H$  al considerar en ellos distancias de longitud?

En el caso anterior el grupo  $H$  actúa en  $G$  por isometrías (para cualquier distancia de palabras). Esta acción tiene un dominio fundamental finito. Podríamos considerar un caso más general: un grupo finitamente generado  $G$  actuando en un espacio métrico  $X$  por isometrías con un dominio fundamental compacto. Por ejemplo podemos hacer actuar  $\mathbb{Z}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  por traslaciones. Es claro que  $\mathbb{Z}^2$  es finitamente generado y que el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  es un dominio fundamental. Podemos ver que la distancia de palabras  $d_S$ , para  $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$ , es Lipschitz equivalente a la distancia euclídea en  $\mathbb{Z}^2$  (de hecho, es la distancia inducida por la norma de la suma  $\|\cdot\|_1$ ), luego la inclusión  $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es biLipschitz.

Notar que a grandes escalas la distancia entre dos puntos  $x$  e  $y$  de  $\mathbb{R}^2$  puede aproximarse por la distancia de palabras entre dos elementos de  $\mathbb{Z}^2$  que estén suficientemente cerca de  $x$  e  $y$ . Más precisamente, supongamos que  $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$  cumplen

$$\|x - z_1\|, \|y - z_1\| \leq 1.$$

Luego

$$\lambda^{-1}d_S(z_1, z_2) - 2 \leq \|z_1 - z_2\| - 2 \leq \|x - y\| \leq \|z_1 - z_2\| + 2 \leq \lambda d_S(z_1, z_2) + 2,$$

para alguna constante  $\lambda \geq 1$ . Podemos pensar en  $z_1$  y  $z_2$  como las imágenes de  $x$  e  $y$  por una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  que cumple  $\|\tilde{x} - f(\tilde{x})\| \leq 1$  para todo  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ .

La desigualdad anterior nos da una relación más débil que la equivalencia Lipschitz entre espacios métricos a la que llamaremos *cuasi-isometría*. Veremos más adelante que bajo ciertas condiciones un grupo finitamente generado es *cuasi-isométrico* al espacio métrico en el que actúa.

# Capítulo 2

## Preliminares

### 2.1 Espacios métricos

Una *métrica* o *distancia* en un conjunto  $X$  es una función  $|\cdot - \cdot| : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  tal que:

- (1)  $|x - y| = 0$  si y solo si  $x = y$ .
- (2)  $|x - y| = |y - x|$  para todo par de puntos  $x, y \in X$ .
- (3)  $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$  para toda terna  $x, y, z \in X$ . Esta propiedad se conoce como *desigualdad triangular*.

Usaremos indistintamente los términos “métrica” y “distancia”, salvo en el caso de variedades Riemannianas, donde será necesario usar estos términos con diferente significado.

Un *espacio métrico* es un par  $(X, |\cdot - \cdot|)$ , donde  $|\cdot - \cdot|$  es una métrica en  $X$ . Para simplificar omitiremos la métrica y notaremos simplemente  $X$ . La métrica será siempre notada de esta forma, salvo que sea necesario hacer alguna distinción. Otra notación usual para indicar la distancia entre  $x$  e  $y$  es  $d(x, y)$ .

Las *bola abierta de centro*  $x_0 \in X$  *y radio*  $r > 0$  en  $X$  es el conjunto

$$B(x, r) = \{x \in X : |x - x_0| < r\},$$

y la correspondiente *bola cerrada*,

$$\bar{B}(x, r) = \{x \in X : |x - x_0| \leq r\}.$$

La familia de bolas abiertas generan una topología en  $X$ . Todas las propiedades topológicas de  $X$  a las que se haga referencia en adelante serán siempre con respecto a esta topología. Es así, por ejemplo, con las funciones continuas, para las cuales existen las siguientes formulaciones equivalentes:

- Para todo  $x_0$  y  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|x - y| < \delta$  implica  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ .
- Para toda sucesión  $x_n \rightarrow x$  se tiene  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

Una clase especial de funciones continuas entre espacios métricos son las funciones Lipschitz. Decimos que una función  $f : X \rightarrow Y$  es *Lipschitz* si existe  $\lambda \geq 1$  tal que

$$|f(x) - f(x')| \leq \lambda|x - x'|$$

para todo par de puntos  $x, x' \in X$ . En este caso diremos también que  $f$  es  $\lambda$ -*Lipschitz*. La función  $f$  es *biLipschitz* o ( $\lambda$ -*biLipschitz*) si para todo par de puntos  $x, x' \in X$ ,

$$\lambda^{-1}|x - x'| \leq |f(x) - f(x')| \leq \lambda|x - x'|,$$

para algún  $\lambda \geq 1$ . Si además  $f$  es biyectiva decimos que es un *homeomorfismo biLipschitz*. Observar que esto último es equivalente a que  $f$  sea Lipschitz y tenga inversa Lipschitz. Diremos que dos métricas en el mismo espacio  $X$  son *Lipschitz equivalentes* si la identidad es un homeomorfismo biLipschitz al considerar una de ellas en el dominio y la otra en el codominio.

Un encaje *isométrico* de  $X$  en  $Y$  es una función  $f : X \rightarrow Y$  que cumple  $|f(x) - f(x')| = |x - x'|$  para todo  $x, x' \in X$ , es decir, que preserve la distancia. Si además  $f$  es sobreyectiva decimos que es una *isometría*. Observar que un encaje isométrico es una función 1-biLipschitz y una isometría es un homeomorfismo 1-biLipschitz.

### 2.1.1 Distancias entre subconjuntos

Definimos la distancia entre subconjuntos  $A$  y  $B$  de un espacio métrico  $X$  por

$$dist(A, B) = \inf\{|a - b| : a \in A, b \in B\}.$$

Observar que  $dist$  no es una métrica en las partes de  $X$ . Por ejemplo, si  $A \cap B \neq \emptyset$ , entonces  $dist(A, B) = 0$ . La desigualdad triangular también puede fallar. Para ver esto consideramos en la recta  $\mathbb{R}$  los conjuntos  $A = \{0\}$ ,  $B = \{1, 3\}$  y  $C = \{4\}$ . Tenemos

$$dist(A, C) = 3 > 2 = dist(A, B) + dist(B, C)$$

Por otro lado, definimos la *distancia de Hausdorff* entre  $A, B \subset X$  por

$$dist_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} dist(\{a\}, B), \sup_{b \in B} dist(A, \{b\}) \right\}.$$

Observar que  $dist_H(A, B)$  puede verse como el ínfimo real positivo  $r$  tal que  $B$  está en un  $r$ -entorno de  $A$  (notado por  $E_r(A)$ ) y viceversa. En el caso de que no exista tal  $r$  queda  $dist_H(A, B) = \infty$ .

**Proposición 2.1.1.** Sea  $\mathcal{C}$  la familia de todos los subconjuntos cerrados y acotados no vacíos de  $X$ . Entonces  $\text{dist}_H$  define una métrica en  $\mathcal{C}$ .

*Demostración.* Es claro que  $\text{dist}_H(A, B) = \text{dist}_H(B, A) < +\infty$  si  $A, B \in \mathcal{C}$ .

Supongamos que  $\text{dist}_H(A, B) = 0$  y probemos  $A = B$ . Tenemos que todo  $a \in A$  está en  $E_r(B)$  para todo  $r > 0$ . De aquí se puede extraer una sucesión  $b_n \in B$  tal que  $|a - b_n| < 1/n$ . Esto implica que  $a$  es punto de acumulación de  $B$  y luego, como este es cerrado,  $a \in B$ . De la misma forma se prueba que todo punto de  $B$  está en  $A$ .

Para probar la desigualdad triangular fijemos tres conjuntos  $A, B, C \in \mathcal{C}$ . Sean  $r > \text{dist}_H(A, B)$  y  $s > \text{dist}_H(B, C)$ . Dado  $a \in A$  existe  $b \in B$  con  $|a - b| < r$  y luego  $c \in C$  con  $|b - c| < s$ , lo que implica  $|a - c| < r + s$ . Concluimos que  $A \subset E_{r+s}(C)$  para todo  $\delta > \text{dist}_H(A, B) + \text{dist}_H(B, C)$ . De la misma forma se prueba que  $C \subset E_\delta(A)$  para todo  $\delta > \text{dist}_H(A, B) + \text{dist}_H(B, C)$  de donde se deduce

$$\text{dist}_H(A, C) \leq \text{dist}_H(A, B) + \text{dist}_H(B, C).$$

□

## 2.1.2 Cuasi-métricas

Una *cuasi-métrica* en un conjunto  $X$  es una función  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple las siguientes propiedades:

- (1)  $\rho(x, y) \geq 0$  para todo par de puntos  $x, y \in X$  y  $\rho(x, y) = 0$  si y sólo si  $x = y$ .
- (2)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  para  $x, y \in X$ .
- (3) Existe  $M \geq 1$  tal que dados  $x, y, z \in X$  se cumple  $\rho(x, z) \leq M(\rho(x, y) + \rho(y, z))$  (propiedad cuasi-triangular).

Llamamos a  $M$  *constante de la cuasi-métrica* y decimos que  $(X, \rho)$  es un *espacio cuasi-métrico de constante  $M$* .

Es fácil verificar que la condición (3) es equivalente a la siguiente:

- (3') Existe  $K \geq 1$  tal que dados  $x, y, z \in X$  se cumple  $\rho(x, z) \leq K \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}$ .

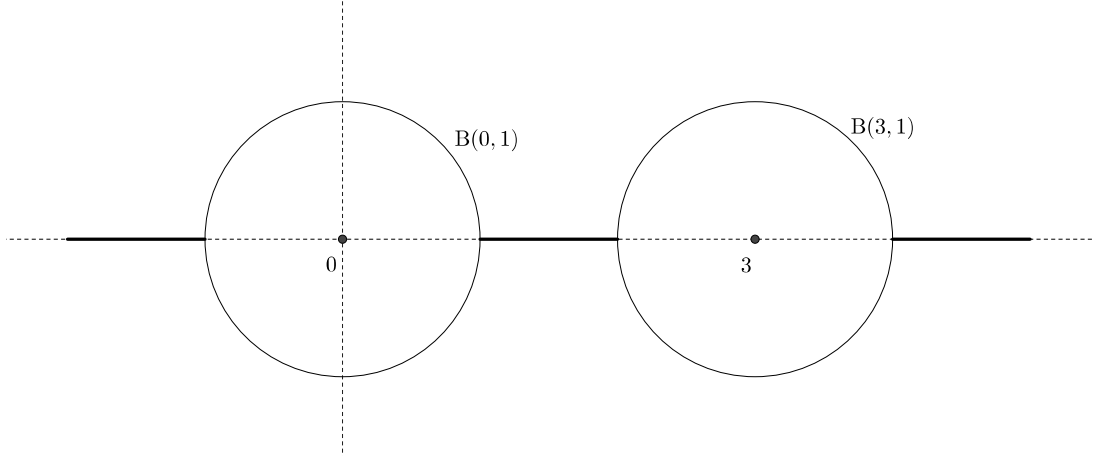
Esto nos será útil más adelante.

Una propiedad importante de las métricas que se pierde al debilitar la propiedad triangular es la de inducir topología: la familia de bolas de una cuasi-métrica no siempre son base para una topología. Veamos esto en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.1.2.** Pongamos en  $\mathbb{C}$  la cuasi-métrica definida por

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}|x - y| & \text{si } x, y \in \mathbb{R}, \\ |x - y| & \text{si no.} \end{cases}$$

Es fácil ver que  $(\mathbb{C}, \rho)$  es un espacio cuasi-métrico de constante 2. Las bolas centradas en el eje real para esta cuasi-métrica son como se muestra en la figura. Por ejemplo la bola de centro 0 y radio 1 es el conjunto  $B(0, 1) = \mathbb{D} \cup (-2, 2)$ , donde  $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .



Observar que no hay ninguna bola contenida en  $B(0, 1) \cap B(3, 1) = (1, 2)$ , es decir que la familia de bolas no es base para ninguna topología.

Una función entre espacios cuasi-métricos  $f : (X, \rho_1) \rightarrow (Y, \rho_2)$  es continua en  $x$  si para toda sucesión  $x_n$  convergente a  $x$  se tiene que  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ . La función  $f$  es continua si lo es en todo punto y es un homeomorfismo si es continua, invertible y con inversa continua. De la misma forma que para espacios métricos podemos definir funciones (bi)Lipschitz entre espacios cuasi-métricos y equivalencias Lipschitz entre cuasi-métricas

La siguiente propiedad de las cuasi-métricas será importante más adelante.

**Proposición 2.1.3.** *Si  $\rho$  es una cuasi-métrica entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\rho^\epsilon$  es Lipschitz equivalente a una métrica.*

*Demostración.* Es claro que  $\rho^\epsilon$  es una cuasi-métrica para todo  $\epsilon > 0$ . Fijemos  $\epsilon$  de forma tal que  $\rho^\epsilon$  cumpla (3') para  $K \leq \sqrt{2}$  y consideremos

$$|x - y| = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \rho^\epsilon(a_{i-1}, a_i) : x = a_0, a_1, \dots, a_n = y \in X \right\}.$$

Esto define una función no negativa y simétrica que satisface la desigualdad triangular y  $|x - y| \leq \rho(x, y)$  para todo  $x, y \in X$ .

Vamos a probar por inducción que para  $a_0, \dots, a_n \in X$  se cumple

$$\frac{1}{2} \rho^\epsilon(a_0, a_n) \leq \rho^\epsilon(a_0, a_1) + \dots + \rho^\epsilon(a_{n+1}, a_n).$$

Para  $n = 1$  es obvio. Supongamos que es cierto para todo  $1 \leq m < n$  y pongamos

$$S = \rho^\epsilon(a_0, a_1) + \dots + \rho^\epsilon(a_{n-1}, a_n).$$

Existe  $k = 0, \dots, n-1$  tal que

$$\rho^\epsilon(a_0, a_1) + \dots + \rho^\epsilon(a_{k-1}, a_k) \text{ y } \rho^\epsilon(a_{k+1}, a_{k+2}) + \dots + \rho^\epsilon(a_{n-1}, a_n)$$

son ambos menores a  $\frac{1}{2}S$ . Supongamos primero que ninguna de las dos expresiones son vacías (es decir,  $k \neq 0, n-1$ ). Por hipótesis de inducción

$$\rho^\epsilon(a_0, a_k), \rho^\epsilon(a_{k+1}, a_{n+1}) \leq S$$

y usando la propiedad (3') dos veces nos queda

$$\rho^\epsilon(a_0, a_{n+1}) \leq 2 \max\{\rho^\epsilon(a_0, a_k), \rho^\epsilon(a_k, a_{k+1}), \rho^\epsilon(a_{k+1}, a_{n+1})\} \leq 2S.$$

Si  $k = 0, n-1$  basta con aplicar (3') una sola vez.

Hemos probado que entonces que  $\rho^\epsilon(x, y) \leq 2|x - y|$  para todo  $x, y \in X$ , lo que termina la demostración.  $\square$

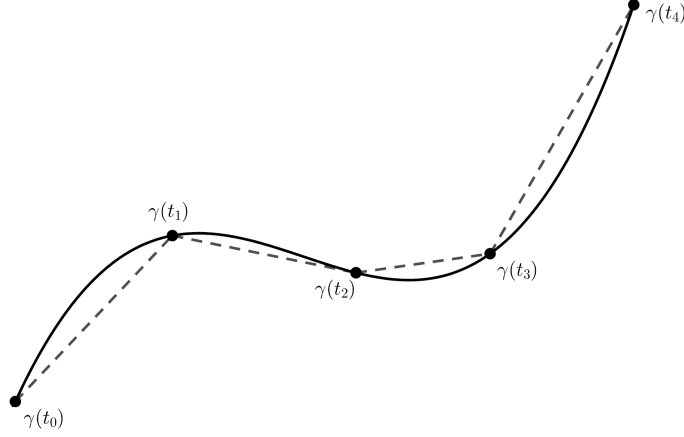
## 2.2 Curvas en un espacio métrico

Una *curva* en  $X$  es una función continua  $\gamma : I \rightarrow X$ , donde  $I \subset \mathbb{R}$  es un intervalo. Para evitar problemas futuros vamos a suponer que  $\gamma$  no es constante en ningún intervalo. Si  $I = [a, b]$ , definimos la *longitud* de  $\gamma$  como

$$long(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| : n \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}.$$

De la definición no es difícil ver que si  $\tilde{\gamma} : J \rightarrow X$  es una reparametrización de  $\gamma$ , esto es, existe un homeomorfismo  $\sigma : I \rightarrow J$  tal que  $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \sigma$ , entonces  $long(\gamma) = long(\tilde{\gamma})$ . Es decir, la longitud de una curva es independiente de su parametrización. En realidad, cuando hablamos de una curva estaremos, la mayor parte de las veces, hablando de su clase a menos de reparametrizaciones. Esto nos permite, por ejemplo, asumir que las curvas definidas en un intervalo compacto tienen siempre a  $[0, 1]$  como dominio.

Para entender esta definición conviene considerar el caso  $X = \mathbb{R}^n$ , donde la longitud de una curva se puede aproximar por longitudes de poligonales con vértices sobre ella, como se ve en la siguiente figura.



Observar que la longitud de la concatenación de dos curvas es la suma de sus longitudes. Para ser más precisos, si consideramos  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow X$  y  $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow X$  cumplen  $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ , su *concatenación* es la curva  $\gamma_1\gamma_2 : [a, b + d - c] \rightarrow X$  por

$$\gamma_1\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ \gamma_2(t + c - b) & \text{si } t \in [b, b + d - c]. \end{cases}$$

Entonces tenemos  $long(\gamma_1\gamma_2) = long(\gamma_1) + long(\gamma_2)$ .

Si  $I$  no es un intervalo compacto, entonces ponemos

$$long(\gamma) = \sup \{ long(\gamma|_{[a,b]}) : [a, b] \in I \}.$$

Decimos que una curva  $\gamma : I \rightarrow X$  es *rectificable* si  $long(\gamma)$  es finito, y que es *localmente rectificable* si  $long(\gamma|_{[a,b]})$  es finito para todo  $[a, b] \subset I$ .

Una curva localmente rectificable  $\gamma$  está *parametrizada por longitud de arco* si para todo  $[t, t'] \subset I$  se cumple

$$long(\gamma|_{[t,t']}) = |t' - t|.$$

**Proposición 2.2.1.** *Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  una curva rectificable. Entonces existe una reparametrización  $\tilde{\gamma}$  de  $\gamma$  que está parametrizada por longitud de arco.*

*Demostración.* Definimos  $\sigma : [a, b] \rightarrow [0, long(\gamma)]$ ,  $\sigma(t) = long(\gamma|_{[a,t]})$ . Esta función es claramente continua y creciente (recordar que estamos asumiendo que  $\gamma$  no es constante en ningún intervalo). Además 0 y  $long(\gamma)$  están en su imagen, por lo que es biyectiva. Como su dominio es compacto  $\sigma$  es una función cerrada, de donde concluimos que es un homeomorfismo.

Definimos  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \sigma^{-1}$ . Se verifica fácilmente que  $\tilde{\gamma}$  está parametrizada por longitud de arco.  $\square$

Observar que si  $\gamma : I \rightarrow X$  es localmente rectificable, entonces puede construirse una reparametrización por longitud de arco de  $\tilde{\gamma}$  escribiendo  $I$  como unión de intervalos compactos que se intersectan a lo sumo en los extremos y tomando la reparametrización por longitud de arco en cada uno.

Usando la proposición anterior podemos definir la integral de línea de una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  a lo largo de una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  (cuando existe) por

$$\int_{\gamma} f = \int_0^{\text{long}(\gamma)} f(\tilde{\gamma}(t)) dt,$$

donde  $\tilde{\gamma} : [0, \text{long}(\gamma)] \rightarrow X$  es la reparametrización por longitud de arco. Esto se extiende a curvas definidas en cualquier intervalo  $I$  de forma obvia. Observar que esta definición generaliza la noción de integral de línea de funciones sobre curvas derivables a trozos en  $\mathbb{R}^n$ .

En caso de que la curva  $\gamma$  sea inyectiva la longitud define una medida  $\ell$  en su imagen. Luego

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma([a,b])} f d\ell.$$

**Ejemplo 2.2.2.** Un ejemplo clasico de curva que no es localmente rectificable es la conocida como *curva de Koch*. Para construirla consideramos una sucesión de curvas afines a trozos  $\gamma_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por recurrencia de la siguiente manera (mirar Figura 1.1):

- $\gamma_0(t) = (t, 0)$ . Es decir que su imagen es un segmento de largo 1.
- $\gamma_{k+1}$  se obtiene de  $\gamma_k$  repitiendo el siguiente proceso en cada intervalo  $I \subset [0, 1]$  que es maximal con la propiedad de que  $\gamma|_I$  es afín:
  - Se divide  $I$  en tres intervalos consecutivos de igual longitud  $I_1, I_2, I_3$  y se pone  $\gamma_{k+1}(t) = \gamma_k(t)$  para  $t \in I_1 \cup I_3$ .
  - Se traza el triángulo equilátero de base  $\gamma_k(I_2)$  de forma tal que si  $I_2 = [a, b]$  y  $c$  es el tercer vértice, entonces el recorrido sobre el perímetro en sentido antihorario pasa por los vértices  $a, b$  y  $c$  en ese orden.
  - $\gamma_{k+1}|_{I_2}$  recorre los lados  $[a, c]$  y  $[c, b]$  en ese orden..

La imagen de  $\gamma_k$  es notada por  $E_k$ . Como  $\gamma_k$  es afín a trozos, su longitud es fácil de calcular. Podemos ver que  $\text{long}(\gamma_k) = \left(\frac{4}{3}\right)^k$ .

Observar que

$$\|\gamma_k - \gamma_{k-1}\|_{\infty} = \sup_{t \in [0,1]} \|\gamma_k(t) - \gamma_{k-1}(t)\| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^k,$$

lo que implica que  $\{\gamma_k\}$  es una sucesión de Cauchy en  $(C([0, 1], \mathbb{R}^2), \|\cdot\|_\infty)$ . Como este espacio es completo  $\gamma_k$  converge uniformemente a una curva  $\gamma$  a la que llamamos *curva de Koch* y cuya imagen notamos por  $F$ .

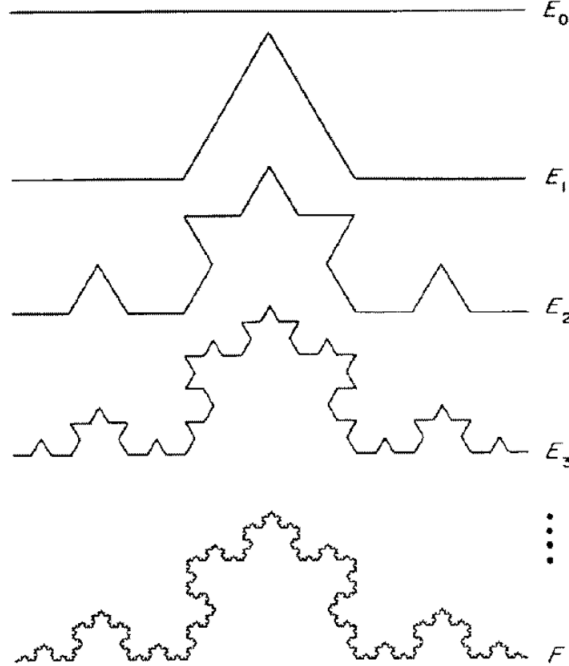


Figura 2.1: Construcción de la curva de Koch.

Para estimar la longitud de  $\gamma$  observamos que si  $t_0 = 0, t_1, \dots, t_{m_k} = 1$  son los puntos de no derivabilidad de  $\gamma_k$ , entonces  $\gamma(t_i) = \gamma_k(t_i)$  para todo  $i = 0, \dots, m_k$ . Tenemos entonces

$$long(\gamma) \geq \sum_{i=1}^{m_k} \|\gamma_k(t_i) - \gamma_k(t_{i-1})\| = long(\gamma_k) = \left(\frac{4}{3}\right)^k.$$

Concluimos entonces que  $long(\gamma) = +\infty$ , es decir que la curva de Koch no es rectificable.

Además, dado cualquier subintervalo  $[a, b] \subset [0, 1]$ , se puede observar que existe  $k_0$  tal que hay dos puntos de no derivabilidad consecutivos  $t_1, t_2 \in [a, b]$  de  $\gamma_{k_0}$ . Luego para  $k \geq k_0$  se tiene

$$long(\gamma|_{[a,b]}) \geq long(\gamma|_{[t_1,t_2]}) \geq long(\gamma_k|_{[t_1,t_2]}) = \frac{1}{3^{k_0}} \left(\frac{4}{3}\right)^{k-k_0} \rightarrow +\infty.$$

Concluimos entonces que  $\gamma$  no tiene subcurvas rectificables.

La definición de longitud de curvas que hemos dado extiende a la noción de longitud para curvas diferenciables. Vemos esto en la siguiente proposición.

**Proposición 2.2.3.** *Supongamos que  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una curva de clase  $C^1$ . Entonces*

$$\text{long}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

*Demostración.* Primero observamos que como  $\gamma$  es de clase  $C^1$ , esta es de Lipschitz (puede verse fácilmente que lo es en cada coordenada usando el Teorema del Valor Medio de Lagrange). Supongamos entonces que  $L$  es una constante de Lipschitz para  $\gamma$ .

Para una partición  $P = \{t_0 = a, \dots, t_m = b\}$  del intervalo  $[a, b]$  notamos

$$S(P) = \sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|.$$

Tomamos  $\{P_k\}$  una sucesión de particiones tal que  $S(P_k) \rightarrow \text{long}(\gamma)$  y luego para cada  $k \in \mathbb{N}$  definimos  $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$f_k(t) = \frac{\|\gamma(t_{k,i}) - \gamma(t_{k,i-1})\|}{t_{k,i} - t_{k,i-1}},$$

si  $t \in [t_{k,i-1}, t_{k,i})$ , donde  $P_k = \{t_{k,0}, \dots, t_{k,m_k}\}$ .

Por un lado,  $f_k$  converge puntualmente  $\|\gamma'\|$  en  $[a, b]$ . Además  $|f_k| \leq L$  para todo  $k$ , por lo que puede usarse el Teorema de Convergencia Dominada para asegurar que

$$\int_a^b f_k(t) dt \rightarrow \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Por otro lado,

$$\int_a^b f_k(t) dt = \sum_{i=1}^{m_k} \|\gamma(t_{k,i}) - \gamma(t_{k,i-1})\| = S(P_k) \rightarrow \text{long}(\gamma).$$

Lo que termina la prueba. □

La longitud de curvas nos permite definir una segunda distancia en un espacio métrico  $X$  conexo por caminos, que llamaremos *métrica (o distancia) de longitud* y quedará determinada por

$$d_{\text{long}}(x, x') = \inf \{ \text{long}(\gamma) : \gamma : [0, 1] \rightarrow X \text{ curva con } \gamma(0) = x \text{ y } \gamma(1) = x' \}.$$

Observamos que siempre se da  $|x - x'| \leq d_{\text{long}}(x, x')$ . Diremos que  $X$  es un *espacio de longitud*, o que *tiene una métrica de longitud*, si la igualdad se da para todo par de puntos  $x, x' \in X$ . Ejemplos de espacios de longitud son las variedades Riemannianas, mientras que las variedades encajadas en  $\mathbb{R}^n$  con la métrica ambiente no lo son en general.

Antes de finalizar esta sección hacemos las siguientes definiciones:

- Un *segmento geodésico* en  $X$  es un encaje isométrico  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ . Es decir, una curva que para todo  $t, t' \in [a, b]$  cumple

$$|\gamma(t) - \gamma(t')| = |t - t'|.$$

Llamaremos de esta forma tanto a la curva  $\gamma$  como a su imagen, a la que escribiremos también de forma  $[\gamma(a), \gamma(b)]$ . Diremos en este caso que  $\gamma$  (o  $[\gamma(a), \gamma(b)]$ ) es un segmento geodésico que *une*  $\gamma(a)$  con  $\gamma(b)$ .

- Un *rayo geodésico* es un encaje isométrico  $r : [0, +\infty) \rightarrow X$ . También llamaremos de esta forma a la imagen de  $r$ . El punto  $r(0)$  será denominado el *origen* del rayo geodésico.
- Una *geodésica* en  $X$  es un encaje isométrico  $g : \mathbb{R} \rightarrow X$ . Al igual que en los puntos anteriores, el término *geodésica* también se usará para referir a la imagen de  $g$ .

Un espacio de longitud  $X$  es *geodésico* si todo par de puntos puede ser unido por un segmento geodésico.

Es posible que dos puntos  $x$  y  $x'$  en un espacio geodésico  $X$  pueden ser unidos por más de un segmento geodésico. Un ejemplo simple puede verse al tomar dos puntos diametralmente opuestos en un círculo (dotado de la métrica de longitud usual). Esto nos dice que la notación  $[x, x']$  presenta cierta ambigüedad. Sin embargo, en muchos casos la usaremos sin demasiado cuidado para referirnos a alguno de los segmentos geodésicos que unen dichos puntos.

**Ejercicio 2.2.4.** Sea  $(X, |\cdot - \cdot|)$  un espacio métrico,  $long$  la función de longitud de curvas y  $d_{long}$  su correspondiente métrica de longitud. Probar que si  $Long$  es la función de longitud en  $(X, d_{long})$ , entonces para toda curva  $\gamma$  en  $X$  se tiene  $Long(\gamma) = long(\gamma)$ .

## 2.3 Medidas de Borel en espacios métricos

Recordamos que una  $\sigma$ -álgebra en un conjunto  $X$  es una familia de subconjuntos que contiene a  $\emptyset$  y es cerrada por complementos y uniones numerables. Si  $X$  es un espacio métrico, consideramos la  $\sigma$ -álgebra de Borel como la intersección de todas las  $\sigma$ -álgebras que contienen a todos los abiertos. La notamos por  $\mathcal{B}_X$  o simplemente por  $\mathcal{B}$  y llamamos *borelianos* a sus elementos.

Llamaremos *medida de Borel en  $X$*  es una función  $\mu : \mathcal{B}_X \rightarrow [0, +\infty]$  que cumple:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
2. Si  $\{E_k\}$  a una familia disjunta de borelianos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_k E_k\right) = \sum_k \mu(E_k).$$

3. Para todo  $x \in X$  y  $r > 0$  se tiene

$$0 < \mu(B(x, r)) < +\infty.$$

Es decir,  $\mu$  es una medida finita y positiva en las bolas de  $X$ .

Decimos que una función  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$  es *medible* si la preimagen de cualquier abierto en  $\overline{\mathbb{R}}$  es un boreliano.

## 2.4 Formas diferenciales

Aquí consideraremos siempre  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ .

Una  $k$ -forma en  $M$  (para  $k = 0, \dots, n$ ) es una función  $\omega$  que a cada punto  $x \in M$  le asigna una función  $k$ -lineal alternada  $\omega_x$  en el espacio tangente  $T_x M$ . Si  $\varphi : U \rightarrow M$  es una carta local alrededor de  $x = \varphi(\tilde{x})$ , entonces se puede definir el pull-back de  $\omega$  por  $\varphi$  como la  $k$ -forma en  $U$  definida por

$$(\varphi^* \omega)_{\tilde{x}}(v_1, \dots, v_k) = \omega_x(d_{\tilde{x}} \varphi(v_1), \dots, d_{\tilde{x}} \varphi(v_k)). \quad (2.1)$$

Como esta  $k$ -forma está definida en un abierto de  $\mathbb{R}^n$  puede expresarse

$$(\varphi^* \omega)_{\tilde{x}} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k}(\tilde{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

donde  $dx_i$  es la 1 forma dada por la proyección en la  $i$ -ésima coordenada y  $a_{i_1, \dots, i_k}$  son funciones en  $U$  a las que llamamos *coeficientes* de  $\omega$  para la carta local  $\varphi$ .

En general, puede definirse el pull-back de una  $k$ -forma por una función diferenciable mediante la fórmula (2.1).

Decimos que  $\omega$  es una  $k$ -forma *medible* si todos los coeficientes para cualquier carta local son medibles. Para simplificar nos referiremos a las  $k$ -formas medibles simplemente como  $k$ -formas y adoptaremos la notación  $\Lambda^k(M)$  para el espacio de todas las  $k$ -formas en  $M$ .

Una  $k$ -forma diferencial es una  $k$ -forma con todos sus coeficientes diferenciables. El espacio de  $k$ -formas diferenciales en  $M$  será notado por  $\Omega^k(M)$ .

Dada una  $k$ -forma diferencial

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

definida en un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , se define su *derivada exterior* como la  $(k+1)$ -forma diferencial

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Aquí hay que recordar que si  $j = i_r$  para algún  $r = 1, \dots, k$ , entonces  $dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  es nula.

Luego, si  $\omega$  es una  $k$ -forma en  $M$ , entonces su *derivada exterior* se define de forma tal que para toda carta local  $\varphi : U \rightarrow M$  se tiene

$$d\omega = (\varphi^{-1})^* d\varphi^* \omega$$

en  $\varphi(U)$ .

A continuación se listan algunas propiedades de la derivada exterior:

**Proposición 2.4.1.** *Sean  $M$  y  $N$  dos variedades diferenciables,  $f : M \rightarrow N$  un mapa diferenciable y  $\omega \in \Omega^k(M)$ . Entonces el operador  $d$  cumple las siguientes propiedades:*

1.  $d(\lambda\omega + \eta) = \lambda d\omega + d\eta$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  (linealidad)
2.  $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$ .
3.  $d^2 = d \circ d = 0$ .
4.  $d(f^* \omega) = f^*(d\omega)$ .

Por la prueba de esta proposición o más detalles sobre formas diferenciales se recomienda consultar [29].

El tercer punto de la Proposición 2.4.1 permite considerar el complejo

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \dots$$

Es decir que se cumple  $\text{Im } d_{k-1} \subset \text{Ker } d_k$  para todo  $k \geq 1$ , donde  $d_k = d|_{\Omega^k(M)}$ .

La *cohomología de De Rham* de  $M$  es la familia de  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales

$$H_{dR}^1(M) = \frac{\text{Ker } d_k}{\text{Im } d_{k-1}}.$$

Donde se entiende que  $d_{-1}$  es el mapa nulo. Los elementos de  $\text{Ker } d_k$  se conocen como *formas cerradas* y las de  $\text{Im } d_{k-1}$  como *formas exactas* en  $\Omega^k(M)$ .

Puede verse fácilmente que si  $M$  y  $N$  son dos variedades diferenciables difeomorfas, entonces  $H_{dR}^k(M)$  y  $H_{dR}^k(N)$  son isomorfos como espacios vectoriales para todo  $k \geq 0$ .<sup>1</sup> Esto da una herramienta para distinguir variedades a menos de difeomorfismo.

Consideremos el siguiente resultado:

**Lema 2.4.2** (de Poincaré). *Sea  $M$  una variedad diferenciable contractible, entonces para todo  $k \geq 1$  toda  $k$ -forma cerrada en  $M$  es exacta. Es decir que  $H_{dR}^k(M)$  es trivial para todo  $k \geq 1$ .*

Luego tenemos que, por ejemplo,  $H_{dR}^1(\mathbb{R}^2)$  es trivial. Sin embargo puede verse que la 1-forma en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  definida por

$$\omega_{(x,y)} = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$

es cerrada pero no exacta. Por lo que  $H_{dR}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \neq 0$  y por lo tanto  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  no pueden ser difeomorfos.

---

<sup>1</sup>En realidad la cohomología de De Rham es invariante por equivalencia homotópica.

## 2.5 Métricas Riemannianas

Una familia importante de espacios de longitud son las variedades Riemannianas. Aquí daremos una muy breve introducción, para un tratamiento más profundo del tema se sugiere mirar [11].

Una *métrica Riemanniana* en una variedad diferenciable  $M$  (de dimensión  $n$ ) es una función que a cada punto  $x \in M$  le asigna un producto interno  $\mathbf{g}_x = \langle \cdot, \cdot \rangle_x$  en  $T_x M$  de forma tal que su pull-back para toda carta local tiene coeficientes diferenciables. Clarifiquemos lo que esto significa: dada una carta local  $\varphi : U \rightarrow M$  se define el pull-back  $\varphi^* \mathbf{g} : U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , por

$$(\varphi^* \mathbf{g})_x(v, w) = \langle d_x \varphi(v), d_x \varphi(w) \rangle_{\phi(x)}.$$

Si fijamos  $x$ , entonces  $(\varphi^* \mathbf{g})_x$  es un producto interno y por lo tanto existe una matriz  $A(x) = \{a_{i,j}(x)\}$  simétrica tal que

$$(\varphi^* \mathbf{g})_x(v, w) = \langle A(x)v, w \rangle.$$

Los *coeficientes* de  $\varphi^* \mathbf{g}$  son las funciones  $a_{ij}$ .

Una *variedad Riemanniana* es una variedad diferenciable junto con una métrica Riemanniana.

Como es evidente, una métrica Riemanniana no es una métrica tal cual la hemos definido al inicio del capítulo. Sin embargo veremos a continuación que esta induce una verdadera métrica o distancia.

Al tener un producto interno en cada espacio tangente a  $M$  tenemos una familia de normas  $\|v\|_x = \sqrt{\langle v, v \rangle_x}$ , lo que nos permite definir una noción de longitud (la llamamos *longitud Riemanniana*) de una curva diferenciable  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  por

$$long_R(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)} dt.$$

Puede verse que la longitud así definida es invariante por reparametrizaciones, luego definimos la *distancia Riemanniana* en  $M$  por

$$|x - x'| = \inf \{ long(\gamma) : \gamma : [0, 1] \rightarrow M \text{ curva con } \gamma(0) = x \text{ y } \gamma(1) = x' \}.$$

Puede verse que las isometrías de  $M$  (con respecto a la distancia Riemanniana) son los difeomorfismos  $f : M \rightarrow M$  que cumplen  $f^* \mathbf{g} = \mathbf{g}$ , es decir que para todo  $x \in M$  y  $v, w \in T_x M$  se tiene

$$\langle d_x f(v), d_x f(w) \rangle_{f(x)} = \langle v, w \rangle_x. \quad (2.2)$$

**Proposición 2.5.1.** *La longitud Riemanniana de una curva en una variedad Riemanniana coincide con la longitud definida en la Sección 2.2 para la distancia Riemanniana. Es decir que  $(M, |\cdot - \cdot|)$  es un espacio de longitud.*

La prueba de la proposición anterior se deja como ejercicio. Se sugiere adaptar la prueba de la Proposición 2.2.3 observando que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\gamma(t+h) - \gamma(t)|}{h} = \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}.$$

A partir de la Proposición 2.5.1 abandonamos la notación  $long_R(\gamma)$  y escribimos en todos los casos  $long(\gamma)$ .

**Ejercicio 2.5.2.** Probar que si  $\gamma$  es un segmento geodésico en una variedad Riemanniana siempre es una curva diferenciable.

Puede verse que, dada una variedad Riemanniana orientada  $M$  de dimensión  $n$ , existe una única  $n$ -forma  $dV$  tal que si  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es una base ortonormal positiva de  $T_x M$ , entonces  $dV_x(v_1, \dots, v_n) = 1$ . Esta es la *forma de volumen* de  $M$ . A partir de ella se puede definir la medida de volumen de un subconjunto abierto  $A \subset M$  por

$$\text{Vol}(M) = \left| \int_A dV \right|.$$

Luego (por el Teorema de Carathéodory) obtenemos una medida de Borel  $\text{Vol}$  en  $M$ , que denominamos *volumen Riemanniano* o simplemente *volumen*.

Si  $M$  no es orientable el volumen puede definirse de todas formas. Basta con escribir  $M$  como unión disjunta de variedades con borde orientables de la misma dimensión y tomar el volumen en cada una de ellas.

La integral de cualquier función medible no negativa o integrable  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  sobre  $M$  está bien definida por

$$\int f dV = \int_M f dV.$$

Si además  $f$  es diferenciable y  $M$  es orientable, la expresión anterior coincide con la integral de la  $n$ -forma diferencial  $f dV$ .



# Capítulo 3

## Quasi-isometrías

Consideremos dos espacios métricos  $X$  e  $Y$ . Decimos que una función  $F : X \rightarrow Y$  es una *cuasi-isometría* si existen constantes  $\lambda \geq 1$  y  $\varepsilon \geq 0$  tales que:

- (i) Para todo  $x, x' \in X$  se cumple

$$\lambda^{-1}|x - x'| - \varepsilon \leq |F(x) - F(x')| \leq \lambda|x - x'| + \varepsilon.$$

- (ii)  $F(X)$  es  $\varepsilon$ -denso en  $Y$ : para todo  $y \in Y$  existe  $x \in X$  tal que  $|f(x) - y| \leq \varepsilon$ .

En este caso también diremos que  $F$  es una  $(\lambda, \varepsilon)$ -*cuasi-isometría* o una *cuasi-isometría de constantes*  $(\lambda, \varepsilon)$ . Si se cumple solo la condición (i) decimos que  $F$  es un *encaje cuasi-isométrico*.

La condición (i) es una versión débil de la condición biLipschitz. Puede pensarse en  $\lambda$  como la constante de Lipschitz y en  $\varepsilon$  como un margen de error (observar que este error rompe la continuidad de  $F$ ). Intuitivamente, la condición (i) dice que la función  $F$  resulta biLipschitz si se observa los objetos desde una distancia suficiente grande, donde el error se hace despreciable. Por otro lado, la condición (ii) es una versión débil de la sobreyectividad.

La definición anterior introduce una noción de equivalencia entre espacios métricos, como se observa en la siguiente proposición.

**Proposición 3.0.1.** Sean  $X, Y$  y  $Z$  tres espacios métricos y  $F : X \rightarrow Y$  y  $G : Y \rightarrow Z$  dos cuasi-isometrías de constantes  $(\lambda, \varepsilon)$  y  $(\tilde{\lambda}, \tilde{\varepsilon})$  respectivamente. Entonces

- (i)  $G \circ F : X \rightarrow Z$  es una cuasi-isometría.

- (ii) Existe una cuasi-isometría  $\overline{F} : Y \rightarrow X$  tal que  $F \circ \overline{F}$  y  $\overline{F} \circ F$  están a distancia uniforme acotada de la identidad en el espacio correspondiente.

La *distancia uniforme* entre dos funciones  $F, G : X \rightarrow Y$  es definida por

$$|F - G|_{\infty} = \sup\{|F(x) - G(x)| : x \in X\}.$$

*Demostración.* Para probar la primera parte comencemos tomando dos puntos  $x, x' \in X$ . Por un lado tenemos

$$|G \circ F(x) - G \circ F(x')| \leq \tilde{\lambda}|F(x) - F(x')| + \tilde{\varepsilon} \leq \lambda\tilde{\lambda}|x - x'| + \tilde{\lambda}\varepsilon + \tilde{\varepsilon}.$$

Por otro lado

$$|G \circ F(x) - G \circ F(x')| \geq \tilde{\lambda}^{-1}|F(x) - F(x')| - \tilde{\varepsilon} \geq \lambda^{-1}\tilde{\lambda}^{-1}|x - x'| - \tilde{\lambda}^{-1}\varepsilon - \tilde{\varepsilon}.$$

Ahora, dado  $z \in Z$ , sabemos que existe  $y \in Y$  con  $|G(y) - z| \leq \tilde{\varepsilon}$  y luego  $x \in X$  con  $|F(x) - y| \leq \varepsilon$ , de donde tenemos

$$|G \circ F(x) - z| \leq |G \circ F(x) - G(y)| + |G(y) - z| \leq \tilde{\lambda}|F(x) - y| + \varepsilon + \tilde{\varepsilon} \leq \tilde{\lambda}\varepsilon + \varepsilon + \tilde{\varepsilon}.$$

Concluimos entonces que  $G \circ F$  es una cuasi-isometría de constantes  $(\lambda\tilde{\lambda}, (\tilde{\lambda} + 1)\varepsilon + \tilde{\varepsilon})$ .

Probemos ahora (ii). Dado  $y \in Y$  tomamos  $x \in X$  tal que  $|F(x) - y| \leq \varepsilon$  y ponemos  $\bar{F}(y) := x$ . De esta forma definimos la función  $\bar{F} : Y \rightarrow X$ , que claramente cumple  $|F \circ \bar{F} - Id_Y|_\infty \leq \varepsilon$ .

Veamos que  $\bar{F}$  es la cuasi-isometría buscada. Por un lado, dados  $y, y' \in Y$  tenemos

$$\begin{aligned} |\bar{F}(y) - \bar{F}(y')| &\leq \lambda|F(\bar{F}(y)) - F(\bar{F}(y'))| + \lambda\varepsilon \\ &\leq \lambda(|F(\bar{F}(y)) - y| + |y - y'| + |y' - F(\bar{F}(y'))|) + \lambda\varepsilon \\ &\leq \lambda|y - y'| + 3\lambda\varepsilon. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} |\bar{F}(y) - \bar{F}(y')| &\geq \lambda^{-1}|F(\bar{F}(y)) - F(\bar{F}(y'))| - \lambda^{-1}\varepsilon \\ &\geq \lambda^{-1}(|y - y'| - |F(\bar{F}(y)) - y| - |y' - F(\bar{F}(y'))|) - \lambda^{-1}\varepsilon \\ &\geq \lambda^{-1}|y - y'| - 3\lambda^{-1}\varepsilon. \end{aligned}$$

Ahora si  $x \in X$ , tenemos que, como  $F(x) \in Y$ , entonces  $|F(x) - F(\bar{F}(F(x)))| \leq \varepsilon$ . Luego

$$|x - \bar{F}(F(x))| \leq \lambda|F(x) - F(\bar{F}(F(x)))| + \lambda\varepsilon \leq 2\lambda\varepsilon.$$

es decir que  $\bar{F}(Y)$  es  $2\lambda\varepsilon$ -denso en  $X$ . Además esto nos muestra que

$$|\bar{F} \circ F - Id_X|_\infty \leq 2\lambda\varepsilon,$$

lo que termina la prueba.  $\square$

Como ya anunciamos, la proposición anterior nos dice que podemos definir una relación de equivalencia en la clase de los espacios métricos a partir de la existencia de cuasi-isometrías entre ellos. Diremos entonces que  $X$  e  $Y$  son *cuasi-isométricos* si existe una cuasi-isometría  $F : X \rightarrow Y$ .

La cuasi-isometría  $\bar{F}$  definida en la prueba de la proposición anterior se denomina *cuasi-inversa* de  $F$ . Observar que existen múltiples cuasi-inversas de una cuasi-isometría dada. Sin embargo, no es difícil ver que dos de ellas siempre están a distancia uniforme acotada.

De la noción de cuasi-isometría se deriva naturalmente el siguiente problema:

*Dados dos espacios métricos  $X$  e  $Y$ , decidir si son cuasi-isométricos.*

Este es el problema central de la geometría a gran escala.

Una problema similar puede enunciarse de la siguiente manera:

*Dada una familia de espacios métricos, determinar sus clases de cuasi-isometría.*

A este último tipo de problemas los denominaremos *problemas de clasificación cuasi-isométrica*. A lo largo de estas notas nos concentraremos sobre todo en este tipo de problemas.

**Ejercicio 3.0.2.** Decimos que una función  $F : X \rightarrow Y$  es

- *cuasi-Lipschitz* si existen dos constantes  $\lambda \geq 1$  y  $\varepsilon \geq 0$  tal que para todo par de puntos  $x, x' \in X$  se cumple

$$|F(x) - F(x')| \leq \lambda|x - x'| + \varepsilon.$$

- *uniformemente propia* si existe una función  $\phi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  tal que para todo  $x \in X$  y  $r > 0$  se cumple  $\text{diam } F^{-1}(B(x, r)) \leq \phi(r)$ .

Consideramos una función  $F : X \rightarrow Y$ . Se pide:

1. Probar que si  $F$  es una cuasi-isometría, entonces es cuasi-Lipschitz y uniformemente propia.
2. Probar que si  $F$  es cuasi-Lipschitz y existe otra función cuasi-Lipschitz  $G : Y \rightarrow X$  tal que  $G \circ F$  y  $F \circ G$  están a distancia uniforme acotada de la identidad, entonces  $F$  es una cuasi-isometría y  $G$  es una cuasi-inversa de  $F$ .
3. Probar que si  $F$  es cuasi-Lipschitz,  $F(X)$  es  $C$ -denso en  $Y$  y existe  $G : Y \rightarrow X$  cuasi-Lipschitz tal que  $G \circ F$  está a distancia acotada de la identidad, entonces  $F$  es una cuasi-isometría.

## 3.1 Primeros ejemplos

Quizá la primera observación obligada que debemos hacer en este punto es la siguiente: si  $X$  es un espacio métrico acotado, entonces la inclusión de un punto cualquiera  $x_0 \in X$  es una  $(1, \text{diam}(X))$ -cuasi-isometría. Esta tiene como única cuasi-inversa a la única función  $X \rightarrow x_0$ . Como consecuencia de esto tenemos que todos los espacios acotados son cuasi-isométricos y por lo tanto son triviales desde nuestro punto de vista. En adelante consideraremos siempre espacios no acotados.

**Ejemplo 3.1.1.** Observamos que la inclusión  $\mathbb{Z}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  es una  $(1, 1/\sqrt{2})$ -cuasi-isometría.

Notar que en general se da lo siguiente: Si  $X \subset Y$  es  $\varepsilon$ -denso, entonces la inclusión  $X \hookrightarrow Y$  es una  $(1, \varepsilon)$ -cuasi-isometría.

**Ejemplo 3.1.2.** Consideramos  $\mathbb{N}$  y  $\mathbb{Z}$  con la métrica del valor absoluto. Supongamos que existe una cuasi-isometría  $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  de constantes  $(\lambda, \varepsilon)$ . Sin pérdida de generalidad asumimos que  $F(0) = 0$  (esto puede hacerse porque las traslaciones en  $\mathbb{Z}$  son isometrías). Como  $B = B(0, \lambda + \varepsilon) \subset \mathbb{Z}$  es finito, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $F(n) \notin B$  para todo  $n \geq n_0$ . Supongamos que  $F(n_0) > 0$  y tomamos  $n_1 \geq n_0$  tal que

$$F(n) > 0 \text{ para todo } n_0 \leq n < n_1 \text{ y } F(n_1) < 0.$$

Observar que  $n_1$  existe porque  $F(\mathbb{N})$  debe ser  $\varepsilon$ -denso en  $\mathbb{Z}$ . Como  $n_1 \geq n_0$  se cumple además

$$|F(n_1) - F(n_1 - 1)| \geq 2(\lambda + \varepsilon) > \lambda|n_1 - (n_1 - 1)| + \varepsilon,$$

lo que contradice el hecho de que  $F$  es  $(\lambda, \varepsilon)$ -cuasi-isometría. Concluimos entonces que  $\mathbb{N}$  y  $\mathbb{Z}$  no son cuasi-isométricos.

Como  $\mathbb{Z}$  es cuasi-isométrico a  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{N}$  es cuasi-isométrico a cualquier semirrecta de  $\mathbb{R}$  tenemos que  $\mathbb{R}$  no es cuasi-isométrico a ninguna semirrecta. Concluimos de esto que en la familia de los intervalos de  $\mathbb{R}$  hay tres clases de cuasi-isometría: la de  $\mathbb{R}$ , la de las semirrectas y la de los intervalos acotados.

**Ejercicio 3.1.3.** ¿Cuántas clases de cuasi-isometría tiene la familia de subconjuntos de  $\mathbb{R}$ ?

### 3.1.1 Crecimiento de volumen y clasificación de los espacios euclídeos

Ahora vamos a distinguir los espacios euclídeos. Para esto empezamos probando que  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^2$  no son cuasi-isométricos, y para esto basta con probar que  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Z}^2$  no lo son. Como la distancia euclídea es Lipschitz equivalente a la distancia del máximo, tomaremos esta última en  $\mathbb{Z}^2$ .

Nos será de utilidad el siguiente lema:

**Lema 3.1.4.** Sea  $F : X \rightarrow Y$  una cuasi-isometría. Entonces existe  $D \geq 0$  (que solo depende de las constantes de cuasi-isometría de  $F$ ) tal que  $\text{diam } F^{-1}(y) \leq D$  para todo  $y \in Y$ .<sup>1</sup>

*Demostración.* Supongamos que  $F$  es una  $(\lambda, \varepsilon)$ -cuasi-isometría, luego dados  $x, x' \in F^{-1}(y)$  se tiene

$$\lambda^{-1}|x - x'| - \varepsilon \leq |F(x) - F(x')| = 0.$$

Por lo tanto  $|x - x'| \leq \lambda\varepsilon$ . □

Supongamos ahora que existe una  $(\lambda, \varepsilon)$ -cuasi-isometría  $F : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ . Sin pérdida de la generalidad podemos suponer que  $F(0, 0) = 0$ . Dado  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que

---

<sup>1</sup>Observar que esto es una consecuencia directa del hecho de que una cuasi-isometría es uniformemente propia (Ver Ejercicio 3.0.2).

$F(\bar{B}((0,0),n)) \subset \bar{B}(0,\lambda n + \varepsilon)$ , donde  $\bar{B}(x,r)$  indica la bola cerrada en el espacio que corresponda.

Tenemos que  $\# \bar{B}((0,0),n) = (2n+1)^2$  y  $\# \bar{B}(0,\lambda n + \varepsilon) \leq 2(\lambda n + \varepsilon) + 1$ . Es decir que existe  $y \in \bar{B}(0,\lambda n + \varepsilon)$  tal que

$$\# F^{-1}(y) \geq \frac{(2n+1)^2}{2(\lambda n + \varepsilon) + 1},$$

lo que, por el Lema 3.1.4, es absurdo si  $n$  es suficientemente grande. Se concluye entonces que  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Z}^2$  no son cuasi-isométricos y luego no lo son  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^2$ .

El argumento usado funciona porque el crecimiento del cardinal de bolas (con respecto a su radio) tiene orden diferente en los espacios  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Z}^2$ . Esto se ve en  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^2$  como una discordancia entre el crecimiento de volumen de las bolas con respecto al radio. Ambas nociones de crecimiento (según la medida de conteo y según el volumen) son la misma cosa desde el punto de vista de la geometría a gran escala.

Queremos llevar esta idea al contexto general de un espacio métrico  $X$  dotados con una medida que esté ligada con su geometría.

**Definición 3.1.5.** Sea  $X$  un espacio métrico dotado de una medida de borel  $\mu$ . Decimos que el par  $(X, \mu)$  tiene *geometría acotada* (o que  $\mu$  es una *medida de geometría acotada en  $X$* ) si existe  $r_0 > 0$  tal que para todo  $r \geq r_0$  se cumple

$$0 < v(r) := \inf_{x \in X} \mu(B(x,r)) \leq \sup_{x \in X} \mu(B(x,r)) =: V(r) < +\infty. \quad (3.1)$$

Observar que la medida de conteo en  $\mathbb{Z}^n$  y el volumen en  $\mathbb{R}^n$  son medidas de geometría acotada.

Fijado  $(X, \mu)$  con volumen controlado, nos interesa estudiar las funciones

$$\varphi_x(r) = \mu(B(x,r)) \text{ para } r > 0.$$

Lo primero a observar es que si tomamos dos puntos  $x_1, x_2 \in X$ , entonces para todo  $r > 0$  se tiene

$$B(x_1, r) \subset B(x_2, r + |x_2 - x_1|) \text{ y } B(x_2, r) \subset B(x_1, r + |x_2 - x_1|),$$

luego  $\varphi_{x_1}(r) \leq \varphi_{x_2}(r + |x_1 - x_2|)$  y  $\varphi_{x_2}(r) \leq \varphi_{x_1}(r + |x_1 - x_2|)$ . Esto nos da una idea de cómo definir el crecimiento de volumen para que no dependa del punto base  $x$ .

**Definición 3.1.6.** Decimos que dos funciones  $\varphi, \psi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  son equivalentes, y notamos  $\varphi \sim \psi$ , si existen constantes  $A, B, C \geq 0$  ( $A, C \neq 0$ ) y  $r_0 > 0$  tales que

$$\varphi(r) \leq C\psi(Ar + B) \text{ y } \psi(r) \leq C\varphi(Ar + B) \quad (3.2)$$

para todo  $r \geq r_0$ . Definimos el *crecimiento de volumen* de  $(X, \mu)$  como la clase  $[\varphi_x]$  para la relación dada, donde  $x$  es cualquier punto en  $X$ .<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Esta definición no es estándar. La hacemos de esta forma para tener un objeto al que llamar *crecimiento de volumen* de un espacio, lo que nos permite, entre otras cosas, expresar de forma sencilla resultados como el que sigue. Es común en la bibliografía leer sobre *crecimiento exponencial* o *crecimiento polinomial de determinado grado*.

**Teorema 3.1.7.** *Sean  $(X, \mu)$  y  $(Y, \nu)$  dos espacios métricos medibles de geometría acotada. Si  $X$  e  $Y$  son cuasi-isométricos, entonces tienen el mismo crecimiento de volumen.*

*Demostración.* Supongamos que  $F : X \rightarrow Y$  es una  $(\lambda, \varepsilon)$ -cuasi-isometría y que  $v_X, V_X, v_Y, V_Y$  son las funciones definidas en (3.1) para  $X$  e  $Y$  respectivamente. Tomamos un punto  $x \in X$  y consideramos las funciones

$$\varphi_x(r) = \mu(B(x, r)) \text{ y } \varphi_{F(x)}(r) = \nu(B(F(x), r)).$$

Fijamos  $\delta > 0$  de forma tal que  $\gamma := \lambda^{-1}\delta - \varepsilon > 0$  y dado  $r > 0$  tomamos un conjunto  $\delta$ -separado maximal en  $B(x, r)$ , al que notamos por  $E$ . Como  $E$  es maximal, se tiene

$$B(x, r) \subset \bigcup_{x' \in E} B(x', \delta),$$

y luego

$$\varphi_x(r) \leq \sum_{x' \in E} \mu(B(x', \delta)) \leq (\#E)V_X(\delta). \quad (3.3)$$

Por otro lado, si  $x_1, x_2 \in E$ , entonces

$$|F(x_1) - F(x_2)| \geq \lambda^{-1}\delta - \varepsilon = \gamma > 0,$$

por lo que  $\#F(E) = \#E$  y  $F(E)$  es un conjunto  $\gamma$ -separado. Como además

$$F(E) \subset F(B(x, r)) \subset B(F(x), \lambda r + \varepsilon)$$

se tiene que las bolas  $B(F(x'), \gamma/2)$ , con  $x' \in E$ , son disjuntas y están contenidas en  $B(F(x), \lambda r + \varepsilon + \gamma)$ . Luego si  $r_0$  es como en la Definición 3.1.5 para el par  $(Y, \nu)$ , entonces para todo  $r \geq r_0$  se tiene

$$(\#E)v_Y(\gamma/2) \leq \sum_{x' \in E} \nu(B(F(x'), \gamma/2)) \leq \nu(B(F(x), \lambda r + \varepsilon + \gamma)) = \varphi_{F(x)}(\lambda r + \varepsilon + \gamma). \quad (3.4)$$

Juntando (3.3) y (3.4) obtenemos  $\varphi_x(r) \leq C\varphi_{F(x)}(Ar + B)$  con  $A = \lambda$ ,  $B = \varepsilon + \gamma$  y  $C = \frac{V_X(\delta)}{v_Y(\gamma/2)}$ . Una desigualdad análoga se alcanza considerando una cuasi-inversa de  $F$ , lo que termina la prueba. □

Observar que como consecuencia del Teorema 3.1.7 se tiene que el crecimiento de un espacio métrico medible de geometría acotada no depende de la medida, por lo que es una propiedad puramente métrica.

Una versión más fuerte del teorema anterior puede leerse en [10], donde se debilita la hipótesis de geometría acotada.

**Corolario 3.1.8.** *Dos espacios euclídeos  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$  son cuasi-isométricos si y solo si  $n = m$ .*

*Demostración.* Consideramos en  $\mathbb{R}^n$  la medida de volumen, que es claramente de geometría acotada. En este espacio se tiene  $\varphi_0(r) = r^n \omega_n$ , donde  $\omega_n$  es el volumen de la bola unidad en  $\mathbb{R}^n$ .

Por el Teorema 3.1.7 tenemos que  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$  son cuasi-isométricos si y solo si la función  $\tilde{\varphi}_0(r) = r^m \omega_m$  es equivalente a  $\varphi_0$ , lo que solo puede suceder si  $n = m$ .  $\square$

**Observación 3.1.9.** 1. No es cierto que tener el mismo crecimiento de volumen implica la existencia de una cuasi-isometría. El ejemplo más simple es la comparación entre  $\mathbb{N}$  y  $\mathbb{Z}$ . Otro ejemplo se ve en el punto anterior.

2. Las funciones de la forma  $t \mapsto ce^{at+b}$  son todas equivalentes. Este es el caso del crecimiento de los espacios hiperbólicos (que veremos en el siguiente capítulo), por lo que este invariante no permite diferenciarlos a menos de cuasi-isometrías.

**Ejercicio 3.1.10.** Probar que si  $F : X \rightarrow Y$  es cuasi-Lipschitz y uniformemente propia (entre dos espacios métricos medibles de geometría acotada), entonces existen constantes  $A, B, C$  y  $r_0$  tales que  $\varphi_x(r) \leq C\varphi_{F(x)}(Ar + B)$  para todo  $r \geq r_0$ . Es decir que el crecimiento en  $X$  está mayorado por el crecimiento en  $Y$ .

### 3.1.2 Grupos finitamente generados

Sea  $G$  un grupo finitamente generado y  $S$  un generador finito y simétrico ( $S^{-1} = S$ ). La norma de un elemento  $g \in G$ , notada por  $\|g\|_S$ , es la mínimo  $\ell \in \mathbb{N}$  tal que existen  $s_1, \dots, s_\ell \in S$  con

$$g = s_1 \cdots s_\ell.$$

Se fija  $\|1\|_S = 0$ . Luego se define la distancia de palabras en  $G$  por

$$d_S(g, h) = \|g^{-1}h\|_S.$$

Supongamos que  $S' \subset G$  es otro generador finito. Si ponemos

$$M = \max\{\|s'\|_S : s' \in S'\},$$

entonces tenemos que todo  $g \in G$  se puede escribir como un producto de  $M\|g\|_{S'}$  elementos de  $S$ , de donde se deduce que  $\|g\|_{S'} \leq M\|g\|_S$ .

Concluimos entonces que  $Id : (G, d_S) \rightarrow (G, d_{S'})$  es un mapa Lipschitz, y por un argumento análogo que su inversa también lo es, lo que implica que es un homeomorfismo biLipschitz y luego una cuasi-isometría.

El *grafo de Cayley* del par  $(G, S)$  es el grafo  $X = \text{Cay}(G, S)$  definido como sigue:

- Sus vértices son  $X_0 = G$ .
- $(g, h) \in X_1$  (es decir,  $(g, h)$  es una arista) si y solo si  $g^{-1}h \in S$ .

La distancia en  $X$  es la distancia de longitud para la cual toda arista es isométrica al intervalo  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ .

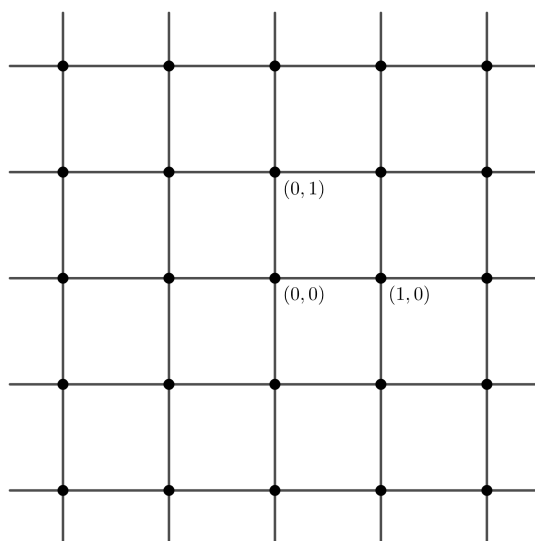


Figura 3.1: Grafo de Cayley de  $\mathbb{Z}^2$ .

Es claro que  $G \hookrightarrow X$  es un encaje isométrico  $(1/2)$ -denso si en  $G$  se toma la distancia de palabras  $d_S$ . Esto implica que dos grafos de Cayley del mismo grupo son siempre cuasi-isométricos, es decir, la clase de cuasi-isometría no depende del generador.

Observar que la acción por izquierda de  $G$  en  $G$  se extiende naturalmente a una acción por isometrías de  $G$  en  $X$  que además cumple las siguientes condiciones:

- La acción es *propia* *discontinua*, es decir que para todo compacto  $K \subset X$  hay finitos elementos  $g \in G$  tal que  $gK \cap K \neq \emptyset$ .
- En la bola cerrada de centro  $1 \in G$  y radio 1 hay un representante de cada órbita. Es decir que la acción tiene un dominio fundamental compacto o, dicho de otro modo, que es *cocompacta*.

El siguiente lema es un resultado clásico de la teoría geométrica de grupos.

**Lema 3.1.11** (Schwarz<sup>3</sup>-Milnor). *Sea  $G$  un grupo que actúa por isometrías en un espacio métrico propio  $X$  cuya métrica es de longitud. Supongamos además que la*

---

<sup>3</sup>Usualmente se escribe Švarc-Milnor, pero el primer apellido al que hace referencia esta denominación es de hecho “Schwarz”. El origen de la confusión viene de que el matemático en cuestión es ruso de ascendencia alemana, y su apellido en ruso se escribe “Шварц”, que suena “Shvartz”.

acción es propiamente discontinua y cocompacta. Entonces  $G$  es finitamente generado y para todo generador finito  $S$  el mapa

$$(G, d_s) \rightarrow X, \quad g \mapsto gx_0,$$

es una cuasi-isometría, donde  $x_0 \in X$  es un punto fijo cualquiera.

Un espacio métrico es *propio* si los cerrados y acotados en él son compactos.

*Demostración.* Suponemos que  $G$  es infinito y  $X$  es no compacto, ya que el otro caso es trivial.

Fijamos un punto  $x_0 \in X$  y  $R > 0$  tal que  $\bar{B} = \bar{B}(x_0, R)$  contiene un dominio fundamental de la acción de  $G$ . Luego los trasladados de  $\bar{B}$  por  $G$  cubren todo  $X$ . Además definimos:

$$\begin{aligned} S &= \{s \in G \setminus \{1\} : s\bar{B} \cap \bar{B} \neq \emptyset\} \\ r &= \inf \left\{ \text{dist}(\bar{B}, g\bar{B}) : g \in G, g \notin S \cup \{1\} \right\} \\ \lambda &= \max \{|x_0 - sx_0| : s \in S\}. \end{aligned}$$

Observar que si  $s\bar{B} \cap \bar{B} \neq \emptyset$ , entonces  $s^{-1}\bar{B} \cap \bar{B} = s^{-1}(\bar{B} \cap s\bar{B}) \neq \emptyset$ . Es decir que  $S^{-1} = S$ . Además  $S$  debe ser finito porque la acción es propiamente discontinua y la bola cerrada es compacta.

Vamos a probar que  $S$  es generador de  $G$ . Para esto tomamos  $g \notin S \cup \{1\}$  y sea  $k \in \mathbb{N}^*$  tal que

$$R + (k-1)r \leq |x_0 - gx_0| < R + kr. \quad (3.5)$$

Elegimos  $x_1, \dots, x_{k+1} = gx_0$  tal que  $|x_0 - x_1| \leq R$  y  $|x_i - x_{i+1}| < r$  para todo  $i > 1$ . Esto lo podemos hacer porque  $X$  tiene una métrica de longitud. Luego tomamos  $1 = g_0, \dots, g_k = g$  tal que  $x_{i+1} \in g_i\bar{B}$  para todo  $i$  y ponemos  $s_i = g_{i-1}^{-1}g_i$ . Observar que  $g = s_1 \cdots s_k$  y que para todo  $i$  se tiene

$$\text{dist}(\bar{B}, s_i\bar{B}) \leq |g_{i-1}^{-1}x_i - s_i g_{i-1}^{-1}x_{i+1}| = |x_i - x_{i+1}| < r.$$

Esto implica que  $s_i \in S \cup \{1\}$ , lo que nos permite concluir que  $S$  genera  $G$ . Además, por (3.5) se tiene

$$\|g\|_S \leq k \leq \frac{1}{r}|x_0 - gx_0| + \frac{r-R}{r} < \frac{1}{r}|x_0 - gx_0| + 1. \quad (3.6)$$

Por otro lado, es directo a partir de la desigualdad triangular, que

$$|x_0 - gx_0| \leq \lambda \|g\|_S. \quad (3.7)$$

Juntando (3.6), (3.7) y el hecho de que  $G$  actúa por isometrías, tenemos la condición (i) de cuasi-isometría. La condición (ii) sale del hecho de que los trasladados de  $\bar{B}$  cubren todo  $X$ , lo que implica que la órbita de  $x_0$  es  $R$ -densa en  $X$ .  $\square$

Para simplificar diremos que la acción de  $G$  en  $X$  es *geométrica* o que  $G$  *actúa geométricamente* en  $X$  si cumple las condiciones del Lema de Schwarz-Milnor.

**Corolario 3.1.12.** *Supongamos que  $G$  es un grupo finitamente generado y fijemos un generador finito  $S$ . Si  $H$  es un subgrupo de  $G$  de índice finito, entonces es finitamente generado. Además, si  $S'$  es un generador finito de  $H$ , entonces  $(H, d_{S'})$  es cuasi-isométrico a  $(G, d_S)$ .*

*Demostración.* Consideramos  $X = \text{Cay}(G, S)$  y la acción por isometrías de  $H$  en  $X$  generada por la acción por izquierda de  $H$  en  $G$ . Es claro que esta acción es propiamente discontinua ya que lo es la acción a izquierda de todo el grupo  $G$ .

Supongamos que  $Hg_1, \dots, Hg_n$  son todas las coclases a derecha del subgrupo  $H$ , es decir que

$$\bigcup_{i=1}^n Hg_i = G.$$

Sea  $\bar{B} \subset X$  una bola cerrada centrada en  $1 \in G$  de radio suficientemente grande para contener todas las bolas cerradas  $\bar{B}(g_i, 1)$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Si ahora tomamos  $g \in G$ , entonces  $g = hg_i$  para algún  $i = 1, \dots, n$  y algún  $h \in H$ , es decir que  $h^{-1}g \in \bar{B}$ . Como todo otro punto de  $X$  está a distancia menor a 1 de un vértice y la acción es por isometrías, su órbita debe contener un punto en  $\bar{B}$ . Es decir que la acción es cocompacta. Luego, por el Lema 3.1.11 tenemos que  $H$  debe ser finitamente generado y cuasi-isométrico a  $X$  cuando lo dotamos de una distancia de palabras. Concluimos entonces que es cuasi-isométrico a  $G$  con la distancia  $d_s$ .  $\square$

Los grupos finitamente generados son homogéneos como espacios métricos, esto es, dados dos puntos existe una isometría que lleva uno en el otro. Una consecuencia directa de esto es que todo grupo finitamente generado con la medida de conteo es de geometría acotada. Es de especial interés para la teoría geométrica de grupos el estudio del crecimiento con respecto a esta medida.

**Observación 3.1.13.** Supongamos que  $X$  es un espacio métrico propio donde actúa un grupo  $G$  con las hipótesis del Lemma 3.1.11. Luego  $G$  es cuasi-isométrico a  $X$ , lo que implica que  $X$  admite una medida de geometría acotada y su crecimiento es el de  $G$ . Esto nos dice que un camino para estudiar el crecimiento un espacio métrico puede ser encontrar un grupo que actúe adecuadamente en él.

**Ejemplo 3.1.14.** En la sección anterior vimos el caso de  $\mathbb{Z}^n$ . La métrica de las palabras para el generador  $\{e_1, -e_1, \dots, e_n, -e_n\}$ , donde  $e_i$  es el  $i$ -ésimo vector de la base canónica, es claramente cuasi-isométrica a su distancia euclídea. Este grupo tiene crecimiento polinomial de grado  $n$ . En el siguiente ejemplo vemos un grupo de crecimiento exponencial.

**Ejemplo 3.1.15.** El grupo libre en  $n$  generadores es el conjunto de palabras que se pueden escribir con  $n$  símbolos  $s_1, \dots, s_n$  y sus inversos  $s_1^{-1}, \dots, s_n^{-1}$  con la única regla

de que se reducen las secciones de la forma  $s_i s_i^{-1}$  y  $s_i^{-1} s_i$ . La operación definida en este grupo, denotado por  $F_n$ , es la concatenación:

$$(a_1 \cdots a_k) \cdot (b_1 \cdots b_\ell)$$

es la palabra que resulta de reducir la palabra  $a_1 \cdots a_k b_1 \cdots b_\ell$ . La unidad en  $F_n$  es la palabra vacía.

El grafo de Cayley de  $F_n$  es un árbol  $2n$ -regular (todos los vértices tienen grado  $2n$ ).

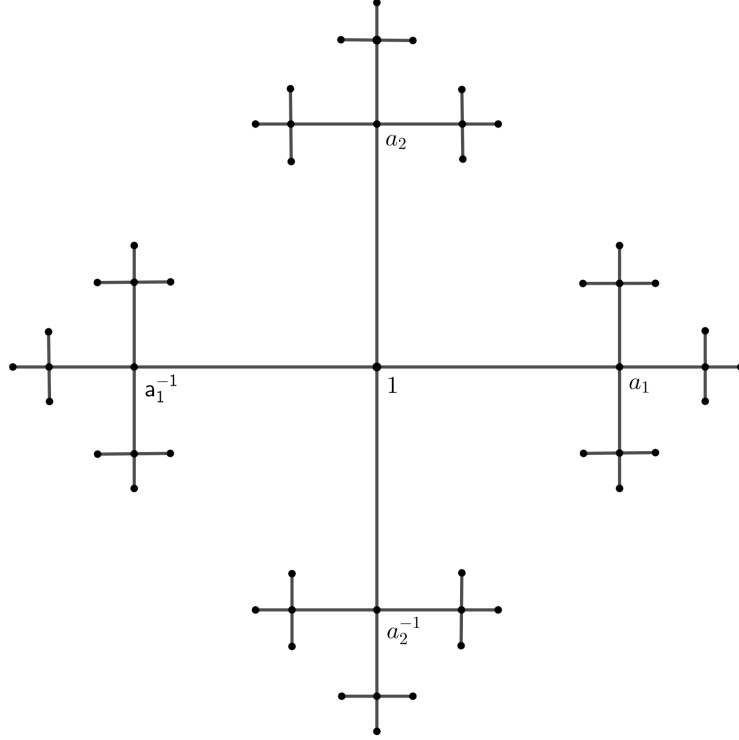


Figura 3.2: Grafo de Cayley de  $F_2$ .

Puede verse que  $\bar{B}(1, r) \subset F_n$  es el conjunto de palabras de largo menor o igual a  $r$ . Es fácil ver que el borde de la bola con radio  $k \in \mathbb{N}^*$  tiene  $2n(2n-1)^{k-1}$  elementos. Luego

$$\varphi_e(k) = 1 + 2n \sum_{i=0}^{k-1} (2n-1)^i = 1 + 2n \frac{(2n-1)^k - 1}{2n-2} \sim (2n-1)^k.$$

Una consecuencia de este cálculo y el Lema de Schwarz-Milnor es que un grupo libre no puede actuar geoméricamente en un espacio euclídeo.

Como se dijo en la sección anterior, las funciones  $(2n-1)^k = e^{\log(2n-1)k}$  son equivalentes para diferentes valores de  $n$  y por lo tanto no permite distinguir a menos de

cuasi-isometrías a los grupos libres. Sin embargo sí podemos distinguir los grupos libres de los grupos de crecimiento polinomial como  $\mathbb{Z}^n$ .

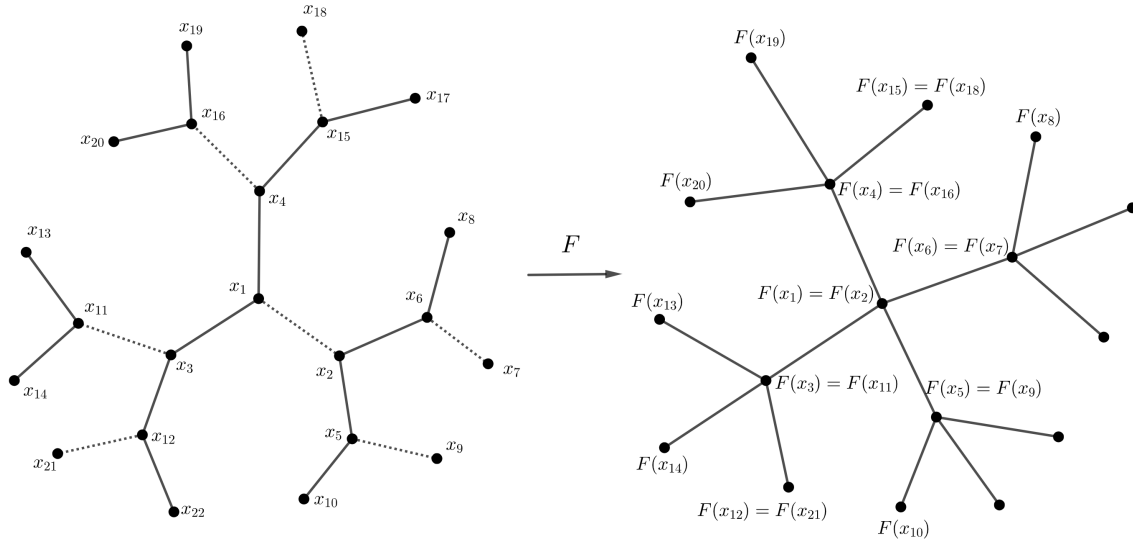
La siguiente proposición resuelve el problema que queda del ejemplo anterior.

**Proposición 3.1.16.** *Dado  $n \in \mathbb{N}$  consideramos  $A_n$  el árbol  $n$ -regular cuyas aristas tienen longitud 1. Entonces para todo  $n, m \geq 3$  se tiene que  $A_n$  y  $A_m$  son cuasi-isométricos.*

*Demostración.* Vamos a definir una cuasi-isometría  $F : A_3 \rightarrow A_n$  para  $n \geq 4$ . Para esto vamos a marcar subconjuntos de  $A_n$  siguiendo el siguiente proceso recursivo:

- Elegimos un segmento geodésico de longitud  $n - 3$  que una dos vértices cualesquiera y marcamos las aristas que recorre.
- Tomamos los vértices a distancia 1 de las aristas marcadas y marcamos un segmento geodésico de longitud  $n - 3$  empezando por dichos vértices que no contenga puntos de los caminos ya marcados.

Luego definimos  $F$  como la función que colapsa cada uno de los segmentos de longitud  $n - 3$  que fueron marcados. Observar que esta función tiene como imagen un árbol  $A_n$ .



Si  $x$  e  $y$  son dos vértices de  $A_n$  a distancia  $k$ , entonces en el camino en  $A_3$  que los une hay a lo sumo  $\lceil \frac{n-3}{n-2} k \rceil$  aristas marcadas, por lo que

$$\frac{1}{n-2}|x-y| - (n-3) \leq |F(x) - F(y)| \leq |x-y|.$$

Concluimos que  $F$  define una cuasi-isometría entre los conjuntos de vértices de  $A_n$  y  $A_{n+1}$ , pero esto es suficiente ya que la inclusión de los vértices en un grafo con aristas de longitud 1 es siempre una cuasi-isometría.  $\square$

Observar que  $A_2$  es la recta real, luego por lo visto anteriormente no es cuasi-isométrico a un grupo libre en dos o más generadores y por lo tanto a ningún otro árbol regular.

**Ejercicio 3.1.17.** Consideramos  $A_\infty$  el árbol regular de grado infinito (numerable)<sup>4</sup>, que tiene como vértices el conjunto de sucesiones finitas en  $\mathbb{N}$  que comienzan en 0 y cuyas aristas están dadas por la relación  $(0, x_1, \dots, x_n) \sim (0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ .

¿Es  $A_\infty$  cuasi-isométrico a  $A_n$  para algún  $n \geq 3$  (y luego todo  $n \geq 3$ )?

## 3.2 Grupo de cuasi-isometrías

Fijemos un espacio métrico  $X$ . Como vimos al principio de este capítulo, la composición es una operación bien definida en el conjunto de cuasi-isometrías de  $X$  en si mismo. Esta es claramente asociativa y tiene un elemento neutro (la identidad), sin embargo no es cierto que tenga inverso, pues las cuasi-isometrías no son necesariamente invertibles. Este problema desaparece al considerar una relación de equivalencia conveniente.

Definimos el *grupo de cuasi-isometrías* de  $X$  por

$$QI(X) = \{f : X \rightarrow X : f \text{ es cuasi-isometría}\} / \sim,$$

donde  $f \sim g$  si  $|f - g|_\infty < +\infty$ . Usamos en esta sección letras minúsculas para indicar elementos de  $QI(X)$  por razones que quedarán claras más adelante.

**Proposición 3.2.1.** *El grupo de cuasi-isometrías  $QI(X)$  es un grupo con la operación inducida por la composición.*

*Demostración.* Primero hay que probar que la composición pasa al cociente. Para esto tomemos  $f_1 \sim f_2$  y  $g_1 \sim g_2$ , luego

$$\begin{aligned} |g_2 \circ f_2(x) - g_1 \circ f_1(x)| &\leq |g_2(f_2(x)) - g_2(f_1(x))| + |g_2(f_1(x)) - g_1(f_1(x))| \\ &\leq \lambda |f_2(x) - f_1(x)| + \varepsilon + |g_2(f_1(x)) - g_1(f_1(x))| \\ &\leq \lambda |f_2 - f_1|_\infty + \varepsilon + |g_2 - g_1|_\infty, \end{aligned}$$

suponiendo que  $g_2$  es una  $(\lambda, \varepsilon)$ -cuasi-isometría. Esto prueba que  $g_2 \circ f_2 \sim g_1 \circ f_1$  y por lo tanto tiene sentido definir

$$[g] \circ [f] = [g \circ f].$$

Es claro que  $[Id_X]$  es neutro para la operación. Además, el inverso de  $[f] \in QI(X)$  es

$$[f]^{-1} = [\bar{f}],$$

---

<sup>4</sup>En realidad este espacio pertenece a la categoría de los  $\mathbb{R}$ -árboles.

donde  $\bar{f}$  es cualquier cuasi-inversa de  $f$ . Esto sale directamente de la Proposición 3.0.1. Observar que, por la unicidad del inverso, queda probado por esto que si  $\hat{f}$  es otra cuasi-inversa de  $f$ , entonces  $\hat{f} \sim \bar{f}$ .  $\square$

En este punto aparecen naturalmente algunos problemas, como determinar exactamente qué es  $QI(X)$ , qué propiedades algebraicas tiene o qué características tiene su acción sobre  $X$ .

Para lo anterior puede ser importante observar que  $QI(X)$  solo depende de la clase de cuasi-isometría de  $X$ , lo que se expresa en la siguiente proposición.

**Proposición 3.2.2.** *Supongamos que  $F : X \rightarrow Y$  es una cuasi-isometría, entonces el pull-back*

$$F^* : QI(Y) \rightarrow QI(X), \quad F^*([f]) = [\bar{F} \circ f \circ F]$$

*define un isomorfismo de grupos. Aquí  $\bar{F}$  es una cuasi-inversa cualquiera de  $F$ .*

*Demostración.* Lo hecho en la prueba anterior muestra que la composición pasa al cociente también cuando las cuasi-isometrías están definidas entre espacios diferentes. Esto nos dice que  $F^*$  no depende de la cuasi-inversa elegida. Además

$$\begin{aligned} F^*([g]) \circ F^*([f]) &= [\bar{F} \circ g \circ F] \circ [\bar{F} \circ f \circ F] = [\bar{F} \circ g \circ F \circ \bar{F} \circ f \circ F] \\ &= [\bar{F} \circ g \circ f \circ F] = F^*([f \circ g]) = F^*([f] \circ [g]). \end{aligned}$$

Además, es claro que  $\bar{F}^*$  es la inversa de  $F^*$ , lo que termina la prueba.  $\square$

Por último observamos que la relación  $\sim$  puede aplicarse al conjunto de funciones entre dos espacios diferentes  $X$  e  $Y$ , notado por  $\mathcal{F}(X, Y)$ . La familia de cuasi-isometrías es saturada en  $\mathcal{F}(X, Y)$  para esta relación, como se ve en la siguiente proposición.

**Proposición 3.2.3.** *Sea  $F : X \rightarrow Y$  una cuasi-isometría. Si  $G : X \rightarrow Y$  cumple  $G \sim F$ , entonces  $G$  también lo es.*

*Demostración.* La prueba es directa a partir de la desigualdad triangular. Se dejan los detalles como ejercicio.  $\square$

### 3.3 Cuasi-similaridades e isometrías aproximadas

Una *cuasi-similaridad* entre dos espacios métricos  $X$  e  $Y$  es una cuasi-isometría  $F : X \rightarrow Y$  que además cumple

$$\lambda|x - x'| - \varepsilon \leq |F(x) - F(x')| \leq \lambda|x - x'| + \varepsilon$$

para todo  $x, x' \in X$  y ciertas constantes  $\lambda > 0$  y  $\varepsilon \geq 0$ . Decimos también en este caso que  $F$  es una  $(\lambda, \varepsilon)$ -*cuasi-similaridad* o que es una *cuasi-similaridad de razón  $\lambda$* . Observar que si  $\varepsilon = 0$ , entonces  $F$  es una similaridad.

A una cuasi-similaridad de razón 1 (i.e.,  $(1, \varepsilon)$ -cuasi-isometría) le llamamos *isometría aproximada*.

**Proposición 3.3.1.** Sean  $F : X \rightarrow Y$  y  $G : Y \rightarrow Z$  dos cuasi-similaridades de razón  $\lambda$  y  $\mu$  respectivamente.

- (i) Si  $\bar{F}$  es una cuasi-inversa de  $F$ , es una cuasi-similaridad de razón  $\lambda^{-1}$ .
- (ii)  $G \circ F$  es una cuasi-similaridad de razón  $\mu\lambda$ .
- (iii) Si  $H : X \rightarrow Y$  es una función tal que  $H \sim F$ , entonces  $H$  es una cuasi-similaridad de razón  $\lambda$ .

*Demostración.* (i) Supongamos que  $|F \circ \bar{F} - Id_Y|_\infty = C$  y que  $F$  tiene constante aditiva de cuasi-isometría  $\varepsilon$ . Luego tenemos para  $y, y' \in Y$

$$\begin{aligned} \lambda|\bar{F}(y) - \bar{F}(y')| - \varepsilon &\leq |F \circ \bar{F}(y) - F \circ \bar{F}(y')| \\ &\leq |F \circ \bar{F}(y) - y| + |y - y'| + |F \circ \bar{F}(y') - y'| \\ &\leq |y - y'| + 2C \end{aligned}$$

Además, como se ve en la prueba de la parte (ii) de la Proposición 3.0.1,

$$|\bar{F}(y) - \bar{F}(y')| \geq \lambda^{-1}|y - y'| - 3\lambda^{-1}\varepsilon.$$

Por lo tanto tenemos

$$\lambda^{-1}|y - y'| - 3\lambda^{-1}\varepsilon \leq |\bar{F}(y) - \bar{F}(y')| \leq \lambda^{-1}|y - y'| + 2C\lambda^{-1}.$$

(ii) Para esta parte basta con adaptar la prueba del punto (i) de la Proposición 3.0.1.

(iii) Como sucede con la Proposición 3.2.3, esta prueba es directa a partir de la desigualdad triangular y se deja como ejercicio.  $\square$

Como consecuencia de la proposición anterior tenemos que

$$QS(X) = \{f : X \rightarrow X : f \text{ cuasi-similaridad}\} / \sim$$

y

$$RI(X) = \{f : X \rightarrow X : f \text{ isometría aproximada}\} / \sim$$

son grupos con la composición como operación y cumplen

$$RI(X) \leq QS(X) \leq QI(X).$$

A partir de las inclusiones anteriores podemos plantearnos el siguiente problema:

*Dado un espacio métrico  $X$ , ¿es  $QI(X)$  igual a  $QS(X)$  o  $RI(X)$ ?*

Esta pregunta tiene que ver con lo que denominamos *rigidez cuasi-isométrica*<sup>5</sup>. Decimos que las cuasi-isometrías de  $X$  son más o menos rígidas (o que  $X$  es rígido para la cuasi-isometrías) dependiendo de cuál es la regularidad máxima que tienen. Por ejemplo, si fuera cierto  $QI(X) = Isom(X)$ , entonces diríamos que  $X$  es rígido para las cuasi-isometrías, ya que toda cuasi-isometría de  $X$  en si mismo debe ser muy regular.

**Ejercicio 3.3.2.** 1. Probar que  $RI(\mathbb{R})$  tiene dos elementos y describirlos.

2. Describir  $QS(\mathbb{R})$ .

3. ¿Existe algún elemento en  $QI(\mathbb{R}) \setminus QS(\mathbb{R})$ ?

**Ejercicio 3.3.3.** Probar que  $RI(X)$  es normal en  $QS(X)$ . ¿Es normal en  $QI(X)$ ? ¿y  $QS(X)$  en  $QI(X)$ ?

**Ejercicio 3.3.4.** Decidir si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

- $RI(X) = \{[f] \in QI(X) : f \text{ isometría}\}$
- $QS(X) = \{[f] \in QI(X) : f \text{ cuasi-similaridad}\}$

## 3.4 Comentarios finales

1. Como sucede con los grupos finitamente generados, en los que la estructura natural no es dada por una métrica sino por una familia de estas, puede pensarse que los objetos de estudio de la geometría a gran escala son conjuntos munidos de una familia maximal de métricas que son cuasi-isométricamente equivalentes dos a dos. A esto le podemos llamar *estructura geométrica a gran escala* sobre un conjunto  $X$ .
2. Los grupos finitamente generados de crecimiento polinomial están caracterizados en [18]. Más específicamente, M. Gromov prueba que un grupo finitamente generado tiene crecimiento polinomial si y solo si contiene un subgrupo de índice finito que es nilpotente. Esto permite distinguir los grupos nilpotentes de grupos con crecimiento polinomial, como los grupos libres. Además es un buen ejemplo de cómo la geometría a gran escala del grupo se relaciona en sus propiedades algebraicas.

---

<sup>5</sup>Muchas veces este término refiere a la imposibilidad de deformar un objeto, o dotarlo de más de una estructura del mismo tipo. Ejemplo de esto es el Teorema de Rigidez de Mostow.

# Capítulo 4

## Hiperbolicidad

En este capítulo estudiaremos una propiedad invariante por cuasi-isometrías que da lugar a una familia de espacios métricos ampliamente estudiada: los espacios hiperbólicos (o espacios hiperbólicos en el sentido de Gromov). Para comenzar estudiaremos el ejemplo paradigmático de espacio hiperbólico, llamado plano hiperbólico.

### 4.1 El plano hiperbólico

El *plano hiperbólico real* o simplemente *plano hiperbólico* es la variedad Riemanniana de dimensión 2 (es decir, la superficie Riemanniana) dada por el semiplano superior

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

y la métrica Riemanniana

$$\langle v, w \rangle_x = \frac{\langle v, w \rangle}{\operatorname{Im}(z)^2},$$

donde  $\langle, \rangle$  es el producto interno usual en  $\mathbb{R}^2$ .

Las isometrías de  $\mathbb{H}^2$  que preservan orientación son las transformaciones de Möbius de coeficientes reales:

$$\operatorname{Isom}^+(\mathbb{H}^2) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Puede verificarse de forma directa que estas transformaciones de Möbius satisfacen (2.2). Las isometrías que revierten orientación se obtienen componiendo las anteriores con la simetría  $x + iy \mapsto -x + iy$ . Una consecuencia de esto es que el plano hiperbólico es homogéneo, es decir, el grupo de isometrías actúa transitivamente en él.

Supongamos que  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$  es una curva diferenciable que une dos puntos de la forma  $iy_1 = (0, y_1)$  e  $iy_2 = (0, y_2)$ . Escribimos  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . Su longitud está dada

por

$$\begin{aligned} \text{long}(\gamma) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt \\ &= \log(y_2) - \log(y_1). \end{aligned}$$

Esto nos permite concluir que  $\gamma$  es un segmento geodésico<sup>1</sup> si y solo si  $x(t) = 0$  para todo  $t$  (ver Ejercicio 2.5.2), y luego la curva que recorre la semirrecta  $\{0\} \times (0, +\infty)$  es una geodésica. Puede verse que  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$  actúa transitivamente en la familia de las semirrectas verticales y los semi-círculos con centro en el eje horizontal  $\mathbb{R} \times \{0\}$ , luego, como las isometrías llevan necesariamente geodésicas en geodésicas, tenemos un que dicha familia conforma la familia de geodésicas en  $\mathbb{H}^2$  y por lo tanto este espacio es geodésico. Observar que toda geodésica queda determinada por dos puntos o un punto y una dirección en el tangente.

La transformación de Möbius  $\varphi(z) = \frac{-iz+i}{z+1}$  lleva el disco unitario  $\mathbb{B}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  en  $\mathbb{H}^2$ . La métrica en  $\mathbb{B}^2$  que hace que  $\varphi$  sea una isometría es:

$$\langle v, w \rangle_z = \frac{4\langle v, w \rangle}{(1 - |z|^2)^2}.$$

Esta superficie es conocida como *disco de Poincaré*. Como es isométrico a  $\mathbb{H}^2$ , tiene las mismas propiedades métricas que esta. En algunos casos es conveniente trabajar con  $\mathbb{B}^2$  en lugar que con  $\mathbb{H}^2$ .

Utilizando que la isometría  $\varphi$  es una transformación de Möbius podemos deducir los siguiente:

- Las isometrías que preservan orientación en  $\mathbb{B}^2$  son también transformaciones de Möbius. En particular, todas las rotaciones de centro  $0 \in \mathbb{C}$  son isometrías. Las que no preservan orientación se obtienen componiendo las anteriores con la conjugación.
- Las geodésicas en  $\mathbb{B}^2$  son diámetros y arcos de círculo perpendiculares a  $S^1 = \partial\mathbb{B}^2$ .

#### 4.1.1 Crecimiento de volumen

La forma de volumen en  $\mathbb{B}^2$ , a la que llamamos *forma de área* por tratarse de una superficie, es

$$dA_{(x,y)} = \frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2} dx \wedge dy.$$

---

<sup>1</sup>Aquí decimos “segmento geodésico” en el sentido de que minimiza la longitud. Esto es equivalente (cuando estamos en un espacio de longitud) a que una reparametrización de dicha curva sea un encaje isométrico.

Por otro lado, la longitud de la curva  $\gamma : [0, a] \rightarrow \mathbb{B}^2$ ,  $\gamma(t) = (t, 0)$  es

$$\text{long}(\gamma) = \log \left( \frac{1+a}{1-a} \right),$$

es decir que la bola de centro 0 y radio  $r$  en  $\mathbb{B}^2$  coincide con la bola de centro 0 y radio  $a = \frac{e^r-1}{e^r+1}$  en el plano euclídeo. Teniendo en cuenta estas observaciones y usando coordenadas polares podemos calcular el volumen de una bola de radio  $r$ :

$$\text{Area}(B(0, r)) = \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{4s}{(1-s^2)^2} d\theta ds = 2\pi \left( \frac{2}{1-a^2} - 2 \right) = \frac{\pi(e^{2r} - 1)}{e^r}.$$

Esta función es equivalente a  $e^r$  (según la Definición 3.1.6), lo que lo diferencia de los espacios euclídeos pero no de los grupos libres.

## 4.1.2 Triángulos

Una diferencia entre el plano hiperbólico y el plano euclídeo se ve en sus triángulos. La clave de este comportamiento reside en su curvatura, que es constante  $-1$  en el plano hiperbólico mientras que en el plano euclídeo es constante 0. El siguiente resultado nos da pues información sobre el valor de los ángulos de un triángulo geodésico.

**Teorema 4.1.1** (Gauss–Bonnet). *Sea  $S$  una superficie Riemanniana y  $K : S \rightarrow \mathbb{R}$  su función de curvatura. Si  $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [x, z]$  es un triángulo geodésico en  $S$  con ángulos interiores  $a, b$  y  $c$ , entonces se cumple*

$$\int_{\text{int}(\Delta)} K dA = a + b + c - \pi,$$

donde  $\text{int}(\Delta)$  es la componente acotada de  $S \setminus \Delta$ .

En el plano euclídeo la curvatura es constante 0, luego la suma de los ángulos interiores de un triángulo siempre es siempre  $\pi$ . Sin embargo, como el plano hiperbólico tiene curvatura constante  $-1$  la suma será

$$a + b + c = \pi - \text{Area}(\text{int}(\Delta)) < \pi.$$

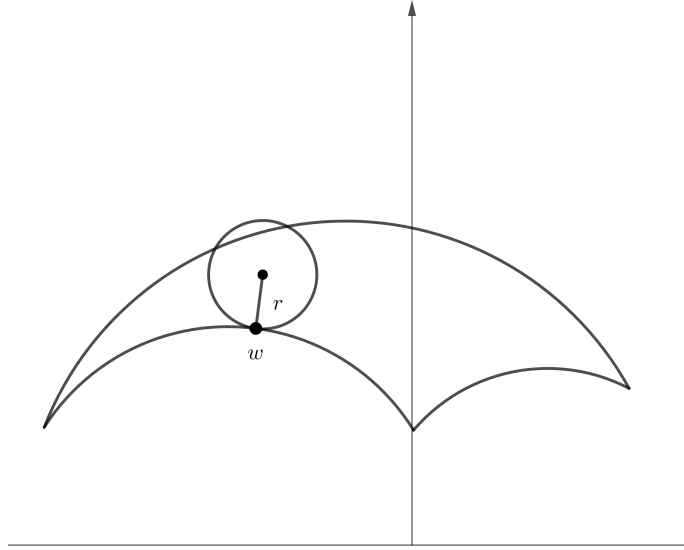
Notar que cuanto más grande sea el triángulo (en área) más pequeños serán sus ángulos interiores. Además, el área de cualquier triángulo está siempre acotada por  $\pi$ .

Consideremos un triángulo geodésico  $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [x, z] \subset \mathbb{H}^2$  y  $w \in [x, y]$ . Si tomamos una bola  $B$  de radio  $r$  que sea tangente a  $[x, y]$  en  $w$ , entonces tenemos

$$\frac{\pi(e^{2r} - 1)}{e^r} = \text{Area}(B) \leq \text{Area}(\text{int}(\Delta)) < \pi.$$

Esto implica  $r < \log 2$ . Es decir que toda bola de radio  $\log 2$  necesariamente corta el conjunto  $[y, z] \cup [x, z]$ , luego  $w$  está a distancia a lo sumo  $2 \log 2$  de los otros dos lados. En

este caso diremos que el triángulo  $\Delta$  es  $(2 \log 2)$ -flaco, propiedad que será desarrollada más adelante.



### 4.1.3 Borde al infinito

El disco de Poincaré  $\mathbb{B}^2$  tiene una compactificación como subconjunto de  $\mathbb{C}$ , sin embargo esta es puramente extrínseca. Por otro lado  $\mathbb{H}^2$  no es relativamente compacto en  $\mathbb{C}$  pero sí lo es en la esfera  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Cabe preguntarse si dichas compactificaciones tienen sentido intrínseco, es decir, se pueden reconocer a partir de la geometría de  $\mathbb{H}^2$  y  $\mathbb{B}^2$ .

Tal vez lo más sencillo a observar es que  $S^1 = \partial\mathbb{B}^2$  corresponde a los rayos geodésicos que parten de 0. Pero más aún, puede identificarse con los rayos geodésicos que parten de cualquier otro punto (por supuesto, esto es igual en  $\mathbb{H}$ ).

En un sentido extrínseco cada punto del borde es el punto de acumulación del correspondiente rayo en  $S^1$ , en un sentido intrínseco este punto debería verse como el límite en  $+\infty$  de dicho rayo. Cómo esto en principio no tiene sentido podemos verlo como el rayo mismo. Sin embargo, como el espacio es homogéneo el punto  $0 \in \mathbb{B}^2$  no tiene nada de especial, por lo que no hay razones para elegir la definición del borde a partir de este punto por sobre la definición a partir de otro punto. El siguiente lema nos resuelve problema. Lo enunciamos en  $\mathbb{H}^2$  por conveniencia.

**Lema 4.1.2.** 1. Si  $r_1$  y  $r_2$  son dos rayos geodésicos en  $\mathbb{H}^2$  con  $r_1(0) = r_2(0) = z$ , entonces  $|r_1(t) - r_2(t)| \rightarrow +\infty$  (cuando  $t \rightarrow +\infty$ ).

2. Sea  $r_1$  un rayo geodésico en  $\mathbb{H}^2$  y  $z \in \mathbb{H}^2$  un punto diferente de  $r_1(0)$ . Luego existe un único rayo geodésico  $r_2$  con  $r_2(0) = z$  tal que  $|r_1 - r_2|_\infty < +\infty$ .

*Demostración.* 1. A menos de aplicar una isometría, podemos suponer que  $r_1(t) =$

$(x, y + t)$ . Luego  $r_2$  debe describir un arco de círculo, por lo que para todo  $t \geq 0$  se tiene  $Im(r_2(t)) \leq D$  para alguna constante  $D > 0$ .

Si tomamos  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$  una curva definida en  $[a, b]$  que une  $(x, y + t)$  con cualquier punto  $z_0$  con  $Im(z_0) \leq D$ , entonces

$$long(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} y(s) ds \geq \log(y(b)) - \log(y(a)) \geq \log(y+t) - \log(D).$$

Esto implica que  $|r_1(t) - r_2(t)| \rightarrow +\infty$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

2. Tomamos para cada  $t \in [0, +\infty)$  un segmento geodésico  $\gamma_t$  que une  $z$  con  $r_1(t)$ . Para cada  $N \in \mathbb{N}^*$  la familia de segmentos  $\gamma_t|_{[0, N]}$  es equicontinua y tiene imagen en la bola cerrada  $B(z, N)$ , luego por el teorema de Arzelà-Ascoli hay una sucesión  $\{n_k^N\}_k \subset \mathbb{N}$  tal que  $\{\gamma_{n_k^N}\}$  converge uniformemente. Observar que el límite de dicha sucesión debe ser un segmento geodésico. Utilizando un argumento diagonal puede encontrarse una sucesión  $\{\gamma_{n_k}\}$  y un rayo geodésico  $r_2$  tal que  $\{\gamma_{n_k}|_{[0, N]}\}_k$  converge uniformemente a  $r_2|_{[0, N]}$  para todo  $N \in \mathbb{N}^*$ .

Observar que, como los triángulos en  $\mathbb{H}^2$  son  $(2 \log 2)$ -flacos, los segmentos  $\gamma_t$  están siempre a distancia de Hausdorff no mayor a  $H = 2 \log 2 + |r_1(0) - z|$  del rayo  $r_1$ . Por lo que  $r_1$  debe cumplir lo mismo. Tomemos ahora  $t \in [0, +\infty)$  y sea  $s \in [0, +\infty)$  tal que  $|r_1(s) - r_2(t)| \leq H$ . Por la desigualdad triangular tenemos

$$t - |r_1(0) - z| - C \leq s \leq t + |r_1(0) - z| + C,$$

luego

$$\begin{aligned} |r_1(t) - r_2(t)| &\leq |r_1(t) - r_1(s)| + |r_1(s) - r_1(t)| \\ &\leq |t - s| + C \leq |r_1(0) - z| + 2C. \end{aligned}$$

□

Podemos decir ahora que un punto en  $\partial \mathbb{B}^2$  o  $\partial \mathbb{H}^2 \subset \overline{\mathbb{C}}$  está identificado con una familia de rayos geodésicos con diferentes orígenes pero con la propiedad de que dos de ellos están a distancia uniforme acotada. Una definición alternativa (intrínseca) del borde de dichas superficies puede hacerse al considerar en el conjunto de todos los rayos geodésicos la relación de estar a distancia uniforme acotada.

#### 4.1.4 Generalizaciones

La construcción del plano hiperbólico puede generalizarse a cualquier dimensión  $n \geq 2$  poniendo en el semiespacio

$$\mathbb{H}^n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : y > 0\}$$

la métrica Riemanniana

$$\langle v, w \rangle_{(x, y)} = \frac{\langle v, w \rangle}{y^2},$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto interno usual en  $\mathbb{R}^n$ . Llamamos a esta variedad el *espacio hiperbólico real de dimensión  $n$* .

Se tiene que cada plano en  $\mathbb{H}^n$  que sea tangente a la dirección  $(0, 1)$  es una superficie totalmente geodésica isométrica a  $\mathbb{H}^2$ . Más aún, las semiesferas de dimensión 2 con centro en  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$  también son superficies totalmente geodésicas isomorfas a  $\mathbb{H}^2$ . Esto nos permite concluir:

- Las geodésicas son semirrectas verticales o arcos de círculo con ventro en  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ .
- Los triángulos geodésicos son  $(2 \log 2)$ -flacos (puesto que tres puntos siempre están en una superficie totalmente geodésica isomorfa a  $\mathbb{H}^2$ ).

Puede verse que  $\mathbb{H}^n$  es isomorfo a

$$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$$

con la métrica Riemanniana

$$\langle v, w \rangle_x = \frac{4\langle v, w \rangle}{(1 - \|x\|^2)^2},$$

cuya forma de volumen es

$$dV_x = \left( \frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^n dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Usando esto puede calcularse (al igual que como lo hicimos para  $n = 2$ ) el crecimiento de volumen en el espacio hiperbólico real y ver que está dado por la clase de la función  $e^r$ . Esto nos dice que no es posible clasificar a menos de cuasi-isometrías estos espacios en función de la dimensión usando la misma técnica que usamos para los espacios euclídeos.

Los espacios hiperbólicos reales tienen curvatura seccional constante  $-1$ .<sup>2</sup> Si reescalamos la métrica podemos obtener variedades de curvatura seccional constante  $k$  para cualquier  $k < 0$ . Llamamos  $\mathbb{H}_k^n$  a esta variedad, que resulta ser la única (a menos de isometrías) con esta curvatura que es además completa y simplemente conexa. Como sucede en  $\mathbb{H}^n$ , los triángulos de  $\mathbb{H}_k^n$  son flacos. Lo mismo sucede con los triángulos en variedades de curvatura negativa en general, como se ve en el siguiente resultado:

**Teorema 4.1.3** (Alexandrov).<sup>3</sup> *Sea  $M$  una variedad Riemanniana completa y simplemente conexa de curvatura acotada superiormente por  $k < 0$  y  $\Delta$  vértices  $x, y$  y  $z$ . Consideramos un triángulo geodésico  $\Delta'$  en  $\mathbb{H}_k^2$  de vértices  $\bar{x}, \bar{y}$  y  $\bar{z}$  tal que  $|x - y| = |\bar{x} - \bar{y}|$ ,*

<sup>2</sup>No queremos entrar en detalle sobre lo que esto significa. La curvatura seccional de una variedad Riemanniana  $M$  será para nosotros una función *sec* que a cada punto  $x$  y a cada plano  $\pi$  contenido en  $T_x M$  le asocia un número  $sec_x(\pi) \in \mathbb{R}$ .

<sup>3</sup>En realidad, el Teorema de Alexandrov es un poco más general, pues no pide que la variedad tenga curvatura negativa ni que sea completa y simplemente conexa. En el caso más general compara triángulos suficientemente chicos en  $M$  con triángulos en  $\mathbb{H}_k^2$  si  $k < 0$ ,  $\mathbb{R}^2$  si  $k = 0$  o una esfera de curvatura  $k$  si  $k > 0$ . El recíproco de dicha formulación fue probado por E. Cartan. Ver [8, Capítulo II.1].

$|x - z| = |\bar{x} - \bar{z}|$  y  $|y - z| = |\bar{y} - \bar{z}|$ . Llamamos  $f : \Delta \rightarrow \Delta'$  a la función que resulta una isometría al restringirla a los lados. Entonces, para todo par de puntos  $w, w' \in \Delta$  se tiene

$$|w - w'| \leq |f(w) - f(w')|.$$

Notar que como consecuencia del teorema anterior tenemos que en una variedad completa y simplemente conexa de curvatura negativa (acotada lejos de 0) los triángulos geodésicos son flacos.

El Teorema de Alexandrov da una idea para generalizar el comportamiento de las variedades de curvatura negativa en cuanto a los triángulos. Observamos que si  $\Delta$  triángulo geodésico en un espacio métrico  $X$  y  $k < 0$ , existe una función  $f_\Delta : \Delta \rightarrow \mathbb{H}_k^2$  que es una isometría al restringirla a cada lado. Esta función es única a menos de composiciones con isometrías de  $\mathbb{H}_k^2$ . Decimos que  $X$  es  $CAT(k)$ <sup>4</sup> si es geodésico y para todo triángulo  $\Delta$  y todo par de puntos  $x, x' \in \Delta$  se tiene

$$|x - x'| \leq |f_\Delta(x) - f_\Delta(x')|.$$

Los espacios  $CAT(k)$  tienen algunas de las propiedades de las variedades de curvatura negativa. Por ejemplo, admiten una compactificación similar en el caso de ser propios. Sin embargo, como la propiedad  $CAT(k)$  se debe verificar en triángulos arbitrariamente pequeños, no puede ser invariante por cuasi-isometrías, aún entre espacios geodésicos. En lo que queda del capítulo desarrollaremos una generalización más adecuada a nuestros propósitos: consideraremos espacios métricos geodésicos cuyos triángulos son flacos. Estos serán los espacios hiperbólicos en el sentido de Gromov.

## 4.2 Condiciones de hiperbolicidad de Gromov

Un *trípode* es un grafo con un vértice de grado 3 y tres de grado 1 junto con una métrica de longitud que hace que cada una sea isométrica a un intervalo compacto de  $\mathbb{R}$ . Llamaremos *centro* del trípode al vértice de grado 3.

Fijemos un espacio métrico geodésico  $X$ . Observamos que, dado un triángulo geodésico  $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$  en  $X$  existe una función  $f_\Delta : \Delta \rightarrow T$ , donde  $T$  es un trípode, tal que  $f_\Delta$  restringida a cada lado es una isometría. Llamamos a  $f_\Delta$  la *representación a un trípode* de  $\Delta$ .

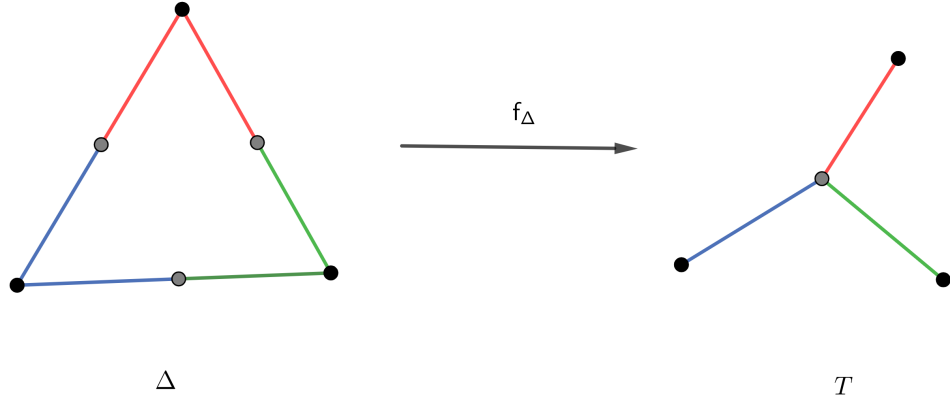
Denotaremos por  $(y|z)_x$  a la distancia entre  $f_\Delta(x)$  y el centro de  $T$ , es decir,

$$(y|z)_x = \frac{|y - x| + |z - x| - |y - z|}{2}.$$

A la función  $(\cdot|\cdot)_x : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  la llamamos *producto de Gromov de centro  $x$* . Intuitivamente, la cantidad  $(y|z)_x$  mide qué tanto hay que desviarse del camino de  $y$  a  $z$  si se quiere hacer una escala en  $x$ .

---

<sup>4</sup>La denominación CAT corresponde a tres apellidos: Cartan, Alexandrov y Toponogov.



Decimos que un triángulo  $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$  es  $\delta$ -fino si para todo  $v \in T$  se tiene que  $\text{diam}(f_\Delta^{-1}(v)) \leq \delta$ .

**Lema 4.2.1.** Sea  $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$  un triángulo geodésico. Entonces:

- (i)  $(y|z)_x \leq \text{dist}(x, [y, z])$ .
- (ii) Si  $\Delta$  es  $\delta$ -fino, entonces  $\text{dist}(x, [y, z]) \leq (y|z)_x + \delta$ .

*Demostración.* (i) Sea  $w \in [y, z]$  con  $|w - x| = \text{dist}(x, [y, z])$ . Existe un punto  $w' \in [x, y] \cup [z, x]$  con  $f_\Delta(w) = f_\Delta(w')$ , suponemos que  $w' \in [x, y]$  (el otro caso es análogo). Luego tenemos

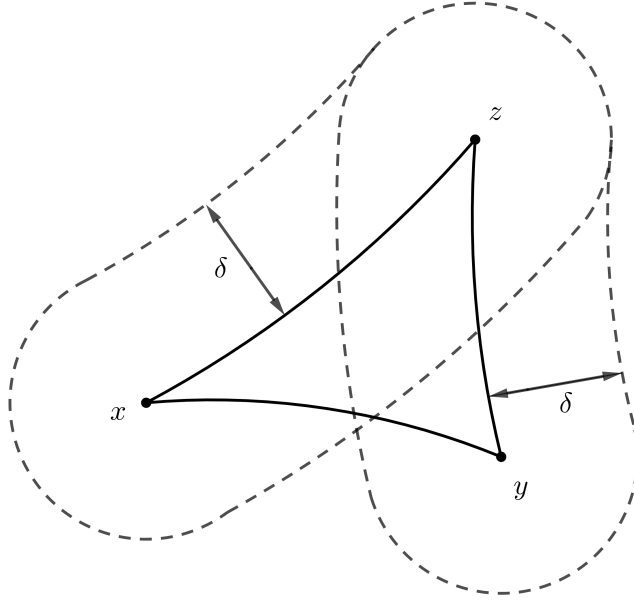
$$(y|z)_x \leq |w' - x| = |z - x| - |z - w'| = |z - x| - |z - w| \leq |x - w| = \text{dist}(x, [y, z]).$$

- (ii) Suponemos que  $p, q, r \in \Delta$  son los puntos de  $[x, y]$ ,  $[y, z]$  y  $[z, x]$  respectivamente tal que  $f_\Delta(p) = f_\Delta(q) = f_\Delta(r)$ . Tenemos entonces

$$\text{dist}(x, [y, z]) \leq |x - q| \leq |x - p| + |p - q| \leq (y|z)_x + \delta.$$

□

Por otro lado,  $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$  es  $\delta$ -flaco si todo lado está en un  $\delta$ -entorno cerrado de los otros dos.



**Proposición 4.2.2.** Sea  $X$  un espacio métrico geodésico. Son equivalentes:

- (i) Existe  $\delta \geq 0$  tal que todo triángulo geodésico en  $X$  es  $\delta$ -fino.
- (ii) Existe  $\delta \geq 0$  tal que todo triángulo geodésico en  $X$  es  $\delta$ -flaco.
- (iii) Existe  $\delta \geq 0$  tal que dados  $x, y, z, w \in X$  se cumple

$$(x|y)_w \geq \min\{(x|z)_w, (y|z)_w\} - \delta. \quad (4.1)$$

*Demostración.* (i)  $\Rightarrow$  (ii): Sea  $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$  un triángulo geodésico y  $u \in [x, y]$ . Existe  $v \in [y, z] \cup [z, x]$  tal que  $f_\Delta(v) = f_\Delta(u)$ , y como  $\Delta$  es  $\delta$ -fino, entonces  $|u - v| \leq \delta$  y por lo tanto  $[x, y]$  está en un  $\delta$ -entorno de  $[y, z] \cup [z, x]$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Suponemos que todo triángulo es  $\delta$ -flaco y que existe un triángulo  $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$  no es  $4\delta$ -fino. Tomamos  $u \in [x, y]$  y  $v \in [z, x]$  de forma tal que  $|x - u| = |x - v| \leq (y|z)_x$  y  $|u - v| > 4\delta$ .

Usando el Lema 4.2.1 tenemos

$$\text{dist}(v, [x, y]) = \min\{\text{dist}(v, [x, u]), \text{dist}(v, [u, y])\} \geq \min\{(x|u)_v, (u|y)_v\}.$$

Observamos que  $2(x|u)_v = |u - v|$  y

$$\begin{aligned} 2(u|y)_v &= |u - v| + |y - v| - (|x - y| - |x - u|) \\ &= |u - v| + (|y - v| + |x - v| - |x - y|) \geq |u - v|, \end{aligned}$$

lo que implica  $\text{dist}(v, [x, y]) \geq \frac{|u-v|}{2} > 2\delta$ .

En particular,  $|x - v| > 2\delta$  y por lo tanto existe  $w \in [x, v]$  con  $|w - v| = \delta$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \text{dist}(w, [x, y]) &\geq \text{dist}(v, [x, y]) - |v - w| > \delta, \\ \text{dist}(w, [y, z]) &\geq \text{dist}(x, [y, z]) - |x - w| \geq (y|z)_x - |x - w| \\ &> |v - x| - |x - w| = |w - v| = \delta. \end{aligned}$$

De donde concluimos que  $\text{dist}(w, [x, y] \cup [y, z]) > \delta$ , lo que contradice la hipótesis.

(i)  $\Rightarrow$  (iii): Supongamos que todos los triángulos geodésicos son  $\delta$ -finos y tomemos cuatro puntos  $x, y, z, w \in X$ . Notemos  $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$  y tomemos  $u \in [x, y]$  un punto que minimiza la distancia de dicho lado a  $w$  y  $v \in [y, z] \cup [z, x]$  tal que  $f_\Delta(u) = f_\Delta(v)$ , suponemos que  $v$  está en  $[y, z]$ . Como el triángulo es  $\delta$ -fino tenemos

$$\text{dist}(w, [y, z]) \leq |w - v| \leq |w - u| + |u - v| \leq \text{dist}(w, [x, y]) + \delta.$$

Por el Lema 4.2.1 tenemos

$$\min\{(y|z)_w, (z|x)_w\} \leq (y|z)_w \leq \text{dist}(w, [y, z]) \leq (x|y)_w + 2\delta.$$

(iii)  $\Rightarrow$  (i): Sea  $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$  un triángulo geodésico y  $u, v \in \Delta$  dos puntos diferentes que cumplen  $f_\Delta(u) = f_\Delta(v)$ . Vamos a probar que  $|u - v| \leq 4\delta$ .

Tenemos  $(u|y)_x = (v|z)_x = |x - u|$  y

$$|f_\Delta(x) - f_\Delta(u)| = |f_\Delta(x) - f_\Delta(v)| = |x - u| \leq (y|z)_x.$$

De donde tenemos

$$(u|v)_x \geq \min\{(u|y)_x, (y|z)_x, (z|v)_x\} - 2\delta = |x - u| - 2\delta.$$

Por otro lado,

$$(u|v)_x = \frac{|x - u| + |x - v| - |u - v|}{2} = |x - u| - \frac{|u - v|}{2},$$

de donde concluimos  $|u - v| \leq 4\delta$ . □

Diremos que  $X$  es *hiperbólico en el sentido de Gromov*, *Gromov-hiperbólico* o simplemente *hiperbólico* si se cumple las condiciones de la Proposición 4.2.2. También se podrá decir que es  $\delta$ -hiperbólico si cumple una de esas condiciones para  $\delta > 0$ , sin embargo será necesario especificar a cual de ellas nos referimos.

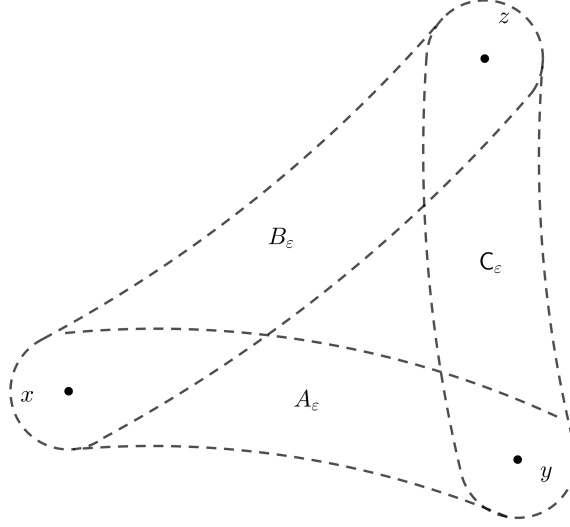
Para interpretar intuitivamente la tercera condición de la proposición anterior observemos que dados  $x, y \in X$ , el valor de  $(x|y)_w$  da una idea de que tan cerca está  $w$  del segmento  $[x, y]$ . De esta forma la desigualdad (4.1) nos dice que si un punto está cerca de un lado del triángulo, también estará cerca de alguno de los otros dos.

Si  $X$  no fuera geodésico se puede decir  $\delta$ -hiperbólico si cumple la condición (iii) de la proposición anterior para  $\delta > 0$ . De esta forma la condición de hiperbolicidad

se extiende a subespacios de espacios hiperbólicos. En este caso no hay segmentos geodésicos, sin embargo, dados  $x, y, z \in X$ , lugares geométricos

$$A_\varepsilon = \{w \in X : (x|y)_w \leq \varepsilon\}, \quad B_\varepsilon = \{w \in X : (x|z)_w \leq \varepsilon\} \text{ y } C_\varepsilon = \{w \in X : (y|z)_w \leq \varepsilon\}$$

pueden interpretarse como entornos de hipotéticos lados. Si interpretamos estos conjuntos como los lados de un triángulo, vemos que la condición (4.1) implica que dicho triángulo es flaco.<sup>5</sup>



- Ejemplos 4.2.3.**
1. Como vimos en la sección anterior, los espacios hiperbólicos reales  $\mathbb{H}^n$  son hiperbólicos en el sentido de Gromov. También lo son las variedades de curvatura negativa y, más en general, los espacios  $CAT(k)$  para cualquier  $k < 0$ .
  2. Si  $X$  es un espacio geodésico acotado, entonces es claro que todo triángulo es  $\delta$ -fino y  $\delta$ -flaco para  $\delta = \text{diam}(X)$ .
  3. Consideremos  $A$  un árbol con una métrica de longitud, es decir que es un grafo (posiblemente con infinitos vértices) conexo sin ciclos tal que toda arista es isométrica a algún intervalo cerrado de  $\mathbb{R}$ . Observar que todo triángulo en  $X$  es 0-flaco y 0-fino.

---

<sup>5</sup>Los nativos, de quienes aprendí esta definición, llamaban a esto "triángulo de chorizos". De hecho me lo contaron durante un asado que se había armado a modo de despedida de soltero de uno de ellos. Cuando me acerqué a la parrilla a pedir un chorizo al pan el asador quiso aprovechar la situación para ilustrarme, buscó unos minutos tratando de distinguir los chorizos de las morcillas pero fue en vano. Agarró tres de lo que pudo y armó la representación del triángulo ahí nomás, arriba de la parrilla. Era un hombre claro en sus explicaciones y con un tono dulce. Lástima que cortara los chorizos al estilo mariposa (o eso me dijo).

4. Los espacios geodésicos 0-hiperbólicos (en cualquiera de los sentidos, puesto que son equivalentes) se denominan  $\mathbb{R}$ -árboles y contienen a los anteriores. Estos se caracterizan por la siguiente propiedad: dados dos puntos  $x$  e  $y$ , existe una única curva inyectiva que los une y es además un segmento geodésico.

Un ejemplo de  $\mathbb{R}$ -árbol que no es un árbol es  $\mathbb{R}^2$  con la métrica

$$|x - y| = \|x\| + \|y\|,$$

donde  $\|\cdot\|$  es la norma euclídea. Notar que este espacio puede verse como la unión no numerable de rectas pegadas por un punto.

5. Salvo  $\mathbb{R}$ , los espacios euclídeos no son hiperbólicos.

### 4.3 Estabilidad de cuasi-geodésicas e Invarianza por cuasi-isometrías

Supongamos que  $X$  es un espacio métrico. Decimos que un encaje cuasi-isométrico  $\gamma : I \rightarrow X$  (con  $I$  un intervalo cerrado de  $\mathbb{R}$ ) es:

- un *cuasi-segmento geodésico* o simplemente *cuasi-segmento* si  $I = [a, b]$ . Si las constantes de cuasi-isometría son  $\lambda$  y  $\varepsilon$  decimos también que es un  $(\lambda, \varepsilon)$ -*cuasi-segmento (geodésico)*.
- un *cuasi-rayo geodésico* o simplemente *cuasi-rayo* si  $I = [a, +\infty)$ . Si las constantes de cuasi-isometría son  $\lambda$  y  $\varepsilon$  decimos también que es un  $(\lambda, \varepsilon)$ -*cuasi-rayo (geodésico)*.
- Una *casi-geodésica* si  $I = \mathbb{R}$ . Si las constantes de cuasi-isometría son  $\lambda$  y  $\varepsilon$  decimos también que es un  $(\lambda, \varepsilon)$ -*cuasi-geodésica*.

El resultado central de esta sección será el siguiente:

**Teorema 4.3.1** (Estabilidad de cuasi-segmentos). *Sea  $X$  un espacio hiperbólico. Dadas dos constantes  $\lambda \geq 1$  y  $\varepsilon \geq 0$  existe una constante  $H$  (que depende solo de  $\lambda, \varepsilon$  y la constante de hiperbolicidad de  $X$ ) con la siguiente propiedad: si  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  es un  $(\lambda, \varepsilon)$ -cuasi-segmento de extremos  $p, q \in X$ , entonces  $\text{dist}_H(\text{Im}(\gamma), [p, q]) \leq H$ , donde  $[p, q]$  es cualquier segmento geodésico que une  $p$  con  $q$ .*

El resultado anterior, o su generalización a cuasi-rayos y cuasi-geodésicas también se conoce como *Lema de Morse*. Para probarlo seguiremos lo hecho en [8, Capítulo III.H], para esto necesitaremos un par de lemas.

**Lema 4.3.2.** *Sea  $X$  un espacio geodésico  $\delta$ -hiperbólico (en el sentido de los triángulos flacos) y  $\gamma$  una curva rectificable en  $X$  con extremos  $p$  y  $q$ . Si  $[p, q]$  es un segmento geodésico, entonces para todo  $x \in [p, q]$  se tiene*

$$\text{dist}(x, \text{Im}(\gamma)) \leq \delta |\log_2 \text{long}(\gamma)| + 4.$$

*Demostración.* Observamos primero que si  $\text{long}(\gamma) \leq 1$  la desigualdad es trivial. Luego suponemos  $\text{long}(\gamma) > 1$ .

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\gamma$  está definida en  $[0, 1]$  y que cumple

$$\text{long}(\gamma|_{[t, t']}) = \text{long}(\gamma)(t' - t).$$

Tomamos  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{\text{long}(\gamma)}{2^{N+1}} < 1 \leq \frac{\text{long}(\gamma)}{2^N}.$$

Fijemos  $x \in [p, q]$  y tomamos un triángulo geodésico

$$\Delta_1 = [p, \gamma(1/2)] \cup [\gamma(1/2), q] \cup [p, q].$$

Elegimos  $y_1 \in [p, \gamma(1/2)] \cup [\gamma(1/2), q]$  tal que  $|x - y_1| \leq \delta$ . Si  $y_1 \in [p, \gamma(1/2)]$  tomamos

$$\Delta_2 = [p, \gamma(1/4)] \cup [\gamma(1/4), \gamma(1/2)] \cup [p, \gamma(1/2)]$$

e  $y_2 \in [p, \gamma(1/4)] \cup [\gamma(1/4), \gamma(1/2)]$  tal que  $|y_1 - y_2| \leq \delta$ ; en el otro caso ponemos

$$\Delta_2 = [\gamma(1/2), \gamma(3/4)] \cup [\gamma(3/4), q] \cup [\gamma(1/2), q]$$

e  $y_2 \in [\gamma(1/2), \gamma(3/4)] \cup [\gamma(3/4), q]$   $|y_1 - y_2| \leq \delta$ .

Continuando de forma recursiva construimos una sucesión finita  $y_1, \dots, y_N$  de forma tal que para todo  $n = 1, \dots, N$  el punto  $y_n$  está en un segmento geodésico  $[\gamma(t_n), \gamma(s_n)]$  con  $s_n - t_n = 1/2^n$ , y se cumple  $|y_n - y_{n+1}| \leq \delta$ . Tomamos además  $y \in \gamma([t_N, s_N])$  el punto más cercano a  $y_N$ . Luego como  $\text{long}(\gamma|_{[t_N, s_N]}) = \text{long}(\gamma)/2^N < 2$  y  $2^N \leq \text{long}(\gamma)$ , tenemos

$$|x - y| \leq \delta \log_2 \text{long}(\gamma) + 4.$$

□

**Lema 4.3.3.** *Sea  $X$  un espacio geodésico. Dado un  $(\lambda, \varepsilon)$ -cuasi-segmento  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ , existe un  $(\lambda, \varepsilon')$ -cuasi-segmento continuo  $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow X$  con las siguientes propiedades:*

- (i)  $\tilde{\gamma}(a) = \gamma(a)$  y  $\tilde{\gamma}(b) = \gamma(b)$ .
- (ii)  $\varepsilon' = 2(\lambda + \varepsilon)$ .
- (iii)  $\text{long}(\tilde{\gamma}|_{[t, t']}) \leq k_1 |\tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(t')| + k_2$  para todo  $t, t' \in [a, b]$ , donde  $k_1 = \lambda(\lambda + \varepsilon)$  y  $k_2 = (\lambda \varepsilon' + 3)(\lambda + \varepsilon)$ .
- (iv)  $\text{dist}_H(\text{Im}(\gamma), \text{Im}(\tilde{\gamma})) \leq \lambda + \varepsilon$ .

*Demostración.* Definimos  $\tilde{\gamma}$  para que tenga las siguientes propiedades:

- Coincide con  $\gamma$  en el conjunto  $\Sigma = \{a, b\} \cup (\mathbb{Z} \cap (a, b))$ .

- Si  $t < t'$  son dos puntos consecutivos de  $\Sigma$ , entonces  $\tilde{\gamma}|_{[t,t']}$  recorre un segmento geodésico de forma tal que si  $t \leq s < s' \leq t'$ , entonces

$$long(\tilde{\gamma}|_{[s,s']}) = long(\tilde{\gamma}|_{[t,t']})(s' - s).$$

Es claro por definición que se cumple (i).

Como la longitud de cada segmento geodésico que compone  $\tilde{\gamma}$  es a lo sumo  $\lambda + \varepsilon$ , todo punto en  $\text{Im}(\gamma) \cup \text{Im}(\tilde{\gamma})$  está en un  $(\lambda + \varepsilon)/2$ -entorno de  $\gamma(\Sigma) = \tilde{\gamma}(\Sigma)$ . Esto prueba (iv).

Denotamos  $[t]$  al punto de  $\Sigma$  más cercano a  $t \in [a, b]$ . Luego

$$\begin{aligned} |\tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(t')| &\leq |\tilde{\gamma}([t]) - \tilde{\gamma}([t'])| + \lambda + \varepsilon \\ &\leq \lambda|[t] - [t']| + \lambda + 2\varepsilon \\ &\leq \lambda(|t - t'| + 1) + \lambda + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}|t - t'| - 2(\lambda + \varepsilon) &\leq \frac{1}{\lambda}(|t - t'| - 1) - (\lambda + 2\varepsilon) \\ &\leq \frac{1}{\lambda}|[t] - [t']| - (\lambda + 2\varepsilon) \\ &\leq |\tilde{\gamma}([t]) - \tilde{\gamma}([t'])| - (\lambda + \varepsilon) \\ &\leq |\tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(t')|. \end{aligned}$$

Concluimos entonces que  $\tilde{\gamma}$  es un  $(\lambda, \varepsilon')$ -cuasi-segmento con  $\varepsilon'$  como en (ii).

Finalmente, si  $n$  y  $m$  son dos enteros (con  $n < m$ ) en  $[a, b]$ , tenemos

$$long(\tilde{\gamma}|_{[n,m]}) = \sum_{i=n}^{m-1} |\gamma(i) - \gamma(i+1)| \leq (\lambda + \varepsilon)|m - n|.$$

De la misma forma se tiene

$$long(\tilde{\gamma}|_{[a,m]}) \leq (\lambda + \varepsilon)(m - a + 1) \quad \text{y} \quad long(\tilde{\gamma}|_{[n,b]}) \leq (\lambda + \varepsilon)(b - n + 1).$$

Por lo tanto, para todo  $t, t' \in [a, b]$  se tiene

$$long(\tilde{\gamma}|_{[t,t']}) \leq (\lambda + \varepsilon)(|[t] - [t']| + 2)$$

y

$$|\tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(t')| \geq \frac{1}{\lambda}|t - t'| - \varepsilon' \geq \frac{1}{\lambda}(|[t] - [t']| - 1) - \varepsilon'.$$

Combinando las últimas dos desigualdades obtenemos (iii). □

*Prueba del Teorema 4.3.1.* Podemos suponer que  $\gamma$  es continua y cumple la condición (iii) del Lema 4.3.3.

Veamos primero que  $[p, q]$  está en un entorno de la imagen de  $\gamma$  de radio que solo depende de  $\delta$ ,  $\lambda$  y  $\varepsilon$ . Para esto tomamos

$$D = \sup\{dist(x, \text{Im}(\gamma)) : x \in [p, q]\}$$

y  $x_0 \in [p, q]$  un punto donde se alcanza dicho supremo. Sea  $y \in [p, x_0] \subset [p, q]$  a distancia  $2D$  desde  $x_0$  (si  $dist(x_0, p) < 2D$  ponemos  $y = p$ ). De forma análoga se elige  $z \in [x_0, q]$ . Además tomamos  $y', z' \in \text{Im}(\gamma)$  con  $|y - y'|, |z - z'| \leq D$ . Definimos la curva  $\beta$  que une  $y$  con  $z$  y resulta de concatenar  $[y, y']$ , la sección de  $\gamma$  que va de  $y'$  a  $z'$  y  $[z', z]$ . Notar que la imagen de  $\beta$  está fuera de  $B(x_0, D)$ .

Por un lado,

$$|y' - z'| \leq |y' - y| + |y - z| + |z - z'| \leq 6D,$$

luego por la propiedad (iii) del Lema 4.3.3 se tiene

$$long(\beta) \leq 6Dk_1 + k_2 + 2D.$$

Por otro lado, como  $dist(x_0, \text{Im}(\beta)) = D$ , se tiene

$$D - 4 \leq \delta |\log_2 long(\beta)|.$$

Concluimos entonces

$$D - 4 \leq \delta \log_2(6Dk_1 + k_2 + 2D),$$

lo que implica que  $D$  está acotado por arriba en función de  $\delta, \lambda$ , y  $\varepsilon$ . Tenemos entonces que  $[p, q]$  está en un entorno de  $\text{Im}(\gamma)$  de radio  $D_0 = D_0(\delta, \lambda, \varepsilon)$ .

Ahora vamos a probar que  $\text{Im}(\gamma)$  está contenida en el  $R$ -entorno de  $[p, q]$  con  $R = D_0(1 + k_1) + k_2/2$ . Para esto consideramos un intervalo maximal  $[a', b'] \subset [a, b]$  tal que  $\gamma([a', b'])$  está fuera del  $D_0$ -entorno de  $[p, q]$ . Como todo punto de  $[p, q]$  está a lo sumo a distancia  $D_0$  de  $\text{Im}(\gamma)$ , existe  $w \in [p, q]$ ,  $t \in [a, a']$  y  $t' \in [b', b]$  tal que

$$|w - \gamma(t)|, |w - \gamma(t')| \leq D_0.$$

En particular  $|\gamma(t) - \gamma(t')| \leq 2D_0$ , por lo que

$$long(\gamma|_{[t, t']}) \leq 2k_1 D_0 + k_2.$$

De aquí se deduce que  $\text{Im}(\gamma)$  está en el  $R$ -entorno de  $[p, q]$ .

Finalmente, como  $R \geq D_0$  podemos elegir  $H = R$ . □

A partir del Teorema 4.3.1 podemos deducir la estabilidad de cuasi-rayos y cuasi-geodésicas en el caso de espacios hiperbólicos propios.

**Corolario 4.3.4.** *Sea  $X$  un espacio geodésico, propio e hiperbólico y  $\gamma : I \rightarrow X$  un encaje cuasi-isométrico. Entonces existe  $H$  (que solo depende de las constantes de cuasi-isometría de  $\gamma$  y de hiperbolicidad de  $X$ ) tal que:*

(i) si  $\gamma$  es un cuasi-rayo, entonces existe un rayo geodésico  $r$  con

$$\text{dist}_H(\text{Im}(\gamma), \text{Im}(r)) \leq H.$$

(ii) si es una cuasi-geodésica, entonces existe una geodésica  $g$  con

$$\text{dist}_H(\text{Im}(\gamma), \text{Im}(g)) \leq H.$$

*Demostración.* Tomemos  $\gamma$  un cuasi-rayo. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que está definido en  $I = [0, +\infty)$ . Dado  $t \in I$  tomamos  $\beta_t$  un segmento geodésico con extremos  $\gamma(0)$  y  $\gamma(t)$  a distancia de Hausdorff a lo sumo  $H$  de  $\gamma$ , donde  $H$  es la constante dada en el Teorema 4.3.1.

Observemos que si tomamos una sucesión de reales positivos  $t_n \rightarrow +\infty$  y  $R > 0$ , entonces existe  $N$  tal que  $|\gamma(0) - \gamma(t_n)| \geq R$  para todo  $n \geq N$  y por lo tanto  $\beta_{t_n}$  está definido para todo  $t \in [0, R]$  y tiene su imagen en  $\bar{B}(\gamma(0), R)$ . Como las bolas cerradas en  $X$  son compactas y la sucesión  $\beta_{t_n}|_{[0, R]}$  es equicontinua, el Teorema de Arzela-Ascoli nos dice que existe una subsucesión uniformemente convergente a una curva  $\alpha : [0, R] \rightarrow X$ . Por ser límite uniforme de segmentos geodésicos  $\alpha$  es un segmento geodésico. Además debe estar en un  $H$ -entorno de  $\gamma$ .

Para cada entero positivo  $k$  definimos una sucesión  $\{t_n^k\}_n$  tal que

- $t_n^k \rightarrow +\infty$ .
- $\{t_n^k\}$  es subsucesión de  $\{t_n^{k-1}\}$ .
- $\beta_{t_n^k}|_{[0, k]}$  converge uniformemente a un segmento geodésico  $\alpha^k : [0, k] \rightarrow X$ .

Observamos que si  $k_1 < k_2$ ,  $\alpha^{k_2}$  extiende a  $\alpha^{k_1}$ , luego la unión de todos estos segmentos geodésicos es un rayo geodésico  $r$  que está en un  $H$ -entorno de  $\gamma$ . Además, si  $x \in \text{Im}(\gamma)$ , existe  $k \in \mathbb{N}$  y una sucesión  $s_n$  tal que  $|x - \beta_{t_n^k}(s_n)| \leq H$ . Podemos tomar  $y \in \text{Im}(\alpha^k) \subset \text{Im}(r)$  un punto de acumulación de  $\{\beta_{t_n^k}(s_n)\}_n$ . Luego  $|x - y| \leq H$ . Esto muestra que  $\text{Im}(\gamma)$  está en un  $H$ -entorno de  $r$ , terminando la prueba de (i).

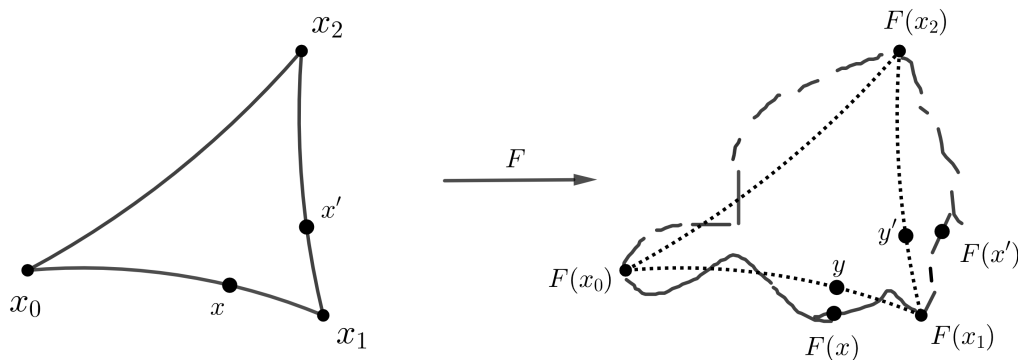
La prueba de (ii) es similar. Se deja como ejercicio.  $\square$

Otra consecuencia importante del Teorema 4.3.1 es el siguiente resultado:

**Teorema 4.3.5** (Invarianza por cuasi-isometrías). *Sea  $F : X \rightarrow Y$  una cuasi-isometría entre dos espacios métricos geodésicos. Si  $Y$  es hiperbólico, entonces  $X$  también lo es.*

*Demostración.* Observar que si  $F : X \rightarrow Y$  es una  $(\lambda, \varepsilon)$ -cuasi-isometría y  $\gamma$  es un segmento geodésico en  $X$ , entonces  $F \circ \gamma$  es una  $(\lambda, \varepsilon)$ -cuasi-segmento en  $Y$ . Supongamos que todos los triángulos geodésicos de  $Y$  son  $\delta$ -flacos.

Tomemos entonces un triángulo geodésico  $\Delta = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_0, x_2] \subset X$ . Su imagen  $F(\Delta)$  está formada por tres  $(\lambda, \varepsilon)$ -cuasi segmentos  $\gamma_1, \gamma_2$  y  $\gamma_3$ . El Teorema 4.3.1 anterior nos dice que  $[F(x_0), F(x_1)]$ ,  $[F(x_1), F(x_2)]$  y  $[F(x_0), F(x_2)]$  están a distancia de Hausdorff  $H$  de las imágenes de  $\gamma_1, \gamma_2$  y  $\gamma_3$  (supongamos que respectivamente).



Sea  $x \in [x_0, x_1]$ , luego existe  $y \in [F(x_0), F(x_1)]$  tal que  $|F(x) - y| \leq H$ . Además, como el triángulo  $\Delta = [F(x_0), F(x_1)] \cup [F(x_1), F(x_2)] \cup [F(x_0), F(x_2)]$  es  $\delta$ -flaco, existe  $y' \in [F(x_1), F(x_2)] \cup [F(x_0), F(x_2)]$  tal que  $|y - y'| \leq \delta$ . Tomamos  $x' \in [x_1, x_2] \cup [x_0, x_2]$  tal que  $|y' - F(x')| \leq H$ , luego

$$\begin{aligned} |x - x'| &\leq \lambda |F(x) - F(x')| + \lambda \varepsilon \\ &\leq \lambda (|F(x) - y| + |y - y'| + |y' - F(x')|) + \lambda \varepsilon \\ &\leq \lambda (2H + \delta + \varepsilon). \end{aligned}$$

Tenemos entonces que  $[x_0, x_1]$  está en un  $\delta'$ -entorno de  $[x_1, x_2] \cup [x_0, x_2]$  con  $\delta' = \lambda(2H + \delta + \varepsilon)$ .

Un argumento análogo puede hacerse para los otros dos lados, por lo que concluimos entonces que todo triángulo en  $X$  es  $\delta'$ -flaco.  $\square$

**Observación 4.3.6.** Observar que la prueba del teorema de invarianza por cuasi-isometrías utiliza que el espacio es geodésico. Veamos con un ejemplo que esta hipótesis es necesaria.

Tomamos  $X \subset \mathbb{R}^2$  el gráfico de la función  $t \mapsto |t|$ . Dotamos a  $X$  con la distancia de  $\mathbb{R}^2$ , de esta forma obtenemos un espacio no geodésico. La proyección sobre la primera variable  $\pi : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\pi(t, |t|) = t$  es biLipschitz y por lo tanto una cuasi-isometría. Además  $\mathbb{R}$  es hiperbólico.

Supongamos que  $X$  es  $\delta$ -hiperbólico para algún  $\delta$  y tomemos para  $t > 0$  los puntos  $x = (0, 0)$ ,  $y = (t, t)$ ,  $z = (-t, t)$  y  $w = (t/2, t/2)$ . Calculamos

$$(x|y)_w = 0, \quad (x|z)_w = \left(\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{4}\right)t, \quad (y|z)_w = \left(\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{4} - 1\right)t.$$

Por lo tanto, si  $t$  es suficientemente grande  $\min\{(x|z)_w, (y|z)_w\} - \delta$  es positivo, lo que contradice la condición de  $\delta$ -hiperbolicidad.

Por último, veamos una consecuencia del Teorema 4.3.1 que nos será útil en la siguiente sección. La prueba fue extraída de [13].

**Proposición 4.3.7** (Cuasi-invarianza del producto de Gromov). *Sea  $F : X \rightarrow Y$  una  $(\lambda, \varepsilon)$ -cuasi-isometría entre espacios geodésicos hiperbólicos. Entonces existe una constante  $A \geq 0$ , que depende de  $\lambda$ ,  $\varepsilon$  y las constantes de hiperbolicidad de  $X$  e  $Y$ , tal que para toda terna de puntos  $x, y, w \in X$  se cumple*

$$\frac{1}{\lambda}(x|y)_w - A \leq (F(x)|F(y))_{F(w)} \leq \lambda(x|y)_w + A.$$

*Demostración.* Vamos a suponer que en  $X$  e  $Y$  los triángulos geodésicos son  $\delta$ -finos y tomamos  $H$  como en el Teorema 4.3.1 para ambos espacios.

Tomamos un segmento geodésico  $[x, y]$  en  $X$  y otro  $[F(x), F(y)]$  en  $Y$ . Observamos que:

- por el Lema 4.2.1 se tiene

$$\begin{aligned} (x|y)_w &\leq \text{dist}(w, [x, y]) \leq (x|y)_w + \delta, \quad y \\ (F(x)|F(y))_{F(w)} &\leq \text{dist}(F(w), [F(x), F(y)]) \leq (F(x)|F(y))_{F(w)} + \delta; \end{aligned}$$

- por el Teorema 4.3.1

$$\text{dist}_H(F([x, y]), [F(x), F(y)]) \leq H;$$

- y por ser  $F$  una  $(\lambda, \varepsilon)$ -cuasi-isometría, tenemos

$$\frac{1}{\lambda} \text{dist}(w, [x, y]) - \varepsilon \leq \text{dist}(F(w), F([x, y])) \leq \lambda \text{dist}(w, [x, y]) + \varepsilon$$

Por un lado,

$$\begin{aligned} (F(x)|F(y))_{F(w)} &\leq \text{dist}(F(w), [F(x), F(y)]) \\ &\leq \text{dist}(F(w), F([x, y])) + H \\ &\leq \lambda \text{dist}(w, [x, y]) + \varepsilon + H \\ &\leq \lambda(x|y)_w + \lambda\delta + \varepsilon + H. \end{aligned}$$

De forma similar se prueba que

$$(F(x)|F(y))_{F(w)} \geq \frac{1}{\lambda}(x|y)_w - \delta - \varepsilon - H.$$

Tenemos entonces lo buscado poniendo  $A \geq \lambda\delta + \varepsilon + H$ .

□

## 4.4 Borde al infinito

Recordar que una compactificación de  $\mathbb{H}^n$  puede hacerse mediante la inclusión  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  o clausurando  $\mathbb{B}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ . En ambos casos se le une a este espacio una frontera que es topológicamente  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Este conjunto contiene los límites en infinito de rayos geodésicos de  $\mathbb{H}^n$  (o  $\mathbb{B}^n$ ). En general, un espacio Gromov-hiperbólico cualquiera no está naturalmente inmerso en otro espacio, luego no resulta tan directo obtener una compactificación similar. Sin embargo, sí puede construirse el borde donde tienen su límite los rayos geodésicos definiendo convenientemente una relación de equivalencia entre estos.

Suponemos que  $X$  es un espacio geodésico  $\delta$ -hiperbólico (en el sentido de los triángulos flacos) y propio y denotamos por  $\mathcal{R}(X)$  al conjunto de rayos geodésicos en  $X$ . Diremos que dos rayos  $r_1, r_2 : [0, +\infty) \rightarrow X$  son *asintóticos* y escribimos  $r_1 \sim r_2$  si

$$|r_1 - r_2|_\infty = \sup\{|r_1(t) - r_2(t)|\} < +\infty. \quad (4.2)$$

Definimos el *borde al infinito* (o simplemente *borde*) de  $X$  como el cociente

$$\partial X = \mathcal{R}(X) / \sim.$$

Si  $r \in \mathcal{R}$ , denotaremos por  $[r] \in \partial X$  a su clase, es decir, al correspondiente punto del borde. También escribiremos  $r(+\infty) = [r]$ .

Más adelante le daremos estructura a este conjunto y veremos que es una construcción propia de la geometría a gran escala de  $X$ .

La condición (4.4.1) implica que la distancia entre Hausdorff  $\text{Im}(r_1)$  e  $\text{Im}(r_2)$  es finita. De hecho estas condiciones son equivalentes. Para probar la implicancia restante podemos tomar

$$D = \text{dist}_H(\text{Im}(r_1), \text{Im}(r_2)), |r_1(0) - r_2(0)|\}.$$

Para todo  $t > 0$  existe  $s_t$  tal que  $|r_1(t) - r_2(s_t)| \leq D$ . Luego tenemos

$$s_t = |r_2(0) - r_2(s_t)| \leq |r_2(0) - r_1(0)| + |r_1(0) - r_1(t)| + |r_1(t) - r_2(s_t)| \leq t + 2D.$$

Esto implica que  $s_t - t \leq 2D$ . De la misma forma se prueba que  $t - s_t \leq 2D$ , luego

$$|r_1(t) - r_2(t)| \leq |r_1(t) - r_2(s_t)| + |r_2(s_t) - r_2(t)| \leq D + |s_t - t| \leq 3D.$$

La ventaja de la definición utilizando la distancia de Hausdorff de las imágenes es que puede hacerse utilizando cuasi-rayos, ya que por el Teorema 4.3.1 en toda clase hay un rayo geodésico.

En la siguiente proposición se da una aproximación más precisa que la dada aquí arriba. En particular, se ve que dos rayos geodésicos asymptóticos se acercan en el futuro a menos una distancia que solo depende de la constante de hiperbolicidad de  $X$ .

**Proposición 4.4.1.** *Sean  $r_1, r_2 : [0, +\infty) \rightarrow X$  dos rayos geodésicos asymptóticos. Entonces:*

(i) Si  $r_1(0) = r_2(0)$ , entonces para todo  $t \geq 0$  se tiene  $|r_1(t) - r_2(t)| \leq 2\delta$ .

(ii) En general, existen  $T_1, T_2 \geq 0$  tal que para todo  $t \geq 0$  se tiene

$$|r_1(t + T_1) - r_2(t + T_2)| \leq 5\delta.$$

*Demostración.* Para probar (i) podemos ver primero que  $\text{dist}_H(\text{Im}(r_1), \text{Im}(r_2)) \leq \delta$ . Luego el argumento de arriba muestra deseado.

Tomamos  $x = r_1(t_0)$  y el triángulo geodésico  $\Delta$  de vértices  $r_1(0) = r_2(0)$ ,  $r_1(t)$  y  $r_2(t)$  que tiene dos lados incluidos en las imágenes de los rayos  $r_1$  y  $r_2$ . Por lo visto anteriormente los últimos dos vértices están a distancia acotada independientemente de  $t$ . Si  $t$  es suficientemente grande el lado  $[r_1(t), r_2(t)]$  está lejos de  $x$ , luego, como  $\Delta$  es  $\delta$ -flaco,  $\text{dist}(x, [r_1(0), r_1(t)]) \leq \delta$ . Esto permite concluir que  $\text{Im}(r_1)$  está en un  $\delta$ -entorno de  $\text{Im}(r_2)$ .

Análogamente se prueba que  $\text{Im}(r_2)$  está en un  $\delta$ -entorno de  $\text{Im}(r_1)$  y por lo tanto  $\text{dist}_H(\text{Im}(r_1), \text{Im}(r_2)) \leq \delta$ .

Para probar (ii) tomamos una sucesión de segmentos geodésicos  $\gamma_n$  que unen  $r_1(0)$  con  $r_2(n)$ . Por Arzelà-Ascoli podemos tomar una subsucesión uniformemente convergente en compactos a un rayo geodésico  $r$  con  $r(0) = r_1(0)$ . Como todos los triángulos  $[r_2(0), r_1(0)] \cup [r_1(0), r_2(n)] \cup [r_2(0), r_2(n)]$  (con un lado incluidos en  $\text{Im}(r_2)$  y otro igual a la imagen de  $\gamma_n$ ) son  $\delta$ -flacos, los lados  $[r_1(0), r_2(n)]$  están, salvo por un intervalo inicial, en un  $\delta$ -entorno de la imagen de  $r_2$ , esto también debe cumplirlo la imagen de  $r$ . Luego existen  $T_1, T_2 \geq 0$  con  $|r(T_1) - r_2(T_2)| \leq \delta$  y tal que para todo  $t$  existe  $t'$  con

$$|r(t + T_1) - r_2(t' + T_2)| \leq \delta.$$

Por la desigualdad triangular  $t$  y  $t'$  difieren en a lo sumo  $2\delta$ , luego  $|r(t + T_1) - r_2(t + T_2)| \leq 3\delta$ . Sumando esto a la parte (i) tenemos

$$|r_1(t + T_1) - r_2(t + T_2)| \leq |r_1(t + T_1) - r(t + T_1)| + |r(t + T_1) - r_2(t + T_2)| \leq 5\delta.$$

□

Si  $\gamma$  es una geodésica, entonces su restricción a  $[0, +\infty)$  es un rayo geodésico, y por lo tanto representa un punto en el borde denotado por  $\gamma(+\infty)$ . Por otro lado, la curva  $t \mapsto \gamma(-t)$  también es un rayo geodésico al que vamos a denotar por  $\gamma(-\infty)$ .

**Proposición 4.4.2.** (i) Sea  $x \in X$  y  $\xi \in \partial X$ . Entonces existe un rayo geodésico  $r$  con  $r(0) = x$  y  $r(+\infty) = \xi$ .

(ii) Sean  $\xi, \eta \in \partial X$ , entonces existe una geodésica  $\gamma$  tal que  $\gamma(+\infty) = \xi$  y  $\gamma(-\infty) = \eta$ .

*Demostración.* (i) Tomamos  $\tilde{r}$  un rayo geodésico con  $\tilde{r}(+\infty) = \xi$  y  $\beta$  la curva que resulta de concatenar un segmento geodésico  $[x, \tilde{r}(0)]$ , es decir que  $\beta(0) = x$ ,  $\beta(D) = \tilde{r}(0)$  y  $\beta(t + D) = \tilde{r}(t)$ , donde  $D = |x - \tilde{r}(0)|$ .

Tenemos que si  $t, t' \geq D$ , entonces  $|\beta(t) - \beta(t')| = |t - t'|$ , lo mismo si  $t, t' \leq D$ . Supongamos que  $t < D < t'$ , entonces

$$|t' - t| - 2D \leq |t' - D| - |D - t| \leq |\beta(t') - \beta(t)| \leq \text{long}(\beta|_{[t, t']}) = |t' - t|,$$

lo que muestra que  $\beta$  es un cuasi-rayo. Luego, por la estabilidad de los cuasi-rayos en espacios propios existe un rayo geodésico  $r$  con origen en  $x$  a distancia de Hausdorff acotada de  $\tilde{r}$  y por lo tanto con  $r(+\infty) = \xi$ .

- (ii) Por la parte anterior podemos tomar dos rayos geodésicos  $r_1$  y  $r_2$  con  $r_1(0) = r_2(0)$ ,  $r_1(+\infty) = \xi$  y  $r_2(+\infty) = \eta$ . Consideramos  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow X$  definida por

$$\beta(t) = \begin{cases} r_1(t) & \text{si } t \leq 0 \\ r_2(-t) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Ahora tomemos  $t < 0 < t'$  y llamemos  $a \in [r_1(t), r_1(0)]$ ,  $b = [r_2(0), r_2(t')]$  y  $c \in [r_1(t), r_2(t)]$  tales que  $|r_1(0) - a| = |r_1(0) - b|$ ,  $|r_1(t) - a| = |r_1(t) - c|$  y  $|r_2(t') - a| = |r_2(t') - c|$ . Como los triángulos en  $X$  son finos y los rayos  $r_1$  y  $r_2$  se separan, estos puntos están a distancia acotada de  $r_1(0), r_2(0)$  (independientemente de  $t$  y  $t'$ ).

Por un lado,  $|r_1(t) - r_2(-t')| \leq \text{long}(\beta|_{[t, t']}) = |t' - t|$ . Además,

$$|r_1(t) - r_2(t')| = |r_1(t) - c| + |c - r_2(t')| \geq |t - t'| - |r_1(0) - a| - |r_2(0) - b|.$$

Esto muestra que  $\beta$  es una cuasi-geodésica y luego existe una geodésica  $\gamma$  a distancia de Hausdorff acotada de  $\beta$ , lo que implica  $\gamma(-\infty) = r_1(+\infty) = \xi$  y  $\gamma(+\infty) = r_2(+\infty) = \eta$ . □

Los puntos de la proposición anterior se conocen como *propiedades de visibilidad*. Lo que nos dicen estas propiedades es que desde cualquier punto en el espacio hiperbólico se puede ver todo el borde, y que desde cualquier punto en el borde se puede ver el resto del borde.

Si  $r$  es un rayo geodésico con  $r(0) = x$  y  $r(+\infty) = \xi$ , denotaremos a su imagen por  $[x, \xi)$ . Si  $\gamma$  es una geodésica con  $\gamma(-\infty) = \xi$  y  $\gamma(+\infty) = \eta$ .

La proposición anterior nos permite considerar triángulos geodésicos que tengan algunos de sus vértices en  $\partial X$ , le llamaremos a estos *triángulos ideales*.

**Ejercicio 4.4.3.** Probar que si los triángulos geodésicos en  $X$  son  $\delta$ -flacos, entonces los triángulos ideales son  $5\delta$ -flacos.

Vamos a definir una topología en  $\overline{X}$ , esto quedará determinado por un criterio para la convergencia de las sucesiones (los cerrados serán aquellos que contengan los límites de sucesiones convergentes contenidas en ellos). Para simplificar llamaremos *rayo generalizado* a un segmento geodésico o la extensión de un rayo geodésico al intervalo  $[0, +\infty]$ .

Fijamos  $p \in X$ . Diremos que  $\{x_n\} \subset \overline{X}$  converge a  $x \in \overline{X}$  si existe una sucesión de rayos generalizados  $r_n : [0, l_n] \rightarrow \overline{X}$  con  $r_n(0) = p$  y  $r_n(l_n) = x_n$  tal que para toda subsucesión existe una subsucesión de esta  $\{r_{n_k}\}$  y un rayo generalizado  $r : [0, l] \rightarrow \overline{X}$  con  $r(0) = p$  y  $r(l) = x$  tal que

- $l_n \rightarrow l$ , y
- $\{r_{n_k}\}$  converge uniformemente a  $r$  en compactos de  $[0, a)$ .

Se deja como ejercicio probar que esta topología no depende de la elección del punto  $p$ .

Observar que esta noción de convergencia extiende a la dada por la métrica en  $X$ , ya que si  $x_n \rightarrow x$  en  $X$  (con la distancia), el Teorema de Arzelà-Ascoli nos permite obtener, para toda subsucesión de segmentos geodésicos que unen cualquier punto fijo con  $x_n$ , una subsubsesión convergente uniformemente en compactos, y este límite debe ser un segmento geodésico con extremo  $x$ . Además, según esta definición, si  $r$  es un rayo geodésico, para toda sucesión  $t_n \rightarrow +\infty$  se tiene que el  $r(t_n)$  converge a  $r(+\infty)$ , por lo que tiene sentido la igualdad

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = r(+\infty).$$

Dado un rayo geodésico  $r$  y  $k > 2\delta$  definimos  $V_n(r)$  como el conjunto de puntos  $x \in \overline{X}$  tal que existe un segmento o rayo geodésico  $\gamma$  con origen en  $r(0)$  y extremo  $x$  tal que  $|r(n) - \gamma(n)| < k$ . La familia  $\{V_n(r)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una base de entornos para  $r(+\infty)$  (la prueba se deja como ejercicio<sup>6</sup>).

- Ejemplos 4.4.4.**
1. Como vimos al principio del capítulo, el borde al infinito de  $\mathbb{H}^2$  está identificado con los puntos del círculo  $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ . En general, el borde de  $\mathbb{H}^n$  se identifica con los la esfera  $\mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$ .
  2. Sea una variedad completa y simplemente conexa  $M$  de dimensión  $n$  cuya curvatura está entre dos constantes negativas  $k_1 < k_2$ . Dado un punto  $x \in M$ , el mapa exponencial  $\exp_{x_0} : T_x M \rightarrow M$  es un difeomorfismo. Por el teorema de comparación de triángulos de Alexandrov puede verse que dos rayos geodésicos que parten de  $x$  no son nunca asintóticos. Como estos rayos están determinados por los vectores tangentes unitarios en  $T_x M$ , concluimos que  $\partial M$  se identifica con la esfera unitaria en  $T_x M$  (que es Lipschitz equivalente a la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^n$ ). Además, puede verse que  $\partial M$  es de hecho homeomorfo a una esfera.
  3. En  $\mathbb{R}$  tenemos dos clases de rayos: los que tienden a  $+\infty$  y los que tienden a  $-\infty$ , luego  $\partial \mathbb{R}$  tiene dos puntos.

---

<sup>6</sup>También se puede leer en [8]. No queremos dar demasiados detalles ya que a continuación pondremos en el borde una familia de métricas en el borde y nos olvidaremos de la descripción dada de la topología.

4. Consideremos el grafo de Cayley  $X = \text{Cay}(F_2)$ , donde  $F_2$  es el grupo libre en 2 generadores, es decir, se toma el generador  $S = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ . Un rayo geodésico  $r$  en  $X$  queda determinado por la sucesión  $\{r_n\}$ , donde  $r_0 = 1$  y  $r_n \in S$  para todo  $n \geq 1$ , y este es el único en su clase con dicho origen. Recordemos que además en toda clase de equivalencia de rayos hay siempre un rayo que parte de cualquier punto elegido.

Si elegimos  $k < 1$  (recordemos que los triángulos en  $X$  son 0-flacos), vemos que

$$V_n(r) \cap \partial X = \{\tilde{r} \in \mathcal{R}(X) : \tilde{r}_i = r_i \text{ para todo } i \leq n\},$$

es abierto y cerrado en el borde. Con esto podemos ver que  $\partial X$  es perfecto y totalmente desconexo, es decir que topológicamente es un conjunto de Cantor.

5. El argumento anterior puede repetirse para cualquier árbol (sin hojas)  $A$ , resultando  $\partial A$  un conjunto de Cantor.

#### 4.4.1 Métricas visuales

Tomemos dos puntos distintos  $\xi, \eta \in \partial X$ , representados respectivamente por rayos geodésicos  $r_1$  y  $r_2$  con origen  $w \in X$ . Fijamos  $k > 2\delta$  y tomamos  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande para que  $V_n(r_1)$  y  $V_n(r_2)$  sean disjuntos. Si tomamos dos puntos  $x \in V_n(r_1)$  e  $y \in V_n(r_2)$  entonces, por un argumento análogo al usado en la parte (ii) de la Proposición 4.4.2, tenemos que si los entornos  $V_n(r_1)$  y  $V_n(r_2)$  están suficientemente lejos, cualquier segmento geodésico  $[x, y]$  está a distancia acotada (independientemente de los puntos  $x$  e  $y$ ) de  $w$  y por lo tanto  $(x|y)_w$  está acotado. Esto nos permite extender el producto de Gromov al borde de la siguiente forma:

$$(\xi|\eta)_w = \sup \liminf_{i,j \rightarrow +\infty} (x_i|y_j)_w \in [0, +\infty]. \quad (4.3)$$

Donde el supremo se toma entre todo par de sucesiones  $x_i \rightarrow \xi$ ,  $y_i \rightarrow \eta$ . En el caso  $\xi = \eta$  las sucesiones tienden al mismo punto en el borde y esto hace que su producto de Gromov tienda a  $+\infty$  ya que la geodésica que los une se aleja de  $w$ .

Observar que si  $x_n \rightarrow \xi$  e  $y_n \rightarrow \eta$  son tales que  $(x_n|y_n)_w \rightarrow (\xi|\eta)_w - \varepsilon$ , entonces la sucesión de rayos  $[x_n, y_n]$  tiene una subsucesión que converge uniformemente en compactos a una geodésica  $(\xi, \eta)$ . Además, teníamos

$$(x_n|y_n)_w \leq \text{dist}(w, [x_n, y_n]) \leq (x_n|y_n)_w + \delta',$$

donde  $\delta'$  es tal que todos los triángulos de  $X$  son  $\delta'$ -finos. Por lo tanto,

$$(\xi|\eta)_w - \varepsilon \leq \text{dist}(w, (\xi, \eta)) \leq (\xi|\eta)_w + \delta',$$

y, como  $\varepsilon$  es arbitrariamente chico,

$$(\xi|\eta)_w \leq \text{dist}(w, (\xi, \eta)) \leq (\xi|\eta)_w + \delta'.$$

Por último, dos pares de geodésicas que comparten límites siempre deben estar a distancia de Hausdorff acotada por  $5\delta$  (puesto que pueden verse como lados de un triángulo ideal con un vértice en  $X$  y dos en su borde), por lo que obtenemos

$$(\xi|\eta)_w - 5\delta \leq \text{dist}(w, (\xi, \eta)) \leq (\xi|\eta)_w + \delta' + 5\delta \quad (4.4)$$

para toda geodésica  $(\xi, \eta)$ .

Notar que cuanto más grande sea  $(\xi|\eta)_w$  más lejos estará la geodésica  $(\xi, \eta)$  y por lo tanto más tardarán en separarse los rayos de origen  $w$  con límites en  $\xi$  y  $\eta$ . Es decir, cuánto más grande el producto de Gromov, intuitivamente más cerca estarán  $\xi$  y  $\eta$ . Esto motiva escribir:

$$\rho_w(\xi, \eta) = e^{-(\xi|\eta)_w}.$$

Donde se entiende  $\rho_w(\xi, \eta) = 0$ .

**Lema 4.4.5.** 1. Para  $w \in X$ , la función  $\rho_w : \partial X \times \partial X \rightarrow \mathbb{R}$  es una cuasi-métrica.

2. Si  $w, w' \in X$ , entonces las cuasi-métricas  $\rho_w$  y  $\rho_{w'}$  son Lipschitz-equivalentes.

*Demostración.* 1. Es claro que  $\rho_w$  es simétrica y no negativa. Además el cero solo se alcanza solo en el caso  $\xi = \eta$ .

Tomamos tres puntos  $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \partial X$ . Pasando al límite puede verse que se cumple

$$(\xi_1|\xi_3)_w \geq \min\{(\xi_1|\xi_2)_w, (\xi_2|\xi_3)_w\} - \delta'.$$

Luego tenemos

$$\begin{aligned} \max\{\rho_w(\xi_1, \xi_2), \rho_w(\xi_2, \xi_3)\} &= e^{-\min\{(\xi_1|\xi_2)_w, (\xi_2|\xi_3)_w\}} \\ &\geq e^{-(\xi_1|\xi_3)_w} e^{\delta'} \\ &= e^{\delta'} \rho_w(\xi_1, \xi_3). \end{aligned}$$

2. Se verifica fácilmente que  $|(x|y)_w - (x|y)_{w'}| \leq 2|w - w'|$ , luego pasando al límite tenemos:

$$e^{-2|w-w'|} \leq \frac{\rho_w(\xi|\eta)}{\rho_{w'}(\xi|\eta)} \leq e^{2|w-w'|},$$

para todo par de puntos  $\xi, \eta \in \partial X$ .

□

Ahora, por la Proposición 2.1.3, tenemos que existe  $\alpha_0 > 0$  tal que si  $0 < \alpha < \alpha_0$  tal que  $\rho_w^\alpha$  es Lipschitz-equivalente a una métrica  $d_w^\alpha$ . Observamos que como todas las  $\rho_w$  son Lipschitz-equivalentes,  $\alpha_0$  no depende de  $w$ . Llamamos a  $d_w^\alpha$  la *distancias visual en  $\partial X$  centrada en  $w \in W$  con parámetro visual  $\alpha$* ; o simplemente diremos que cualquiera de estas métricas es una *distancia visual en  $\partial X$* .

Observar que dos distancias visuales del mismo parámetro son siempre Lipschitz-equivalentes y que  $\rho_w^{\alpha'} = (\rho_w^\alpha)^{\alpha'/\alpha}$ , luego todas las distancias visuales inducen la misma topología. Para ver que dicha topología es la relativa a la dada en  $\overline{X}$  haremos primero una definición.

**Definición 4.4.6.** Dado  $x, y \in X$  y  $R > 0$  definimos la sombra desde  $x$  de la bola  $B(x, R)$  como el conjunto  $\mathcal{O}_x(y, R)$  formado por los puntos  $\xi \in \partial X$  tal que existe un rayo geodésico  $r$  con origen  $x$  cuya imagen interseca a  $B(y, R)$ . Si  $y$  está en un rayo geodésico de origen  $x$  y límite  $\xi_0 \in \partial X$ , decimos que la sombra está *centrada* en  $\xi_0$ .

Observar que si  $r$  es un rayo geodésico de origen  $x$ , entonces

$$\mathcal{O}_x(r(n), k) = V_n(r) \cap \partial X,$$

donde  $V_n(r)$  es definido como arriba para  $k > 2\delta$ . Luego el siguiente lema permite concluir que las métricas visuales inducen en  $\partial X$  la topología relativa a la definida en  $\overline{X}$ .

**Lema 4.4.7.** *Fijemos  $x \in X$  y  $R > 5\delta$  y consideremos una métrica visual  $d = d_x^\alpha$  en  $\partial X$ .*

1. *Existe una constante  $D = D(R) \geq 1$  tal que para toda bola  $B(\xi, r) \subset \partial X$  existen  $y_1, y_2 \in X$  en el mismo rayo geodésico de origen  $x$  y límite  $\xi$  con:*

- $\mathcal{O}_x(y_1, R) \subset B(\xi, r) \subset \mathcal{O}_x(y_2, R)$ , y
- $D^{-1}e^{-\alpha|x-y_2|} \leq r \leq De^{-\alpha|x-y_1|}$ .

2. *Existe una constante  $E = E(R) \geq 1$  tal que para toda sombra  $\mathcal{O}_x(y, R)$  centrada en  $\xi$  se pueden encontrar dos bolas  $B(\xi, r_1)$  y  $B(\xi, r_2)$  tales que:*

- $B(\xi, r_1) \subset \mathcal{O}_x(y, R) \subset B(\xi, r_2)$ , y
- $E^{-1}r_2 \leq e^{-\alpha|x-y|} \leq Er_1$ .

*Demostración.* 1. Sea  $C \geq 1$  una constante tal que para toda geodésica  $(\xi, \eta)$  se tiene

$$C^{-1}e^{-\alpha \text{dist}(x, (\xi, \eta))} \leq d(\xi, \eta) \leq Ce^{-\alpha \text{dist}(x, (\xi, \eta))}.$$

Esto implica que si  $\eta \in B(\xi, r)$ , entonces

$$\text{dist}(x, (\xi, \eta)) \geq \frac{-\log(Cr)}{\alpha}.$$

Observamos que, como un triángulo ideal de vértices  $x, \xi$  y  $\eta$  es  $5\delta$ -flaco, tenemos que para que  $y \in [x, \xi)$  esté a distancia no mayor a  $5\delta$  de  $(\xi, \eta)$  se debe dar

$$|x - y| \geq \frac{-\log(Cr)}{\alpha} - 5\delta,$$

Por esto tomamos  $y_2$  en dicho rayo con

$$|x - y_2| = \max \left\{ 0, \frac{-\log(Cr)}{\alpha} - 5\delta - 1 \right\}.$$

Si el máximo se alcanza en 0, entonces  $\eta \in \mathcal{O}_x(y_2, R) = \partial X$ . En el otro caso  $y_2$  debe estar a distancia menor  $R$  del rayo  $[x, \eta]$  y por lo tanto  $\eta \in \mathcal{O}_x(y_2, R)$ .

Además, si el máximo se alcanza en 0, entonces  $r > C^{-1}e^{-\alpha(5\delta+1)}$  y  $e^{-\alpha|x-y_2|} = 1$ . Si el máximo no se alcanza en 0, entonces

$$r = C^{-1}e^{-\alpha(5\delta+1)}e^{-\alpha|x-y_2|}.$$

Por lo que la primera desigualdad se cumple para  $D \geq Ce^{\alpha(5\delta+1)}$ .

Por otro lado, imaginemos que  $y \in [x, \xi]$  y  $z \in B(y, R)$  está en un rayo  $[x, \eta]$ . Luego el cuadrilátero ideal de vértices  $y, z, \xi$  y  $\eta$  es  $10\delta$ -fino. Esto es, cualquier lado está en un  $10\delta$ -entorno de la unión de los otros tres. Ahora bien, cualquier punto de  $[x, y] \cup [y, \xi] \cup [z, \eta]$  está a una distancia de al menos  $|x - y| - R$  de  $x$ . Esto implica  $\text{dist}(x, (\xi, \eta)) \geq |x - y| - R - 10\delta$  y luego

$$d(\xi, \eta) \leq Ce^{-\alpha|x-y|-\alpha R-10\alpha\delta}.$$

Si ahora tomamos  $y_1 \in [x, \xi]$  con

$$|x - y_1| = -\frac{\log(C^{-1}r)}{\alpha} + R + 10\delta + 1$$

nos aseguramos  $\eta \in B(\xi, r)$ . Además tenemos  $r \leq De^{-\alpha|x-y_1|}$  para  $D \geq Ce^{\alpha(R+10\delta+1)}$ .

2. Ponemos  $r_2 = Ce^{-\alpha(|x-y|-R-10\delta)}$ . Tomamos  $\eta \in \mathcal{O}_x(y, R)$ . En la parte anterior vimos que en este caso la distancia de  $x$  a  $(\xi, \eta)$  es mayor o igual a  $|x-y|-R-10\delta$ , luego

$$d(\xi, \eta) \leq Ce^{-\alpha \text{dist}(x, (\xi, \eta))} \leq r_2.$$

De acá obtenemos la inclusión  $\mathcal{O}_x(y, R) \subset B(\xi, r_2)$

Por otro lado, ponemos  $r_1 = C^{-1}e^{-6\alpha\delta}e^{-\alpha|x-y|}$ . Luego si  $\eta \in B(\xi, r_1)$  tenemos

$$C^{-1}e^{\alpha \text{dist}(x, (\xi, \eta))} \leq d(\xi, \eta) \leq C^{-1}e^{-6\alpha\delta}e^{-\alpha|x-y|},$$

de donde se deduce  $\text{dist}(x, (\xi, \eta)) \geq |x - y| + 6\delta$ . Como el triángulo ideal de lados  $[x, \xi]$ ,  $[x, \eta]$  y  $(\xi, \eta)$  es  $5\delta$ -flaco y la distancia de  $y$  a  $(\xi, \eta)$  es mayor a  $5\delta$ , entonces el rayo  $[x, \xi]$  debe intersectar a la bola  $B(y, R)$  y por lo tanto  $\eta \in \mathcal{O}_x(y, R)$ . □

**Corolario 4.4.8.** *El borde  $\partial X$  es compacto.*

*Demostración.* Como la topología de  $\partial X$  es metrizable, basta con probar que es secuencialmente compacto. Tomamos entonces una sucesión  $\{\xi_n\} \subset \partial X$  y rayos geodésicos  $r_n$  de un punto  $p \in X$  a  $\xi_n$ . Podemos usar el Teorema de Arzelà-Ascoli para encontrar una subsucesión de rayos  $\{r_{n_k}\}$  que converja uniformemente a un rayo  $r$ . Luego, por la definición de la topología de  $\bar{X}$ , la sucesión  $\{\xi_n\}$  converge a  $\xi = r(+\infty)$ . □

**Corolario 4.4.9.** *El espacio  $\bar{X}$  es compacto (luego es una compactificación de  $X$ ).*

*Demostración.* Sea  $\{U_i\}$  un cubrimiento abierto de  $\overline{X}$ . Como  $\partial X$  es compacto, existen  $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$  que cubren  $\partial X$ .

El conjunto  $C = \overline{X} \setminus (U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n})$  es cerrado y acotado en  $X$  y por lo tanto es compacto, pues si no fuera así se podría encontrar una sucesión que tienda a un punto del borde (usando Arzelà-Ascoli una vez más). Luego existen  $U_{i_{n+1}}, \dots, U_{i_m}$  que lo cubren. Tenemos por lo tanto un subcubrimiento finito de  $\overline{X}$ .  $\square$

**Ejemplo 4.4.10.** Tomamos  $A$  un árbol infinito cualquiera con un vértice base  $w$ . Sean  $\xi, \eta \in \partial X$  y  $r_1$  y  $r_2$  dos rayos geodésicos con origen en la unidad  $w$  que cumplen  $r_1(+\infty) = \xi$  y  $r_2(+\infty) = \eta$ . Se tiene

$$(\xi|\eta)_w = \max\{n \in \mathbb{N} : r_1(n) = r_2(n)\},$$

luego  $\rho_e(\xi, \eta) = e^{-(\xi|\eta)_e}$  es siempre una distancia. Es decir que las distancias visuales en  $\partial A$  pueden tener coeficiente de visibilidad 1.

#### 4.4.2 Acción de cuasi-isometrías en el borde

Supongamos que  $F : X \rightarrow Y$  una cuasi-isometría entre espacios hiperbólicos geodésicos. Si  $r$  es un rayo geodésico en  $X$  con  $r(+\infty) = [\xi] \in \partial X$ , entonces  $F \circ r$  es un cuasi-rayo en  $Y$ . Luego existe un rayo geodésico  $\tilde{r}$  a distancia de Hausdorff finita de  $F \circ r$ , y por lo tanto se tiene  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F \circ r(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{r}(t)$ . Escribimos entonces

$$\partial F(\xi) = F(\xi) = [\tilde{r}].$$

De aquí obtenemos las funciones

$$\partial F : \partial X \rightarrow \partial Y \text{ y } F : \overline{X} \rightarrow \overline{Y}.$$

Para nosotros  $F$  será tanto la cuasi-isometría como la extensión a la compactificación del espacio. Usaremos la notación  $\partial F$  cuando hablemos de la función en el borde como objeto, pero en la mayoría de los casos escribiremos  $F(\xi)$  para denotar la imagen de un punto del borde.

La prueba de la siguiente proposición es muy sencilla, por lo que se deja como ejercicio.

**Proposición 4.4.11.** Sean  $X, Y$  y  $Z$  tres espacios geodésico, hiperbólicos y propios y  $F : X \rightarrow Y$  y  $G : Y \rightarrow Z$  tres cuasi-isometrías. Entonces

(i) Si  $H : X \rightarrow Y$  es una cuasi-isometría a distancia uniforme acotada de  $F$ , entonces  $\partial H = \partial F$ .

(ii)  $\partial(F \circ G) = \partial F \circ \partial G$ .

(iii) Si  $\overline{F}$  es una cuasi-inversa de  $F$ , entonces  $\partial \overline{F} = (\partial F)^{-1}$ .

Observar que la desigualdad de la Proposición 4.3.7 se extiende de forma evidente a puntos del borde. Luego si  $x \in X$  y  $\xi, \eta \in \partial X$ , se tiene

$$e^{-\alpha A} \rho_x(\xi, \eta)^{\frac{\alpha}{\lambda}} \leq \rho_{F(x)}(F(\xi), F(\eta))^\alpha \leq e^{\alpha A} \rho_x(\xi, \eta)^{\alpha \lambda},$$

lo que implica que

$$C^{-1} d_x^\alpha(\xi, \eta)^{\frac{1}{\lambda}} \leq d_{F(x)}^\alpha(F(\xi), F(\eta)) \leq C \rho_x^\alpha(\xi, \eta)^\lambda$$

para alguna constante  $C \geq 1$ . Como además  $\partial F$  es biyectiva, tenemos que es un homeomorfismo. Más aún, la desigualdad anterior nos dice que es un homeomorfismo biHölder.

**Definición 4.4.12.** Sea  $Z$  un espacio métrico. Un  $K$ -anillo (de centro  $z$ ) en  $Z$  es un conjunto de la forma  $A = B(z, Kr) \setminus \bar{B}(z, r)$ .

Un homeomorfismo entre espacios métricos  $f : Z_1 \rightarrow Z_2$  es *cuasi-conforme* si existen funciones  $\varphi, \psi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  tal que si  $A_1 \subset Z_1$  es un  $K$ -anillo de centro  $z_1$ , entonces  $f(A_1)$  está contenido en un  $\varphi(K)$ -anillo de centro  $f(z)$ , y si  $A_2$  es un  $K$ -anillo de centro  $z_2$ ,  $f(A_2)$  está contenido en un  $\psi(K)$ -anillo de centro  $f^{-1}(z_2)$ .<sup>7</sup>

Para entender la definición podemos irnos al ejemplo del espacio hiperbólico real  $\mathbb{H}^3$ , cuyo borde es la esfera  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Las isometrías de  $\mathbb{H}^3$  se extienden al borde como transformaciones de Möbius, es decir, la familia de todos los difeomorfismos conformes en la esfera. Tenemos entonces que los mapas inducidos en el borde por las cuasi-isometrías llevan círculos en círculos. Una versión más débil de esta propiedad podría ser llevar círculos en conjuntos de excentricidad uniformemente acotada, o al menos hacerlo cuando el radio de los círculos se acerca a cero<sup>8</sup>. Este tipo de generalizaciones tienen sentido en la esfera porque los círculos (o, en dimensiones más grandes, las esferas) en el borde siempre tienen puntos, lo que podría no pasar en general. La definición dada de homeomorfismo cuasi-conforme intenta evitar este problema engrosando las esferas.

La conexión de la noción definida con nuestro contexto está dada por el siguiente Teorema:

**Teorema 4.4.13.** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios geodésicos, propios y  $\delta$ -hiperbólicos y  $F : X \rightarrow Y$  una cuasi-isometría. Dotamos a los bordes  $\partial X$  y  $\partial Y$  con distancias visuales  $d_x^\alpha$  y  $d_{F(x)}^\alpha$  de Entonces  $\partial F : (\partial X, d_x^\alpha) \rightarrow (Y, d_{F(x)}^\alpha)$  es un homeomorfismo cuasi-conforme.

*Demostración.* Tomamos constantes  $\lambda \geq 1$ ,  $\varepsilon \geq 0$  y  $C \geq 0$  de forma tal que:

- $F$  es una  $(\lambda, \varepsilon)$ -cuasi-isometría.

---

<sup>7</sup>La definición dada se debe a P. Pansu. Cabe destacar que existen otras definiciones de mapa cuasi-conforme (ver por ejemplo [13]).

<sup>8</sup>Esto a veces también se denomina *cuasi-conforme*.

- Existe una cuasi-inversa de  $F$ , notada por  $\overline{F}$ , que es una  $(\lambda, \varepsilon)$ -cuasi-isometría, y cumple  $\overline{F}(F(x)) = x$  y  $|\overline{F} \circ F - Id_X|_\infty \leq \varepsilon$ .
- Todo  $(\lambda, \varepsilon)$ -cuasi-rayo en  $X$  o en  $Y$  está a distancia de Hausdorff menor o igual a  $C$  de un rayo geodésico.

Fijamos  $R > 0$  tal que  $\lambda^{-1}(R - 2\varepsilon - C) > 5\delta$ . Suponemos además que  $D, E : [5\delta, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  son funciones como las dadas en el Lema 4.4.7 para  $X$  e  $Y$  y los puntos  $x \in X$  y  $F(x) \in Y$ .

Observar que para todo  $x' \in X$  y  $R > 0$  se tiene

$$F(B(x', R)) \subset B(F(x'), \lambda R + \varepsilon),$$

y luego

$$F(\mathcal{O}_x(x', R)) \subset \mathcal{O}_{F(x)}(F(x'), \lambda R + \varepsilon + C). \quad (4.5)$$

Por otro lado, si  $\eta \in \mathcal{O}_{F(x)}(F(x'), \lambda^{-1}(R - 2\varepsilon - C))$ , entonces existe

$$y \in B(F(x'), \lambda^{-1}(R - 2\varepsilon - C)) \cap [F(x), \eta).$$

Tenemos que  $\overline{F}([F(x), \eta))$  es un  $(\lambda, \varepsilon)$ -cuasi-rayo y  $|\overline{F}(F(x')) - \overline{F}(y)| < R - C - \varepsilon$  y por lo tanto  $\overline{F}(y) \in B(x', R - C)$ , lo que implica que existe un rayo geodésico  $[x, \partial \overline{F}(\eta))$  que intersecta la bola  $B(x', R)$ , es decir que  $\partial \overline{F}(\eta) = \partial F^{-1}(\eta) \in \mathcal{O}_x(x', R)$ . Concluimos entonces

$$\mathcal{O}_{F(x)}(F(x'), \lambda^{-1}(R - 2\varepsilon - C)) \subset F(\mathcal{O}_x(x', R)). \quad (4.6)$$

Si  $A = B(\xi, Kr) \setminus \overline{B}(\xi, r)$  es un  $K$ -anillo cualquiera en  $\partial X$ , entonces el Lema 4.4.7 nos permite escribir

$$\mathcal{O}_x(x_1, R) \subset \overline{B}(\xi, r) \subset B(\xi, Kr) \subset \mathcal{O}_x(x_2, R), \quad (4.7)$$

donde  $x_1$  e  $x_2$  están en el mismo rayo geodésico de  $x$  a  $\xi$  con  $D(R)^{-1}e^{-\alpha|x-x_2|} \leq Kr$  y  $D(R)e^{-\alpha|x-x_1|} \geq r$ . Esto implica

$$e^{\alpha|x_2-x_1|} = e^{\alpha(|x-x_1|-|x-x_2|)} = \frac{e^{-\alpha|x-x_2|}}{e^{-\alpha|x-x_1|}} \leq D(R)^2 K.$$

De (4.5), (4.6) y (4.7) obtenemos

$$\mathcal{O}_{F(x)}(F(x_1), \lambda^{-1}R - \varepsilon - C) \subset F(\overline{B}(\xi, r)) \subset F(B(\xi, Kr)) \subset \mathcal{O}_{F(x)}(F(x_2), \lambda R + \varepsilon + C).$$

Usando la segunda parte del Lema 4.4.7 tenemos

$$\overline{B}(\partial F(\xi), r_1/2) \subset B(F(\xi), r_1) \subset F(\overline{B}(\xi, r)) \subset F(B(\xi, Kr)) \subset B(\partial F(\xi), r_2)$$

con  $E(\lambda R + \varepsilon + C)^{-1}r_2 \leq e^{-\alpha|F(x)-(x_2)|}$  y  $E(\lambda^{-1}(R - 2\varepsilon - C))r_1 \geq e^{-\alpha|F(x)-F(x_1)|}$ .

Juntando lo anterior tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{r_2}{r_1/2} &\leq \frac{2e^{-\alpha|F(x)-F(x_2)|}}{e^{-\alpha|F(x)-F(x_1)|}} E(\lambda R + \varepsilon + C) E(\lambda^{-1}(R - 2\varepsilon - C)) \\
&\leq 2e^{\alpha|F(x_2)-F(x_1)|} E(\lambda R + \varepsilon + C) E(\lambda^{-1}(R - 2\varepsilon - C)) \\
&\leq 2e^{\lambda\alpha|x_2-x_1|} e^\alpha \epsilon E(\lambda R + \varepsilon + C) E(\lambda^{-1}(R - 2\varepsilon - C)) \\
&\leq 2D(R)^{2\lambda} K^\lambda e^\alpha E(\lambda R + \varepsilon + C) E(\lambda^{-1}(R - 2\varepsilon - C)).
\end{aligned}$$

Esto implica que si ponemos

$$\varphi(K) = 2D(R)^{2\lambda} K^\lambda e^\alpha E(\lambda R + \varepsilon + C) E(\lambda^{-1}(R - 2\varepsilon - C)),$$

entonces  $F(A)$  está contenido en un  $\varphi(K)$ -anillo.

De forma análoga se prueba se construye la función  $\psi$  que controle la imagen de los anillos en  $\partial Y$  para una cuasi-inversa  $\bar{F}$ . Concluimos entonces que  $\partial F$  es un homeomorfismo cuasi-conforme.  $\square$

La familia de métricas visuales son todas cuasi-conformemente equivalente, es decir, la identidad es un homeomorfismo cuasi-conforme al considerar en  $\partial X$  dos distancias visuales diferentes (se deja como ejercicio). Esto permite dotar el borde de una *estructura cuasi-conforme*, es decir, una familia maximal de distancias, todas cuasi-conformemente equivalentes entre sí que contiene a las distancias visuales.

El teorema anterior nos dice que la estructura de cuasi-conforme de  $\partial X$  solo depende de la clase de cuasi-isometría de  $X$ , es decir, no cambia si cambiamos la métrica de  $X$  por otra que sea cuasi-isométricamente equivalente (siempre y cuando el espacio siga siendo geodésico y propio). También nos dice, junto con la Proposición 4.4.11, que  $QI(X)$  actúa en  $\partial X$  por homeomorfismos cuasi-conformes. Por último, nos da una herramienta para distinguir dos espacios hiperbólicos a menos de cuasi-isometrías mediante la comparación de su borde. En este último punto no profundizaremos demasiado, pues el estudio de invariantes cuasi-conformes requeriría un trabajo que escapa a los objetivos de estas notas. Sin embargo dejamos a continuación algunos ejemplos sencillos:

**Ejemplos 4.4.14.** 1. Los ejemplos que hemos estudiado en esta sección tienen tipos de borde topológicamente muy distintos:  $\partial \mathbb{R}$  es finito,  $\partial A$  es un conjunto de Cantor y  $\partial \mathbb{H}^n$  (o cualquier variedad de curvatura negativa) es una esfera de dimensión  $n - 1$ . Utilizando solamente que las cuasi-isometrías se extienden a homeomorfismos en el borde podemos sentenciar que estos espacios no son cuasi-isométricos. En particular esto permite clasificar los espacios hiperbólicos reales según su dimensión.

Una consecuencia de lo anterior es que un grupo libre no puede actuar geométricamente en  $\mathbb{H}^n$ . Si así fuera el grafo de Cayley de dicho grupo sería cuasi-isométrico a  $\mathbb{H}^n$  por el Lema de Schwarz-Milnor.

2. En el próximo ejemplo usaremos el siguiente invariante cuasi-conforme: Un espacio métrico  $Z$  es *uniformemente perfecto* si existe  $K > 0$  tal que todo  $K$ -anillo es no vacío. La prueba de que esta propiedad es invariante por homeomorfismos cuasi-conformes es directa de la definición.

Consideramos dos árboles  $A_1$  y  $A_2$  como en los ejemplos anteriores (con métrica de longitud y todos sus vértices de grado tres o más). Supongamos que en  $A_1$  todas las aristas tienen longitud 1. En  $A_2$  la métrica está dada por lo siguiente: si  $w_2 = x_0, x_1, \dots, x_n$  es un camino simple (que no repite vértices), entonces la arista  $[x_{n-1}, x_n]$  tiene longitud  $f(n)$ . Las métricas visuales que consideraremos en  $\partial A_1$  y  $\partial A_2$  serán centradas en dos vértices  $w_1$  y  $w_2$  respectivamente y tendrán coeficiente de visibilidad 1. Notamos a ambas por  $d$ .

Los puntos del borde de un árbol se codifican con sucesiones inyectivas de vértices a partir del vertice central. Luego podemos ver que el producto de Gromov en  $A_1$  está dado por  $(\{x_n\}|\{y_n\}) = N$ , donde  $N$  es el máximo  $n$  tal que  $x_n = y_n$ , luego  $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = e^{-N}$ . Observamos que  $A_1$  es uniformemente perfecto ya que para todo  $\xi = \{x_n\}$  y  $N \in \mathbb{N}$  es posible encontrar un punto a distancia  $e^{-N}$  de  $\xi$ , luego todo anillo  $B(\xi, eR) \setminus B(\xi, R)$  es no vacío.

Si  $\xi \in \partial A_2$ , las distancias del resto de los puntos del borde a  $\xi$  serán de la forma  $R_N = e^{-\sum_{i=1}^N f(i)}$ , por lo que habrá anillos de la forma

$$B(\xi, e^{f(N)} R_N) \setminus B(\xi, R_N)$$

que sean vacíos. Esto implica que  $\partial A_2$  no es uniformemente perfecto si  $f(n) \rightarrow +\infty$ . En ese caso los árboles  $A_1$  y  $A_2$  no pueden ser cuasi-isométricos.

## 4.5 Comentarios finales

1. Por el Lema de Schwarz-Milnor cualquier grupo que actúe geoméricamente en  $\mathbb{H}^n$  debe tener un borde que sea cuasi-simétrico a la esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$ . El recíproco de esta afirmación se conoce como *Conjetura de Cannon* y es un problema abierto.
2. El grupo fundamental de una superficie cerrada que no se a la esfera o el toro actúa geoméricamente en  $\mathbb{H}^2$ , luego debe ser cuasi-isométrico a este espacio. Como consecuencia de esto tenemos que en esta familia de grupos hay exactamente tres clases de cuasi-isometría.
3. Los grupos finitamente generados hiperbólicos tienen algunas propiedades especiales. Por ejemplo, tienen crecimiento exponencial (salvo en casos especiales). Lo que permite distinguirlos de los grupos nilpotentes y conseguir obstrucciones para que actúen geoméricamente en algunos espacios de longitud (como los euclídeos).
4. Si  $M$  es una variedad de curvatura negativa de dimensión  $n$ , entonces es hiperbólica y su borde al infinito es topológicamente una esfera de dimensión  $n - 1$ . Esto

permite distinguir a dos de estas variedades si tienen diferente dimensión, pero si no es así se necesita un estudio más profundo. Una posibilidad es mostrar que los bordes no son cuasi-simétricamente equivalentes. No es intención de estas notas entrar en esto. Como alternativa mostraremos que es posible resolver el problema (en algunos casos) por medio de un invariante llamado *cohomología*  $L^p$ .

5. Es pertinente la pregunta de qué parámetros visuales pueden tener las distancias visuales sobre el borde de un espacio hiperbólico  $X$ . Es decir, cuál es el valor de  $\alpha_0 = \sup\{\alpha > 0 : \rho_w^\alpha \text{ es Lipschitz-equivalente a una distancia para todo } w \in X\}$ .

Esto está relacionado con un invariante cuasi-conforme definido por P. Pansu: la dimensión conforme. Este número es el ínfimo de todas las dimensiones de Hausdorff de las distancias en la clase cuasi-conforme de  $\partial X$ .

En particular, M. Bourdon muestra que si  $X$  es un espacio  $CAT(-1)$ , entonces  $\alpha_0 \geq 1$ . A las distancias visuales de parámetro 1 suele llamárselas *distancias de Bourdon*.

7. Tiene sentido plantearse la siguiente pregunta: ¿qué espacios métricos compactos son borde al infinito de un espacio hiperbólico? En [5] puede verse que bajo ciertas condiciones es posible construir un *relleno hiperbólico* de un espacio métrico compacto.
8. La condición de ser geodésico claramente no es invariante por cuasi-isometrías. Por otro lado, la definición de espacio hiperbólico no geodésico que hicimos (a partir del producto de Gromov) no es invariante por cuasi-isometrías. Esto sugiere la necesidad de buscar una familia intermedia de espacios métricos que sea cerrada por la acción de las cuasi-isometrías y donde la hiperbolicidad sea invariante.<sup>9</sup>
9. Por lo visto en este capítulo, el mapa

$$QI(X) \rightarrow QC(\partial X), F \mapsto \partial F$$

es un morfismo de grupos, donde  $QC(\partial X)$  es el grupo de homeomorfismos cuasi-conformes de  $\partial X$ . Es natural preguntarse si dicho mapa es inyectivo y/o sobreyectivo. Al respecto tenemos un teorema de M. Bonk, J. Heinonen y P. Koskela que da condiciones para que un homeomorfismo cuasi-simétrico sea la extensión al borde de una cuasi-isometría. Ver [2].

10. Una forma alternativa de definir el borde al infinito de un espacio hiperbólico  $X$ , y que no necesita en principio de la existencia de segmentos geodésicos, se hace mediante cierto tipo de sucesiones.

Decimos que una sucesión  $\{x_n\} \subset X$  tiende a infinito (y escribimos  $x_n \rightarrow \infty$ ) si dado  $x \in X$  se tiene que

$$(x_n | x_m)_x \rightarrow +\infty$$

---

<sup>9</sup>Queda planteado el problema.

si  $\min\{n, m\} \rightarrow +\infty$ . Observar que lo anterior no depende del punto  $x$  elegido. Luego en la familia de sucesiones que tienden a infinito se considera la relación de equivalencia

$$\{x_n\} \cong \{y_n\} \Leftrightarrow (x_n|y_n)_x \rightarrow +\infty.$$

El borde  $\partial X$  se define como el cociente de esta relación. A partir de acá el producto de Gromov de dos puntos distintos en el borde queda bien definido por (4.3) y luego también las distancias visuales. Se deja como ejercicio verificar que esta definición coincide con la dada a partir de rayos geodésicos.

# Capítulo 5

## Cohomología $L^p$

En el capítulo anterior vimos que se pueden distinguir dos espacios hiperbólicos a menos de cuasi-isometrías si sus bordes no son, por ejemplo, homeomorfos. Sin embargo, esto no es suficiente a la hora de distinguir ciertos espacios.

Un ejemplo muy común es el de las variedades de curvatura negativa: toda variedad de curvatura negativa (acotada lejos de cero) simplemente conexa y completa de dimensión  $n$  tiene un borde al infinito homeomorfo a la esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Para distinguir dos de estas variedades podemos estudiar la geometría cuasi-conforme de sus bordes buscando diferencias o bien echar mano de invariantes de cuasi-isometría más finos que los vistos anteriormente. Elegiremos el segundo camino ya que el primero escapa a los objetivos de estas notas.

En particular, y a modo de ejemplo, nos planteamos el problema de distinguir dos espacios hiperbólicos cuyo borde es topológicamente el mismo: por un lado, el espacio hiperbólico real  $\mathbb{H}^4$ ; por otro, el plano hiperbólico complejo  $\mathbb{CH}^2$  (que definiremos más adelante). El objetivo de este capítulo será pues desarrollar una técnica que nos permita asegurar que estos espacios no son cuasi-isométricos.

### 5.1 Cohomología

A lo largo de estas notas llamaremos *complejo de cocadenas* a una familia de espacios vectoriales topológicos  $\{C^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  junto con una familia de operadores lineales continuos  $d_k : C^k \rightarrow C^{k+1}$  que cumplen  $d_k \circ d_{k-1} = 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ <sup>1</sup>. Notaremos a dicho complejo  $(C^*, d_*)$  o  $(C^*, d)$  (usaremos a veces  $d$  en lugar de  $d_k$ ).

$$0 \rightarrow C^0 \xrightarrow{d_0} C^1 \xrightarrow{d_1} C^2 \xrightarrow{d_2} C^3 \xrightarrow{d_3} \dots$$

La *cohomología* de dicho complejo es la familia de espacios vectoriales topológicos

$$H^k = H_C^k = \frac{\text{Ker } d_k}{\text{Im } d_{k-1}}.$$

---

<sup>1</sup>En general no se pide topología en los espacios ni continuidad de los operadores, pero el caso que nos interesará a nosotros es el considerado en esta definición

Cada uno de estos espacios es llamado individualmente *k-espacio de cohomología* o *cohomología en grado k*.

En el caso en que  $\{C^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  sea una familia de espacios de Banach definimos también su *cohomología reducida* como la familia de espacios de Banach

$$\overline{H}^k = \overline{H}_C^k = \frac{\text{Ker } d_k}{\overline{\text{Im } d_{k-1}}}.$$

Supongamos que tenemos dos complejos de cocadenas  $(C^*, d)$  y  $(D^*, \delta)$ . Una familia de operadores lineales continuos  $f_k : C^k \rightarrow D^k$  es un *mapa de cocadenas* si conmuta con las derivadas, es decir,  $\delta \circ f_k = f_{k+1} \circ d$ . En este caso escribimos  $f : (C^*, d) \rightarrow (D^*, \delta)$  o simplemente  $f : C^* \rightarrow D^*$ .

Observar que en este caso  $f$  induce una familia de mapas lineales y continuos entre los respectivos espacios de cohomología y cohomología reducida de dichos complejos. Es decir, para cada  $k \in \mathbb{N}$  tenemos  $f^\# : H_C^k \rightarrow H_D^k$  dado por  $f^\#([c]) = [f(c)]$  para todo  $c \in C^k$ , donde  $[c]$  y  $[f(c)]$  indican las clases de  $c$  y  $f(c)$  para los cocientes correspondientes. En el caso de que  $f$  sea un mapa de cocadenas entre complejos de espacios de Banach, este también induce una familia de operadores lineales continuos entre los respectivos espacios de cohomología reducida.

### 5.1.1 Homotopía

Dos mapas de cocadenas  $f, g : (C^*, d) \rightarrow (D^*, \delta)$  se dicen *homotópicos* si existe una familia de mapas lineales y continuos  $h = h_k : C^{k+1} \rightarrow D^k$  (llamada *homotopía*) tal que

- $h_0 \circ d_0 = f_0 - g_0$  y
- $h_k \circ d_k + \delta_{k-1} \circ h_{k-1} = f_k - g_k$  si  $k \geq 1$ .

Observamos que si  $c \in \text{Ker } d_k$ , entonces  $f(c) - g(c) = \delta(h(c))$ , lo que nos dice que  $f^\# = g^\#$ . Es decir, dos mapas de cadenas homotópicos inducen los mismos mapas en cohomología. Lo mismo puede decirse para la cohomología reducida.

Decimos que  $(C^*, d)$  y  $(D^*, \delta)$  son *homotópicamente equivalentes* si existen mapas de cadenas  $f : (C^*, d) \rightarrow (D^*, \delta)$  y  $g : (D^*, \delta) \rightarrow (C^*, d)$  tales que  $g \circ f$  y  $f \circ g$  son homotópicos a la identidad. En este caso

$$g^\# \circ f^\# = (g^\# \circ f^\#) = \text{Id}_{C^k}^\# = \text{Id}_{H_C^k} \quad \text{y} \quad f^\# \circ g^\# = (f^\# \circ g^\#) = \text{Id}_{D^k}^\# = \text{Id}_{H_D^k},$$

lo que implica que  $f^\#$  y  $g^\#$  son isomorfismos inversos.

Un *subcomplejo* de un complejo de cocadenas  $(C^*, d)$  es una familia de subespacios  $\{E^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $d(E^k) \subset E^{k+1}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Es decir que  $(E^*, d)$  es también un complejo de cadenas. Decimos que  $(C^*, d)$  *se retrae* a  $(E^*, d)$  si existe un mapa de cadenas  $r : E^* \rightarrow C^*$  tal que  $\iota \circ r$  y  $r \circ \iota$  son homotópicos a la identidad, donde  $\iota : E^* \rightarrow C^*$  es la inclusión.

### 5.1.2 Bicomplejos

Un *bicomplejo* es una familia de espacios vectoriales topológicos  $\{C^{k,m}\}_{k,m \in \mathbb{N}}$  junto con mapas lineales continuos  $d' : C^{k,m} \rightarrow C^{k+1,m}$  y  $d'' : C^{k,m} \rightarrow C^{k,m+1}$  que cumplen  $d' \circ d' = 0$ ,  $d'' \circ d'' = 0$  y  $d' \circ d'' + d'' \circ d' = 0$ . Notamos dicho bicomplejo por  $(C^{*,*}, d', d'')$ .

Las *filas* y *columnas* del bicomplejo son los complejos de la forma  $(C^{*,m}, d')$  y  $(C^{k,*}, d'')$  respectivamente.

Para el bicomplejo  $(C^{*,*}, d', d'')$  definimos los *complejos de núcleos horizontal* y *vertical*  $(E^*, d')$  y  $(F^*, d'')$ , donde  $E^k = \text{Ker } d''|_{C^{k,0}}$  y  $F^m = \text{Ker } d'|_{C^{0,m}}$ . Observar que la condición  $d' \circ d'' + d'' \circ d' = 0$  implican que estos son complejos de cocadenas.

La siguiente propiedad y su consecuencia serán importantes en el último capítulo de estas notas.

**Proposición 5.1.1.** *Sea  $(C^{*,*}, d', d'')$  un bicomplejo tal que cada fila  $(C^{*,m}, d')$  se retrae al subcomplejo  $(E^m \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots)$ . Luego el complejo diagonal  $(D^*, \delta)$ , definido por*

$$D^n = \bigoplus_{k+m=n} C^{k,m} \text{ y } \delta = d' + d'',$$

*es homotópicamente equivalente al complejo de núcleos horizontal  $(E^*, d')$ .*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & D^0 & \xrightarrow{\delta} & D^1 & \xrightarrow{\delta} & D^2 \\
 & \nearrow & & & \nearrow & & \nearrow \\
 E^0 & \hookrightarrow & C^{0,0} & \xrightarrow{d'} & C^{1,0} & \xrightarrow{d'} & C^{2,0} \rightarrow \dots \\
 \downarrow d'' & & \downarrow d'' & & \downarrow d'' & & \downarrow d'' \\
 E^1 & \hookrightarrow & C^{0,1} & \xrightarrow{d'} & C^{1,1} & \xrightarrow{d'} & C^{2,1} \rightarrow \dots \\
 \downarrow d'' & & \downarrow d'' & & \downarrow d'' & & \downarrow d'' \\
 E^2 & \hookrightarrow & C^{0,2} & \xrightarrow{d'} & C^{1,2} & \xrightarrow{d'} & C^{2,2} \rightarrow \dots \\
 \downarrow d'' & & \downarrow d'' & & \downarrow d'' & & \downarrow d'' \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

*Demostración.* Para cada  $K \in \mathbb{N}$  sea  $(C_{[K]}^{*,*}, d', d'')$  el subcomplejo de  $(C^{*,*}, d', d'')$  definido por

$$C_{[K]}^{k,m} = \begin{cases} C^{k,m} & \text{si } k < K \\ \text{Ker } d'|_{C^{k,m}} & \text{si } k = K \\ 0 & \text{si } k > K \end{cases}.$$

Observar que este es un bicomplejo.

para cada  $n \in \mathbb{N}$  ponemos

$$D_{[K]}^n = \bigoplus_{k+m=n} C_{[K]}^{k,m}.$$

Se tiene  $D_{[K]}^* \subset D_{[K+1]}^*$  para todo  $K$  y  $\cup_{K \geq 0} D_{[K]}^* = D^*$ . Además, por definición de  $E^*$ , se tiene  $D_{[0]}^* = E^*$ . Por lo tanto será suficiente con mostrar que  $D_{[K]}^*$  se retrae a  $D_{[K-1]}^*$  para todo  $K \geq 1$ .

Para simplificar la notación ponemos

$$\mathcal{C}_0 = \bigoplus_{m \geq 0} C^{0,m}, \quad \mathcal{C}_1 = \bigoplus_{k \geq 1, m \geq 0} C^{k,m}, \quad \text{y } \mathcal{E} = \bigoplus_{m \geq 0} E^m.$$

También escribimos  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$ .

Para todo  $m \in \mathbb{N}$  el complejo  $(C^{*,m}, d')$  se retrae al subcomplejo  $(E^m \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots)$ . Luego existen operadores continuos

$$h' : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}, \text{ y } \varphi : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{E},$$

tal que

$$(i) \quad d' \circ h' + h' \circ d' = \text{Id on } \mathcal{C}_1, \text{ y}$$

$$(ii) \quad h' \circ d' = \text{Id} - \iota \circ \varphi \text{ on } \mathcal{C}_0,$$

donde  $\iota : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}_0$  es la inclusión. Extendemos  $h'$  a  $\mathcal{C}$  poniendo  $h' \equiv 0$  en  $\mathcal{C}_0$ .

Definimos  $b : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  por

- $b = -(d'' \circ h' + h' \circ d'')$  en  $\mathcal{C}_1$ , y
- $b = \iota \circ \varphi$  en  $\mathcal{C}_0$ .

En el subespacio  $\mathcal{C}_1$  la igualdad (i) implica

$$\delta \circ h' + h' \circ \delta = \text{Id} - b.$$

En  $\mathcal{C}_0$  la igualdad (ii) implica

$$\delta \circ h' + h' \circ \delta = h' \circ d' = \text{Id} - \iota \circ \varphi = \text{Id} - b.$$

Por lo tanto la igualdad  $\delta \circ h' + h' \circ \delta = \text{Id} - b$  es válida en todo el espacio  $\mathcal{C}$ . Esto implica en particular que  $b$  conmuta con  $\delta$ .

Ahora estamos listos para probar que  $D_{[K]}^*$  se retrae a  $D_{[K-1]}^*$  para todo  $K \geq 1$ . Como  $h'(C^{k,m}) \subset C^{k-1,m}$  para  $k \geq 1$  y  $h'(C^{0,m}) = 0$ , podemos considerar  $h'_{[K]} : D_{[K]}^n \rightarrow D_{[K]}^{n-1}$  el operador inducido.

El mapa  $b$  satisface  $b(C^{k,m}) \subset C^{k-1,m+1}$  for  $k \geq 1$  and  $b(C^{0,m}) \subset C^{0,m}$ . Además, para  $K \geq 1$ , tenemos

$$b(\text{Ker } d'|_{\mathcal{C}^{K,m}}) \subset \text{Ker } d'|_{\mathcal{C}^{K-1,m+1}}.$$

De hecho, si  $d'\omega = 0$ , luego también tenemos  $d'd''\omega = 0$ . la definición de  $b$  y la igualdad (i) implica

$$d'b\omega = -(d'd''h'\omega + d'h'd''\omega) = d''d'h'\omega - d'h'd''\omega = d''\omega - d''\omega = 0.$$

Por lo tanto  $b$  lleva  $D_{[K]}^n$  en  $D_{[K-1]}^n$  para todo  $K \geq 1$ . Sea  $b_{[K]} : D_{[K]}^* \rightarrow D_{[K-1]}^*$  el operador inducido. Como vimos arriba, este conmuta con  $\delta$ . Como  $\delta \circ h' + h' \circ \delta = \text{Id} - b$  en todo el espacio  $\mathcal{C}$ , obtenemos

$$\delta \circ h'_{[K]} + h'_{[K]} \circ \delta = \text{Id} - \iota_{[K-1]} \circ b_{[K]}$$

y también

$$\delta \circ h'_{[K-1]} + h'_{[K-1]} \circ \delta = \text{Id} - b_{[K]} \circ i_{[K-1]},$$

donde  $\iota_{[K-1]} : D_{[K-1]}^* \rightarrow D_{[K]}^*$  es la inclusión.

$$\begin{array}{ccccccc} D_{[K]}^0 & \xleftarrow{h'} & D_{[K]}^1 & \xleftarrow{h'} & D_{[K]}^2 & \xleftarrow{h'} & D_{[K]}^3 \xrightarrow{\delta} \dots \\ \downarrow b \uparrow i & & \downarrow b \uparrow i & & \downarrow b \uparrow i & & \downarrow b \uparrow i \\ D_{[K-1]}^0 & \xrightarrow{\delta} & D_{[K-1]}^1 & \xrightarrow{\delta} & D_{[K-1]}^2 & \xrightarrow{\delta} & D_{[K-1]}^3 \xrightarrow{\delta} \dots \\ & \xleftarrow{h'} & & \xleftarrow{h'} & & \xleftarrow{h'} & \end{array}$$

Todos los mapas construidos son continuos, lo que termina la prueba.  $\square$

**Corolario 5.1.2.** *Sea  $(C^{*,*}, d', d'')$  un bicomplejo tal que cada fila  $(C^{*,m}, d')$  se retrae a  $(E^m \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots)$  y cada columna  $(C^{k,*}, d'')$  se retrae a  $(F^k \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots)$ . Entonces los complejos e núcleos  $(E^*, d')$  y  $(F^*, d'')$  son homotópicamente equivalentes.*

## 5.2 Cohomología $\ell^p$ simplicial

El simplejo estandar de dimensión  $k$ , notado por  $\Delta_k$ , es la envolvente convexa del conjunto de puntos de la forma  $(0, \dots, 1, \dots, 0)$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Un complejo simplicial es un espacio topológico  $X$  que se puede escribir como unión de una sucesión de espacios

$$X^{(0)} \subset X^{(1)} \subset \dots \subset X^{(k)} \subset \dots$$

de forma tal que  $X^{(0)}$  es un espacio discreto y  $X^{(k+1)}$  resulta de pegar a  $X^{(k)}$  una familia de  $(k+1)$ -simplejos mediante mapas de la forma  $\varphi : \partial\Delta_k \rightarrow X^{(k)}$ . Pedimos que cada uno de estos mapas de pegado sea un homeomorfismo sobre su imagen, que la imagen de cada cara de dimensión  $m$  de  $\Delta_k$  esté en  $X^{(m)}$  y que cada simplejo quede determinado por su conjunto de vértices. Esto último es equivalente a decir que no hay dos mapas de pegado  $\varphi, \psi : \partial\Delta_k \rightarrow X^{(k)}$  con la misma imagen.

Decimos que  $X^{(k)}$  es el  $k$ -esqueleto de  $X$  y denotamos  $X_k$  al conjunto de  $k$ -simplejos orientados en  $X$  (como sucede con el simplejo estandar, los elementos de  $X_k$  tienen dos orientaciones posibles, salvo en el caso  $k = 0$ ). Describiremos un simplejo orientado por una  $(k+1)$ -upla de vértices  $(v_0, \dots, v_k)$  donde identificaremos las permutaciones con signo positivo, escribiendo  $-(v_0, \dots, v_k)$  al simplejo descrito por  $(v_1, v_0, \dots, v_k)$ .

Una  $k$ -cadena en  $X$  es una combinación lineal formal de  $k$ -simplejos orientados, esto es,

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^m c_i \sigma_i,$$

donde  $\sigma \in X_k$ . Aquí se cumple  $-1\sigma = -\sigma$ .

Si  $c_i \neq 0$  para todo  $i$ , decimos que  $m$  es la longitud de la cadena  $\mathbf{c}$ , y escribimos

$$\ell(\mathbf{c}) = m,$$

y definimos su soporte como

$$|\mathbf{c}| = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}.$$

Definimos además la norma del máximo en las cadenas como

$$\|\mathbf{c}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |c_i|.$$

Las  $k$ -cadenas forman un espacio vectorial de dimensión infinita con base  $X_k$  al que denotamos por  $\mathcal{C}_k(X)$ , y  $\|\cdot\|_\infty$  es una norma en dicho espacio.

Definimos el operador de borde  $\partial$  en el espacio de las cadenas como la extensión lineal de la función definida en  $X_k$  por

$$\partial\sigma = \sum_{i=1}^k (-1)^i \partial_i \sigma \in \mathcal{C}_{k-1}(X),$$

donde  $\partial_i(v_0, \dots, v_k) = (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k)$ .

Es directo ver que  $\partial \circ \partial = 0$  para todo  $\sigma \in \mathcal{C}_k(X)$ . Una  $k$ -cocadena en  $X$  es una función lineal  $\theta : \mathcal{C}_k(X) \rightarrow \mathbb{R}$ . Observar que  $\theta$  queda determinada por su restricción a  $X_k$ , es decir, toda  $k$ -cocadena puede verse como una función  $\theta : X_k \rightarrow \mathbb{R}$  con la propiedad  $\theta(-\sigma) = -\theta(\sigma)$ . Notamos al espacio de  $k$ -cocadenas por  $\mathcal{C}^k(X)$ .

Definimos el operador de coborde como  $\delta : \mathcal{C}^k(X) \rightarrow \mathcal{C}^{k+1}(X)$  tal que  $\delta\theta(\sigma) = \theta(\partial\sigma)$ , es decir

$$\delta\theta(v_0, \dots, v_k) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \theta(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1}).$$

Es claro a partir de la definición que  $\delta \circ \delta = 0$ .

La *cohomología simplicial* de  $X$  se obtiene a partir del complejo de cocadenas<sup>2</sup>

$$0 \rightarrow \mathcal{C}^0(X) \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{C}^1(X) \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{C}^2(X) \xrightarrow{\delta_2} \mathcal{C}^3(X) \xrightarrow{\delta_3} \dots,$$

es decir, es la colección de espacios vectoriales

$$H^k(X) = \frac{\text{Ker } \delta_k}{\text{Im } \delta_{k-1}}.$$

---

<sup>2</sup>En este caso el complejo está formado por espacios vectoriales (sin topología) y la derivada es simplemente lineal.

Esto da un invariante por equivalencia homotópica de complejos simpliciales. En particular se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 5.2.1.** *Sea  $X$  un complejo simplicial contractible. Entonces  $H^k(X) = 0$  para todo  $k \geq 1$ .*<sup>3</sup>

Por otro lado, puede considerarse la *homología* de un complejo simplicial  $X$  mirando los operadores de borde  $\partial = \partial_k : C_k(X) \rightarrow C_{k-1}(X)$ . Obtenemos así los espacios

$$H_k(X) = \frac{\text{Ker } \partial_k}{\text{Im } \partial_{k+1}}.$$

A los elementos de  $\text{Ker } \partial_k$  les llamamos *ciclos* y a los elementos de  $\text{Im } \partial_{k+1}$  les llamamos *bordes*.

Ahora fijemos un número real  $p \geq 1$  y supongamos que  $X$  tiene una métrica de longitud que cumple con las siguientes condiciones:

- (5.a) Tiene dimensión finita.
- (5.b) Existe  $D \geq 0$  tal que para todo simplejo  $\sigma$  de  $X$  se cumple  $\text{diam}(\sigma) \leq D$ .
- (5.c) Existe una función creciente  $N : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{N}$  tal que el número de simplejos que intersectan una bola de radio  $r$  nunca excede  $N(r)$  (independientemente del centro de la bola). Para no tener problemas supondremos que  $N(r)$  es una cota para simplejos con orientación.

En este caso decimos que  $X$  tiene *geometría acotada* o que es un complejo simplicial *geométrico*.

Si  $\theta$  es una  $k$ -cocadena en  $X$ , definimos su norma  $\ell^p$  por

$$\|\theta\|_{\ell^p} = \left( \sum_{\sigma \in X_k} |\theta(\sigma)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \in [0, +\infty).$$

Luego tomamos

$$\ell^p \mathcal{C}^k(X) = \{\theta \in \mathcal{C}^k(X) : \|\theta\|_{\ell^p} < +\infty\},$$

que es un espacio de Banach para la norma  $\|\cdot\|_{\ell^p}$ .

En la definición de la norma  $\|\cdot\|_{\ell^p}$  contamos en los simplejos orientados. Si lo hiciéramos en los no orientados obtendríamos una norma equivalente.

**Proposición 5.2.2.** *El operador de coborde  $\delta$  está bien definido y es continuo de  $\ell^p \mathcal{C}^k(X)$  a  $\ell^p \mathcal{C}^{k+1}(X)$ .*

---

<sup>3</sup>La prueba puede leerse [20].

*Demostración.* Tomemos  $\theta \in \ell^p \mathcal{C}^k(X)$ . Luego

$$\begin{aligned}
\|\delta\theta\|_{\ell^p}^p &= \sum_{\sigma \in X_{k+1}} \left| \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \theta(\partial_i \sigma) \right|^p \\
&\leq (k+2)^{p-1} \sum_{\sigma \in X_{k+1}} \sum_{i=0}^{k+1} |\theta(\partial_i \sigma)|^p \\
&\leq (k+2)^{p-1} N(1) \sum_{\tau \in X_k} |\theta(\tau)|^p \\
&= (k+2)^{p-1} N(1) \|\theta\|_{\ell^p}^p.
\end{aligned}$$

Donde en la segunda línea se usa la desigualdad de Jensen y en la tercer la condición (c), ya que cada  $\tau \in X_k$  puede estar en el borde de a lo sumo  $N(\epsilon)$  elementos de  $X_{k+1}$  para cualquier  $\epsilon > 0$ .  $\square$

Consideramos ahora el complejo de cocadenas

$$0 \rightarrow \ell^p \mathcal{C}^0(X) \xrightarrow{\delta_0} \ell^p \mathcal{C}^1(X) \xrightarrow{\delta_1} \ell^p \mathcal{C}^2(X) \xrightarrow{\delta_2} \ell^p \mathcal{C}^3(X) \xrightarrow{\delta_3} \dots$$

La cohomología  $\ell^p$  de  $X$  es la familia de espacios vectoriales topológicos

$$\ell^p H^k(X) = \frac{\text{Ker } \delta_k}{\text{Im } \delta_{k-1}}.$$

Por otro lado, la cohomología  $\ell^p$  reducida de  $X$  es la familia de espacios de Banach

$$\ell^p \overline{H}^k(X) = \frac{\text{Ker } \delta_k}{\overline{\text{Im } \delta_{k-1}}}.$$

**Observación 5.2.3.** La cohomología en grado 0 no es muy interesante. Observar que si  $f \in \ell^p \mathcal{C}^0(X)$  es un cociclo (es decir, cumple  $\delta f = 0$ ), entonces debe ser constante en las componentes conexas. Como además esta función debe estar en un espacio  $\ell^p$ , por lo que debe ser nula en todas las componentes conexas no acotadas. Si  $X$  tiene una métrica de longitud, entonces es conexo, luego tiene cohomología  $\ell^p$  (reducida) nula para cualquier  $p$  si es no acotado y esta es isomorfa a  $\mathbb{R}$  en el caso acotado.

## 5.2.1 Invarianza por cuasi-isometrías

Un espacio métrico  $Z$  es *uniformemente contractible* si es contractible y existe una función  $\psi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  tal que para todo  $r > 0$  y  $z \in Z$  la bola  $B(z, r)$  es contractible dentro de la bola  $B(z, \psi(r))$ .

**Ejemplo 5.2.4.** Un ejemplo de espacio contractible que no es uniformemente contractible es el cilindro infinito con una tapa:

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 0 \text{ y } x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \text{ y } x^2 + y^2 \leq 1\},$$

con la métrica de  $\mathbb{R}^3$ . Observar que cualquier bola de radio mayor a 2 es contractible solo dentro de conjuntos que contengan la tapa del cilindro. Esto hace que si  $B(p, r)$  es contractible dentro de  $B(p, R)$ , entonces  $R$  depende no solo de  $r$  sino también de  $p$ .

**Teorema 5.2.5.** *Sean  $X$  e  $Y$  dos complejos simpliciales de la misma dimensión, con geometría acotada y uniformemente contractibles. Si existe una cuasi-isometría  $F : X \rightarrow Y$ , entonces para todo  $p \geq 1$  los complejos  $\ell^p \mathcal{C}^*(X)$  y  $\ell^p \mathcal{C}^*(Y)$  son homotópicamente equivalentes. Como consecuencia, para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,*

$$\ell^p H^k(X) \cong \ell^p H^k(Y) \quad \text{y} \quad \ell^p \overline{H}^k(X) \cong \ell^p \overline{H}^k(Y).$$

Donde la equivalencia en este caso indica isomorfismos topológicos.

Este es un resultado de M. Gromov [19, p. 219], sin embargo, aquí veremos una prueba de M. Bourdon y H. Pajot [5]. Esta prueba tiene varios pasos, por lo que lo dividiremos en los siguientes lemas, en los que asumimos las hipótesis del Teorema 5.2.5.

**Lema 5.2.6.** *Existe una familia de mapas lineales en las cadenas  $c_F : \mathcal{C}_k(X) \rightarrow \mathcal{C}_k(Y)$  que verifica*

(i) *Los simplejos en el soporte de  $c_F(v_0, \dots, v_k)$  está a distancia uniformemente acotada de  $F(v)$ .*

(ii)  *$\partial c_F(\sigma) = c_F(\partial \sigma)$  para todo  $\sigma \in X^k$ .*

(iii) *Para todo  $k \in \mathbb{N}$  existen dos constantes  $N_k$  y  $L_k$  tal que*

$$\|c_F(\sigma)\|_\infty \leq N_k, \quad \text{y} \quad \ell(c_F(\sigma)) \leq L_k,$$

*para todo  $\sigma \in X^k$ .*

Para probar este Lema usaremos un resultado conocido de la topología algebraica<sup>4</sup>:

**Lema 5.2.7.** *Si  $X$  es un complejo simplicial contractible y  $\mathbf{c} \in \mathcal{C}_k(X)$  es un ciclo, entonces existe  $\tilde{\mathbf{c}} \in \mathcal{C}_k(X)$  tal que  $\partial \tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c}$ . Si además  $\mathbf{c}$  tiene coeficientes enteros, entonces  $\tilde{\mathbf{c}}$  también.*

*Demostración.* Observar que será suficiente con definirlos en los conjuntos  $X_K$  con la propiedad  $c_F(-\sigma) = -c_F(\sigma)$  (en el caso  $k \geq 1$ ).

Consideramos para ambos complejos  $X$  e  $Y$  la misma constante  $D$  de la condición (5.a) y la función  $N$  de la condición (5.b). También asumimos que ambos complejos son uniformemente contractibles para la misma función  $\psi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ .

Para  $v \in X_0$  definimos  $c_F(v)$  como un vértice cualquiera de un simplejo que contiene a  $F(v)$ , luego extendemos linealmente esta función a  $c_F : \mathcal{C}_0(X) \rightarrow \mathcal{C}_0(Y)$ . Por la geometría acotada tenemos  $|F(v) - c_F(v)| \leq D$ .

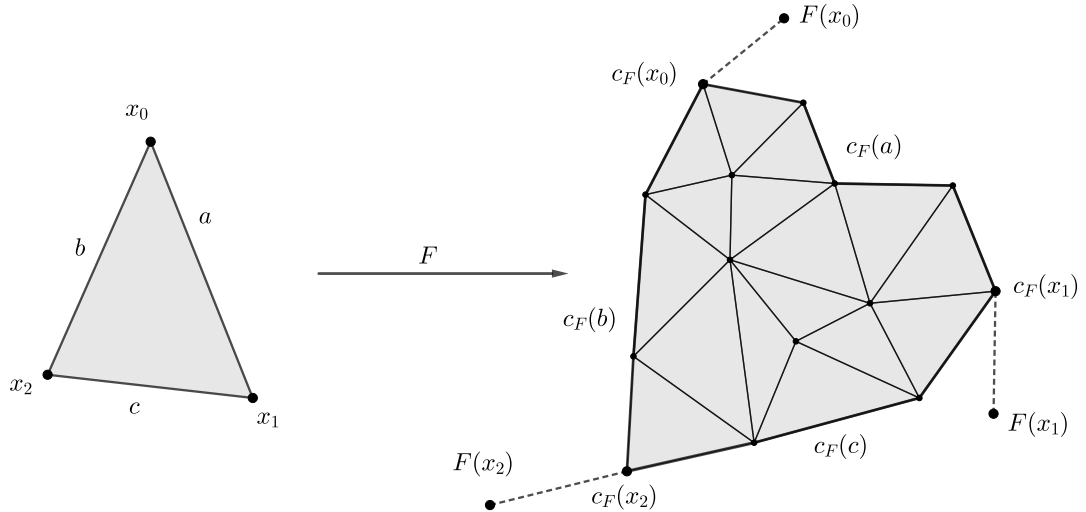
---

<sup>4</sup>Mirar [20]

Como  $F$  es una cuasi-isometría y  $X$  tiene geometría acotada, entonces

$$\sup\{|c_F(a_+) - c_F(a_-)| : a \in X_1\} < +\infty,$$

donde  $a_-$  y  $a_+$  denotan los vértices de  $a$ . Usando la geometría acotada de  $Y$  podemos encontrar una cadena  $c_F(a) \in \mathcal{C}_1(Y)$  on  $\partial c_F(a) = c_F(a_+) - c_F(a_-)$ , longitud acotada por una función de  $|c_F(a_+) - c_F(a_-)|$ , y  $\|c_F(a)\|_\infty = 1$ .



Ahora tomamos  $k \geq 2$ . Asumimos que  $c_F$  está definido en grado  $m$  para todo  $m \leq k - 1$  y que  $c_F(\tau)$  tiene coeficientes enteros para todo  $\tau \in X_m$ . Si  $\sigma \in X^k$ , entonces  $c_F(\partial\sigma)$  es un ciclo, es decir,

$$\partial c_F(\partial\sigma) = c_F(\partial^2\sigma) = 0,$$

y está contenido en una bola con radio  $kDL_{k-1}$ . Como  $Y$  es uniformemente contractible, el Lema 5.2.7 implica que  $c_F(\partial\sigma)$  es el borde de una cadena con coeficientes enteros en una bola  $B$  de radio  $\psi(kDL_{k-1})$ . Su longitud está acotada por el número de simplejos en  $B$ , que no excede  $N(\psi(kDL_{k-1}))$ . Definimos  $c_F(\sigma)$  como una de estas cadenas que minimiza  $\|c_F(\sigma)\|_\infty$ .

Observamos que existe una cantidad finita de complejos simpliciales con a lo sumo  $N(\psi(kDL_{k-1}))$  simplejos y en cada uno de estos hay una cantidad finita de  $k - 1$ -ciclos con coeficientes enteros y norma infinito acotada por  $kN_{k-1}$ , es decir que, a menos de isomorfismos simpliciales, hay finitos  $c_F(\partial\sigma)$ . Esto implica que los valores que puede tomar  $\|c_F(\sigma)\|_\infty$  son también finitos, por lo que este debe estar acotado uniformemente.

Observar que  $c_F$  puede definirse en cada paso de modo tal que se cumple siempre  $c_F(-\sigma) = -c_F(\sigma)$ .  $\square$

Definimos el *pull-back* de una cuasi-isometría  $F : X \rightarrow Y$  como  $F^* : \ell^p \mathcal{C}^k(Y) \rightarrow \ell^p \mathcal{C}^k(X)$ ,

$$F^* \theta(\mathbf{c}) = \theta(c_F(\mathbf{c})).$$

Para ver que está bien definido y es continuo usamos las propiedades de  $c_F$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \|F^* \theta\|_{\ell^p}^p &= \sum_{\sigma \in X_k} |\theta(c_F(\sigma))|^p \\ &\leq \sum_{\sigma \in X_k} N_k^p \left| \sum_{\tau \in |c_F(\sigma)|} \theta(\tau) \right|^p \\ &\leq N_k^p L_k^{p-1} \sum_{\sigma \in X_k} \sum_{\tau \in |c_F(\sigma)|} |\theta(\tau)|^p, \end{aligned}$$

Donde en la última línea usamos la desigualdad de Jensen.

Podemos encontrar una constante  $C_k$  tal que  $\text{dist}(\sigma_1, \sigma_2) > k$  implica  $c_F(\sigma_1) \cap c_F(\sigma_2) = \emptyset$ . Luego para todo  $\tau \in Y_k$  se tiene que  $\tau \in |c_F(\sigma)|$  para a lo sumo  $N(D + C_k)$  simplejos  $\sigma \in X_k$ . Esto implica

$$\|F^* \theta\|_{\ell^p}^p \leq N_k^p L_k^{p-1} N(D + C_k) \sum_{\tau \in Y_k} |\theta(\tau)|^p \preceq \|\theta\|_{\ell^p}^p.$$

Además, como  $c_F$  conmuta con el operador de borde, tenemos de forma directa que  $F^*$  conmuta con el coborde. Esto implica que  $F^*$  nos da un mapa de cadenas y por lo tanto define mapas lineales continuos  $F^\# : \ell^p H^k(Y) \rightarrow \ell^p H^k(X)$  y  $F^\star : \ell^p \overline{H}^k(Y) \rightarrow \ell^p \overline{H}^k(X)$ . Estos dependen, a priori, de la elección de  $c_F$ .

**Lema 5.2.8.** *Si  $G : X \rightarrow Y$  es otra cuasi-isometría con  $|F - G|_\infty < +\infty$ , entonces  $F^\# = G^\#$  y  $F^\star = G^\star$ .*

*Demostración.* Vamos a demostrar que  $F^*$  y  $G^*$  son homotópicos. Para esto vamos a empezar construyendo una familia de mapas lineales  $h : \mathcal{C}_k(X) \rightarrow \mathcal{C}_{k+1}(Y)$  que cumple tal que

- (i)  $\partial h(\mathbf{c}) = c_F(\mathbf{c}) - c_G(\mathbf{c})$  para  $\mathbf{c} \in \mathcal{C}_0(X)$ .
- (ii)  $\partial h(\mathbf{c}) + h(\partial \mathbf{c}) = c_F(\mathbf{c}) - c_G(\mathbf{c})$  para  $\mathbf{c} \in \mathcal{C}_k(X)$  con  $k \geq 1$ .
- (iii)  $\|h(\sigma)\|_\infty$  y  $\ell(h(\sigma))$  están acotados en función de  $k$ .

Nuevamente, bastará con definir  $h$  en los conjuntos de simplejos  $X_k$ .

Como  $F$  y  $G$  están a distancia uniforme acotada se tiene

$$\sup \{ \text{diam}(|c_F(\sigma)| \cup |c_G(\sigma)|) \} < +\infty.$$

Si  $v \in X_0$  elegimos  $h(v)$  tal que  $\partial h(v) = c_F(v) - c_G(v)$  con longitud acotada en función de  $|c_F(v) - c_G(v)|$  y  $\|h(v)\| = 1$ .

Suponemos que  $h$  está definida en grado  $m$  para todo  $m < k$  y tomamos  $\sigma \in X_k$ . Como  $c_F$  y  $c_G$  conmutan con el borde tenemos

$$\partial(c_F(\sigma) - c_G(\sigma) - h(\partial\sigma)) = c_F(\partial\sigma) - c_G(\partial\sigma) - \partial h(\partial\sigma) = h(\partial^2\sigma) = 0.$$

Esto significa que  $c_F(\sigma) - c_G(\sigma) - h(\partial\sigma)$  es un ciclo en una bola de radio acotado independientemente de  $\sigma$ . Como en el lema anterior, encontramos  $h(\sigma) \in \mathcal{C}_{k+1}(Y)$  con  $\partial h(\sigma) = c_F(\sigma) - c_G(\sigma) - h(\partial\sigma)$  y  $\ell(h(\sigma))$  y  $\|h(\sigma)\|_\infty$  uniformemente acotados. Además podemos hacerlo tal que  $h(-\sigma) = -h(\sigma)$  porque  $c_F$ ,  $c_G$  y  $h$  (en grado  $k-1$ ) son cocadenas. Esto permite extender  $h$  (en grado  $k$ ) a una cocadena.

Ahora definimos  $H_k : \ell^p \mathcal{C}^k(Y) \rightarrow \ell^p \mathcal{C}^{k-1}(X)$  para  $k \geq 1$  por

$$H_k \theta : \mathcal{C}_{k-1}(X) \rightarrow \mathbb{R}, \quad H_k \theta(\mathbf{c}) = \theta(h(\mathbf{c})).$$

La prueba de que  $H_k$  está bien definido y es continuo es análoga a la que hicimos para el pull-back  $F^*$ . Veamos que  $H_k$  es una homotopía entre  $F^*$  y  $G^*$ , lo que terminará la prueba.

Si  $k = 0$  tenemos

$$(F^* \theta - G^* \theta)(\mathbf{c}) = \theta(c_F(\mathbf{c}) - c_G(\mathbf{c})) = \theta(\partial h(\mathbf{c})) = \delta \theta(h(\mathbf{c})) = H_1 \delta \theta(\mathbf{c}).$$

Si  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} (F^* \theta - G^* \theta)(\mathbf{c}) &= \theta(c_F(\mathbf{c}) - c_G(\mathbf{c})) \\ &= \theta(\partial h(\mathbf{c}) + h(\partial \mathbf{c})) \\ &= \delta \theta(h(\mathbf{c})) + \theta(h(\partial \mathbf{c})) \\ &= H_{k+1} \delta \theta(\mathbf{c}) + \delta H_k \theta(\mathbf{c}). \end{aligned}$$

□

*Demostración del Teorema 5.2.5.* Tomamos  $\overline{F} : Y \rightarrow X$  una cuasi-inversa de  $F$ . Luego el Lema 5.2.8 implica que  $(F \circ \overline{F})^\#$  y  $(\overline{F} \circ F)^\#$  son iguales a la identidad en los espacios de cohomología.

Además, estos no dependen de la elección de  $c_{F \circ \overline{F}}$  y  $c_{\overline{F} \circ F}$ , así que, como  $c_{F \circ \overline{F}} = c_F \circ c_{\overline{F}}$  y  $c_{\overline{F} \circ F} = c_{\overline{F}} \circ c_F$  cumplen las condiciones del Lema 5.2.1, tenemos que  $(F \circ \overline{F})^*$  es homotópico a  $F^* \circ \overline{F}^*$  y  $(\overline{F} \circ F)^*$  es homotópico a  $\overline{F}^* \circ F^*$ , lo que implica

$$(F \circ \overline{F})^\# = F^\# \circ \overline{F}^\# \quad \text{y} \quad (\overline{F} \circ F)^\# = \overline{F}^\# \circ F^\#.$$

Concluimos entonces que  $F^\#$  y  $\overline{F}^\#$  son inversos. Razonando de la misma forma vemos también que  $F^*$  y  $\overline{F}^*$  son inversos. □

**Ejercicio 5.2.9.** Probar que la cohomología  $\ell^p$  en grado 1 del grafo de Cayley de un grupo libre es no nula para todo  $p \geq 1$ . ¿Y la cohomología reducida?

### 5.3 Cohomología $L^p$ de De Rham

Consideramos ahora  $M$  una variedad diferenciable orientable (con una orientación fijada) de dimensión  $n$  con forma de volumen  $dV$ .

Si  $\varphi$  es una función  $k$ -lineal en un espacio con producto interno de dimensión finita  $(V, \|\cdot\|)$ , definimos su norma de operador como

$$|\varphi| = \max\{|\varphi(v_1, \dots, v_k)| : \|v_1\| = \dots = \|v_k\| = 1\}.$$

Ahora, si  $\omega$  es una  $k$ -forma diferencial en  $M$  ponemos

$$\|\omega\|_{L^p} = \left( \int_M |\omega|^p dV \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_M |\omega_x|^p dV(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Proposición 5.3.1** (Desigualdad de Hölder). *Si  $\omega \in \Omega^k(M)$  y  $\beta \in \Omega^{n-k}(M)$  y  $p, q \geq 1$  son tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , entonces*

$$\|\omega \wedge \beta\|_1 \leq \|\omega\|_{L^p} \|\beta\|_{L^q}.$$

*Demostración.* Si  $v_1, \dots, v_n \in T_x M$  son vectores de norma 1, entonces

$$\begin{aligned} |(\omega \wedge \beta)_x(v_1, \dots, v_n)| &\leq \frac{1}{k!(n-k)!} \sum_{\sigma \in S_n} |\omega_x(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})| |\beta_x(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(n)})| \\ &\leq |\omega_x| |\beta_x|. \end{aligned}$$

De donde se deduce  $|(\omega \wedge \beta)_x| \leq |\omega_x| |\beta_x|$ . Luego, la desigualdad sale de aplicar la desigualdad de Hölder a las funciones  $x \mapsto |\omega_x|$  y  $x \mapsto |\beta_x|$ .  $\square$

Consideramos

$$L^p \Omega^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) : \|\omega\|_{L^p}, \|d\omega\|_{L^p} < +\infty\}.$$

En este espacio tomamos la norma

$$|\omega|_{L^p} = \|\omega\|_{L^p} + \|d\omega\|_{L^p}.$$

Observar que la derivada exterior  $d$  está bien definida y es continua de  $L^p \Omega^k(M)$  a  $L^p \Omega^{k+1}(M)$ , lo que nos permitiría definir un complejo de cocadenas. Sin embargo, los espacios definidos no son completos, por lo que tomaremos su completaciones, notadas por  $L^p \mathcal{C}^k(M)$ . Además, extendemos continuamente  $d$ , obteniendo una familia de operadores lineales y continuos

$$d_k = d : L^p \mathcal{C}^k(M) \rightarrow L^p \mathcal{C}^{k+1}(M).$$

La *cohomología (reducida)  $L^p$  de De Rham* de  $M$  es la correspondiente al complejo de cocadenas

$$0 \rightarrow L^p \mathcal{C}^0(M) \xrightarrow{d_0} L^p \mathcal{C}^1(M) \xrightarrow{d_1} L^p \mathcal{C}^2(M) \xrightarrow{d_2} L^p \mathcal{C}^3(M) \xrightarrow{d_3} \dots$$

Notamos por  $L^p H^k(M)$  y  $L^p \overline{H}^k(M)$  a los espacios de cohomología  $L^p$  y cohomología  $L^p$  reducida respectivamente.

**Observación 5.3.2.** El espacio  $L^p\Omega^k(M)$  está incluido en el espacio de las  $k$ -formas medibles en  $M$ , notado por  $L^p\Lambda^k(M)$ . Una  $k$ -forma medible es una función  $x \mapsto \omega_x$ , donde  $\omega_x$  es  $k$ -lineal y alternada en  $T_xM$  y los coeficientes de  $\omega$  en cualquier carta local son funciones medibles. Puede verse que  $L^p\Lambda^k(M)$  es completo con la norma  $L^p$ , por lo que  $L^p\mathcal{C}^k(M)$  puede verse como la clausura de  $L^p\Omega^k(M)$  en este.

Se dice que una  $k$ -forma medible  $\omega \in L^p\Lambda^k(M)$  tiene *derivada débil*  $d\omega \in L^1_{loc}\Lambda^{k+1}(M)$  (el espacio de las  $(k+1)$ -formas medibles cuya norma de operador es integrable en cualquier compacto de  $M$ ) si para toda  $\beta \in \Omega^{n-k-1}(M)$  con soporte compacto se tiene

$$\int_M d\omega \wedge \beta = (-1)^{k+1} \int_M \omega \wedge d\beta.$$

Observar que la primera está definida porque  $d\omega$  está en  $L^1_{loc}\Lambda^{k+1}(M)$  y la segunda porque, gracias a la desigualdad de Hölder,  $L^p\Lambda^k(M) \subset L^1_{loc}\Lambda^k(M)$  para todo  $p \geq 1$ .

Teniendo esto podemos considerar el espacio  $Z^p_k(M) \subset L^p\Lambda^k(M)$  de las  $k$ -formas medibles que tienen derivada débil nula, y  $B^p_k(M) \subset L^p\Lambda^k(M)$  de las  $k$ -formas medibles que son derivada débil de una  $(k-1)$ -forma medible en  $L^p\Lambda^{k-1}(M)$ . Puede verse que para todo  $k \in \mathbb{N}$  y  $p \geq 1$ ,

$$L^pH^k(M) = \frac{Z^p_k(M)}{B^p_k(M)} \text{ y } L^p\overline{H}^k(M) = \frac{Z^p_k(M)}{B^p_k(M)}.$$

De esta forma, la cohomología  $L^p$  de De Rham de  $M$  queda definida como la correspondiente al complejo de cocadenas  $(W^*_p(M), d)$ , donde  $W^k_p(M)$  es el espacio de  $k$ -formas medibles en  $L^p\Lambda^k(M)$  que tienen derivada débil en  $L^p\Lambda^{k-1}(M)$ . La norma en este espacio está dada por

$$|\omega|_{L^p} = \|\omega\|_{L^p} + \|d\omega\|_{L^p}.$$

**Ejercicio 5.3.3.** Probar que la derivada exterior débil extiende la noción de derivada exterior para formas diferenciales.

### 5.3.1 Lema de Poincaré $L^p$

El objetivo de esta sección es probar el siguiente resultado, que es una versión del Lema de Poincaré para la cohomología  $L^p$ .

**Lema 5.3.4.** Sea  $B$  la bola de centro 0 y radio 1 en  $\mathbb{R}^n$  y  $p \geq 1$ . Luego el complejo  $(L^p\mathcal{C}^*(B), d)$  se retrae al complejo  $(\mathbb{R} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots)$ .

Observar que el Lema 5.3.4 nos dice que toda forma cerrada en  $L^p$  de grado mayor o igual a 1 en una bola es exacta.

Para preparar el camino para probar el Lema 5.3.4 haremos un par de definiciones y probaremos un lema.

Sea  $X$  un campo de vectores en  $M$ . Definimos la *contracción* de una  $k$ -forma  $\omega$  en  $M$  con respecto a  $X$  como la  $(k-1)$ -forma

$$(\iota_X \omega)_x(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega_x(X(x), v_1, \dots, v_{k-1})$$

para todo  $x \in M$  y  $v_1, \dots, v_{k-1} \in T_x M$ . Diremos que  $\omega$  es *ortogonal* a  $X$  si  $\iota_X \omega = 0$ . Observar que  $\iota_X \omega$  es siempre ortogonal a  $X$ , ya que  $(\iota_X \iota_X \omega)_x$  es alternada para todo  $x \in M$ .

Si además  $X$  y  $\omega$  son  $C^\infty$  se define la derivada de Lie de  $\omega$  con respecto a  $X$  por

$$\mathcal{L}_X \omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* \omega,$$

donde  $\phi_t$  es el flujo asociado a  $X$ . Observar que  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \phi_t^* \omega = \phi_s^* \mathcal{L}_X \omega$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} (\phi_t^* \omega)_x(v_1, \dots, v_k) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi_s^* \phi_t^* \omega)_x(v_1, \dots, v_k) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi_t^* \omega)_{\phi_s(x)}(d_x \phi_s(v_1), \dots, d_x \phi_s(v_k)) \\ &= (\mathcal{L}_X \omega)_{\phi_s(x)}(d_x \phi_s(v_1), \dots, d_x \phi_s(v_k)) \\ &= (\phi_s^* \mathcal{L}_X \omega)_x(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Una propiedad que nos será útil es la siguiente igualdad, conocida como *fórmula de Cartan*,

$$\mathcal{L}_X \omega = d\iota_X \omega + \iota_X d\omega.$$

Algo importante a observar es que si  $X$  es diferenciable y  $\omega \in \Omega^k(M)$ , entonces tanto  $\iota_X \omega$  como  $\mathcal{L}_X \omega$  están en  $\Omega^k(M)$ .

El siguiente Lema es una versión de la regla integral de Leibniz para formas diferenciales.

**Lema 5.3.5.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^m$  un conjunto compacto y  $\{\omega(y)\}_{y \in K}$  una familia de  $k$ -formas diferenciales en  $M$  tal que los coeficientes en cualquier carta local son diferenciables en  $M \times \mathbb{R}^k$ . Entonces la  $k$ -forma definida por*

$$\vartheta_x(v_1, \dots, v_k) = \left( \int_K \omega(y) dy \right)_x(v_1, \dots, v_k) = \left( \int_K \omega(y)_x(v_1, \dots, v_k) dy \right)$$

*está en  $\Omega^k(M)$  y cumple*

$$d\vartheta = \int_K d\omega(y) dy.$$

*Demostración.* Tomamos  $\varphi : U \rightarrow M$  una carta local y escribimos

$$(\varphi^* \omega(y))_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1, \dots, i_k}(x, y) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

y

$$(\varphi^* \vartheta)_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} g_{i_1, \dots, i_k}(x, y) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Evaluando ambas formas en vectores de la base canónica  $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$  tenemos

$$g_{i_1, \dots, i_k}(x) = \int_K f_{i_1, \dots, i_k}(x, y) dy.$$

Por la regla integral de Leibniz  $g_{i_1, \dots, i_k}(x)$  es  $C^\infty$  y para todo  $j = 1, \dots, n$  se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x_j} g_{i_1, \dots, i_k}(x) = \int_K f_{i_1, \dots, i_k}(x, y) dy.$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} (\varphi^* d\vartheta)_x &= (d\varphi^* \vartheta)_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} g_{i_1, \dots, i_k}(x, y) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \int_K \frac{\partial}{\partial x_j} f_{i_1, \dots, i_k}(x, y) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &= \int_K d\omega(y)_x dy. \end{aligned}$$

□

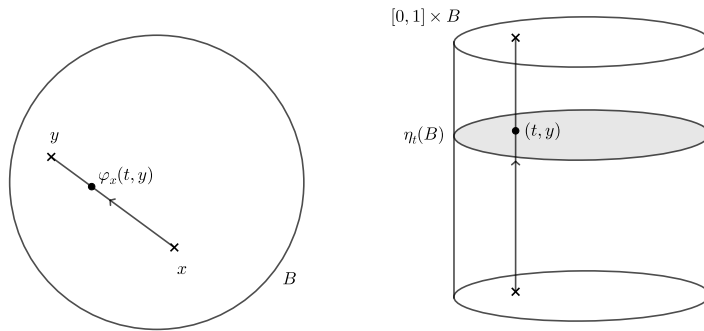
*Demostración del Lema 5.3.4.* Fijado  $x \in B$  consideramos las funciones

$$\varphi_x : [0, 1] \times B \rightarrow B, \quad \varphi_x(t, y) = ty + (1 - t)x$$

y

$$\eta_t : B \rightarrow [0, 1] \times B, \quad \eta_t(y) = (t, y).$$

Además, notamos por  $X$  al campo constante  $\frac{\partial}{\partial t}(1, 0) \in [0, 1] \times B$ .



Ahora, para  $\omega \in L^p\Omega^k(M)$  (con  $k \geq 1$ ), ponemos

$$h(\omega) = \frac{1}{\text{Vol}(B')} \int_{B'} \int_0^1 \eta_t^* (\iota_X \varphi_x^* \omega) dt dx,$$

donde  $B'$  es una bola de radio menor a 1.

Como  $\eta_t^* (\iota_X \varphi_x^* \omega)_y$  es  $C^\infty$  en las variables  $t, x$  e  $y$ , entonces  $h(\omega)$  también lo es y se cumple

$$dh(\omega) = \frac{1}{\text{Vol}(B')} \int_{B'} \int_0^1 d\eta_t^* (\iota_X \varphi_x^* \omega) dt dx.$$

Aquí es importante que la clausura de  $B'$  esté contenida en  $B$  para poder aplicar el Lema 5.3.5. Usando la fórmula de Cartan tenemos

$$\begin{aligned} dh(\omega) + h(d\omega) &= \frac{1}{\text{Vol}(B')} \int_{B'} \int_0^1 \eta_t^* (\iota_X d + d\iota_X) \varphi_x^* \omega dt dx \\ &= \frac{1}{\text{Vol}(B')} \int_{B'} \int_0^1 \eta_t^* \mathcal{L}_X (\varphi_x^* \omega) dt dx. \end{aligned}$$

Observar que

$$\eta_t^* \mathcal{L}_X (\varphi_x^* \omega)_y = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (s+t)\omega_{(s+t)y+(1-s-t)x} = \frac{d}{dt} t\omega_{ty+(1-t)x}$$

lo que nos permite concluir

$$h(d\omega) + dh(\omega) = \omega. \quad (5.1)$$

Ahora queremos ver que  $h(\omega) \in L^p\Omega^k(B)$  y que  $h$  lleva continuamente  $L^p\Omega^k(B)$  en  $L^p\Omega^{k-1}(B)$ . Para esto primero observamos que como  $\iota_X \varphi_x^*$  es una forma en  $[0, 1] \times$  que se anula en la dirección  $\frac{\partial}{\partial t}$ , entonces para todo  $t \in (0, 1)$  e  $y \in B$  se tiene

$$|\eta_t^* (\iota_X \varphi_x^* \omega)_y| = |\iota_X \varphi_x^* \omega_{(t,y)}|.$$

Además

$$\begin{aligned} |\iota_X \varphi_x^* \omega_{(t,y)}| &= \sup\{|\iota_X \varphi_x^* \omega_{(t,y)}(v_1, \dots, v_{k-1})| : \|v_1\| = \dots = \|v_{k-1}\| = 1\} \\ &= \sup\left\{\left|\varphi_x^* \omega_{(t,y)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, v_1, \dots, v_{k-1}\right)\right| : \|v_1\| = \dots = \|v_{k-1}\| = 1\right\} \\ &= \sup\{|\omega_{\varphi(t,y)}(y-x, tv_1, \dots, tv_{k-1})| : \|v_1\| = \dots = \|v_{k-1}\| = 1\} \\ &\leq t^{k-1}|y-x||\omega_{\varphi(t,y)}|, \end{aligned}$$

lo que nos permite concluir

$$|h(\omega)_y| \leq \frac{1}{\text{Vol}(B')} \int_{B'} \int_0^1 |y-x||\omega_{\varphi_x(t,y)}| dt dx.$$

Definimos la función  $u(z) = |\omega|_z$  si  $z \in B$  y  $u(z) = 0$  en otro caso, luego haciendo el cambio de variables  $z = ty + (1-t)x$  tenemos

$$\begin{aligned} |h(\omega)_y| &\leq \frac{1}{\text{Vol}(B')} \int_{B(ty, 1-t)} \int_0^1 |z-y|u(z)(1-t)^{-n-1} dt dz \\ &\leq \frac{1}{\text{Vol}(B')} \int_{B(y, 2)} \int_0^1 \mathbb{1}_{B(ty, 1-t)}(z) |z-y|u(z)(1-t)^{-n-1} dt dz \\ &= \frac{1}{\text{Vol}(B')} \int_{B(y, 2)} |z-y|u(z) \left( \int_0^1 \mathbb{1}_{B(ty, 1-t)}(z)(1-t)^{-n-1} dt \right) dz. \end{aligned}$$

Observar que  $\mathbb{1}_{B(ty, 1-t)}(z) = 1$  implica  $|z-y| \leq 2(1-t)$ . Luego tenemos

$$\int_0^1 \mathbb{1}_{B(ty, 1-t)}(z)(1-t)^{-n-1} dt \leq \int_0^{1-\frac{1}{2}|z-y|} (1-t)^{-n-1} dt = \int_{\frac{1}{2}|z-y|}^1 r^{-n-1} dr \preceq \frac{1}{|z-y|^n}.$$

Esto implica

$$|h(\omega)_y| \preceq \int_{B(y, 2)} |z-y|^{1-n} u(z) dz.$$

Usando que  $\int_{B(y, 2)} |z-y|^{1-n} dz$  es finito y la desigualdad de Jensen obtenemos

$$|h(\omega)_y|^p \preceq \int_{B(y, 2)} |z-y|^{1-n} u(z)^p dz.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|h(\omega)\|_{L^p}^p &= \int_B |h(\omega)_y|^p dy \preceq \int_B \int_{B(y, 2)} |z-y|^{1-n} u(z)^p dz dy \\ &\preceq \int_{B(0, 3)} u(z)^p \left( \int_B \frac{dy}{|z-y|^{n-1}} \right) dz \preceq \|\omega\|_{L^p}^p. \end{aligned}$$

Ahora, usando la identidad  $dh(\omega) = \omega - h(d\omega)$  tenemos

$$\|dh(\omega)\|_{L^p} \leq \|\omega\|_{L^p} + \|h(d\omega)\|_{L^p} \preceq |\omega|_{L^p}$$

lo prueba que  $h$  está bien definido y es continuo de  $L^p\Omega^k(M)$  a  $L^p\Omega^{k-1}(M)$  para  $k \geq 1$ . Como  $L^p\Omega^k(M)$  es denso en  $L^p\mathcal{C}^k(M)$  podemos extender  $h$  a un operador continuo  $h : L^p\mathcal{C}^k(M) \rightarrow L^p\mathcal{C}^{k-1}(M)$  que sigue cumpliendo (5.1).

Si  $\omega = df$  para cierta función diferenciable  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ , observamos que

$$\eta_t^*(\iota_X \varphi_x^* df) = df_{\varphi_x(t, y)}(y - x) = (f \circ \gamma)'(t),$$

donde  $\gamma(t) = \varphi_x(t, y)$ . Luego

$$h(df) = f - \frac{1}{\text{Vol}(B')} \int_{B'} f(x) dx.$$

Definimos entonces  $h : L^p\Omega(B) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$h(f) = \frac{1}{\text{Vol}(B')} \int_{B'} f(x) dx,$$

que es claramente continua y por lo tanto se extiende a  $L^p\mathcal{C}^0(M)$ .

En conclusión,  $h$  es una retracción de  $(L^p\mathcal{C}^*, d)$  al complejo

$$(\mathbb{R} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots).$$

□

### 5.3.2 Teorema de De Rham $L^p$

Una triangulación en una variedad  $M$  es una estructura de complejo simplicial  $X$ . Es decir,  $X$  es un complejo simplicial junto con un homeomorfismo  $X \rightarrow M$  tal que la distancia en  $X$  se herede de la distancia en  $M$ . El complejo  $X$  queda luego dotado de una estructura diferencial que lo hace difeomorfo a  $M$ .

Diremos que  $X$  es una triangulación *geométrica* de  $M$  si:

- (d) Todo simplejo de  $X$  es biLipschitz difeomorfo al simplejo estandar de la misma dimensión, con constante de Lipschitz uniforme.
- (e) Existe una constante uniforme que acota el número de simplejos a los que puede pertenecer un punto.

Observar que en este caso la triangulación  $X$  tiene geometría acotada. Hay condiciones que aseguran que la existencia de una triangulación geométrica, por ejemplo que  $M$  tenga curvatura acotada y radio de inyectividad positiva (ver por ejemplo [1]).

**Teorema 5.3.6.** *Sea  $M$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n$  que admite una triangulación geométrica  $X$ . Entonces para todo  $p \geq 1$  los complejos  $(\ell^p(X_*))(X), \delta)$  y  $(W_p^*(M), d)$  son homotópicamente equivalentes. Por lo tanto para todo  $p \geq 1$  y  $k = 0, \dots, n$  se tiene*

$$L^p H^k(M) \cong \ell^p H^k(X) \quad y \quad L^p \overline{H}^k(M) \cong \ell^p \overline{H}^k(X).$$

Para probar este teorema vamos a usar el Corolario 5.1.2, es decir, vamos a construir un bicomplejo que contenga a los dos complejos de cadenas implicados como los complejos de núcleos horizontal y vertical.

Definimos la *estrella* de un vértice  $v \in X_0$  como el interior de la unión de todos los simplejos que contienen a  $v$ . Denotamos a este conjunto por  $U(v)$  y lo miramos como un subconjunto de  $M$ . La familia de todas las estrellas nos da un cubrimiento de  $M$ :

$$\mathcal{U} = \{U(v) : v \in X_0\}.$$

Además consideramos los cubrimientos dados por las intersecciones de elementos de  $\mathcal{U}$ :

$$\mathcal{U}_m = \{U(v_0) \cap \cdots \cap U(v_m) \neq \emptyset : (v_0, \dots, v_m) \in X_m\}.$$

Observar que  $\mathcal{U}_m$  se corresponde con el conjunto de los  $m$ -simplejos no orientados, es decir que cada elemento de dicho cubrimiento representa dos elementos opuestos de  $X_k$ . Además, las condiciones (d) y (e) implican que los elementos de  $\mathcal{U}_m$  son biLipschitz difeomorfos a la bola unidad en  $\mathbb{R}^n$  con constante de Lipschitz uniforme (e independiente de  $m$ ). Para cada  $\sigma = (v_0, \dots, v_m) \in X_m$  definimos

$$U_\sigma = U(v_0) \cap \cdots \cap U(v_m).$$

Decimos que una función

$$\omega \in \prod_{\sigma \in X_m} L^p \mathcal{C}^k(U_\sigma), \quad \omega : \sigma \mapsto \omega_\sigma$$

es *alternada* si  $\omega_{-\sigma} = -\omega_\sigma$ . Luego consideramos para  $k, m \in \mathbb{N}$  el espacio  $C_p^{k,m}$  de dichas funciones alternadas  $\omega$  que cumplen

$$\|\omega\|_{C_p} = \|\omega\|_p + \|d\omega\|_p = \left( \sum_{\sigma \in X_m} \|\omega_\sigma\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{\sigma \in X_m} \|d\omega_\sigma\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Además definimos las derivadas  $d' : C_p^{k,m} \rightarrow C_p^{k+1,m}$  y  $d'' : C_p^{k,m} \rightarrow C_p^{k,m+1}$  por

$$(d'\omega)_\sigma = (-1)^m d\omega_\sigma \quad \text{y} \quad (d''\omega)_\sigma = \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i \omega_{\partial_i \sigma}.$$

**Lema 5.3.7.**  $(C_p^{k,m}, d', d'')$  es un bicomplejo.

*Demostración.* Comencemos probando la igualdad  $d' \circ d'' + d'' \circ d' = 0$ :

$$\begin{aligned} (d'd''\omega)_\sigma + (d''d'\omega)_\sigma &= (-1)^{m+1} d(d''\omega)_\sigma + \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i (d'\omega)_{\partial_i \sigma} \\ &= (-1)^{m+1} \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i d\omega_{\partial_i \sigma} + (-1)^m \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i d\omega_{\partial_i \sigma} = 0. \end{aligned}$$

La continuidad de  $d'$  es clara, veamos la de  $d''$ :

$$\begin{aligned} \|d''\omega\|_p^p &= \sum_{\sigma \in X_{m+1}} \|(d''\omega)_\sigma\|_{L^p}^p = \sum_{\sigma \in X_{m+1}} \left\| \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i \omega_{\partial_i \sigma} \right\|_{L^p}^p \\ &\leq (m+2)^{p-1} \sum_{\sigma \in X_{m+1}} \sum_{i=0}^{m+1} \|\omega_{\partial_i \sigma}\|_{L^p}^p, \end{aligned}$$

donde en la última línea se usa la desigualdad triangular de  $\|\cdot\|_{L^p}$  y la convexidad de la función  $t \mapsto |t|^p$ . Por la condición (e) existe una constante  $N$  tal que todo punto de  $M$  puede pertenecer a lo sumo a  $N$  simplejos de  $X$ , luego un  $m$ -simplejo puede estar a lo sumo en el borde de  $N(m+1)$ -simplejos. Esto implica

$$\|d''\omega\|_p^p \leq (m+2)^{p-1}N \sum_{\tau \in X_m} \|\omega_\tau\|_{L^p}^p = (m+2)^{p-1}N \|\omega\|_p^p.$$

Por otro lado

$$\|dd''\omega\|_p = \|d'd''\omega\|_p = \|d''d'\omega\|_p \leq (m+2)^{p-1}N \|d\omega\|_p.$$

Juntando esto con lo anterior tenemos  $\|d''\omega\|_{C_p} \leq (m+2)^{p-1}N \|\omega\|_{C_p}$ . □

*Demostración de Teorema 5.3.6.* <sup>5</sup> Probaremos el teorema verificando que el bicomplejo  $(C_p^{k,m}, d', d'')$  está en las hipótesis del Corolario 5.1.2. Luego relacionaremos los complejos de núcleos con  $(\ell^p(X_*), \delta)$  y  $(L^p\mathcal{C} * (M), d)$ .

Paso 1: Vamos a probar que  $(C^{*,m})$  se retrae al subcomplejo

$$F_p^m := \text{Ker } d'|_{C_p^{0,m}} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Para esto recordamos los mapas  $h : L^p\mathcal{C}^k(B) \rightarrow L^p\mathcal{C}^{k-1}(B)$  contruidos en el Lema 5.3.4 y para cada  $\sigma \in X_k$  consideramos un difeomorfismo  $L$ -biLipschitz  $f_\sigma : U_\sigma \rightarrow B$  (con  $L$  independiente de  $\sigma$ ). Luego definimos  $H : C_p^{k,m} \rightarrow C_p^{k-1,m}$  por

$$(H\omega)_\sigma = (-1)^m f_\sigma^* h(f_\sigma^{-1})^* \omega.$$

Acá se entiende  $C_p^{-1,m} = F_p^m$ .

Es fácil ver que  $f_\sigma^*$  y  $(f_\sigma^{-1})^*$  son continuas, y con esto que  $H$  es continua. Además, se verifica usando 5.1 se verifica que  $H$  es la retracción buscada.

Paso 2: Probamos ahora que  $(C_p^{k,*})$  se retrae a

$$E_p^k := \text{Ker } d''|_{C_p^{k,0}} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Tenemos que construir una familia de mapas lineales continuos  $\kappa : C_p^{k,m} \rightarrow C_p^{k,m-1}$  ( $m \geq 0$ ), donde  $C_p^{k,-1} = \text{Ker } d''|_{C_p^{k,0}}$ , tal que  $\kappa \circ d'' + d'' \circ \kappa = Id$ .

Sea  $\{\eta_v\}_{v \in X_M^{(0)}}$  una partición de la unidad con respecto al cubrimiento  $\mathcal{U}$ . Observar que podemos tomarla de forma tal que  $|(d\eta_v)_x|$  es uniformemente acotado independientemente de  $v$  y  $x$ . Si  $m \geq 1$  y  $\omega \in C_p^{k,m}$ , entonces para  $\sigma \in X_{m-1}$  definimos

$$(\kappa\omega)_\sigma = (-1)^m \sum_{v \in X_0} \eta_v \omega_{\sigma v}.$$

---

<sup>5</sup> Hay algunos detalles en la prueba que se dejan como ejercicio al lector.

Donde si  $\sigma = (v_0, \dots, v_{m+1})$ , entonces  $\sigma v = (v_0, \dots, v_{m+1}, v)$ . Observar que si  $v$  es un vértice de  $\sigma$ , entonces  $\omega_{\sigma v} = 0$  debido a la condición (g). Para  $\omega \in C_p^{k,0}$  y  $v \in X_0$  ponemos

$$(\kappa\omega)_{v_0} = \sum_{v \in X_0} \eta_v \omega_v|_{U_{v_0}}.$$

Se verifica directamente que  $\kappa$  es la retracción que buscamos.

Paso 3: Observamos que los elementos de  $F_p^m$  son las funciones  $g \in C_\xi^{0,m}$  que satisfacen que  $g_\sigma$  es esencialmente constante en  $U_\sigma$  para cada  $\sigma \in X_m$ . Usando el hecho de que  $U_\sigma$  es biLipschitz difeomorfo (con constante de Lipschitz uniforme) a la bola unidad en  $\mathbb{R}^n$  concluimos que  $F_p^m$  es isomorfo a  $\ell^p(X_m)$  y  $d''$  coincide con la derivada en este espacio.

Paso 4: Los elementos de  $E_p^k$  son de la forma  $\omega = \{\omega_v\}_{v \in X_0}$  con

$$\omega_{v_1}|_{U(v_1) \cap U(v_2)} = \omega_{v_2}|_{U(v_1) \cap U(v_2)}$$

en casi todo punto. Podemos tomar una  $k$ -forma  $\tilde{\omega}$  en  $M$  tal que  $\tilde{\omega}|_{U(v)} = \omega_v$  en casi todo punto para todo  $v \in X_0$ . Se puede probar que  $\|\omega\|_{C_p} \asymp \|\tilde{\omega}\|_{W_p}$  usando que todo punto en  $M$  est a en a lo sumo  $n$  elementos de  $\mathcal{U}$ . Esto muestra que  $E_p^k$  es isomorfo a  $L^p\mathcal{C}^k(M)$ .  $\square$

$$\begin{array}{ccccccc} L^p\mathcal{C}^0(M) & \xrightarrow{d} & L^p\mathcal{C}^1(M) & \xrightarrow{d} & \dots \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ \text{Ker } d''|_{C_p^{0,0}} & \xrightarrow{d'} & \text{Ker } d''|_{C_p^{1,0}} & \xrightarrow{d'} & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \ell^p(X_0) & \xrightarrow{\cong} & \text{Ker } d'|_{C_p^{0,0}} & \hookrightarrow & C_p^{0,0} & \xrightarrow{d'} & C_p^{1,0} & \xrightarrow{d'} & \dots \\ \downarrow \delta & & \downarrow d'' & & \downarrow d'' & & \downarrow d'' & & \\ \ell^p(X_1) & \xrightarrow{\cong} & \text{Ker } d'|_{C_p^{0,1}} & \hookrightarrow & C_p^{0,1} & \xrightarrow{d'} & C_p^{1,1} & \xrightarrow{d'} & \dots \\ \downarrow \delta & & \downarrow d'' & & \downarrow d'' & & \downarrow d'' & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

**Corolario 5.3.8.** Sean  $M$  y  $N$  dos variedades Riemannianas uniformemente contráctiles de la misma dimensión que admiten triangulaciones geométricas. Si existe una cuasi-isometría  $F : M \rightarrow N$ , entonces  $(L^p\mathcal{C}^*(M), d)$  y  $(L^p\mathcal{C}^*(N), d)$  son homotópicamente equivalentes. Por lo tanto para todo  $p \geq 1$  y  $k \in \mathbb{N}$  se tiene

$$L^p H^k(M) \cong L^p H^k(N) \quad \text{y} \quad L^p \overline{H}^k(M) \cong L^p \overline{H}^k(N).$$

## 5.4 Algunos cálculos

Vamos a estudiar la cohomología  $L^p$  para algunos ejemplos con el fin de distinguirlos a menos de cuasi-isometrías. Con esto queremos ilustrar cómo se aplica lo visto en este capítulo a problemas de clasificación cuasi-isométrica, no dar una descripción exhaustiva de la cohomología  $L^p$  de dichos espacios.

En concreto, nos preguntamos para qué valores de  $p$  el espacio  $L^p H^k(M)$  es trivial y para cuales es no trivial. Luego, dadas dos variedades Riemannianas  $M$  e  $N$  en las hipótesis del Corolario 5.3.8, basta con encontrar algún valor de  $p$  y  $k \in \mathbb{N}$  para el cual  $L^p H^k(M) = 0$  y  $L^p H^k(N) \neq 0$  o viceversa para concluir que  $M$  e  $N$  no son cuasi-isométricas. Para esto vamos a probar un par de lemas debidos a P. Pansu que nos permitirán asegurar la anulación o no anulación de la cohomología  $L^p$ .

**Lema 5.4.1.** *Consideremos  $M$  una variedad Riemanniana completa y orientable sin borde de dimensión  $n$  y dos números reales  $p, q > 1$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Si  $\omega \in L^p \Omega^k(M)$  es una  $k$ -forma cerrada tal que existe  $\beta \in L^q \Omega^{n-k}(M)$  tal que*

$$\int \omega \wedge \beta \neq 0,$$

*entonces  $\omega$  representa una clase no nula en la cohomología  $L^p$  reducida.*

Para probar este lema necesitaremos primero lo siguiente:

**Lema 5.4.2.** *Para todo  $k \in \mathbb{N}$  se tiene que  $\Omega_c^k(M)$  es denso en  $L^p \mathcal{C}^k(M)$  con la norma  $\|\cdot\|_{L^p}$ .*

*Demostración.* Es suficiente con mostrar que  $\Omega_c^k(M)$  es denso en  $L^p \Omega^k(M)$ .

Como  $M$  es completa puede tomarse una sucesión de funciones  $f_j : M \rightarrow [0, 1]$  de clase  $C^\infty$  con soporte compacto tal que

$$\limsup_j \sup_{x \in M} |(df_j)_x| = 0$$

y  $f_j = 1$  dentro de un compacto  $K_j$  de forma tal que  $M = \bigcup_j K_j$ .

Sea  $\omega \in L^p \Omega^k(M)$ . Luego consideramos  $\omega_j = f_j \omega$ . Tenemos

$$\|\omega_j - \omega\|_{L^p}^p = \|(f_j - 1)\omega\|_{L^p}^p \geq \int_{\{f_j \neq 1\}} |\omega_x|^p dV(x).$$

Esto tiende a 0 por continuidad de la medida  $|\omega|^p dV$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \|d(\omega_j - \omega)\|_{L^p} &\leq \|df_j \omega\|_{L^p} + \|(f_j - 1)d\omega\|_{L^p} \\ \sup_{x \in M} |(df_j)_x| \|\omega\|_{L^p} + \|(f_j - 1)d\omega\|_{L^p} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Concluimos entonces que  $\|\omega_j - \omega\|_{L^p} \rightarrow 0$ . □

*Demostración del Lema 5.4.1.* Si  $\omega$  es nula en cohomología reducida, entonces existe una sucesión  $\{\nu_j\} \subset L^p \mathcal{C}^{k-1}(M)$  tal que

$$|\omega - d\nu_j|_{L^p} = \|\omega - d\nu_j\|_{L^p} \rightarrow 0.$$

Por el lema anterior se puede suponer que  $\nu_j \in \Omega_c^k(M)$  para todo  $j$ . Luego

$$\begin{aligned} \left| \int_M \omega \wedge \beta \right| &= \left| \int_M (\omega - d\nu_j) \wedge \beta + \int_M d\nu_j \wedge \beta \right| \\ &= \left| \int_M (\omega - d\nu_j) \wedge \beta + \int_M d(\nu_j \wedge \beta) + (-1)^k \int_M \nu_j \wedge d\beta \right| \\ &= \left| \int_M (\omega - d\nu_j) \wedge \beta \right| \\ &\leq \|\omega - d\nu_j\|_{L^p} \|\beta\|_{L^q} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

En la tercera igualdad se usa que  $\beta$  es cerrada y el Teorema de Stokes para anular los dos sumandos restantes de la segunda línea.

Esto nos da una contradicción, por lo que deducimos que  $\omega$  es no nulo en cohomología reducida.  $\square$

Ahora consideramos en  $M$  un campo diferenciable de vectores  $X$  con norma entre dos números positivos  $0 < a < b$ . Notamos por  $\phi_t$  a su flujo asociado (observar que el campo es completo). Decimos que  $X$  es  $(k, p)$ -contractante si existen constantes  $C, \eta > 0$  tal que para todo  $x \in M$  y toda  $k$ -forma  $\omega$  con  $\iota_X \omega = 0$  se tiene

$$|\phi_t^* \omega_x| \leq C e^{-\eta t} |\omega_{\phi_t(x)}| \text{Jac}_x(\phi_t)^{1/p}$$

para todo  $t \geq 0$ . Donde el Jacobiano de  $\phi_t$  es la función que cumple

$$\text{Jac}(\phi_t) dV = \phi_t^* dV.$$

Asumiremos hasta el final de la sección que  $\phi_t$  no tiene órbitas periódicas.

**Lema 5.4.3.** *Supongamos que  $X$  es  $(k-1, p)$  y  $(k, p)$ -contractante para  $k \geq 2$ , entonces para todo  $t > 0$  el pull-back  $\phi_t^*$  lleva continuamente  $L^p \Lambda^k(M)$  en  $L^p \Lambda^k(M)$ . Además, para todo  $\omega \in L^p \Lambda^k(M)$  se tiene*

$$\|\phi_t^* \omega\|_{L^p} \rightarrow 0$$

cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

*Demostración.* Sea  $x \in M$  y  $\omega \in L^p \Lambda^k$ . Tomamos a lo largo de la órbita de  $x$  campos diferenciables  $X_2, \dots, X_n$  invariantes por  $\phi_t$  tal que  $\mathcal{B}_y = \{X(y) = X_1(y), X_2(y), \dots, X_n(y)\}$  es una base de  $T_y M$  para todo  $y$  en la órbita de  $x$ . Notamos la base dual de  $\mathcal{B}_y$  por  $\{dX_1(y), dX_2(y), \dots, dX_n(y)\}$ . Luego  $\omega$  a lo largo de la órbita de  $x$  queda expresada por

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1, \dots, i_k} dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_k}$$

Si escribimos

$$\beta = \sum_{1 \leq i_2 < \dots < i_k \leq n} f_{1, i_2, \dots, i_k} dX_2 \wedge \dots \wedge dX_n$$

ponemos  $\omega = dX \wedge \beta + \gamma$ . Observar que  $\beta$  y  $\gamma$  son ortogonales a  $X$ .

Observar que si  $y$  está en la órbita de  $x$ , entonces

$$\begin{aligned} |\beta_y| &= \sup\{|\beta_x(v_1, \dots, v_{k-1})| : \|v_i\| = 1 \text{ y } v_i \perp X(y) \text{ para todo } i\} \\ &= \sup\{|\omega_y(X(y), v_1, \dots, v_{k-1})| : \|v_i\| = 1 \text{ y } v_i \perp X(y) \text{ para todo } i\} \\ &\leq \|X(y)\| |\omega_y|. \end{aligned}$$

Además, observamos que  $\phi^* dX = dX$ , y  $|dX|_x = \frac{1}{\|X(x)\|}$ . Luego, como  $X$  es  $(k-1, p)$ -contractante,

$$\begin{aligned} |\phi_t^*(dX \wedge \beta)_x| &\leq |(\phi_t^* dX)_x| |\phi_t^* \beta_x| \\ &\leq \frac{C e^{-\eta t}}{\|X(x)\|} |\beta_{\phi_t(x)}| Jac_x(\phi_t)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{b}{a} C e^{-\eta t} |\omega_{\phi_t(x)}| Jac_x(\phi_t)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} |\gamma| &= \sup\{|\gamma_x(v_1, \dots, v_k)| : \|v_i\| = 1 \text{ y } v_i \perp X(y) \text{ para todo } i\} \\ &= \sup\{|\omega_x(v_1, \dots, v_k)| : \|v_i\| = 1 \text{ y } v_i \perp X(y) \text{ para todo } i\} \leq |\omega_y|. \end{aligned}$$

Como  $X$  es  $(k, p)$ -contractante y  $\iota_X \gamma = 0$ , tenemos

$$|\phi_t^* \gamma_x| \leq C e^{-\eta t} |\gamma_{\phi_t(x)}| Jac_x(\phi_t)^{\frac{1}{p}} \leq C e^{-\eta t} |\omega_{\phi_t(x)}| Jac_x(\phi_t)^{\frac{1}{p}}.$$

Concluimos entonces que

$$|\phi_t^* \omega_x| \leq |\phi_t^*(dX \wedge \beta)_x| + |\phi_t^* \gamma_x| \leq \left(\frac{a}{b} + 1\right) C e^{-\eta t} |\omega_{\phi_t(x)}| Jac_x(\phi_t)^{\frac{1}{p}},$$

lo que implica

$$\begin{aligned} \|\phi_t^* \omega\|_{L^p}^p &= \int_M |\phi_t^* \omega_x|^p dV(x) \\ &\leq \int_M \left(\frac{a}{b} + 1\right)^p C^p e^{-\eta t} |\omega_{\phi_t(x)}|^p Jac_x(\phi_t) dV(x) \\ &= \left(\frac{a}{b} + 1\right)^p C^p e^{-\eta t} \int_M \phi_t^*(|\omega|^p dV) \\ &= \left(\frac{a}{b} + 1\right)^p C^p e^{-\eta t} \|\omega\|_{L^p}^p. \end{aligned}$$

□

El siguiente lema nos da un criterio para probar la anulaci3n de la cohomolog3a  $L^p$ .

**Lema 5.4.4.** *Supongamos existe un campo  $X$  que es  $(k-1, p)$  y  $(k, p)$ -contractante para  $k \geq 2$  y tiene norma uniformemente acotada en  $M$ . Enonces  $L^p H^k(M) = 0$ .*

*Demostraci3n.* Para  $\omega \in L^p \Lambda^k(M)$  y  $N \in \mathbb{N}$  definimos

$$B_N \omega = \int_0^N \phi_t^* \iota_X \omega \, dt.$$

Estimamos su norma  $L^p$ :

$$\begin{aligned} \|B_N \omega\|_{L^p}^p &= \int_M \left| \left( \int_0^N \phi_t^* \iota_X \omega \, dt \right)_x \right|^p dV(x) \\ &\leq N^{p-1} \int_0^N \int_M |\phi_t^* \iota_X \omega_x|^p dV(x) \, dt \\ &\leq N^{p-1} \int_0^N C^p e^{-\eta p t} \|\iota_X \omega\|_{L^p}^p \, dt \end{aligned}$$

Puede verse que que, como  $X$  es uniformemente acotado  $\|\iota_X \omega\|_{L^p} \leq \|X\|_\infty \|\omega\|_{L^p}$ , luego  $\|B_N \omega\|_{L^p} \leq C_N \|\omega\|_{L^p}$ , donde  $C_N$  depende de  $N, C, \|X\|_\infty$  y  $\eta$ . Deducimos entonces que  $B_N : L^p \Lambda^k(M) \rightarrow L^p \Lambda^{k-1}(M)$  est3 bien definida y es continua. Observar que de la misma forma se puede definir (y resulta continuo)  $B_N$  de  $L^p \Lambda^{k+1}(M)$  a  $L^p \Lambda^k(M)$ .

Si ahora  $\omega \in L^p \Omega^k(M)$ , entonces  $B_N \omega \in \Omega^k(M)$  (ver Lema 5.3.5) y

$$dB_N \omega = d \int_0^N \phi_t^* \iota_X \omega \, dt = \int_0^N \phi_t^* d \iota_X \omega \, dt.$$

Integrando la igualdad  $\frac{d}{dt} \phi_t^* = \phi_t^* \mathcal{L}_X$ , y usando la f3rmula de Cartan  $\mathcal{L}_X \omega = d \iota_X \omega + \iota_X d \omega$  tenemos

$$\begin{aligned} \phi_N^* \omega - \omega &= \int_0^N \phi_t^* \mathcal{L}_X \omega \, dt \\ &= \int_0^N \phi_t^* d \iota_X \omega \, dt + \int_0^N \phi_t^* d \iota_X \omega \, dt \\ &= dB_N \omega + B_N d \omega. \end{aligned}$$

Esto implica que  $\|dB_N \omega\|_{L^p} \leq D_N \|\omega\|_{L^p}$  con  $D_N$  independiente de  $\omega$ . Luego  $B_N$  lleva continuamente  $L^p \Omega^k(M)$  en  $L^p \Omega^{k-1}(M)$  y por lo tanto se puede extender continuamente de  $L^p \mathcal{C}^k(M)$  en  $L^p \mathcal{C}^{k-1}(M)$ . Adem3s, la igualdad  $\phi_t^* - Id = dB_N + B_N d$  anterior se extiende por continuidad a  $L^p \mathcal{C}^k(M)$ .

Puede verse que la sucesi3n, por un argumento similar al usado arriba, que  $\{B_N \omega\}_N$  es de Cauchy en  $L^p \mathcal{C}^{k-1}(M)$  y por lo tanto converge a  $B \omega \in L^p \mathcal{C}^{k-1}(M)$ .

Si ahora  $\omega \in L^p \mathcal{C}^k(M)$  es cerrada, entonces

$$\begin{aligned} \|dB\omega + \omega\|_{L^p} &= \|dB\omega + \omega\|_p = \lim_{N \rightarrow +\infty} \|dB_N\omega + \omega\|_p \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \|\phi_N^* \omega\|_{L^p} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Luego  $-B\omega$  es una primitiva de  $\omega$ . Probamos entonces que  $\text{Ker } d_k = \text{Im } d_{k-1}$  y por lo tanto  $L^p H^k(M) = 0$ .  $\square$

### 5.4.1 El espacio hiperbólico real $\mathbb{H}^n$

Escribiremos los puntos de  $\mathbb{H}^n$  como  $(x, y)$ , con  $x \in \mathbb{R}^{n-1}$  e  $y > 0$ . Consideramos en  $\mathbb{H}^n$  el campo ascende de norma 1, es decir,  $X(x, y) = (0, \dots, 0, y)$ . Su flujo asociado es  $\phi_t(x, y) = (x, e^t y)$ .

Si  $\omega$  es una  $k$ -forma en  $\mathbb{H}^n$  con  $\iota_X \omega = 0$  se tiene que el supremo

$$|\phi_t^* \omega_{(x,y)}| = \sup \left\{ |\omega_{(x,e^t y)}(d_{x,y} \phi_t(v_1), \dots, d_{x,y} \phi_t(v_n))| : \|v_1\|_{(x,y)} = \dots = \|v_n\|_{(x,y)} = 1 \right\}$$

se alcanza en vectores de la forma  $v_i = (v_i^1, \dots, v_i^{n-1}, 0)$ . En ese caso  $d_{x,y} \phi_t(v_i) = v_i$  y  $\|v_i\|_{(x,y)} = e^t \|v_i\|_{(x,e^t y)}$ , por lo que

$$|\phi_t^* \omega_{(x,y)}| = e^{-kt} |\omega_{\phi_t(x,y)}|.$$

Además, la forma de volumen en  $\mathbb{H}^n$  es

$$dV(x, y) = \frac{1}{y^n} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \wedge dy.$$

Luego

$$\phi_t^* dV(x, y) = \frac{1}{(e^t y)^n} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \wedge (e^t dy),$$

por lo que  $\text{Jac}_{(x,y)}(\phi_t) = e^{-(n-1)t}$ , de donde concluimos

$$|\phi_t^* \omega_{(x,y)}| = e^{\frac{n-1-kp}{p}t} |\omega_{\phi_t(x,y)}| \text{Jac}_{(x,y)}(\phi_t).$$

Tenemos entonces que el campo  $X$  es  $(k, p)$ -contractante si y solo si  $p > \frac{n-1}{k}$ , y es  $(k-1)$ -contractante si  $p > \frac{n-1}{k-1}$ . Por el Lema 5.4.4 tenemos que  $L^p H^k(\mathbb{H}^n) = 0$  (y por lo tanto  $L^p \overline{H}^k(\mathbb{H}^n) = 0$ ) para todo  $p > \frac{n-1}{k-1}$ . Aquí debemos suponer que  $k \geq 2$ .

Para estudiar la no anulación vamos a usar el Lema 5.4.1. Definimos

$$\omega_{(x,y)} = d(f(x)g(y)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1}) \text{ y } \beta_{(x,y)} = d(\psi(x)\varphi(y)\pi_k(x)dx_{k+1} \wedge \dots \wedge dx_{n-1}),$$

donde  $\pi_k : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  es la proyección  $k$ -ésima coordenada, y  $f, \psi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow [0, 1]$  y  $g, \varphi : (0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$  son funciones diferenciables tal que

- $f$  tiene soporte compacto y  $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x) dx = 1$ .
- $g(y) = 0$  si  $y$  mayor a algún  $y_1 > 0$  y  $g(y) = 1$  si  $y$  es menor a  $y_0 > 0$ .
- $\varphi(y) = 0$  si  $y$  es mayor a  $y_2 > y_1$  y  $\varphi(y) = 1$  si  $y$  es menor a  $y_1$ .
- $\psi$  es constante 1 en el soporte de  $f$  y tiene soporte compacto.

Observar que

$$\|\omega\|_{L^p} \leq \|fg' dy \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{k-1}\|_{L^p} + \sum_{i=k}^{n-1} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{k-1} \right\|_{L^p}.$$

El primer sumando de la derecha es finito porque  $fg'$  tiene soporte compacto. Usando

$$|(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})_{(x,y)}| = y^k$$

podemos estimar los otros:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{k-1} \right\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{H}^n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right|^p g(y)^p y^{pk} dV(x, y) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right|^p g(y)^p y^{pk-n} dx dy \\ &\leq \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \int_0^{t_1} y^{pk-n} dy. \end{aligned}$$

Esto es finito si  $p > \frac{n-1}{k}$ .

Además

$$\begin{aligned} |\beta_{(x,y)}| &\leq \sum_{i=1}^k \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) \varphi(y) \pi_k(x) \right| |(dx_i \wedge dx_{k+1} \wedge \cdots \wedge dx_{n-1})_{(x,y)}| \\ &\quad + |\psi(x) \varphi(y)| |(dx_k \wedge \cdots \wedge dx_{n-1})_{(x,y)}| \\ &\quad + |\psi(x) \pi_k(x) \varphi'(y)| |dy \wedge dx_{k+1} \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}|_{(x,y)} \\ &= y^{n-k} \left( \sum_{i=1}^k \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) \varphi(y) \pi_k(x) \right| + |\psi(x) \varphi(y)| + |\psi(x) \pi_k(x) \varphi'(y)| \right). \end{aligned}$$

De acá podremos concluir que  $\|\beta\|_{L^q}$  es finito para todo  $q > \frac{n-1}{n-k}$ , lo que es equivalente a  $p < \frac{n-1}{k-1}$ .

Si  $p \in (\frac{n-1}{k}, \frac{n-1}{k-1})$  la  $n$ -forma  $\omega \wedge \beta$  es integrable; luego por el Teorema de Stokes tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}^n} \omega \wedge \beta &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times (s, t_1)} \omega \wedge \beta \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{s\}} f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} = 1. \end{aligned}$$

Lo que implica que  $\omega$  representa una clase no nula en cohomología  $L^p$  reducida.

En conclusión, vimos que para  $k \geq 2$

$$L^p H^1(\mathbb{H}^n), L^p \overline{H}^1(\mathbb{H}^n) = 0 \text{ para } p \in \left( \frac{n-1}{k}, \frac{n-1}{k-1} \right)$$

y

$$L^p H^1(\mathbb{H}^n), L^p \overline{H}^1(\mathbb{H}^n) \neq 0 \text{ para } p > 0.$$

Esto también funciona en el caso  $k = 1$  poniendo  $\frac{n-1}{0} = +\infty$ .

Observar que los exponentes críticos  $p = \frac{n-1}{k-1}$  son invariantes numéricos de cuasi-isometría. Esto por ejemplo permite probar que dos espacios hiperbólicos reales son cuasi-isométricos si y solo si tienen la misma dimensión.

**Observación 5.4.5.** En el caso  $k = n - 1$  tenemos una descripción casi completa (salvo para  $p = 1$  y  $p = \frac{n-1}{n-2}$ ) de la anulación y no anulación de la cohomología  $L^p$  (reducida).

### 5.4.2 El plano hiperbólico complejo $\mathbb{CH}^2$

El plano hiperbólico complejo puede verse como el grupo  $\mathcal{H} \rtimes_{\theta} \mathbb{R}$  con una métrica invariante a izquierda, donde  $\mathcal{H}$  es el grupo de Heisenberg, definido como el subgrupo de  $GL(3, \mathbb{R})$  formado por matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{H})$  está dado por

$$\theta_t \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^t x_1 & e^{2t} x_3 \\ 0 & 1 & e^t x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para simplificar identificaremos  $\mathcal{H}$  con  $\mathbb{R}^3$  equipado con el producto

$$x * x' = (x_1, x_2, x_3) * (x'_1, x'_2, x'_3) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3 + x_1 x'_2).$$

Luego  $\mathbb{CH}^2$  es identificado con  $\mathbb{R}^4$  equipado con el producto

$$(x, t) \cdot (x', t') = (x * \theta_t(x'), t + t') = (x + e^t x', y + e^t y', z + e^{2t} z' + e^t x y', t + t').$$

Ponemos en  $\mathbb{CH}^2$  la métrica invariante a izquierda generada por el producto interno usual en  $T_0 \mathbb{CH}^2 = \mathbb{R}^4$ . Esto implica

$$\|v\|_{(x,t)}^2 = e^{-2t} v_1 + e^{-2t} v_2 + e^{-4t} (v_3 - x_1 v_2)^2 + v_4^2,$$

para la cual la forma de volumen es

$$dV(x, t) = e^{-4t} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dt.$$

Vamos a estudiar solo la cohomología  $L^p$  de  $\mathbb{CH}^2$  en grado 2. Esto será suficiente para distinguir este espacio de  $\mathbb{H}^4$ .

Consideramos  $X$  el campo constante  $\frac{\partial}{\partial t} = (0, 0, 0, 1)$  y su flujo

$$\phi_s(x, t) = (x, t + s).$$

Puede verse de forma similar al caso anterior que  $Jac_{(x,t)}(\phi_s) = e^{-4s}$  y que si  $\omega$  es una 1-forma con  $\iota_X(\omega) = 0$ ,

$$|\phi_s^* \omega_{(x,t)}| \leq e^{-s} |\omega_{\phi_s(x,t)}|.$$

Luego  $X$  es  $(1, p)$ -contractante si  $p > 4$ . En ese caso también es  $(2, p)$ -contractante y por lo tanto  $L^p H^2(\mathbb{CH}^2) = 0$  para todo  $p > 4$ .

Por otro lado definimos las 2-formas cerradas

$$\omega_{(x,t)} = d(f(x)g(t)dx_1) \quad \text{y} \quad \beta_{(x,t)} = d(\psi(x)\varphi(t)\pi_2(x)dx_3)$$

donde

- $f$  tiene soporte compacto y  $\int_{\mathbb{R}^3} f(x)dx = 1$ .
- $g(t) = 0$  if  $t$  mayor a algún  $t_1 \in \mathbb{R}$  y  $g(t) = 1$  si  $t$  es menor a  $t_0$ .
- $\varphi(t) = 0$  si  $t$  es mayor a  $t_2$  y  $\varphi(t) = 1$  si  $t$  es menor a  $t_1$ .
- $\psi$  es constante 1 en el soporte de  $f$  y tiene soporte compacto.

Al igual que en el caso anterior, tenemos

$$\int_{\mathbb{CH}^2} \omega \wedge \beta = 1.$$

Veamos que condiciones son necesarias sobre  $p$  para que  $\omega \in L^p \Lambda^2(\mathbb{CH}^2)$  y  $\beta \in L^q \Lambda^2(\mathbb{CH}^2)$ , donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Para esto debemos tener en cuenta que las normas de las 1-formas fundamentales son:

$$|(dx_1)_{(x,t)}| = e^t, \quad |(dx_2)_{(x,t)}| = e^t, \quad |(dx_3)_{(x,t)}| = \frac{e^{2t} + x_1^2}{\sqrt{x_1^2 e^{-2t} + 1}}, \quad |dt_{(x,t)}| = 1.^6$$

Recordando que  $|\omega \wedge \beta_{(x,t)}| \leq |\omega_{(x,t)}| |\beta_{(x,t)}|$  podemos acotar por arriba la norma de todas las formas en  $\mathbb{CH}^2$ . Luego:

- $\omega$  es  $L^p$ -integrable si los son las funciones  $|dx_1 \wedge dx_2|$  y  $|dx_1 \wedge dx_3|$  en el conjunto  $\text{sop}(f) \times \text{sop}(g)$ , lo que sucede si  $p > 2$ .

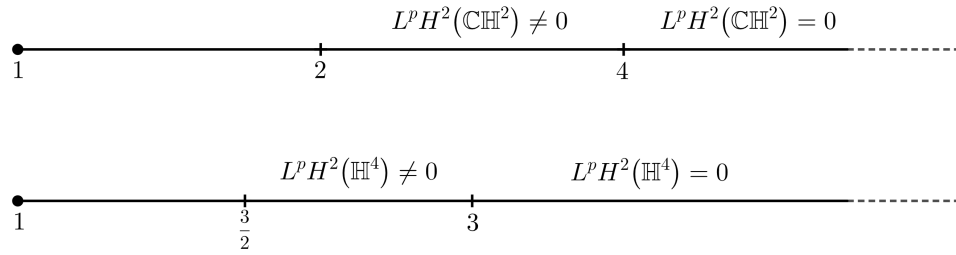
---

<sup>6</sup>Esto puede verse fácilmente, por ejemplo, usando el método de multiplicadores de Lagrange.

- $\beta$  es  $L^q$ -integrable si lo son las funciones  $|dx_1 \wedge dx_3|$  y  $|dx_2 \wedge dx_3|$  en  $\text{sop}(\psi) \times \text{sop}(\varphi)$  y esto sucede si  $q > \frac{4}{3}$ , que es equivalente a  $p < 4$ .

Esto nos dice que  $L^p \overline{H}^2(\mathbb{CH}^2) \neq 0$  para  $p \in (2, 4)$ , lo que implica  $L^p H^2(\mathbb{CH}^2) \neq 0$  para  $p \in (2, 4)$ .

Si ahora comparamos la cohomología  $L^p$  o la cohomología  $L^p$  reducida en grado 2 de  $\mathbb{CH}^2$  con la de  $\mathbb{H}^4$  concluimos que esos espacios no pueden ser cuasi-isométricos. En particular, el exponente crítico a partir del cual se anula la cohomología  $L^p$  es en el primer caso 4 y en el segundo 3. Es importante observar aquí que ambos espacios admiten triangulaciones geométricas. Esto se deja como ejercicio.



## 5.5 Comentarios finales

1. La representación  $\theta$  que determina el producto semidirecto en  $\mathbb{CH}^2$  es la única que cumple  $d_x \theta_t = e^{t\alpha}$  donde

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por lo que puede escribirse  $\mathbb{CH}^2 = \mathcal{H} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ .

Por otro lado, puede verse que  $\mathbb{H}^4 = \mathbb{R}^3 \rtimes_{Id} \mathbb{R}$ . Observar que el coeficiente crítico para la anulación de la cohomología  $L^p$  en grado  $k \geq 2$  de  $\mathbb{H}^n$  es

$$\frac{n-1}{k-1} = \frac{\text{tr}(\text{Id})}{k-1},$$

y en el caso de  $\mathbb{CH}^2$ , el coeficiente crítico para la cohomología  $L^p$  en grado 2 es

$$4 = \frac{\text{tr}(\alpha)}{k-1}.$$

En general, un *grupo de Heintze* es un grupo de Lie de la forma  $N \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$  donde  $N$  es un grupo de Lie nilpotente, conexo y simplemente conexo y  $\alpha$  es una derivación en

el álgebra de Lie de  $N$  cuyos valores propios tienen parte real positiva. Un artículo de E. Heintze de 1974 (ver [21]). muestra que estos grupos siempre admiten una métrica Riemanniana invariante a izquierda de curvatura negativa; más aún, toda variedad homogénea y conexa de curvatura negativa es isomorfa a uno de estos grupos con una métrica invariante a izquierda.

Para algunos otros grupos de Heintze puede verse que el coeficiente crítico para la anulación de la cohomología  $L^p$  en grado  $k \geq 2$  es

$$\frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1}}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1}},$$

donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  son las partes reales de los valores propios de  $\alpha$  (Ver por ejemplo). Esto generaliza lo visto en la sección anterior y permite distinguir otros casos.

En general, la pregunta de cuándo dos grupos de Heintze son o no cuasi-isométricos está abierta. Respuestas parciales pueden leerse en [25] y [31].

2. Otra aplicación interesante de la cohomología  $L^p$  tiene que ver con la existencia de curvaturas pinchadas en variedades Riemannianas. Por ejemplo, puede probarse que la cohomología  $L^p$  en grado  $k$  una variedad Riemanniana completa de dimensión  $n$  cuya curvatura está entre  $-1$  y  $\delta \in (-1, 0)$  se anula para  $p \in (1, q(n, \delta, k))$ . Esto permite, además de distinguir variedades con curvaturas pinchadas, determinar si una variedad Riemanniana admite otra métrica pinchada cuasi-isométricamente equivalente o no (ver teoremas A y B en [27]).
3. La cohomología  $L^p$  en grado 1 de espacios Gromov-hiperbólicos está relacionada con la dimensión conforme o la dimensión conforme Ahlfors-regular del borde al infinito. Ejemplo de esto puede leerse en [5] y [25].
4. Además de complejos simpliciales y variedades Riemannianas, hay otros contextos en los que se define la cohomología  $L^p$ . Por ejemplo puede hacerse para grupos discretos o topológicos (ver [4, 6, 7, 9, 23, 28, 30]) o para espacios métricos medibles de geometría acotada ([12, 24, 26]). Existen teoremas de equivalencias entre estas versiones, que resultan también invariantes por cuasi-isometrías.

# Bibliografía

- [1] O. ATTIE. Quasi-isometry classification of some manifolds of bounded geometry. *Math. Z.* **216**:501–527, 1994.
- [2] M. BONK – J. HEINONEN – P. KOSKELA, Uniformizing Gromov hyperbolic spaces. *Asterisque* **270**, 2001.
- [3] M. BONK – O. SCHRAMM, Embeddings of Gromov hyperbolic spaces. *Geometric and Functional Analysis* **10**:266–306, 2000.
- [4] M. BOURDON – F. MARTIN – A. VALETTE, Vanishing and non-vanishing for the first  $L^p$ -cohomology of groups. *Comment. Math. Helv.* **80**(2):377–389, 2005.
- [5] M. BOURDON – H. PAJOT. Cohomologie  $l_p$  et espaces de Besov. *J. Reine Angew Math.* **558**:85–108, 2003.
- [6] M. BOURDON – B. RÉMY. Quasi-isometric invariance of continuous group  $L^p$ -cohomology, and first applications to vanishings. *Annales Henri Lebesgue* **3**:1291–1326, 2020.
- [7] M. BOURDON – B. RÉMY. Non-vanishing for group  $L^p$ -cohomology of solvable and semisimple Lie groups. *Journal de l'École Polytechnique* **10**:771–814, 2023.
- [8] M. BRIDSON – A. HAEFLIGER. *Metric Spaces of Non-positive curvature*. Springer Berlin, Heidelberg, 1999.
- [9] Y. CORNULIER – R. TESSERA. Contracting automorphisms and  $L^p$ -cohomology in degree one. *Ark. Mat.* **49** (2):295–324, 2011.
- [10] T. COULHON – L. SALOFF-COSTE. Variétés riemanniennes isométriques à l'infini. *Revista Matemática Iberoamericana* **11**(3), 1995.
- [11] M. DO CARMO. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser Boston, 1992.
- [12] L. GENTON. Scaled Alexander-Spanier Cohomology and  $L_{qp}$ -Cohomology for Metric Spaces. Thesis N° 6330. EPFL, Lausanne, 2014.
- [13] E. GHYS – P. DE LA HARPE. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*. Progress in Mathematics 1990.
- [14] V. GOL'DSHTEIN – V. KUZMINOV – I. SHVEDEV. A property of De Rham regularisation operators. *Siberian Math. Journal* **25**(2), 1984.

- [15] V. GOL'DSHTEIN – V. KUZMINOV – I. SHVEDOV. Dual spaces of spaces of differential forms. *Siberian Mathematical Journal* **27**:35–44, 1986.
- [16] V. GOL'DSHTEIN – M. TROYANOV. Sobolev inequality for differential forms and  $L_{p,q}$ -cohomology. *Journal of Geom. Anal.* **16**(4):597-631, 2006.
- [17] V. GOL'DSHTEIN – M. TROYANOV. A short proof of the Hölder-Poincaré duality for  $L_p$ -cohomology. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* **124**:179-184, 2010.
- [18] M. GROMOV. Groups of polynomial growth and expanding maps (with an appendix by Jacques Tits). *Publications Mathématiques de l'IHÉS* **53**:53-78, 1981.
- [19] M. GROMOV. *Asymptotic Invariants for Infinite Groups*. G. A. Niblo and M. A. Roller, eds., London Math. Soc. Lect. Note Ser. 182, 1993.
- [20] A. HATCHER. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [21] E. HEINTZE. On homogeneous manifolds of negative curvature. *Mathematische Annalen*, 1974.
- [22] J. MACKAY – J. TYSON. *Conformal Dimension: Theory and Application*. University Lecture Series; Vol. 54, American Mathematical Society, 2010.
- [23] F. MARTIN – A. VALETTE. On the first  $L^p$ -cohomology of discrete groups. *Groups Geom. Dyn.* **1**(1):81–100, 2007.
- [24] P. PANSU. Cohomologie  $L^p$  des variétés à courbure négative, cas du degré 1. *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, Spacial Issue*, 1989. *Conference on Partial Differential Equations and Geometry, Torino*, 1988.
- [25] P. PANSU. Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un. *Ann. of Math.*, 1989.
- [26] P. PANSU. Cohomologie  $L^p$ : invariance sous quasiisométries. Preprint 1995.
- [27] P. PANSU. Cohomologie  $L^p$  et pincement. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 2008.
- [28] M. PULS. The first  $L^p$ -cohomology of some finitely generated groups and  $p$ -harmonic functions. *Journal of Functional Analysis*, **237**:391-401, 2006.
- [29] B. STONEK. Calculo III (Notas de curso 2009). <https://bruno.stonek.com/index.php/notes/>
- [30] R. TESSERA. Vanishing of the first reduced cohomology with values in an  $L^p$ -representation. *Annales de l'Institut Fourier*, **59**:851–876, 2009.
- [31] X. XIE. Large scale geometry of negatively curved  $\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}$ . *Geometry & Topology*, **21**(3), 2014.