XXII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

Hiperbolicidad y estabilidad

Martín Sambarino

MÉRIDA, VENEZUELA, 9 AL 9 DE SEPTIEMBRE DE 2009

XXII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

Hiperbolicidad y estabilidad

Martín Sambarino

CMAT - Fac. de Ciencias, Universidad de la República, Uruguay
samba@cmat.edu.uy

MÉRIDA, VENEZUELA, 9 AL 15 DE SEPTIEMBRE DE 2009

XXII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las siguientes instituciones: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y Universidad de Oriente, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana.

La XXI ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS recibió financiamiento de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela, el Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (FONACIT), el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), la Universidad de Los Andes (CEP, CDCHT, Facultad de Ciencias y Departamento de Matemáticas) y el Rectorado de la Unversidad Centroccidental Lisandro Alvarado.

2000 Mathematics Subject Classification: 37Dxx, (37Cxx, 37D20, 37D30, 37C75).

Hiperbolicidad y estabilidad
Martín Sambarino

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas
Preprensa e impresión: Editorial Texto
Depósito legal lf66020095102412
ISBN 978-980-261-108-9
Caracas, Venezuela
2009

Prefacio

El estudio del movimiento, pues de eso se tratan los Sistemas Dinámicos, podría decirse que es tan antiguo como la Historia misma. Si bien gana terreno dentro de la Matemática a partir del invento del Cálculo Diferencial y las Ecuaciones Diferenciales, es H. Poincaré quien sienta las bases de la teoría, en particular proponiendo el *estudio cualitativo*; y, durante la primera mitad del siglo XX, se forjan los conceptos y métodos fundacionales. Pero es a partir de la década del sesenta, con el nacimiento de la Teoría Hiperbólica, que los Sistemas Dinámicos toman cuerpo y forma como disciplina en sí misma.

Estas notas presentan los aspectos fundamentales (enfatizando los métodos geométricos y dinámicos) de la Teoría Hiperbólica (Capítulos 1 y 2) y la caracterización de la C^1-*estabilidad* (Capítulos 3 y 4). Esto último no sólo nos permite apreciar la estética intrínseca de la teoría, sino que también sirve como introducción a sus técnicas, que han tenido un impacto relevante en el desarrollo del estudio de la dinámica global en los últimos 20 años. Sobre este aspecto se incluye el Capítulo 5, que nos hubiera gustado profundizar más, pero por razones de tiempo y espacio no ha sido posible.

Los pre-requisitos, en lo que respecta a los Sistemas Dinámicos, son casi nulos; de todos modos se incluye un Apéndice con nociones elementales. Mas allá de conocer aspectos básicos de Geometría Diferencial, lo que es necesario tener es lo que suele llamarse "madurez matemática". De cualquier forma, las notas admiten al menos dos niveles de lectura. Para el estudiante inicial sugerimos navegar a través del Capitulo 1, del Capítulo 3 las secciones 3.1, 3.2 y 3.3.2, y la sección 4.2 del Capítulo 4. El estudiante más avanzado puede leer directamente los Capítulos 2, 3 y 4 (de este último, si lo prefiere, puede omitir la sección 4.2). El estudiante que tenga conocimiento de la teoría hiperbólica puede ir directamente a los Capítulos 3 y 4. Hay ejercicios a lo largo del texto que complementan la teoría y que son importantes para la comprensión de la misma. También se ha incluido una lista reducida de ejercicios al final de los Capítulos 1 y 2.

Finalmente quiero agradecer muy especialmente a Rafael Potrie por la lectura previa del texto, sus comentarios y correcciones, que han resultado en una mejora importante del mismo. Los errores que quedan son sólo míos, y en todo caso queda como ejercicio para el lector descubrirlos y corregirlos.

Índice general

Capítulo 1

Introducción a la hiperbolicidad

La hiperbolicidad juega un papel central en la teoría de sistemas dinámicos: es el paradigma de los sistemas llamados "caóticos" a pesar de lo cual se tiene un descripción bastante completa de su dinámica. Por otro lado tienen propiedades de estabilidad, lo que implica que esta "caoticidad" no se destruye por pequeñas perturbaciones del sistema.

En este primer capítulo, comenzaremos estudiando transformaciones lineales hiperbólicas donde, a pesar de la dinámica ser trivial (por no existir recurrencia no trivial), varias de las ideas y métodos de la teoría se presentan de forma mas elemental.

Seguiremos luego con lo que es llamada la teoría hiperbólica local y el Teorema de Hartman. Luego estudiaremos dos ejemplos clásicos de la dinámica hiperbólica.

1.1. Transformaciones lineales hiperbólicas

Definición 1.1.1. *Una transformación lineal (invertible)* $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ *es hiperbólica si todos sus valores propios tienen módulo diferente de* 1.

Cuando una transformación lineal tiene todos sus valores propios de modulo menor que uno, no es dificil ver entonces que $\|A_n v\| \to 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^k$. El siguiente lema nos dice que esta convergencia es exponencial. El argumento es simple y aparecerá varias veces en el texto.

Lema 1.1.1. *Sea $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ lineal hiperbólica tal que todos sus valores propios tienen módulo menor que 1. Entonces existen $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que $\|A^n v\| \leq C\lambda^n \|v\|,\ n \geq 0,\ v \in \mathbb{R}^k$.*

Demostración: Es fácil ver que existe n_0 tal que $\|A^{n_0}\| < \gamma < 1$. Sea $C_1 = \sup\{\|A^j\| : j = 0, ..., n_0\}$ y $\lambda = \gamma^{1/n_0}$. Dado cualquier $n \geq 0$, escribimos $n = kn_0 + r$ con $0 \leq r < n_0$. Resulta entonces que

$$\|A^n\| \leq \|A^{kn_0}\| \|A^r\| \leq C_1 \gamma^k \leq \frac{C_1}{\gamma} \lambda^n = C\lambda^n.$$

□

Sea A una tranformación lineal hiperbólica. Consideremos E^s la suma de todos los subespacios (generalizados) asociados a valores propios de módulo menor que 1. Análogamente, definimos E^u. Es fácil ver que $\mathbb{R}^k = E^s \oplus E^u$. De hecho tenemos el siguiente:

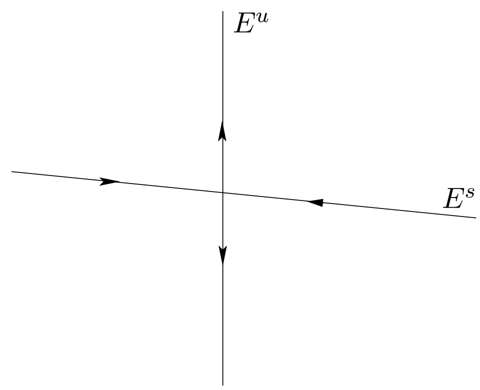


Figura 1.1:

Lema 1.1.2. *Sea $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ lineal hiperbólica. Entonces existen subespacios E^s, E^u (llamados subespacio estable e inestable respectivamente) tales que:*

1. $\mathbb{R}^k = E^s \oplus E^u$.
2. $A(E^s) = E^s,\ A(E^u) = E^u$, *es decir,* E^s *y* E^u *son invariantes por* A.

3. *Existe* $C > 0$ *y* $0 < \lambda < 1$ *tal que:*

$$\|A^n v\| \leq C\lambda^n \|v\|, n \geq 0,\ v \in E^s$$

y

$$\|A^{-n} v\| \leq C\lambda^n \|v\|, n \geq 0,\ v \in E^u.$$

4. *Para* $x \in \mathbb{R}^k$ *definimos* $E^s_x = x + E^s$ *y* $E^u_x = x + E^u$. *Se tiene que si* $y \in E^s_x \Longrightarrow \|A^n y - A^n x\| \leq C\lambda^n \to_{n\to\infty} 0$ *si* $n \geq 0$. *Análogamente, para* $n \geq 0$ *e* $y \in E^u_x$ *se tiene que* $\|A^{-n} y - A^{-n} x\| \leq C\lambda^n \to_{n\to\infty} 0$. *En particular, si* $x \neq y$ *entonces* $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|A^n x - A^n y\| = \infty$.

Demostración: Queda como ejercicio para el lector. □

Sea A una tranformación lineal hiperbólica y $v \in E^s$. Sabemos por el lema anterior que $\|A^n v\| \to 0$ y de forma exponencial. Sin embargo, para ver este decrecimiento podriamos tener que esperar cierto tiempo. Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

entonces todo vector iterado por A converge exponencialmente a 0, pero hay vectores v tales que $\|Av\| > \|v\|$. El siguiente lema dice que podemos elegir una norma donde vemos contracción "paso a paso".

Lema 1.1.3 (Norma adaptada)**.** *Sea* $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ *hiperbólica,* $\mathbb{R}^k = E^s \oplus E^u$ *su descomposición en subespacio estable e inestable. Entonces existe un norma* $\|.\|_1 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *y* $0 < a < 1$ *tal que*

$$\|A_{/E^s}\|_1 < a < 1 \quad y \quad \|A^{-1}_{/E^u}\|_1 < a < 1.$$

Demostración: Supongamos primeramente que $E^s = \mathbb{R}^k$. Sabemos que existen $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que $\|A^n\| \leq C\lambda^n$. Consideremos n_0 tal que $C\lambda^{n_0} < 1$. Fijado n_0 definimos una nueva norma $\|.\|_s$ definida por

$$\|v\|_s = \sum_{j=0}^{n_0-1} \|A^j v\|.$$

Es fácil ver que existe K tal que $\|v\|_s \leq K\|v\|$. Luego observamos que:

$$\begin{aligned}\|Av\|_s &= \sum_{j=1}^{n_0} \|A^j v\| = \|v\|_s + \|A^{n_0}v\| - \|v\| \leq \|v\|_s + (C\lambda^{n_0} - 1)\|v\| \\ &\leq \left(1 + \frac{C\lambda^{n_0} - 1}{K}\right)\|v\|_s < a\|v\|_s\end{aligned}$$

si elegimos a, $\left(1 + \frac{C\lambda^{n_0}-1}{K}\right) < a < 1$.

Ahora, en el caso $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ con $\mathbb{R}^k = E^s \oplus E^u$, aplicando lo anterior construimos normas $\|.\|_s$ y $\|.\|_u$ en E^s y E^u respectivamente tales que $\|A_{/E^s}\|_s < a < 1$ y $\|A^{-1}_{/E^u}\|_u < a < 1$. Basta definir entonces, escribiendo $v = (v_s, v_u)$ con respecto a la descomposición $\mathbb{R}^k = E^s \oplus E^u$, la norma $\|.\|_1$ como

$$\|v\|_1 = \text{máx}\{\|v_s\|_s, \|v_u\|_u\}.$$

$\square$

1.1.1. Estabilidad

Por motivos ulteriores y para introducir ciertas técnicas que serán desarrolladas en el Capítulo 2, queremos estudiar el siguiente problema: sea A una transformación lineal hiperbólica en $\mathbb{R}^k$ y realizamos una perturbación de la misma cercana a la identidad, ¿ambos sistemas son conjugados? Mas explícitamente, sea $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ un homemorfismo cercano a A, es decir $\|Ax - G(x)\| < K$ para algún K (y para todo x); ¿es cierto entonces que existe $H : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ tal que $A \circ H = H \circ G$? ¿y con $\|H(x) - x\| < \alpha$ para todo x? Si ambas respuestas fuesen afirmativas, observemos que

$$A^n \circ H = H \circ G^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Pero entonces

$$\|A^n(H(x)) - G^n(x)\| = \|H(G^n(x)) - G^n(x)\| < \alpha \quad \forall x,$$

es decir, la órbita por $H(x)$ según A es α cercana a (o α-sombrea) la órbita por x según G. Por otra parte, la sucesión $x_n = G^n(x)$ verifica que $\|Ax_n - x_{n+1}\| < K$. Esto motiva la siguiente:

Definición 1.1.2. *Sea $K > 0$. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en $\mathbb{R}^k$ es una K-pseudo-órbita (con respecto a $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$) si $\|Ax_n - x_{n+1}\| \leq K \; \forall n \in \mathbb{Z}$.*

Lema 1.1.4 (Propiedad de sombreado)**.** *Sea $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ lineal hiperbólica y sea $K > 0$. Entonces existe $\alpha = \alpha(K)$ tal que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una K-pseudo órbita entonces existe un único $z \in \mathbb{R}^k$ tal que $\|A^n z - x_n\| \leq \alpha \;\; \forall n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración: Comencemos con un caso particular:

Sublema: *Sea $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ lineal tal que $\|A\| < a < 1$ y sea $K > 0$. Entonces existe $\alpha = \alpha(K)$ tal que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una K-pseudo órbita entonces existe un único $z \in \mathbb{R}^k$ tal que $\|A^m z - x_m\| \leq \alpha \;\; \forall m \in \mathbb{Z}$.*

Demostración: Consideremos $x_m : \; m \geq 0$. Observemos que por ser A una contracción tenemos que

$$\begin{aligned}
\|A^m x_0 - x_m\| &\leq \sum_{j=0}^{m-1} \|A^{m-j}x_j - A^{m-(j+1)}x_{j+1}\| \\
&\leq \sum_{j=0}^{m-1} \|A^{m-(j+1)}(Ax_j - x_{j+1})\| \\
&\leq \sum_{j=0}^{m-1} a^{m-(j+1)}K \\
&= K\sum_{j=0}^{m-1} a^j \leq \frac{K}{1-a}
\end{aligned}$$

Luego, tomando $\alpha = \frac{K}{1-a}$, cualquier K-pseudo órbita positiva $\{x_n\}_{n\geq 0}$ es sombreada (a menos de α) por la órbita positiva según A de un punto $w = w(x_0)$. Re-indexando la sucesión $\{x_n\}_{n\geq -m}$ encontramos un punto w_m tal que

$$\|A^{n+m}w_m - x_n\| \leq \alpha \;\; n \geq -m.$$

Escribiendo $z_m = A^m w_m$ concluimos que $\|A^n z_m - x_n\| \leq \alpha$ para cualquier $n \geq -m$. Tomando z un punto de acumulación de z_m (y suponiendo que $\lim_m z_m = z$) concluimos que para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$\|A^n z - x_n\| = \lim_m \|A^n z_m - x_n\| \leq \alpha.$$

Finalmente, tal punto z debe ser único (¿por qué?). $\square$

Continuemos ahora con la demostración de la propiedad del sombreado.

Consideremos la descomposición $\mathbb{R}^k = E^s \oplus E^u$ correspondiente a $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ y escribimos $x \in \mathbb{R}^k$ por $x = (x_s, x_u)$ con respecto a esta descomposición. Vamos a trabajar con la norma adaptada encontrada en el Lema 1.1.3 y que notaremos por comodidad $\|.\|$. (Recordar que dos normas en $\mathbb{R}^k$ son equivalentes).

Sea $x_m,\ m \in \mathbb{Z}$ una K-pseudo órbita y tomemos $\alpha = \frac{K}{1-a}$. Escribimos $x_m = (x_s^m, x_u^m)$. Aplicando el sublema a $A_{/E^s}$ y a $A_{/E^u}$ concluimos que existe y_s e y_u tal que $\|A^m y_s - x_s^m\| \leq \alpha$ y $\|A^m y_u - x_u^m\| \leq \alpha$ para cualquier $m \in \mathbb{Z}$. Luego $y = (y_s, y_u)$ es el punto cuya órbita por A sombrea x_m.

$\square$

Lema 1.1.5. *Sea $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ lineal hiperbólica. Existe $\epsilon > 0$ tal que si $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ es un homeomorfismo y $g = G - A$ tiene constante de Lipschitz menor que ϵ entonces $G = A + g$ es expansivo con constante de expansividad infinita, es decir, $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|G^n(x) - G^n(y)\| = \infty$ si $x \neq y$.*

Demostración: Por comodidad seguimos trabajando con la norma adaptada para A y con la descomposición $\mathbb{R}^k = E^s \oplus E^u$.

Consideremos $x \neq y$ dos puntos de $\mathbb{R}^k$. Supongamos primero que $\|x - y\| = \|x_u - y_u\|$. Resulta entonces que:

$$\begin{aligned} \|G(x) - G(y)\| &= \|(A+g)(x) - (A+g)(y)\| \\ &\geq \|Ax - Ay\| - \|g(x) - g(y)\| \\ &\geq a^{-1}\|x_u - y_u\| - \epsilon\|x - y\| \\ &= (a^{-1} - \epsilon)\|x - y\|. \end{aligned}$$

Por otro lado, de forma análoga vemos que

$$\|(G(x) - G(y))_s\| \leq (a + \epsilon)\|x - y\|.$$

Concluimos que si ϵ es tal que $a + \epsilon < 1 < a^{-1} - \epsilon$ entonces

$$\|G(x) - G(y)\| = \|\left(G(x) - G(y)\right)_u\|$$

y
$$\|G(x) - G(y)\| \geq (a^{-1} - \epsilon)\|x - y\|.$$
Inductivamente tenemos que
$$\|G^n(x) - G^n(y)\| \geq (a^{-1} - \epsilon)^n \|x - y\| \to_{n \to +\infty} \infty.$$

Razonando de la misma manera en el caso $\|x - y\| = \|x_s - y_s\|$ concluimos que $\|G^{-n}(x) - G^{-n}(y)\| \geq (a^{-1} - \epsilon)^n \|x - y\| \to_{n \to +\infty} \infty$.

□

El siguiente resultado es el objetivo de esta sección. Los métodos utilizados en la demostración nos servirán de modelo para el Capítulo 2.

Teorema 1.1.1 (Estabilidad global de mapas lineales hiperbólicos)**.** *Sea $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ lineal hiperbólica. Existe $\epsilon > 0$ tal que si $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ es un homeomorfismo que verifica* $\sup\{\|G(x) - Ax\| : x \in \mathbb{R}^k\} < \infty$ *y $G - A$ tiene constante de Lipschitz menor que ϵ entonces G y A son conjugados.*

Demostración: Tenemos que hallar un homeomorfismo $H : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ tal que $H \circ G = A \circ H$. Sea $K > 0$ tal que $\sup\{\|G(x) - Ax\| : x \in \mathbb{R}^k\} < K$. Vemos entonces que dado cualquier $x \in \mathbb{R}^k$ la órbita según G, $\{G^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$, es una K-pseudo órbita de A. Por la propiedad del sombreado concluimos que existe $\alpha > 0$ tal que para cualquier $x \in \mathbb{R}^k$ existe un único $z \in \mathbb{R}^k$ que verifica:
$$\|A^n z - G^n(x)\| \leq \alpha \ \text{ para cualquier } \ n \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$
Definimos entonces $H : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ por $H(x) = z$ donde z es el único punto que verifica (1.1). En otras palabras $\|A^n(H(x)) - G^n(x)\| \leq \alpha\ \forall n \in \mathbb{Z}$. Verifiquemos primeramente que H conjuga G con A. En efecto, tenemos que $\|A^n(A \circ H(x)) - G^n(G(x))\| \leq \alpha\ \forall n \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto $H(G(x)) = A(H(x))$. De ahí que nos falta probar únicamente que H es un homeomorfismo.
<u>H es continua:</u> sea $x \in \mathbb{R}^k$ y sea x_m una sucesión tal que $x_m \to x$. Queremos probar que $H(x_m) \to H(x)$. Sea $H(x_{m_k})$ una subsucesión de $H(x_m)$ que converge a un punto y y sea $p \in \mathbb{Z}$ cualquiera. Observamos que
$$\|A^p y - G^p(x)\| = \lim_k \|A^p(H(x_{m_k})) - G^p(x_{m_k})\| \leq \alpha$$

y por lo tanto $y = H(x)$. Como $H(x_m)$ es un sucesión acotada (por serlo x_m) concluimos que $H(x)$ es el único punto de acumulación de $H(x_m)$. Luego $H(x_m) \to H(x)$ y probamos que H es continua.
<u>H es inyectiva:</u> Esto es consecuencia de la expansividad de G. En efecto, supongamos que $H(x_1) = H(x_2)$. Deducimos que $\|G^n(x_1) - G^n(x_2)\| \leq 2\alpha \ \forall n \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto $x_1 = x_2$.
<u>H es sobreyectiva:</u> Supongamos que $\exists y \in \mathbb{R}^k$ tal que $H(x) \neq y \ \forall x \in \mathbb{R}^k$. Consideremos $\overline{B} = \overline{B(0, 4\alpha)}$ la bola (cerrada) de radio 4α centrada en el origen y la función $g : \overline{B} \to \partial\overline{B}$ definida por $g(x) = 4\alpha\frac{H(x+y)-y}{\|H(x+y)-y\|.}$ Es fácil ver que si $x \in \partial\overline{B}$ entonces $g(x) \neq -x$. Por lo tanto tenemos una función continua de la bola en el borde de la misma y tal que en el borde es (isotópica a) la identidad. Esto contradice el Teorema del punto fijo de Brower.
<u>H^{-1} es continua:</u> Es similar a la prueba de la continuidad de H. $\square$

Observación 1.1.1. *Remarquemos que si* $\sup\{\|G(x) - Ax\| : x \in \mathbb{R}^k\} < K$ *entonces la misma demostración anterior prueba que existe* $H : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ *continua y sobreyectiva tal que* $A \circ H = H \circ G$*, es decir,* G *y* A *son semiconjudados. Si además* G *tiene constante de expansividad infinita, entonces* H *es inyectiva y un homemorfismo.*

1.2. Puntos fijos hiperbólicos: Teorema de Hartman

En lo que sigue M denotará una variedad riemanniana compacta conexa y sin borde.

Definición 1.2.1. *Sea* $f : M \to M$ *difeomorfismo y* p *un punto fijo de* f*. Decimos que* p *es hiperbólico si* $Df_p : T_pM \to T_pM$ *es hiperbólico (no tiene valores propios de módulo uno). Un punto periódico de período* k *se dice hiperbólico si es un punto fijo hiperbólico de* f^k*.*

Como sucede a menudo en matemática, para estudiar un fenómeno estudiamos su aproximación lineal con la esperanza que esta nos de información relevante sobre el mismo. El siguiente teorema dice que cuando p es un punto fijo hiperbólico, la dinámica de f cerca de p indistinguible (topológicamente) de la dinámica de su aproximación lineal cerca del origen.

Teorema 1.2.1 (Teorema de Hartman [H])**.** *Sea* $f : M \to M$ *un difeomorfismo y* $p \in M$ *un punto fijo hiperbólico de* f*. Entonces* f *y* Df_p *son localmente conjugados. Mas precisamente, existe* U_p *entorno de* p *en* M *y* V *entorno de* 0 *en* T_pM *y un homeomorfismo* $h : U \to V$ *tal que*

$$h \circ f = Df_p \circ h.$$

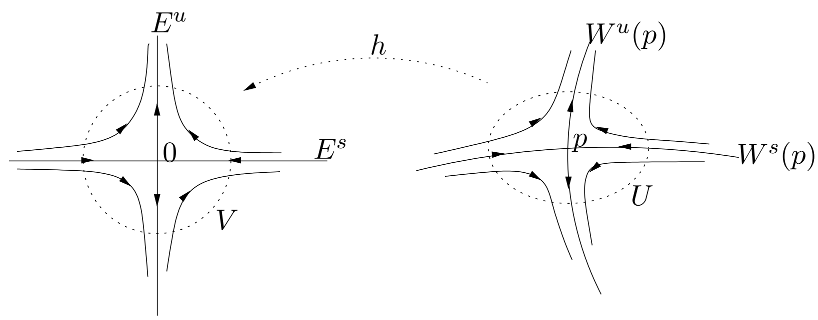


Figura 1.2: Conjucación local: Teorema de Hartman

Demostración: Por ser un teorema local, usando cartas locales, podemos suponer que $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ y $p = 0 = f(0)$ es punto fijo hiperbólico y consideremos el mapa lineal hiperbólico $A = Df_0$. La idea es modificar f fuera de un entorno de 0 de forma que quede cerca de A y así poder aplicar la estabilidad de A. Sea $\epsilon > 0$ tal que si $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ es acotada y tiene constante de Lipschitz menor que ϵ entonces A y $A + g$ son conjugados por el Teorema 1.1.1.

Por otra parte, escribimos $f(x) = Ax + \phi(x)$, donde ϕ es C^1, $\phi(0) = 0$ y $D\phi_0 = 0$. Luego, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| \leq \delta$ entonces $\|\phi(x)\| \leq \frac{\epsilon}{8}\|x\|$ y $\|D\phi_x\| < \frac{\epsilon}{2}$. Consideremos una función "chichón"$\rho : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \rho(x) \leq 1$, $\rho(x) = 1$ si $\|x\| \leq \delta/2, \rho(x) = 0$ si $\|x\| \geq \delta$ y $\|\nabla\rho(x)\| \leq \frac{4}{\delta}$.

Sea $G(x) = Ax + \rho(x)\phi(x)$. Resulta que $G(x) = f(x)$ si $\|x\| \leq \delta/2$ y $\sup\{\|G(x) - Ax\| : x \in \mathbb{R}^k\} < \infty$. Por otra parte $DG_x - A = \rho(x)D\phi_x + \phi^T.\nabla\rho(x)$ que es idénticamente nulo si $\|x\| \geq \delta$ y cuando $\|x\| \leq \delta$ tenemos:

$$\|DG_x - A\| \leq |\rho(x)|\|D\phi_x\| + \|\phi(x)\|\|\nabla\rho(x)\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{8}\|x\|\frac{4}{\delta} \leq \epsilon.$$

En consecuencia $g = G - A$ tiene constante de Lipschitz menor que ϵ y concluimos que existe $H : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ homeomorfismo tal que $H \circ G = A \circ H$. Tomemos $U = B(0, \delta/2)$, $V = H(U)$ y $h = H_{/U}$. Como $G = f$ en U concluimos que $h \circ f = A \circ h$ como queríamos. □

Corolario 1.2.1. *Sea p punto fijo hiperbólico de f. Entonces, existe U_p entorno de p tal que si $f^n(x) \in U_p$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ entonces $x = p$. En particular p es el único punto fijo de f en U_p.*

Los siguientes conjuntos juegan un papel fundamental en la teoría de sistemas dinámicos.

Definición 1.2.2. *Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo y $x \in M$. Se define el conjunto estable de x como*

$$W^s(x) = \{y \in M : dist(f^n(y), f^n(x)) \to_{n \to +\infty} 0\}$$

y el inestable como

$$W^u(x) = \{y \in M : dist(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) \to_{n \to +\infty} 0\}.$$

Para $\epsilon > 0$ definimos el conjunto estable e inestable local (de tamaño ϵ) como

$$W^s_\epsilon(x) = \{y \in M : dist(f^n(y), f^n(x)) < \epsilon \ \forall n \geq 0\}$$
$$W^u_\epsilon(x) = \{y \in M : dist(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) < \epsilon \ \forall n \geq 0\}.$$

Como consecuencia inmediata del Teorema de Hartman 1.2.1 tenemos:

Corolario 1.2.2. *Sea $f : M \to M$ difeomorfismo y $p \in M$ un punto fijo hiperbólico. Existe $\epsilon > 0$ tal que:*

1. *$W^s_\epsilon(p) \subset W^s(p)$ y $W^u_\epsilon(p) \subset W^u(p)$.*
2. *$W^s_\epsilon(p)$ (respec. $W^u_\epsilon(p)$) es una subvariedad topológica de la misma dimension que el espacio estable (respect. inestable).*
3. *$W^s(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W^s_\epsilon(p))$ y $W^u(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W^u_\epsilon(p))$ y son subvariedades topológicas inmersas en M.*

Demostración: Queda como ejercicio. □

En realidad, vale el siguiente teorema cuya demostración omitiremos (ver también Sección 2.3).

Teorema 1.2.2 (Teorema de la variedad estable)**.** *Sea $f : M \to M$ difeomorfismo C^r y $p \in M$ un punto fijo hiperbólico, $T_pM = E^s \oplus E^u$ su descomposición en subespacios estable e inestable de Df_p. Entonces $W^s(p)$ y $W^u(p)$ son subvariedades inmersas de clase C^r tangentes en p a E^s y E^u respectivamente.*

Hagamos ahora una clasificación de los puntos fijos o periódicos según su comportamiento lineal.

Definición 1.2.3. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y $p \in M$ un punto fijo (periódico) hiperbólico $T_pM = E^s \oplus E^u$ su descomposición en subespacios estable e inestable de Df_p. Decimos que p es:*

- *atractor si $E^s = T_pM$ (y por lo tanto $E^u = \{0\}$).*
- *repulsor si $E^u = T_pM$ (y por lo tanto $E^s = \{0\}$).*
- *silla si $\{0\} \neq E^s \neq T_pM$ (y por lo tanto lo mismo ocurre con E^u). En este caso definimos el índice de p como $dim E^s$.*

Observación 1.2.1. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y $p \in M$ un punto fijo hiperbólico.*

- *Si p es atractor $\implies$ $W^s(p)$ es un abierto que contiene a p y $W^u(p) = \{p\}$.*
- *Si p es repulsor $\implies$ $W^u(p)$ es un abierto que contiene a p y $W^s(p) = \{p\}$.*

Veamos ahora que los puntos fijos (o periódicos de período k) hiperbólicos de f persisten por pequeñas perturbaciones de f y además "varían continuamente".

Teorema 1.2.3. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y sea p un punto fijo (periódico de período k) de f. Entonces existe un entorno U_p de p, un entorno $\mathcal{V}(f)$ de f en $Diff^1(M)$ y una función continua $\phi : \mathcal{V}(f) \to U_p$ tal que $\phi(g) = p_g$ es el único punto fijo (periódico de período k) en U_p.*

Demostración: Como se trata de un problema local, mediante cartas locales, supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $p = 0 = f(0)$. Sea $\mathcal{V}_1(f)$ entorno de f tal que podemos definir $\Gamma : \mathcal{V}_1(f) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por $\Gamma(g, x) = g(x) - x$. Ahora $\Gamma(f, p) = 0$ y $\partial_2(f, p) = Df_p - Id$. Por lo tanto podemos aplicar el teorema de la función implícita y obtenemos un entorno U_p de p, un entorno $\mathcal{V}(f)$ y una función continua (de hecho diferenciable) $\phi : \mathcal{V}(f) \to U_p$ tal que

$$\{(g, x) \in \mathcal{V}(f) \times U_p : \Gamma(g, x) = 0\} = \{(g, \phi(g)) : g \in \mathcal{V}(f)\}.$$

□

Observamos que se puede hacer un argumento topológico para probar el resultado (sin usar el Teorema de la función implícita) mediante el uso de la noción de índice de p respecto de f.

El siguiente teorema, que no demostraremos, nos dice que es frecuente que los puntos periódicos sean hiperbólicos:

Teorema 1.2.4 (Kupka-Smale [K][S1])**.** *Existe un conjunto residual $\mathcal{R}$ en $Diff^r(M)$ tal que si $f \in \mathcal{R}$ entonces:*

1. *Todo punto periódico de f es hiperbólico.*
2. *$W^s(p)$ y $W^u(q)$ son transversales para cualquier $p, q \in Per(f)$.*

1.3. Sistemas de Anosov lineales en $\mathbb{T}^n$.

Consideremos $A \in SL(n, \mathbb{Z})$, es decir, una matriz con entradas enteras y determinante ± 1. Resulta que A induce un difeomorfismo en el toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$.

Definición 1.3.1. *Sea $A \in SL(n, \mathbb{Z})$ hiperbólica. El difeomorfismo inducido $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ definido por*

$$f \circ \Pi = \Pi \circ A$$

donde $\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ es la proyección canónica es llamado difeomorfismo de Anosov lineal.

Los difeomorfismos de Anosov son ejemplos fundamentales en la teoría hiperbólica. Nuestro objetivo aquí es describir su riqueza dinámica.

Teorema 1.3.1. *Sea $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ un difeomorfismo de Anosov lineal. Entonces:*

1. $\overline{Per(f)} = \Omega(f) = \mathbb{T}^n$.
2. *f es transitivo y topológicamente mixing.*
3. *f es expansivo.*
4. *Para cualquier $z \in \mathbb{T}^n$, las variedades $W^s(z)$ y $W^u(z)$ son densas en $\mathbb{T}^n$.*

Demostración: Para simplificar y fijar ideas vamos a hacer la prueba en el caso $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ dado por $f \circ \Pi = \Pi \circ A$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea $q \in \mathbb{Z}$ y consideremos el conjunto $C_q = \{(m/q, n/q) : m, n \in \mathbb{Z}\}$. Es fácil ver que $A(C_q) = C_q$ y por lo tanto $f(\Pi(C_q)) = \Pi(C_q)$. Sin embargo $\Pi(C_q)$ es un conjunto finito y entonces cada punto de $\Pi(C_q)$ es periódico. Por otro lado $\bigcup_{q \in \mathbb{Z}} C_q$ es denso en $\mathbb{R}^2$ y así $\bigcup_{q \in \mathbb{Z}} \Pi(C_q)$ es denso en $\mathbb{T}^2$. Deducimos que $\overline{Per(f)} = \mathbb{T}^2$ como queríamos.

Como A es hiperbólica de entradas enteras y determinante 1 tenemos que los valores propios λ, μ de A son irracionales y $\lambda = \mu^{-1}$, $0 < |\lambda| < 1 < |\mu|$. En nuestro caso son positivos y $\lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Además concluimos que E^s y E^u (los subespacios propios asociados a λ y μ respectivamente) son rectas de pendiente irracional. Por lo tanto $\Pi(E^s)$ y $\Pi(E^u)$ son densas en $\mathbb{T}^2$. Sean U, V abiertos cualesquiera en $\mathbb{T}^2$. Luego $\Pi(E^s) \cap U \neq \emptyset$ y $\Pi(E^u) \cap V \neq \emptyset$. Sean $\tilde{U}$ y $\tilde{V}$ componentes conexas de $\Pi^{-1}(U)$ y $\Pi^{-1}(V)$ respectivamente tales que $E^s \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ y $E^u \cap \tilde{V} \neq \emptyset$. Se concluye fácilmente que existe n_0 tal que $A^n(\tilde{U}) \cap \tilde{V} \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto

$$f^n(U) \cap V \supset \Pi(A^n(\tilde{U}) \cap \tilde{V}) \neq \emptyset, \ \forall n \geq n_0$$

y f es entonces topológicamente mixing.

Veamos que f es expansivo. Consideremos ϵ_0 tal que si

$$\|x - y\| < \epsilon_0 \Longrightarrow \|Ax - Ay\| < 1/4$$

y sean $\tilde{x}, \tilde{y}$ dos puntos de $\mathbb{T}^2$ tal que

$$dist(f^n(\tilde{x}), f^n(\tilde{y})) \leq \epsilon_0 \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Fijemos $x \in \Pi^{-1}(\tilde{x})$ y para cada $n \in \mathbb{Z}$ tomemos $y_n \in \Pi^{-1}(f^n(\tilde{y}))$ tal que $\|y_n - A^n x\| \leq \epsilon_0$. Afirmamos que $y_{n+1} = Ay_n,\ n \in \mathbb{Z}$. En efecto, como $\|y_n - A^n x\| \leq \epsilon_0$ entonces $\|Ay_n - A^{n+1}x\| \leq 1/4$ y como hay un único elemento de $\Pi^{-1}(f^{n+1}(\tilde{y}))$ a distancia $1/4$ de $A^{n+1}x$ concluímos que $Ay_n = y_{n+1}$. Luego $y_n = A^n y_0,\ \forall n \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto $\|A^n x - A^n y_0\| \leq \epsilon_0\ \forall n \in \mathbb{Z}$. Por la expansividad de A deducimos $y_0 = x$ y así $\tilde{x} = \tilde{y}$.

Por último observamos que dado $x \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $\Pi(x + E^s)$ y $\Pi(x + E^u)$ son densas en $\mathbb{T}^2$. Afirmamos que

$$W^s(\Pi(x)) = \Pi(x + E^s) \quad \text{y} \quad W^u(\Pi(x)) = \Pi(x + E^u).$$

En efecto, si $y \in x + E^s$ entonces

$$\|A^n x - A^n y\| \to_{n \to +\infty} 0$$

y por lo tanto

$$dist(f^n(\Pi(x)), f^n(\Pi(y))) \to_{n \to +\infty} 0$$

y esto implica $\Pi(x + E^s) \subset W^s(\Pi(x))$ (lo cual ya implica que es densa). Por otro lado, consideremos ϵ_0 como antes y sea $\tilde{y} \in \mathbb{T}^2$ tal que $\tilde{y} \in W^s(\Pi(x))$. Existe n_0 tal que $dist(f^n(\Pi(x)), f^n(\tilde{y})) \leq \epsilon_0$, $n \geq n_0$. Para simplificar supondremos $n_0 = 0$. Sea $y_n \in \Pi^{-1}(f^n(\tilde{y}))$ tal que $\|y_n - A^n x\| \leq \epsilon_0$. Se deduce, razonando como anteriormente, que $y_{n+1} = Ay_n$. Pero entonces $\|A^n y_0 - A^n x\| \to_{n \to +\infty} 0$ y luego $y_0 \in x + E^s$. Esto concluye la demostración de $W^s(\Pi(x)) = \Pi(x + E^s)$. Análogamente se prueba que $W^u(\Pi(x)) = \Pi(x + E^u)$. □

Hemos visto entonces que los difeomorfismos de Anosov lineales presentan una dinámica rica y compleja. Veamos ahora que esta dinámica se preserva por perturbaciones C^1-pequeñas (véase la Sección 2.6).

Teorema 1.3.2 (Estabilidad estructural de Anosov lineales)**.** *Sea $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ un Anosov lineal. Existe ϵ tal que si $g : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ es un difeomorfismo ϵ-C^1 cerca de f entonces g y f son conjugados.*

Demostración: Sea $A \in SL(n, \mathbb{Z})$ e hiperbólica tal que $f \circ \Pi = \Pi \circ A$. Sea $g : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ difeomorfismo ϵ C^1-cerca de f y sea $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un levantamiento (que es de clase C^1) de g, es decir $g \circ \Pi = \Pi \circ G$. Podemos escribir $G(x) = Ax + p(x)$ donde $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es periódica en $\mathbb{Z}^n$. Resulta que $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|p(x)\| < \infty$ y $\|Dp_x\| < \epsilon$.

Por la estabilidad de $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (ver Teorema 1.1.1) concluimos que (si ϵ es suficientemente chico) existe $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $A \circ H = H \circ G$ donde $H(x)$ es el único punto de $\mathbb{R}^n$ que verifica:

$$\sup_{m \in \mathbb{Z}} \|A^m(H(x)) - G^m(x)\| < \infty.$$

Afirmamos que si $q \in \mathbb{Z}^n$ entonces $H(x+q) = H(x) + q$. En efecto, observamos que para cada n, $G^n = A^n + p_n$ donde p_n es periódica en $\mathbb{Z}^n$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} & \sup_{m \in \mathbb{Z}} \|A^m(H(x) + q) - G^m(x+q)\| = \\ = \; & \sup_{m \in \mathbb{Z}} \|A^m(H(x)) + A^m q - A^m(x+q) - p_m(x+q)\| = \\ = \; & \sup_{m \in \mathbb{Z}} \|A^m(H(x)) - G^m(x)\| < \infty \end{aligned}$$

y por unicidad $H(x+q) = H(x) + q$. Por lo tanto podemos definir $h : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ por $h(\Pi(x)) = \Pi(H(x))$. Resulta que h es un homeomorfismo y además:

$$f \circ h \circ \Pi = f \circ \Pi \circ H = \Pi \circ A \circ H = \Pi \circ H \circ G = h \circ \Pi \circ G = h \circ g \circ \Pi$$

es decir, $f \circ h = h \circ g$. □

1.4. Herradura de Smale y puntos homoclínicos

Vamos a considerar un difeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que la imagen de un cuadrado $Q = I \times I$ es como se indica en la figura 1.3, conocido como la herradura de Smale ([S2]). Este también es un ejemplo básico de dinámica hiperbólica.

Tenemos entonces dos bandas horizontales H_0 y H_1 tal que $f(Q) \cap Q = f(H_0) \cup f(H_1) = I_0 \cup I_1$ son dos bandas verticales. Supondremos que

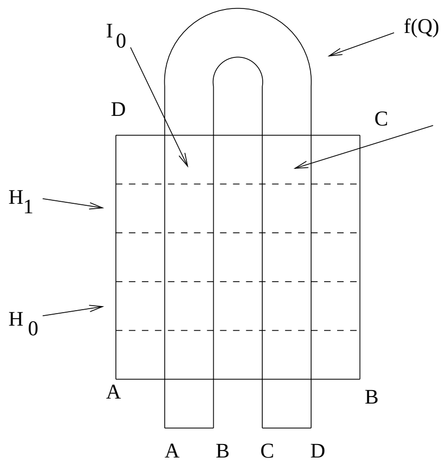


Figura 1.3:

$f_{/H_i}, i = 0, 1$ es afín. En particular, las direcciones horizontales y verticales son preservadas bajo $f_{/H_i}$ y segmentos horizontales son contraídos uniformemente y segmentos verticales son expandidos uniformemente.

Podemos observar que

$$Q \cap f(Q) \cap f^2(Q) = f(f(Q) \cap H_0) \cup f(f(Q) \cap H_1)$$

son cuatro fajas verticales. En general

$$\bigcap_{j=0}^{n} f^j(Q)$$

son 2^n fajas verticales y se concluye que

$$\bigcap_{j \geq 0} f^j(Q) = K_1 \times I$$

donde K_1 es un conjunto de Cantor en I, es decir, los puntos de Q cuya órbita pasada siempre se mantiene en Q consiste en un conjunto de Cantor de líneas verticales.

De la misma forma se prueba que

$$\bigcap_{j \geq 0} f^{-j}(Q) = I \times K_2$$

donde K_2 es un conjunto de Cantor, es decir, los puntos de Q cuya órbita futura siempre se mantiene en Q consiste en un conjunto de Cantor de líneas horizontales.

Así, el conjunto de puntos de Q cuya órbita siempre se mantiene en Q es $\Lambda = \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} f^j(Q) = K_1 \times K_2$.

Observemos lo siguiente:

- $\bigcap_{j=-m}^{m} f^j(Q)$ consiste en 4^n rectángulos cuyos diámetros convergen a cero con m.
- Sea R_m cualquiera de estos rectángulos. Entonces para cualquier $-m+1 \le j \le m-1$ se verifica que $f^j(R_m) \subset I_0$ o $f^j(R_m) \subset I_1$.
- Dados dos puntos $x \neq y$ de Λ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(x)$ y $f^n(y)$ no están a la vez en I_0 o I_1.

Consideremos $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ y $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ el shift (a la izquierda) de Bernoulli (ver A.2). Consideremos $h : \Lambda \to \Sigma$ de la siguiente manera:

$$h(x)(n) = i \text{ si } f^n(x) \in I_i,\ i = 0, 1.$$

Resulta que h es un homeomorfismo tal que $h \circ f = \sigma \circ h$. En efecto:
<u>h continua:</u> Si x, y pertenecen a un mismo rectángulo de $\bigcap_{j=-m-1}^{m+1} f^j(Q)$ entonces $h(x)(j) = h(y)(j)$, $-m \le j \le m$.
<u>h inyectiva:</u> se deduce de lo observado anteriormente
<u>h sobreyectiva:</u> Sea $\{x_n\} \in \Sigma$, entonces

$$R_m = \bigcap_{j=-m}^{j=m} f^{-j}(I_{x_j})$$

es un sucesión encajada de rectángulos cuya intersección consiste en un punto x. Se deduce que $h(x) = \{x_n\}$.

De estas propiedades y el hecho que Λ es compacto concluimos que h es un homeomorfismo. Además:

$$h(f(x))(n) = i \Leftrightarrow f^{n+1} \in I_i \Leftrightarrow i = h(x)(n+1)$$

es decir, $h \circ f = \sigma \circ h$. En conclusión, de la dinámica del shift, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.4.1. *Sea $\Lambda = \cap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(Q)$. Entonces Λ es un conjunto de Cantor y $f_{/\Lambda}$ es conjugado al shift $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ donde $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. En particular:*

1. *Los puntos periódicos son densos en Λ.*
2. *$f_{/\Lambda}$ es transitivo y topológicamente mixing.*
3. *$W^s(x) \cap \Lambda$ y $W^u(x) \cap \Lambda$ son densos en Λ para $x \in \Lambda$.*

Observación 1.4.1. *Una construcción similar y un resultado análogo puede realizarse en $\mathbb{R}^m$ con un cubo I^m.*

Definición 1.4.1. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y p un punto fijo (periódico) hiperbólico. Un punto $x \in W^s(p) \cap W^u(p)$ diferente de p se llama punto homoclínico. Se dice además que es transversal si la intersección $W^s(p) \cap W^u(p)$ es transversal en x. La órbita de un punto homoclínico (transversal) es llamada órbita homoclínica (transversal).*

Situaciones como la herradura vista anteriormente aparecen siempre que tengamos un punto homoclínico transversal (ver Capítulo 2):

Teorema 1.4.2 (Birkhoff-Smale [B][S2])**.** *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo, p un punto fijo hiperbólico y x un punto homoclínico transversal. Entonces existe $N > 0$ y un conjunto f^N invariante Λ (que contiene p y x) tal que $f^N_{/\Lambda}$ es conjugado al shift de Bernoulli (de dos símbolos).* [1]

1.5. Difeomorfismos de Anosov en $\mathbb{T}^2$.

En la Sección 1.3 estudiamos difeomorfismos de Anosov *lineales*. Ahora estudiaremos difeomorfismos de Anosov (no lineales) en $\mathbb{T}^2$, donde podemos ver algunos resultados y métodos de dinámica hiperbólica de forma mas elemental.

En esta sección estudiaremos difeomorfismos de Anosov como ejemplo base de la dinámica hiperbólica. Un difeomorfismo de Anosov en el toro es un difeomorfismo $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ tal que $T\mathbb{T}^2 = E^s \oplus E^u$ descomposición continua e invariante por Df y existen constantes $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que

[1] El conjunto Λ es además un conjunto hiperbólico (ver definición 2.0.1).

$$\|Df^n_{/E^s}\| \leq C\lambda^n; \qquad \|Df^{-n}_{/E^u}\| \leq C\lambda^n$$

Por simplicidad asumiremos que $C = 1$. El primer objetivo será mostrar que por todo punto del toro pasa una (única) variedad estable y una inestable. Decimos que E^s es integrable si para todo x existe subvariedad de dimension 1 inmersa J (que también llamaremos curva integral) tal que $x \in J$ y tal que si $y \in J$ entonces $T_yJ = E^s(y)$. Decimos que es únicamente integrable si J y W son dos curvas integrales entonces $J \cap W$ es abierto en J y en W. Observar que si J es una curva integral, también lo es $f(J)$. Además si J es un arco compacto de una curva integral, entonces $\ell(f^n(J)) \leq \lambda^n \ell(J)$ donde $\ell(J)$ denota la longitud.

Para cada $x \in \mathbb{T}^2$ tomemos $X^s(x) \in E^s$ y $X^u(x) \in E^u$ vectores unitarios. Vamos a asumir que podemos elegir estos campos unitarios tangentes de forma que varíen continuamente (aunque esto en realidad no es una restricción). Observemos que E^s es (únicamente) integrable si $\dot{x} = X^s(x)$ tiene solución (única).

Teorema 1.5.1. *E^s y E^u son únicamente integrables.*

Observemos que por el Teorema de Peano los campos X^sy X^u son integrables (y por lo tanto E^sy E^u son integrables). Debemos mostrar solamente la unicidad. Y este es un problema de unicidad local.

Para cada $x \in \mathbb{T}^2$ denotaremos por $R_\epsilon(x)$ al conjunto (identificado via el mapa exponencial) $B^s_\epsilon(x) \times B^u_\epsilon(x)$ donde $B^j_\epsilon(x)$ es una bola de radio ϵ en $E^j(x), j = s, u$ centrada en $0 \in T_x\mathbb{T}^2$ Denotaremos por $\partial^s R_\epsilon(x)$ a $\{\pm\epsilon\} \times B^u_\epsilon$. Análogamente $\partial^u R_\epsilon(x)$. Si $y \in R_\epsilon(x)$ denotaremos por $J^s_\epsilon(y)$ a la componente conexa de la curva integral por y de X^s intersección R_ϵ que contiene a y. Y de forma análoga J^u. Los siguientes lemas son consecuencia inmediata de la continuidad e invariancia de E^s y E^u, y que el ángulo entre ellos está uniformemente acotado por debajo (lejos de 0).

Lema 1.5.1. *Para todo ϵ suficientemente chico existe δ tal que si $y \in R_\delta(x)$ entonces $J^s_\epsilon(y) \cap \partial^u R_\epsilon = \emptyset$ y $J^s_\epsilon(y)$ interseca ambas componentes de $\partial^s R_\epsilon$. Análogamente para $J^u_\epsilon(y)$.*

Lema 1.5.2. *Dado ϵ existe δ tal que si $w \in J^u_\epsilon(y))$ y $w, y \in R_\delta(x)$ entonces existe curva integral de E^u por $f(y)$ tal que $f(w) \in J^u_\epsilon(f(y))$ (con respecto a $R_\epsilon(f(x)$.)*

Ahora estamos en condiciones de demostrar la unicidad. Supongamos que no es (localmente) únicamente integrable. Supongamos por absurdo que existen dos curvas integrales locales de E^s por x. Como el conjunto donde ellas coinciden es cerrado, el complemento es abierto y luego podemos tomar z un punto del borde de una componente conexa. Se concluye que por z tenemos dos curvas integrales también.

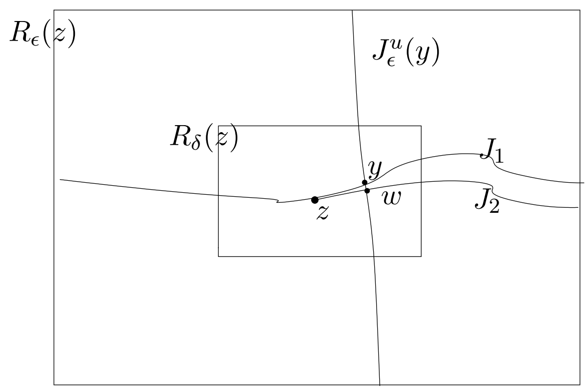


Figura 1.4:

Sea ϵ suficientemente chico y sea δ como en los lemas previos. Sean $J_1 = J^s_{\epsilon,1}(z)$ y $J_2 = J^s_{\epsilon,2}(z)$ las dos curvas integrales. Por lo anterior existen $y \in J_1$, $w \in J_2, y \neq w$ tales que $y, w \in R_\delta(z)$ y $w \in J^u_\epsilon(y)$ (ver Figura 1.4). Luego, como tanto y y w están en curvas integrales de E^s por z concluimos que $f^n(y), f^n(w) \in R_\delta(f^n(z))$ y aplicando el segundo lema inductivamente concluimos que $f^n(w) \in J^u_\epsilon(f^n(y))$. Pero entonces:

$$d(y,w) = d(f^{-n}(f^n(y)), f^{-n}(f^n(w))) \leq \lambda^n \ell(J^u_\epsilon(f^n(y))) \leq \lambda^n 4\epsilon \to 0$$

y por lo tanto $y = w$ lo cual es una contradicción.

Observación 1.5.1. *Un razonamiento análogo al anterior muestra que si $f^n(y) \in R_\delta(f^n(x))$ para todo $n \geq 0$ entonces $y \in J^s_\delta(x)$.*

Denotaremos por $W^s(x)$ la curva integral maximal de E^s por x. Análogamente $W^u(x)$. También denotemos por $W^s_\epsilon(x)$ la curva integral de E^s por x de longitud 2ϵ centrada en x. Tenemos entonces el siguiente:

Corolario 1.5.1. *Sea $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ un difeomorfismo de Anosov. Entonces:*

1. $W^s(x) = \{y : d(f^n(y), f^n(x)) \to_{n\to+\infty} 0\}$.
2. *Si ϵ es suficientemente chico entonces*
$$W^s_\epsilon(x) = \{y : d(f^n(x), f^n(y) < \epsilon, n \geq 0\}$$
3. $W^s(x) = \cup_{n\geq 0} f^{-n}(W^s_\epsilon(f^n(x)$.
4. $W^s_\epsilon(x)$ *es un subvariedad encajada y W^s es una subvariedad inmersa.*

Análogamente para $W^u(x)$.

Otra consecuencia interesante de lo anterior es la estructura de producto local:

Corolario 1.5.2. *Existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{T}^2$ existe $h : [-\delta, \delta]^2 \to \mathbb{T}^2$ que es un homeomorfismo sobre su imagen y tal que $h(., t) \subset W^s_\epsilon(h(0, t))$ y $h(r, .) \subset W^u_\epsilon(h(r, 0)$ y $h(0, 0) = x$.*

Demostración: Basta considerar $h(r, t) = J^s_\epsilon(0, t) \cap J^u_\epsilon(r, 0)$ via la identificación hecha anteriormente en $R_\delta(x)$. Esta función h esta bien definida, es continua e inyectiva y (por invariancia del dominio) homeomorfismo sobre su imagen. □

Haciendo abuso de notación, denotaremos este entorno con producto local por $R_\delta(x) \simeq W^s_\delta(x) \times W^u_\delta(x)$. Denotaremos por π^sy π^u las proyecciones a lo largo de la foliación estable e inestable respectivamente en $R_\delta(x)$. Ahora analizaremos las consecuencias dinámicas de lo hecho hasta ahora.

Teorema 1.5.2. *Sea $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ un difeomorfismo de Anosov. Entonces $\overline{Per(f)} = \Omega(f)$.*

Demostración: Sea $x \in \Omega(f)$ no periódico. Sea ϵ chico y sea $R_\delta(x)$ un entorno de x con estructura de producto local. Sea $\eta > 0$ tal que si $d(y, x) < \eta$ entonces $W^s_\eta(y) \subset R_\delta(x)$. Sea n_0 tal que $\lambda^n\epsilon < \eta$ si $n \geq n_0$. Como $x \in \Omega(f)$ y x no es periódico entonces existe y tal que $d(x, y) < \eta$

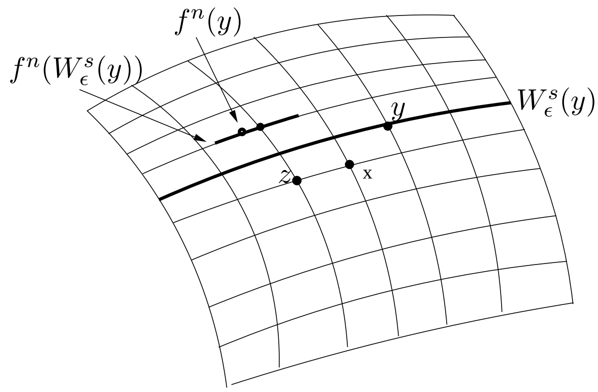


Figura 1.5:

y $d(x, f^n(y)) < \eta$ para algún $n \geq n_0$. Consideremos el siguiente mapa (ver Figura 1.5) $P : W^s_\delta(x) \to W^s_\delta(x)$ como sigue:

$$P(z) = \pi^u \circ f^n(W^u_\epsilon(z) \cap W^s_\epsilon(y)).$$

Este mapa es continuo y de un intervalo en si mismo. Luego existe z tal que $P(z) = z$. Esto significa que si $w = W^u_\epsilon(z) \cap W^s_\epsilon(y)$ entonces $f^n(w) \in W^u_\epsilon(w)$. Luego $f^{-n}(W^u_\epsilon(f^n(w))) \subset W^u_{\lambda^n\epsilon}(w) \subset W^u_\epsilon(f^n(w)$. Luego existe $p \in W^u_\epsilon(f^n(w))$ tal que $f^{-n}(p) = p$, es decir $p \in R_\delta(x)$ es periódico. $\square$

Lema 1.5.3. *Existe $p \in Per(f)$ tal que $p \neq W^s(p) \cap W^u(p)$.*

Demostración: Si $\Omega(f)$ es un conjunto infinito, el resultado se concluye por la existencia de infinitos puntos periódicos en un entorno con estructura de producto local. En efecto, sea $x \in \Omega(f)$ que es acumulado por por otros puntos de $\Omega(f)$ y sea $R_\delta(x)$ un entorno con estructura de producto local. Como $\overline{Per(f)} = \Omega(f)$ concluimos que existen $p, q \in R_\delta(x)$ periódicos. Se $z = W^s_\epsilon(p) \cap W^u_\epsilon(q) \in R_\delta(x)$. Tomemos m múltiplo de los períodos de p y q. Ahora, $f^{-km}(z) \to_k q$ y $f^{-km}(z) \in W^s(p)$ para todo $k \geq 0$. Luego, basta tomar k tal que $f^{-km}(z) \in R_\delta(x)$ y $f^{-km}(z) \notin W^s_\epsilon(p)$ pues por la estructura de producto local tenemos que $W^s_\epsilon(f^{-km}(z)) \cap W^u_\epsilon(p) \neq \emptyset$. Como $W^s_\epsilon(f^{-km}(z)) \subset W^s(p)$ concluimos.

Entonces, basta ver el caso en que $\Omega(f)$ es un conjunto finito (y de hecho el resultado muestra que esto es imposible). En este caso además $\Omega(f) = Per(f)$. Tomando una potencia de f podemos suponer que son todos fijos. Sea p_1 fijo. Si el resultado no es cierto entonces $\overline{W^u(p_1) - W^u_\epsilon(p_1)} \cap R_\delta(p_1) = \emptyset$. Por otro lado $\overline{W^u(p_1) - W^u_\epsilon(p_1)}$ es invariante en el futuro. Luego existe un punto fijo $p_2 \in \overline{W^u(p_1) - W^u_\epsilon(p_1)}$. Por la estructura de producto local concluimos $W^u(p_1) \cap W^s(p_2) \neq \emptyset$. Aplicando el mismo razonamiento para p_2 concluimos la existencia de p_3 tal que $W^u(p_2) \cap W^s(p_3) \neq \emptyset$ y también $W^u(p_1) \cap W^s(p_3) \neq \emptyset$. Razonando inductivamente, construimos una suceseción de puntos periódicos $p_i, i = 1, ...$ tal que

$$W^u(p_i) \cap W^s(p_j) \neq \emptyset \quad \text{si } i < j.$$

Como hay una cantidad finita de puntos fijos (periódicos de f) concluimos que existe $i < j$ tal que $p_i = p_j$ de donde concluimos el resultado.

$\square$

Ejercicio 1.5.1. *Probar que si $x \in W^s(p) \cap W^u(p)$ entonces $x \in \Omega(f)$.*

Teorema 1.5.3. *Sea $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ difeomorfismo de Anosov. Entonces $\Omega(f) = \mathbb{T}^2$. Además $W^s(x)$ y $W^u(x)$ son densas en $\mathbb{T}^2$ para cualquier x.*

Demostración: Orientemos la foliación estable según la dirección del campo X^s y lo mismo con la foliación inestable. Sea p como en el lema anterior y que lo supondremos fijo (tomando una potencia de f si es necesario). Sea $R_\delta(p)$ entorno con estructura de producto local de p. Consideremos la primera vez que la variedad estable de p retorna a $R_\delta(p)$. Podemos entonces considerar una curva simple cerrada $\mathcal{C} = [p,q]^s \cup \ell$ donde $[p,q]^s \subset W^s_K(p)$ es un arco dentro de la variedad estable de p y ℓ es un arco que une q con p y contenido en $\mathbb{R}_\delta(p)$. Podemos hacer esto de forma que la foliacion inestable sea transversal a $\mathcal{C}$. Como no hay variedades inestables cerradas concluimos (por Poincare-Bendixon) que existe L tal que $W^u_L(x) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ para cualquier x. Pero si $W^u_L(x) \cap \ell$ entonces $W^u_{L+\epsilon} \cap W^s_{K+\epsilon}(p) \neq \emptyset$. Por comodidad, hacemos $L = L + \epsilon$ y $K = K + \epsilon$. Probemos ahora que $W^s(p)$ es densa en $\mathbb{T}^2$. Sea U un abierto cualquiera y sea $y \in U$. Sea η tal que $W^u_\eta(y) \subset U$. Consideremos n tal que $\lambda^n L < \eta$. Luego, tomando $x = f^n(y)$ sea $w \in W^u_L(x) \cap W^s_K(p)$. Luego, $f^{-n}(w) \in W^u_\eta(y) \subset U$ y $w \in W^s(p)$.

De forma análoga se prueba que $W^u(p)$ es densa en $\mathbb{T}^2$. Por lo tanto $W^s(p) \cap W^u(p)$ es denso en $\mathbb{T}^2$ y se concluye que $\Omega(f) = \mathbb{T}^2$.

Probemos ahora que cualquier variedad inestable es densa. Para ello volvamos a considerar la curva $\mathcal{C}$ cerrada transversal a la foliacion estable. Tenemos $P : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ el mapa del primer retorno según la orientación dada por X^u. Luego, P es un homeomorfismo del circulo que preserva orientación. Como $W^u(p)$ es densa en $\mathbb{T}^2$ concluimos que P tiene una orbita densa. Pero entonces P es conjugado a una rotación irracional y por lo tanto toda orbita es densa. De aquí se concluye que toda hoja inestable es densa en el toro. $\square$

Teorema 1.5.4. *Sea $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ un difeomorfismo de Anosov. Entonces:*

1. *Existe $A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ Anosov lineal tal que f es conjugado a A.*
2. *f es estructuralmente estable (y Ω-estable.)*

Demostración: Denotemos por $F = A + p$ el levantamiento de f a $\mathbb{R}^2$ donde $A \in SL(2,\mathbb{Z})$ y p es $\mathbb{Z}^2$ periódica. Sean $\tilde{W}^s, \tilde{W}^u$ los levantamientos de la foliacion estable e inestable respectivamente. Denotemos por D^s la distancia a lo largo de $\tilde{W}^s$ de dos puntos que estén sobre la misma hoja estable. Veamos que existe $C, E > 0$ tal que $D^s(x,y) \leq Cd(x,y) + E$. Sea $\mathcal{C}$ una curva simple cerrada en $\mathbb{T}^2$ transversal a la foliacion estable. Observemos que $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ es una colección discreta de curvas (que separan $\mathbb{R}^2$), sea D la minima distancia entre dos distintas de ellas y sea

$$\rho = \text{máx}\{D^s(x,y) : x, y \in \pi^{-1}(\mathcal{C}), (x,y)^s \cap \pi^{-1}(\mathcal{C}) = \emptyset.$$

Sean ahora dos puntos x, y que pertenecen a una misma hoja estable, $y \in \tilde{W}^s(x)$. Sea n el numero de cortes que tiene $[x,y]^s \cap \pi^{-1}(\mathcal{C})$. Luego

$$D^s(x,y) \leq (n+1)\rho \leq \frac{\rho}{D}(n-1)D + 2\rho \leq \frac{\rho}{D}d(x,y) + 2\rho = Cd(x,y) + E.$$

Obviamente tenemos un resultado análogo para D^u. Probemos ahora que A es hiperbólica. Basta mostrar que A tiene un valor propio de módulo mayor que uno. Supongamos que no. Sea $\mu < \lambda^{-1}$. Entonces

$$limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}log\|A^n\| \leq 1$$

Luego, existe n_0 tal que $\|A^n\| \leq \mu^n$. Por otra parte $F^n = A^n + p_n$ con $p_n = \Sigma_{j=0}^{n_1} A^j p(F^{n-1-j})$. Ahora, si x, y están en una misma hoja inestable, entonces

$$d(F^n(x), F^n(y)) < (K_0 + K_1\mu^n)\, d(x, y).$$

Pero por otra parte tenemos que

$$d(F^n(x), F^n(y)) \geq \frac{1}{C} D^u(F^n(x), F^n(y)) - \frac{E}{C} \geq \frac{\lambda^{-n}}{C} D^u(x, y) - \frac{E}{C}.$$

Si n es grande obtenemos una contradicción.

Luego A es hiperbólica y concluimos que F es semiconjugado a A (ver Teorema 1.1.1 y Observación 1.1.1). Es decir $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continua y sobre tal que $H \circ F = A \circ H$ y sabemos que $\|H - Id\| \leq K$ para algún $K > 0$. Para ver que es conjugado basta ver que F tiene constante de expansividad infinita. Observemos que $H(\tilde{W}^s(x)) \subset E^s_A(H(x))$. Además H es inyectiva en cada hoja estable. Concluimos así que $\tilde{W}^s(x)$ esta en una banda de ancho K con respecto a $E^s_A(H(x))$. Análogamente para las hojas inestables. Luego concluimos que hay estructura de producto global y F tiene constante de expansividad infinita. Esto muestra que A y F son conjugados, y por lo tanto A y f son conjugados en $\mathbb{T}^2$. Por otra parte, si g esta C^1 cerca de f entonces g es Anosov y también es isotópico a A. Luego g y A son conjugados y por lo tanto g y f son conjugados, es decir, f es estructuralmente estable.

□

1.6. Ejercicios

1. Dibujar las trayectorias de un isomorfismo lineal hiperbólico $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ discutiendo seguún los valores propios.

2. Sea $\mathcal{L} = \{A \in GL_n(\mathbb{R}^n) : A \text{ hiperbólica}\}$. Probar que $\mathcal{L}$ es abierto y denso en $GL_n(\mathbb{R}^n)$.

3. *a*) Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hiperbólica con $E^s_A = \mathbb{R}^n$. Probar que existe $\delta > 0$ tal que si $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal con $\|B - A\| < \delta$ entonces A y B son conjugadas. (sug: son localmente conjugadas).

   b) Sean A, B dos transformaciones lineales hiperbólicas en $\mathbb{R}^n$ tales que $E^s_A = E^s_B = \mathbb{R}^n$. Probar que A y B son conjugadas sii $\det(A) = \det(B)$. (Sug: $\{A \in GL_n$ hiperbólica$\}$ tiene solamente dos componentes arcoconexas.)

c) Enunciar y demostrar una condición necesaria y suficiente para que dos transformaciones lineales hiperbólicas de $\mathbb{R}^n$ sean conjugadas.

4. *a*) Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal. Probar que A es hiperbólica sii $\omega(x) = 0$ o $\omega(x) = \emptyset$ para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$.

   b) Dar un ejemplo de una transformación lineal $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que tenga una orbita recurrente no periódica.

5. Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y $p \in M$ un punto fijo hiperbólico. Probar que dado $N > 0$ existe un entorno $V(p)$ tal que si $q \in V$ es un punto periódico distinto de p entonces su período es mayor que N.

Capítulo 2

Dinámica Hiperbólica

En este capítulo haremos un breve recorrido por algunos resultados principales de esta teoría. Nuestro objetivo principal es presentar dos resultados: el teorema de descomposición espectral y un resultado de Ω-estabilidad. Como no pretendemos hacer una exposición detallada de la teoría, algunos resultados serán enunciados sin demostración. El lector interesado podrá consultar por ejemplo [Sh], [KH] y las referencias allí incluidas. En lo que sigue M siempre denotará una variedad riemanniana compacta, conexa y sin borde.

Definición 2.0.1. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo. Un conjunto compacto e invariante Λ se dice que es hiperbólico si para cada $x \in \Lambda$ existen subespacios $E^s(x) \subset T_xM$ y $E^u(x) \subset T_xM$ que verifican:*

1. $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$.
2. $Df_x(E^s(x)) = E^s(f(x))$ *y* $Df_x(E^u(x)) = E^u(f(x))$.
3. *Existen constantes* $C > 0$ *y* $0 < \lambda < 1$ *tal que*

    a) $\|Df_x^n v\| \leq C\lambda^n \|v\| \ \forall v \in E^s(x)$ *y* $n \geq 0$.

    b) $\|Df_x^{-n} v\| \leq C\lambda^n \|v\| \ \forall v \in E^u(x)$ *y* $n \geq 0$.

Ejercicio: Probar que si Λ es hiperbólico y $v^s \in E^s, v^u \in E^u$ entonces para $n \geq 0$ se tiene

$$\|Df^{-n}v^s\| \geq \frac{1}{C}\lambda^{-n}\|v^s\| \quad \text{y} \quad \|Df^n v^u\| \geq \frac{1}{C}\lambda^{-n}\|v^u\|$$

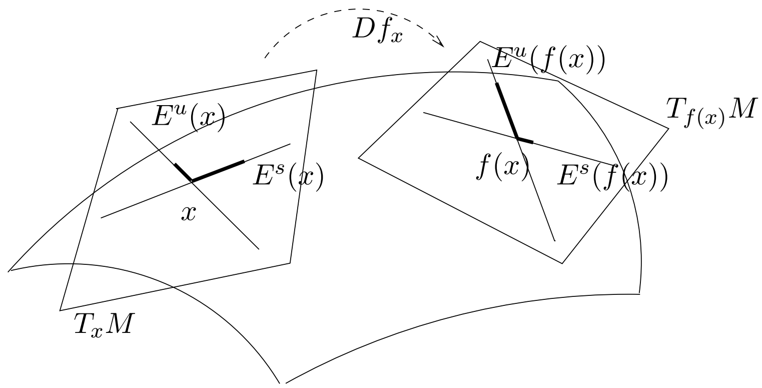


Figura 2.1: hiperbolicidad

En particular para todo $v \neq 0$, $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|Df^n v\| = \infty$.

Muchas veces se incluye la continuidad de los subespacios $E^s(x)$ y de $E^u(x)$ (con respecto a x) en la definición de hiperbolicidad pero de hecho esto no es necesario.

Lema 2.0.1. *Sea Λ un conjunto hiperbólico para un difeomorfismo $f : M \to M$. Entonces, los subespacios $E^s(x)$ y $E^u(x)$ varían continuamente con x.*

Demostración: Sea $x \in \Lambda$ y sea $x_n \in \Lambda$ una sucesión tal que $x_n \to x$. Queremos probar que $E^s(x_n) \to E^s(x)$. Podemos extraer una subsucesión x_{n_k} tal que $dim E^s(x_{n_k}) = j$ para algún j. Sea $\{v_k^1, ...v_k^j\}$ una base ortonormal de $E^s(x_{n_k})$ y $\{v_k^{j+1}, ...v_k^n\}$ una base ortonormal de $E^u(x_{n_k})$. Podemos suponer (tomando una subsucesión si fuera necesario) que $v_k^i \to_k v^i$ y por lo tanto $\{v^1, ..., v^j\}$ y $\{v^{j+1}, ..., v^n\}$ son conjuntos ortonormales de T_xM. Sea $E =< v^1, ..., v^j >$ y $F =< v^{j+1}, ..., v^n >$. Ahora, si $v \in E, \|v\| = 1$ entonces $\|Df_x^m v\| \leq C\lambda^m$ para $m \geq 0$. De hecho, podemos elegir $v_k \in E^s(x_{n_k}), \|v_k\| = 1$ tal que $v_k \to v$. Luego, fijado $m \geq 0$ se tiene que

$$\|Df_x^m v\| = \lim_k \|Df_{x_{n_k}}^m v_k\| \leq C\lambda^m.$$

Esto muestra que $E \subset E^s(x)$. Análogamente $F \subset E^u(x)$. En particular $E \cap F = \{0\}$ y por lo tanto $E = E^s(x), F = E^u(x)$. Hemos probado que cualquier subespacio límite de $E^s(x_n)$ y de $E^u(x_n)$ necesariamente son $E^s(x)$ y $E^u(x)$. $\square$

Como consecuencia inmediata de la continuidad de los subespacios se tiene el siguiente

Corolario 2.0.1. *Sea Λ un conjunto hiperbólico. Entonces la dimensión de los espacios $E^s(x)$ y $E^u(x)$ es localmente constante.*

Como ejemplos básicos de conjuntos hiperbólicos ya vimos los difeomorfismos de Anosov lineales y la herradura de Smale.

Similar que en el caso lineal (ver Lema 1.1.3), se puede conseguir una métrica adaptada:

Ejercicio 2.0.1. *Sea $f : M \to M$ un difemorfismo y Λ un conjunto hiperbólico. Entonces, existe una norma $\|.\|_1$ (que proviene de una métrica riemanniana) tal que existe $0 < a < 1$ tal que $\|Dfv^s\| < a\|v^s\|$ si $v^s \in E^s$ y $\|Df^{-1}v^u\| < a\|v^u\|$.*

2.1. Condiciones suficientes

En general es difícil determinar si un conjunto es hiperbólico según la definición pues tendríamos que describir explícitamente sus subespacios estables e inestables. El teorema siguiente nos da una condición suficiente (y necesaria también) para que un conjunto sea hiperbólico. La idea es que haya regiones del espacio tangente con alguna propiedad de invariancia y donde tengamos contracción o expansión. Precisamos algunas nociones previamente.

Sea W un espacio vectorial con producto interno. Un *conos* en W es un conjunto C tal que existe una forma cuadrática no degenerada

$$B : W \to \mathbb{R} \quad \text{tal que } C = \{v \in W : B(v) \leq 0\}.$$

De otra forma, podemos expresar C respecto a una descomposición $W = E \oplus F$:

$$C = \{v = (v_E, v_F) : \|v_E\| \leq a\|v_F\|\}$$

para algún $a > 0$ (en este caso $B(v) = -a^2\|v_F\|^2 + \|v_E\|^2$.). La dimensión de un cono C es la máxima dimensión entre todos los subespacios contenidos en C. Analogamente, la dimensión de una forma cuadrática es la máxima dimensión entre todos los subespacios contenidos en $B \leq 0$. Si Λ es un conjunto, una familia de conos en Λ es una asociación para cada $x \in \Lambda$ de un cono C_x en T_xM. Una forma cuadrática B en Λ es una asociación para cada $x \in \Lambda$ de una forma cuadrática $B_x : T_xM \to \mathbb{R}$. El pull-back de B se define como $f^\sharp(B)_x(v) = B_{f(x)}(Df_x v)$.

El siguiente teorema nos da dos condiciones necesarias y suficientes para que un conjuntos sea hiperbólico. La primera, debida a [L1], es una condición dinámica (una forma cuadrática que crece a lo largo de trayectorias del diferencial Df) y la otra, es una condición mas geométrica en términos de conos.

Teorema 2.1.1. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y Λ un conjunto compacto invariante. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *Λ es hiperbólico.*
2. *Existe B forma cuadrática continua y no degenerada en Λ cuya dimensión es constante a lo largo de las órbitas y tal que $f^\sharp B - B$ es definida positiva.*
3. *Existen dos familias de conos C^s y C^u en Λ con dimensiones complementarias y dimensión constante a lo largo de las órbitas tales que:*
   a) *$Df_x C^u_x \subset C^u_{f(x)}$ y $Df_x^{-1} C^s_x \subset C^s_{f^{-1}(x)}$.*
   b) *Existe $\sigma > 1$ y $m > 0$ tal que $\|Df^m v\| \geq \sigma \|v\|$ si $v \in C^u$ y $\|Df^{-m} v\| \geq \sigma \|v\|$ si $v \in C^s$.*

Demostración: $1 \Rightarrow 2$. Sea Λ hiperbólico. Sea m tal que $C\lambda^m < 1/5$. Observemos que si $v \in E^s_x$ entonces $\|Df^{-m}v\| \geq 5\|v\|$ y si $v \in E^u$ entonces $\|Df^m v\| \geq 5\|v\|$. Afirmamos que para cualquier $v \neq 0$ vale que:

$$\|Df^{-m}v\|^2 - 2\|v\|^2 + \|Df^m v\|^2 > 0. \tag{2.1}$$

En efecto, escribimos $v = v^s + v^u$. Supongamos que $\|v^s\| \geq \|v^u\|$. Luego

$$\begin{aligned}
\|Df^{-m}(v^s + v^u)\| &\geq \|Df^{-m}v^s\| - \|Df^{-m}v^u\| \\
&\geq (5 - 1/5)\|v^s\| \geq 4\|v^s\| \\
&\geq 2\|v\|.
\end{aligned}$$

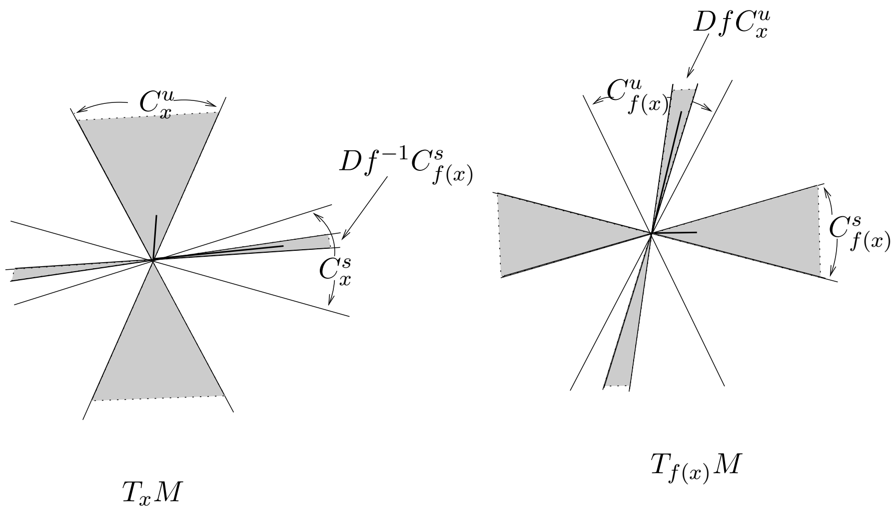


Figura 2.2: Hiperbolicidad via conos

Una desigualdad igual vale si $\|v^s\| \le \|v^u\|$. De aquí se concluye (2.1). Definamos

$$B_x(v) = \sum_{j=0}^{m-1} \|Df_x^j v\|^2 - \sum_{j=-m}^{j=-1} \|Df_x^j v\|^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{j=m} \|Df^m Df^{-j} v\|^2 - \|Df_x^{-j} v\|^2. \tag{2.2}$$

Vemos que

$$(f^\sharp B - B)_x(v) = \|Df^{-m}v\|^2 - 2\|v\|^2 + \|Df^m v\|^2$$

y por (2.1) es definida positiva. Claramente B es continua. De (2.2) deducimos que

$$v^s \in E^s, v \neq 0 \Longrightarrow B(v^s) < 0, \quad v^u \in E^u, v \neq 0 \Longrightarrow B(v) > 0. \tag{2.3}$$

Como E^s y E^u son invariantes y complementarios concluimos que la dimensión de B es constante a lo largo de las órbitas. Además esto implica que B es no degenerada. En efecto, sea $B(v, w)$ forma bilineal simétrica asociada, y supongamos que para algún x existe v tal que $B(v,w)=0$ para todo $w\in T_xM$. Escribimos $v=v^s+v^u$. Luego $B(v^s,v^u)=-B(v^s,v^s)=-B(v^u,v^u)$. Por (2.3) tenemos $B(v^s)\le 0\le B(v^u)$ y concluimos que ambos son 0 y que $v^s=v^u=0$.

$2\Rightarrow 3$. Definimos

$$C^s_x=\{v: B_x(v)\le 0\} \quad \text{y } C^u_x=\{v: B_x(v)\ge 0\}.$$

Como B es no-degenerada, estos conos tienen dimension complementaria y además dimensión constante a lo largo de las órbitas. Como $f^\sharp B-B$ es definida positiva, si

$$v\in C^u_x \implies B_{f(x)}(Df_xv)\ge B_x(v)\ge 0$$

y por lo tanto $Df_xC^u_x\subset C^u_{f(x)}$. Análogamente, si

$$v\in C^s_x \implies 0\ge B_x(v)\ge B_{f^{-1}(x)}(Df_x^{-1}v)$$

y por lo tanto $Df_x^{-1}C^s_x\subset C^s_{f^{-1}(x)}$. Faltaría ver item (b). Probaremos el resultado para C^u, ya que para C^s se concluye de forma similar. Observemos primeramente que, por la compacidad de Λ y la continuidad de B,

$$\text{dado } a>0\ \exists\delta>0 \text{ tal que si } B_z(w)>a \implies \|w\|^2>\delta. \tag{2.4}$$

Por otra parte como $f^\sharp B-B$ es definida positiva, existen a y b tal que

$$b\|w\|^2\ge (f^\sharp B-B)_z(w)\ge a\|w\|^2 \tag{2.5}$$

para cualquier $z\in\Lambda$ y $w\in T_zM$. Sea $\delta=\delta(a)$ según (2.4) y sea m tal que

$$\sigma^2=\frac{ma\delta}{b}>1.$$

Consideremos $x\in\Lambda$ y $v\in C^u_x$, $\|v\|=1$. Luego

$$\begin{aligned}
B_{f^j(x)}(Df^j_xv) &\ge B_{f^{j-1}(x)}(Df^{j-1}_xv)\\
&\ge \ldots\ge B_{f(x)}(Df_xv)\ge B_{f(x)}(Df_xv)-B_x(v)\\
&\ge a\|v\|^2=a
\end{aligned}$$

para cualquier $j \geq 1$. En particular, por (2.4), $\|Df^j_x v\|^2 \geq \delta$ para $j \geq 1$. Luego, usando también (2.5)

$$\begin{aligned} b\|Df^m_x v\|^2 &\geq B_{f^{m+1}(x)}(Df^{m+1}_x v) - B_{f^m(x)}(Df^m_x v) \\ &= \sum_{j=0}^{m} B_{f^{j+1}(x)}(Df^{j+1}_x v) - B_{f^j(x)}(Df^j_x v) + B_x(v) \\ &\geq \sum_{j=0}^{m} a\|Df^j_x v\|^2 \geq ma\delta \end{aligned}$$

Por lo tanto $\|Df^m_x v\|^2 > \sigma^2$. y concluimos la prueba.

$3 \Rightarrow 1$. Definimos

$$E^s(x) = \bigcap_{n\geq 0} Df^{-n}_{f^n(x)} C^s_{f^n(x)} \quad \text{y} \quad E^u(x) = \bigcap_{n\geq 0} Df^{n}_{f^{-n}(x)} C^u_{f^{-n}(x)}.$$

Obviamente $DfE^s = E^s$ y $DfE^u = E^u$. Afirmamos que existen $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que si $v \in E^s_x$ entonces $\|Df^n_x v\| \leq C\lambda^n$ si $n \geq 0$. En efecto, sea $n \geq 0$ y escribimos $n = km + r$ con $0 \leq r < m$. Sea $C_1 = \inf_{x\in M}\{\min \|Df^{-r}_x w\|/\|w\| : 0 \leq r < m\}$. Como $w = Df^n v \in C^s_{f^n(x)}$ y por la invariancia de los conos concluimos que

$$\begin{aligned} \|v\| = \|Df^{-n}_{f^n(x)} w\| &= \|Df^{-r}.Df^{-km}_{f^n(x)} w\| \\ &\geq C_1\|Df^{-km}_{f^n(x)} w\| \geq C_1\sigma^k\|w\|. \end{aligned}$$

Luego

$$\|Df^n_x v\| \leq \frac{1}{C_1\sigma}(\sigma^{-\frac{1}{m}})^n\|v\|.$$

Análogamente para E^u_x. En particular $E^s \cap C^u_x = \{0\}$ y $E^u_x \cap C^s_x = \{0\}$.

Ahora, para cada n elegimos un subespacio $E_n \subset C^s_{f^n(x)}$ de dimensión máxima y sea $S_n = Df^{-n}E_n$. De forma similar, sea $F_n \subset C^u_{f^{-n}(x)}$ de dimensión máxima, y denotamos por $U_n = Df^n F_n$. Sean S y U subespacios límites de S_n y U_n respectivamente. Se tiene que $S \subset E^s$ y $U \subset E^u$. Además S y U tienen dimensiones complementarias, y $S \cap U = \{0\}$. Afirmamos que $S = E^s$ y $U = E^u$. Por absurdo, sea $v \in E^s - S$. Escribimos $v = s + u$. Luego $\|Df^n v\| \geq \|Df^n u\| - \|Df^n s\| \to_{n\to\infty} \infty$ lo cual es una contradicción. $\square$

Ejemplo: el Solenoide Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ y sea $f : D \times S^1 \to D \times S^1$ definida como

$$f(w, z) = \left(\frac{1}{8}w + \frac{1}{2}z, z^2\right).$$

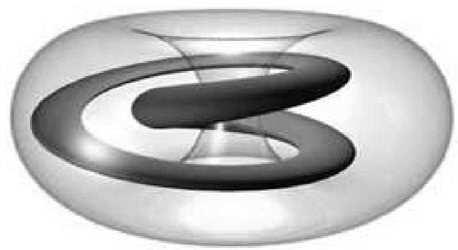


Figura 2.3: El mapa $f(w, z)$ que define el solenoide

Es claro que $f(D \times S^1) \subset Int(D \times S^1)$ y que f es diferenciable. Sea $\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^n(D \times S^1)$. Vemos que Λ es compacto e invariante. Veamos que es hiperbólico. Para $(w, z) \in D \times S^1$, identificamos $T_{(w,z)} D \times S^1 = T_w D \oplus T_z S^1 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Por otro lado $Df_{(w,z)}(u, v) = (u/8 + v/2, 2v)$. Luego $E^s_{(w,z)} = T_w D \oplus \{0\} = \mathbb{C} \times \{0\}$ es un fibrado invariante y $\|Df_{/E^s}\| = 1/8$. Por otra parte, es facil ver que $C^u = \{(u, v) : \|u\| \leq \|v\|\}$ es invariante y que $\|Df(u, v)\| \geq \sqrt{2}\|(u, v)\|$ si $(u, v) \in C^u$. Con esto concluimos que Λ es un conjunto hiperbólico.

Ejercicio 2.1.1. *Probar que en el solenoide Λ se tiene que $\overline{Per(f)} = \Lambda$.*

Las equivalencias descritas en el Teorema 2.1.1 no solo son importantes a los efectos de comprobar que cierto conjunto es hiperbólico sino que también nos permiten ver que la hiperbolicidad es una propiedad "robusta" como indica el siguiente:

Corolario 2.1.1. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y sea Λ un conjunto hiperbólico. Entonces, existe un entorno compacto U de Λ, un entorno $\mathcal{V}$ de f y una forma cuadrática continua y no degenerada B*

en U y $b > 0$ tal que si $g \in \mathcal{V}$ entonces $(g^\sharp B - B)_x v \geq b\|v\|^2$ para $x \in g^{-1}(U) \cap U$. En particular el maximal invariante $\Lambda_g := \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} g^n(U)$ de g en U es hiperbólico.

Demostración: Sea B forma cuadrática continua y no degenerada como en el Teorema 2.1.1. Podemos extender B continuamente a todo M. Ahora, existe un entorno compacto U_1 de Λ tal que B es no degenerada en U_1. Como $f^\sharp B - B$ es definida positiva en Λ podemos suponer que lo mismo sucede en U_1, en particular existe $a > 0$ tal que $(f^\sharp B - B)_x v \geq a\|v\|^2$ para cualquier $x \in U_1$. Por otra parte, existe un entorno $\mathcal{V}_1$ de la identidad tal que si $h \in \mathcal{V}_1$ entonces $(h^\sharp B - B)_x v \leq \frac{a}{4}\|v\|^2$ cualquiera sean $x, v \in T_x M$. Además, si $h \in \mathcal{V}_1$ entonces $\|Dh_x v\| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\|v\|$. Sea $\mathcal{V} = f \circ \mathcal{V}_1$. Podemos suponer $\mathcal{V}$ verifica que existe un entorno $U \subset U_1$ compacto de Λ tal que si $g \in \mathcal{V}$ entonces $g(U) \subset U_1$. Ahora sea $x \in U$ y $g = f \circ h \in \mathcal{V}$. Luego,

$$\begin{aligned} (g^\sharp B - B)_x v &= (f^\sharp B - B)_{h(x)}(Dh_x v) + (h^\sharp B - B)_x v \\ &\geq a\|Dh_x v\|^2 - \frac{a}{4}\|v\|^2 \geq \frac{a}{2}\|v\|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto eligiendo $b = a/2$ tenemos nuestra conclusión. □

2.2. Expansividad

Una propiedad característica y fundamental de los conjuntos hiperbólicos es la expansividad. Esta no dice que la dinámica en conjuntos hiperbólicos es “impredecible”, en el sentido de que es imposible predecir el comportamiento de una órbita cuando cometemos un pequeño error en la medición de la condición inicial.

Hay varias formas de probar la expansividad en un conjunto hiperbólico. Nosotros lo haremos siguiendo [L2] mediante el uso de una funcion de Lyapunov. Esta funcion crece a lo largo de pares de órbitas y son el reflejo en la variedad de la forma cuadrática.

Lema 2.2.1. *Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo y sea C un conjunto compacto. Supongamos que existe $\beta > 0$ y una función $V : \{(x, y) \in C \times C : d(x, y) \leq \beta\} \to \mathbb{R}$ continua tal que $V(x, x) = 0$ para todo $x \in C$. Sea $\Delta V(x, y) := V(f(x), f(y)) - V(x, y)$. Supongamos que existe $\alpha > 0$*

tal que $\Delta V(x,y) > 0$ *si* $0 < d(x,y) \leq \alpha$. *Entonces, si* $f^n(x), f^n(y) \in C$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *y se verifica que* $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *entonces* $x = y$.

Demostración: Sean x, y como en el enunciado y supongamos que $x \neq y$. Se tiene que $V(x,y) \geq 0$ o $V(x,y) \leq 0$. Supongamos la primera desigualdad (la demostración en el otro caso es similar). Tenemos entonces que $a = V(f(x), f(y)) > V(x,y) \geq 0$. Luego, $V(f^n(x), f^n(y)) \geq a$ para $n \geq 1$. Sea $\epsilon, 0 < \epsilon < \alpha$ tal que si $d(x,y) < \epsilon$ entonces $V(x,y) < a$. Luego, tenemos entonces que $(f^n(x), f^n(y)) \geq \epsilon$ para $n \geq 1$. Sea $U = \{(z,w) \in C \times C : \epsilon \leq d(z,w) \leq \alpha\}$. Tenemos que U es compacto, y por lo tanto existe $\eta > 0$ tal que $\Delta V(z,w) > \eta$ en U. Pero entonces

$$V(f^n(x), f^n(y)) = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta V(f^j(x), f^j(y)) + V(x,y) \geq n\eta.$$

Concluimos que $V(f^n(x), f^n(y)) \to_n \infty$ pero esto es absurdo pues V esta acotada en U. $\square$

Ahora estamos en condiciones de probar la expansividad en un conjunto hiperbólico. Mas aún, probaremos que la constante de expansividad puede ser elegida uniformemente para pequeñas perturbaciones del sistema.

Corolario 2.2.1. *Sea* $f : M \to M$ *un difeomorfismo y sea* Λ *un conjunto hiperbólico. Entonces* f *es expansivo en* Λ. *Mas aún, existe* U *entorno compacto de* Λ *y* $\mathcal{V}$ *entorno de* f *y* $\alpha > 0$ *tal que si* $g \in \mathcal{V}$ *entonces* g *es expansivo con constante* α *en el maximal invariante de* g *en* U.

Demostración: Sea $U, \mathcal{V}, b$ y la forma cuadrática B como en el Corolario 2.1.1. Sea $\beta > 0$ tal que $exp_x : B(0,\beta) \to B(x,\beta)$ es un difeomorfismo para cualquier $x \in M$. Denotemos por B también la forma bilineal simétrica asociada a B y sea $C > 0$ tal que $|B_x(v,w)| \leq C\|v\|\|w\|$ cualesquiera sean x y $v, w \in T_xM$. Podemos suponer también que existe $K > 0$ tal que $\|Dg_x\| \leq K$ para $g \in \mathcal{V}$ y $x \in M$. Ahora, si $x \in M$ y $g \in \mathcal{V}$, escribimos $\tilde{g} : B(0,\beta) \subset T_xM \to T_{g(x)}M$ como $\tilde{g}(v) = exp_{g(x)}^{-1} \circ g \circ exp_x(v)$ (y podemos suponer que β es suficientemente chico como para que $\tilde{g}$ este bien definida). Ahora,

$$\tilde{g}(v) = Dg_xv + r(x,g,v) \quad \text{donde} \quad \frac{r(x,g,v)}{\|v\|} \to_{v \to 0} 0.$$

Sea $\epsilon > 0$ tal que $b - CK\epsilon - C\epsilon^2 > 0$. Podemos elegir α (y $\mathcal{V}$) tal que si $\|v\| < \alpha$ entonces $\frac{r(x,g,v)}{\|v\|} \leq \epsilon$ para $x \in M$ y $g \in \mathcal{V}$. Ahora, definimos

$$V(x,y) = B_x(exp_x^{-1}(y))$$

que esta bien definida si $d(x,y) \leq \beta$, es continua y $V(x,x) = 0$. Para concluir el corolario basta ver que si $g \in \mathcal{V}$ y $x, y \in U$ con $0 < d(x,y) < \alpha$ entonces $\Delta V_g(x,y) > 0$. Sea $v = exp_x^{-1}(y)$.

$$\begin{array}{rcl} \Delta V_g(x,y) & = & B_{g(x)}(\tilde{g}v) - B_x(v) = B_{g(x)}(Dg_x v + r(x,g,v)) - B_x(v) \\ & = & B_{g(x)}(Dg_x v) + 2B_{g(x)}(Dg_x v, r(x,g,v)) + \\ & + & B_{g(x)}(r(x,g,v) - B_x(v) \\ & \geq & b\|v\|^2 - \|v\|^2 CK\epsilon - \|v\|^2 C\epsilon^2 > 0. \end{array}$$

□

2.3. Teorema de la variedad estable

En esta sección enunciaremos (sin demostración) el teorema de la variedad estable (recordar Definición 1.2.2). Este resultado es una herramienta básica para la descripción de la dinámica de un conjunto hiperbólico. Para una estudio detallado ver [HPS].

Teorema 2.3.1 (Teorema de la variedad estable)**.** *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo C^r y Λ un conjunto hiperbólico. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para cualquier $x \in \Lambda$ se verifica:*

1. *$W^s_\epsilon(x)$ es una subvariedad encajada C^r tal que $T_x W^s_\epsilon(x) = E^s(x)$.*
2. *$W^s_\epsilon(x) \subset W^s(x)$*
3. *$W^s(x) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(W^s_\epsilon(f^n(x)))$ y es una subvariedad (inmersa) de clase C^r y varía continuamente (como subvariedades C^r y en subconjuntos compactos) con x.*

Obviamente hay un resultado análogo para W^u ya que $W^u(x,f) = W^s(x,f^{-1})$.

Observación 2.3.1. *Del teorema anterior, se deduce que existe $\delta > 0$ si $x, y \in \Lambda$ con $d(x,y) < \delta$ entonces $W^s_\epsilon(x)$ y $W^u_\epsilon(y)$ se intersectan transversalmente en un único punto.*

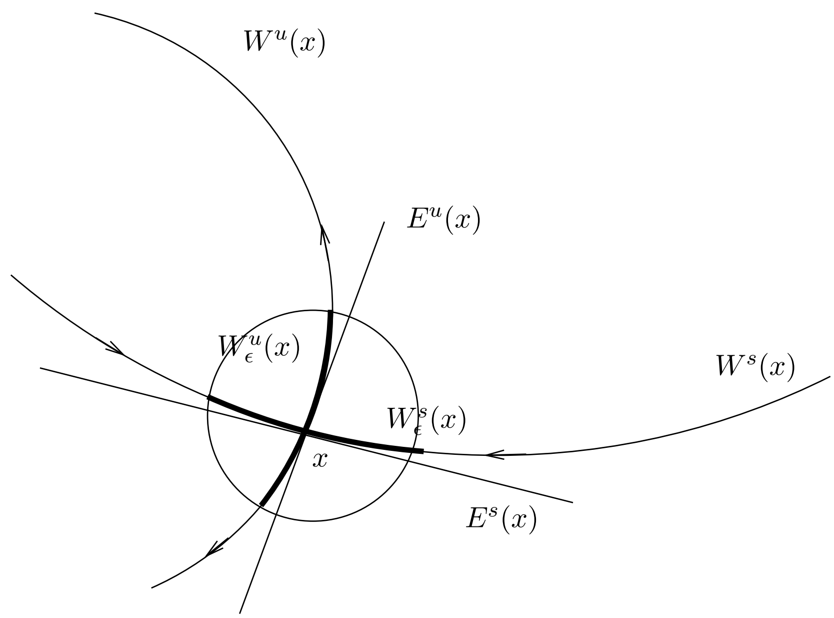


Figura 2.4: Variedades estables e inestables

El siguiente lema ([P1])es esencial para probar transversalidad bajo iteraciones. Una prueba se puede encontrar también en [PdM].

Lema 2.3.1 (Lema de inclinación o λ-lemma)**.** *Sea p un punto periódico de $f : M \to M$. Sea D^u un disco compacto en $W^u(p)$. Consideremos un punto $x \in W^s(p)$ y D un disco de igual dimension que $W^u(p)$ tal que $x \in D$ y D es transversal a $W^s(p)$ en x. Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ existe $D_n \subset D$ tal que $f^n(D_n)$ es un disco ϵ-C^1 cerca de D^u.*

Corolario 2.3.1. *Sean p, q y r tres puntos periódicos hiperbólicos de f tal que $W^u(p) \pitchfork W^s(q)$ y $W^u(q) \pitchfork W^s(r)$. Entonces $W^u(p) \pitchfork W^s(r)$.*

Demostración: Ejercicio $\square$

Definición 2.3.1. *Sea p un punto fijo hiperbólico de f. La clase homoclínica de p se define como*

$$H(p) = \overline{W^s(p) \pitchfork W^u(p)}.$$

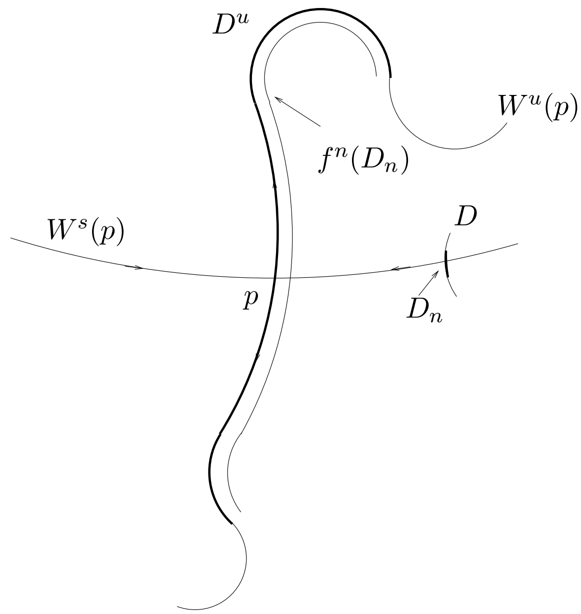


Figura 2.5: Lema de Incliniación

Proposición 2.3.1. *Sea p un punto fijo hiperbólico de f y $H(p)$ su clase homoclínica. Entonces $H(p) \subset \Omega(f)$ y es transitivo.*

Demostración: Ejercicio $\square$

Ejercicio 2.3.1. *Sea Λ el solenoide. Probar que si $x \in \Lambda$ entonces $W^u(x) \subset \Lambda$ y es densa en Λ.*

2.4. Propiedad de sombreado

En esta sección veremos que los conjuntos hiperbólicos tienen una propiedad muy fuerte y cuya idea original es debida a Bowen: toda pseudo órbita es sombreada por una órbita verdadera. Comencemos con una definición (comparar con Sección 1.1.1).

Definición 2.4.1. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y sea $\alpha > 0$. Decimos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una α-pseudo órbita (para f) si $d(f(x_n), x_{n+1}) \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Definición 2.4.2. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfimo y Λ un conjunto hiperbólico. Decimos que Λ tiene estructura de producto local, si existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in \Lambda$, $d(x, y) < \delta$ entonces $W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y) \in \Lambda$ donde ϵ es como en el teorema de la variedad estable.*

Lo importante de la definición anterior es que el punto de intersección pertenezca a Λ ya que sabemos (ver Observación 2.3.1) que variedades estables inestables locales de puntos cercanos se cortan transversalmente. La definición dice que efectivamente Λ es localmente un producto:

$$\Lambda \cap B(x, \delta) \approx W^s_\epsilon(x) \cap \Lambda \times W^u_\epsilon(x) \cap \Lambda.$$

Teorema 2.4.1 (Lema de sombreado o Shadowing Lemma)**.** *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y sea Λ un conjunto compacto hiperbólico. Entonces, dado $\beta > 0$ existe $\alpha > 0$ tal que toda α-pseudo órbita en Λ es β sombreada por una órbita (no necesariamente en Λ.) Es decir, si $\{x_n\} \subset \Lambda$ es una una α-pseudo órbita, entonces existe $y \in M$ tal que $d(f^n(y), x_n) \leq \beta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Además, si Λ tiene estructura de producto local, entonces $y \in \Lambda$.*

Demostración: Sea $\beta > 0$. Consideremos U entorno compacto de Λ tal que

$$\tilde{\Lambda} = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U)$$

sea un conjunto hiperbólico (ver Corolario 2.2.1). Podemos suponer β suficientemente chico tal que $\{y : d(y, \Lambda) \leq \beta\} \subset U$. Por simplicidad, supondremos que tenemos una métrica adaptada (es decir, la constante C en la definición de hiperbolicidad es $C = 1$, ver ejercicio 2.0.1)

Sea $\epsilon < \beta$ del teorema de la variedad estable para $\tilde{\Lambda}$. Podemos suponer que $\frac{\epsilon}{1-\lambda} < \beta$. Observemos que

$$f(W^s_\epsilon(x)) \subset W^s_{\lambda\epsilon}(f(x))$$

y que

$$f^{-1}(W^u_\epsilon(x)) \subset W^u_{\lambda\epsilon}(f^{-1}(x)).$$

Elegimos $\alpha < \epsilon$ tal que si $x, y, z \in \tilde{\Lambda}$, $d(x, y) < \alpha$ y $z \in W^s_{\lambda\epsilon}(y)$ entonces $W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(z) \neq \emptyset$ (y consiste de un solo punto claro).

Sea $\{x_n\}_{n \geq 0}$ una α-pseudo órbita positiva en Λ. Construiremos para $n \geq$ por inducción puntos $z_n \in \tilde{\Lambda}$ que verifican lo siguiente:

- $z_0 = x_0$
- Para $n \geq 1, z_n = W^s_\epsilon(x_n) \cap W^u_\epsilon(f(z_{n-1})$.

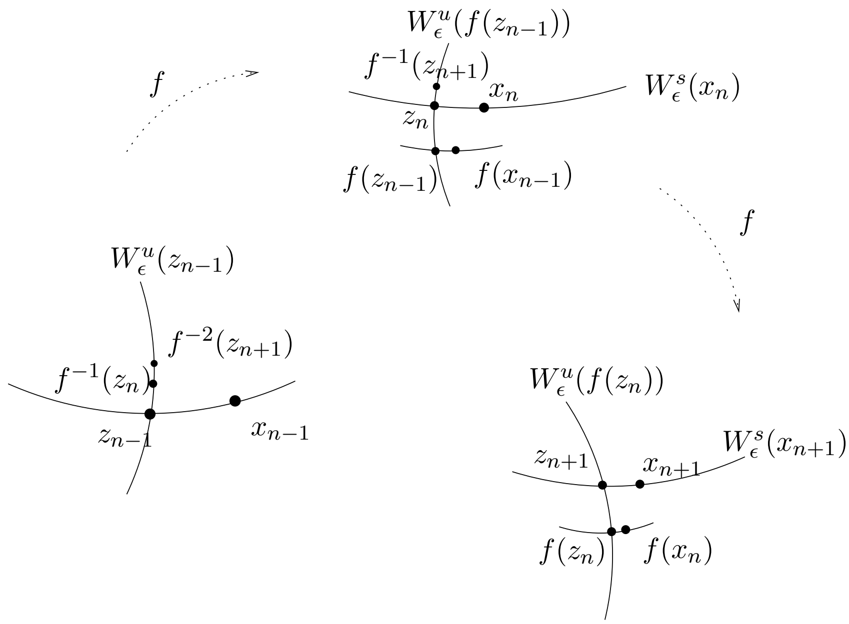


Figura 2.6: Construcción de z_n

Veamos que z_n esta bien definida. Sabemos que $z_{n-1} \in W^s_\epsilon(x_{n-1})$ y que $z_{n-1} \in \tilde{\Lambda}$. Luego $f(z_{n-1}) \in W^s_{\lambda\epsilon}(f(x_{n-1}))$ y como $d(f(x_{n-1}), x_n) < \alpha$ concluimos que $W^s_\epsilon(x_n) \cap W^u_\epsilon(f(z_{n-1})$ tiene intersección no vacía (y que llamamos z_n). Tenemos que probar que $z_n \in \tilde{\Lambda}$. Observemos primeramente que $d(f^j(z_n), f^j(x_n)) \leq \lambda^j\epsilon < \beta$ para todo $j \geq 0$. Por otra parte, para cualquier $0 \leq i \leq n$ y $j \geq 1$ se tiene que

$$d(f^{-j}(z_i), f^{-j+1}(z_{i-1})) = d(f^{-j}(z_i), f^{-j}(f(z_{i-1})) \leq \lambda^j\epsilon.$$

Entonces, si $1 \leq j \leq n$ entonces

$$\begin{aligned} d(f^{-j}(z_n), z_{n-j}) &\leq \sum_{i=0}^{i=j-1} d(f^{-j+i}(z_{n-i}), f^{-j+i+1}(z_{n-i-1})) \quad (2.6) \\ &\leq \sum_{i=0}^{i=j-1} \lambda^{j-i}\epsilon = \sum_{i=1}^{i=j} \lambda^i \epsilon \quad (2.7) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$d(f^{-j}(z_n), x_{n-j}) \leq \sum_{i=0}^{i=j} \lambda^i \epsilon < \frac{\epsilon}{1-\lambda} < \beta. \quad (2.8)$$

Además, si $j \geq n$ entonces analogamente como (2.6) concluimos que

$$\begin{aligned} d(f^{-j}(z_n), f^{-j+n}(x_0)) &= d(f^{-j}(z_n), f^{-j+n}(z_0)) \\ &\leq \sum_{i=0}^{i=n-1} d(f^{-j+i}(z_{n-i}), f^{-j+i+1}(z_{n-i-1})) \\ &< \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{j-i}\epsilon < \beta \end{aligned}$$

Luego, tenemos que $d(f^j(z_n), \Lambda) < \beta$ y por lo tanto $z_n \in \tilde{\Lambda}$. Además, si definimos $y_n = f^{-n}(z_n)$ tenemos por (2.8) que

$$d(f^j(y_n), x_j) \leq \beta \quad 0 \leq j \leq n.$$

Ahora si y es un punto de acumulación de y_n tenemos que $d(f^j(y), x_j) \leq \beta$ para todo $j \geq 0$. Es decir, dada cualquier α-pseudo órbita futura, encontramos una órbita futura que la sombrea. Finalmente, si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una α-pseudo órbita, para cada $m \geq 0$ consideremos w_m que sombrea $\{x_n\}_{n \geq -m}$. Luego, si z es un punto de acumulación de $f^m(w_m)$ tenemos que $d(f^n z, x_n) \leq \beta$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. (ver también Lema 1.1.4 donde ya hicimos este argumento).

Por último, si Λ tiene estructura de producto local, vemos por construcción que los puntos $z_n \in \Lambda$ y de aquí se concluye la última parte.

$\square$

Corolario 2.4.1. *Sea Λ un conjunto hiperbólico para f. Sea $\tilde{\Lambda}$ el maximal invariante de f en un entorno compacto (ver Corolario 2.1.1). Sea γ constante de expansividad de f en $\tilde{\Lambda}$. Entonces, si $\beta < \gamma/2$ y α es como en el teorema anterior, entonces dada una α-pseudo órbita $\{x_n\}$ en Λ existe una único $y \in \tilde{\Lambda}$ que sombrea la pseudo órbita. Además, si la pseudo órbita es periódica, la órbita por y es periódica.*

Demostración. Ejercicio □

Veamos algunas consecuencias interesantes de la propiedad del sombreado.

Definición 2.4.3. *Sea Λ un conjunto compacto invariante para f. Decimos que es invariante maximal si existe un entorno U de Λ tal que*

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U).$$

Corolario 2.4.2. *Sea Λ un conjunto hiperbólico para f. Entonces Λ es maximal invariante si y solamente si tiene estructura de producto local. En cualquier caso, si $x \in M$ verifica que $\omega(x) \subset \Lambda$ entonces $x \in W^s(y)$ para algún $y \in \Lambda$.*

Demostración: Supongamos que Λ es maximal invariante en U. Sea $\epsilon > 0$ tal que $W^{s,u}_\epsilon(x) \subset U$ si $x \in \Lambda$. Sea $\delta > 0$ tal que si $x, y \in \Lambda$ con $d(x,y) < \delta$ entonces $W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y) \neq \emptyset$ y sea z dicho punto de intersección. Es fácil ver $f^n(z) \in U$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto $z \in \Lambda$.

Supongamos ahora que Λ tiene estructura de producto local. Sea γ constante de exansividad en un entorno U_1 de Λ. Sea $\beta < \gamma/2$ y α correspondiente de la propiedad de sombreado. Sea $\eta, 0 < \eta < \alpha/2$ tal que si $d(x,y) < \eta$ entonces $d(f(x), f(y)) < \alpha/2$. Sea $U = \{y : d(y, \Lambda) < \eta\} \cap U_1$. Supongamos que $y \in U$ es tal que $f^n(y) \in U$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Sea $x_n \in \Lambda$ tal que $d(x_n, f^n(y)) < \eta$. Luego, $\{x_n\}$ es una α-pseudo órbita. Luego, como Λ tiene estructura de producto local, existe $z \in \Lambda$ que sombrea $\{x_n\}$. Como y también sombrea $\{x_n\}$ por la expansividad concluimos que $y = z \in \Lambda$.

Lo último se deduce de forma análoga. Proyectando la órbita futura de x a partir de que entra a U (digamos a partir de n_0) tenemos que existe $z \in \Lambda$ tal que $f^{n_0}(x) \in W^s_\epsilon(z)$ y por lo tanto $x \in W^s(f^{-n_0}(z))$. □

Corolario 2.4.3. *Sea p un punto fijo hiperbólico de f.*

1. *Sea x un punto homoclínico transversal de p.. Entonces existen puntos periodicos hiperbólicos p_n tales que $p_n \to x$.*
2. *Si q es un punto hiperbólico, decimos que*

$$p \sim q \quad si\; W^s(p) \pitchfork W^u(q) \neq \emptyset \neq W^s(q) \pitchfork W^u(p).$$

Con esta notación vale entonces que la clase homoclínica

$$H(p) = \overline{\{q \in Per(f) : q \sim p\}}.$$

Demostración: Ejercicio. Para probar (1) observar que $\mathcal{O}(x) \cup \{p\}$ es un conjunto hiperbólico □

Corolario 2.4.4. *Supongamos que $\overline{Per(f)}$ es un conjunto hiperbólico. Entonces $\overline{Per(f)}$ tiene estructura de producto local.*

Corolario 2.4.5. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo. Entonces*

1. *Si el conjunto recurrente por cadenas $\mathcal{R}(f)$ es hiperbólico, entonces $\mathcal{R}(f) = \overline{Per(f)}$. En particular $\mathcal{R}(f) = \Omega(f) = L(f)$.*
2. *Si el conjunto límite $L(f)$ es hiperbólico, entonces $L(f) = \overline{Per(f)}$.*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{R}(f)$ es hiperbólico y sea $\beta > 0$ arbitrariamente chico. Sea α como en el Teorema 2.4.1 (y Corolario 2.4.1) anterior. Sea $x \in \mathcal{R}(f)$. Luego, como $\mathcal{R}(f_{/\mathcal{R}(f)}) = \mathcal{R}(f)$ (ver A.0.4), podemos conseguir una α-pseudo órbita periódica por x en $\mathcal{R}(f)$. Por lo tanto, encontramos un punto periódico a menos de β de x.

Supongamos que $L(f)$ es hiperbólico. Sea β arbitrariamente chico y su correspondiente α. Sea $x \in L(f)$. Luego, existe $y \in M$ tal que $d(\omega(y), x) < \beta$ (o α-límite). Sea $z \in \omega(y)$ y sea $\delta < \alpha/2$ tal que si $d(u, v) < \delta$ entonces $d(f(u), f(v)) < \alpha/2$. Sea n_0 tal que $d(f^n(y), L(f)) < \delta$ si $n \geq n_0$. Sean $n_1 < n_2$ mayores que n_0 tal que $d(f_i^n, z) < \delta$. Para cada $j, 0 \leq j < n_2 - n_1$ elegimos $x_j \in L(f)$ tal que $d(f^{n_1+j}(y), x_j) < \delta$. Luego, $\{..x_0, ...x_{n_2-n_1-1}, x_0, ...\}$ es una α-pseudo órbita periódica en $L(f)$. De aquí se concluye el resultado. □

Definición 2.4.4. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo. Decimos que f es:*

- *difeomorfismo de Anosov o globalmente hiperbólico si M es conjunto hiperbólico.*
- *$\mathcal{R}$(respec L)-hiperbólico si el conjunto recurrente por cadenas $\mathcal{R}(f)$ (respec el conjunto límite $L(f)$) es hiperbólico.*
- *Axioma A si el conjunto no errante $\Omega(f)$ es hiperbólico y además $\Omega(f) = \overline{Per(f)}$.*

Teorema 2.4.2. *Se verifican la siguientes implicaciones:*

- *Anosov $\Longrightarrow$ $\mathcal{R}$-hiperbólico $\Longrightarrow$ Axioma A $\Longrightarrow$ L-hiperbólico.*
- *Axioma A $\Longleftrightarrow$ L-hiperbólico y $L(f) = \Omega(f)$.*

Corolario 2.4.6. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfimos L-hiperbólico. Entonces, dado $y \in M$ existe $x \in L(f)$ tal que $y \in W^s(x)$.*

Un caso muy particular de difeomorfismos Axioma A son los difeomorfismos Morse-Smale:

Definición 2.4.5. *Un difeomorfismo $f : M \to M$ se dice Morse-Smale si*

- *$\#Per(f) < \infty$ y todos los puntos periódics de f son hiperbólicos.*
- *$\Omega(f) = Per(f)$.*
- *$W^s(p)$ y $W^u(q)$ se intersecan transversalmente para cualquier para de puntos $p, q \in Per(f)$.*

2.5. Descomposición espectral

Ahora procederemos a una descripción de la dinámica bajo condiciones de hiperbolicidad.

Teorema 2.5.1 (Descomposición espectral [S3] [N1])**.** *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo Axioma A o L-hiperbólico. Entonces $L(f) = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_m$ donde Λ_i, $i = 1, \cdots, m$ son conjuntos compactos, f-invariantes, dos a dos disjuntos y transitivos (llamadas piezas básicas). Además, cada $\Lambda_i, i = 1, ..m$ se descompone a su vez en una union disjunta de conjuntos compactos $\Lambda_i = \Lambda_{i1} \cup \cdots \cup \Lambda_{in_i}$ tal que $f(\Lambda_{ij}) = \Lambda_{i(j+1)}, j = 1, , ..., n_i - 1$, $f(\Lambda_{in_i}) = \Lambda_{i1}$, $f^{n_i}_{/\Lambda_{ij}}$ es topológicamente mixing y $W^s(x)$ es densa en Λ_{ij} $\forall x \in \Lambda_{ij}$.*

Demostración: Sabemos que $L(f) = \overline{Per(f)}$ y que tiene estructura de producto local. Para $p \in Per(f)$ consideremos

$$H(p) = \overline{\{q \in Per(f) : q \sim p\}}.$$

Observemos que dados p y q periódicos $H(p) = H(q)$ o $H(p) \cap H(q) = \emptyset$. En efecto, sea $z \in H(p) \cap H(q)$. Luego existen $p_n \sim p$ y $q_n \sim q$ tal que $p_n \to z$, $q_n \to z$. Luego, para n suficientemente grande $p_n \sim q_n$ de donde $H(p) = H(q)$.

Por otra parte afirmamos que existen $p_1, ..., p_k$ tal que $L(f) = H(p_1) \cup ... \cup H(p_k)$. Veamos que hay a lo suma una cantidad finita de clases homoclínicas disjuntas. De lo contrario, sea p_n una sucesión de puntos periodicos tales que $H(p_n)$ son dos a dos disjuntos. Sea z punto de acumulación de p_n. Luego, para n, m suficientemente grande tenemos que $p_n \sim p_m$, absurdo. Luego, existen $p_1, ..., p_k$ tal que $L(f) = \overline{Per(f)} = H(p_1) \cup ... \cup H(p_k)$. y concluimos la afirmación.

Como para cualquier $p \in Per(f)$ se tiene $f(H(p)) = H(f(p))$ entonces dado $i, 1 \leq i \leq k$ existe un único $j, 1 \leq j \leq k$ tal que $f(H(p_i)) = H(p_j)$. Es decir f induce una permutación σ en $\{1, ..., k\}$. Luego $\{1, ..., k\}$ es unión de σ-órbitas $\mathcal{O}_\sigma(k_1), ..., \mathcal{O}_\sigma(k_m)$. Definimos

$$\Lambda_i = \bigcup_{\ell \in \mathcal{O}_\sigma(k_i)} H(p_\ell).$$

Obviamente cada $\Lambda_i, 1 \leq i \leq m$ es compacto e invariante.

Denotemos por n_i el período de k_i según σ. Si hacemos

$$\Lambda_{ij} = f^j(H(p_{k_i})) : \quad 1 \leq j \leq n_i$$

tenemos entonces que $\Lambda_i = \Lambda_{i1} \cup ... \cup \Lambda_{in_i}$ donde Λ_{ij} son compactos disjuntos. Además se tiene que $f^{n_i}(\Lambda_{ij}) = \Lambda_{ij}$ y $f(\Lambda_{ij}) = \Lambda_{i(j+1)}, j = 1, , ..., n_i - 1,\ f(\Lambda_{in_i}) = \Lambda_{i1}$.

Probemos ahora $F := f^{n_i} : \Lambda_{ij} \to \Lambda_{ij}$ es topológicamente mixing (comparar con Corolario 2.4.3). Sean U y V abiertos en Λ_{ij} y sean p, q periódicos, $p \in U, q \in V$. Denotemos por $\pi(q)$ el período de q. Sea $\epsilon > 0$ tal que

$$F^j(W^s_\epsilon(F^{-j}(q)) \cap \Lambda_{ij}) \subset V \quad \text{si} \quad 0 \leq j \leq \pi(q) - 1.$$

Como $p \in U$ y $p \sim F^{-j}(q), 0 \leq j \leq \pi - 1$ existen $x_j \in U$ y m_0 tal que

$$F^{m\pi(q)}(x_j) \in W^s_\epsilon(F^{-j}(q)) \quad \forall \quad m \geq m_0.$$

Sea $N = (m_0 + 1)\pi(q)$ y consideremos $n \geq N$. Luego, existe m tal que $n = m\pi(q) + j$ para algún j, $0 \leq j \leq \pi(q) - 1$. Pero entonces

$$F^n(x_j) = F^j(F^{m\pi(q)}(x_j)) \in F^j(W^s_\epsilon(F^{-j}(q)) \cap \Lambda_{ij}) \subset V.$$

Por lo tanto $F^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$, y F es topológicamente mixing en Λ_{ij}. Esto implica además que f es transitivo en Λ_i : Sean U_1 y V_1 abiertos en Λ_i. Sean m_1 y j tal que $f^{m_1}(U_1) \cap \Lambda_{ij} \neq \emptyset \neq \Lambda_{ij} \cap V_1$. Luego, si $f^{m_1 + Nn_i}(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$.

Finalmente probemos que para cualquier $x \in \Lambda_{ij}$ se tiene que $W^s(x) \cap \Lambda_{ij}$ es densa en Λ_{ij}. Sea U abierto en Λ_{ij} y $x \in \Lambda_{ij}$. Sea $z \in \omega(x, F)$ y sea V entorno de z en Λ_{ij} de forma tal que si $u, v \in V$ entonces $W^s_\epsilon(u) \cap W^u_\epsilon(v) \neq \emptyset$. Sea $U_1 \subset U$ y $\delta > 0$ tal que si $y \in U_1$ entonces $W^u_\delta(y) \cap \Lambda_{ij} \subset U$. Sea $k_0 > 0$ tal que $F^{-k}(W^u_\epsilon(w)) \subset W^u_\delta(f^{-k}(w))$ para cualquier $k \geq k_0$. Sea N tal que si $n \geq N$ entonces $F^n(U_1) \cap V \neq \emptyset$. Sea $m \geq \max\{k_0, N\}$ tal que $F^m(x) \in V$. Luego, existe $y \in U_1$ tal que $F^m(y) \in V$. Consideremos $w = W^s_\epsilon(F^{m_0}(x) \cap W^u_\epsilon(F^m(y))$ que pertenece a Λ_{ij}. Luego $F^{-m}(w) \in U$ y $F^{-m}(w) \in W^s(x) \cap \Lambda_{ij}$.

□

Observación 2.5.1. *La misma demostración de este teorema prueba que si un conjunto Λ es hiperbólico, tiene estructura de producto local y puntos periódicos densos, entonces Λ admite una descomposición espectral.*

Ejercicio 2.5.1. *Probar que en una pieza básica de la descomposición espectral, la dimensión de los espacios E^s y E^u es constante.*

2.6. Estabilidad

El objetivo principal de esta sección es probar que los difeomorfismos hiperbólicos tienen propiedades de estabilidad. Precisamos algunas definiciones.

Definición 2.6.1. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo.*

- *Decimos que f es C^r-estructuralmente estable si existe un entorno $\mathcal{U}(f) \subset Diff^r(M)$ tal que si $g \in \mathcal{U}(f)$ entonces existe un homeomorfismo $h : M \to M$ tal que $h \circ f = g \circ h$.*

- *Decimos que f es C^r-Ω-estable si existe un entorno de f, $\mathcal{U}(f) \subset Diff^r(M)$ tal que si $g \in \mathcal{U}(f)$ entonces existe un homeomorfismo $h : \Omega(f) \to \Omega(g)$ tal que $h \circ f_{/\Omega(f)} = g_{/\Omega(g)} \circ h$.*

Observación 2.6.1. *La noción de Ω-estabilidad es mas débil que la estabilidad estructural: si f es estructuralmente estable entonces es Ω-estable. Por otra parte C^1-estabilidad $\Longrightarrow$ C^r-estabilidad.*

Teorema 2.6.1. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo Anosov $\Longrightarrow$ es C^1-estructuralmente estable.*

Demostración: Sea $\mathcal{V}$ entorno de f tal que toda $g \in \mathcal{V}$ es Anosov, y además existe constante de expansividad γ es uniforme. Sea $\beta < \gamma/2$ y sea α según el Teorema 2.4.1. Podemos suponer que si $g \in \mathcal{V}$ entonces $d(f(x), g(x)) < \alpha$ para todo $x \in M$. Luego, dado $x \in M$, la $\{g^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ es una α-pseudo órbita para f se tiene que existe un único punto y tal que

$$d(f^n(y), f^n(x)) \leq \beta \ \forall \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Definimos $h : M \to M$ como $h(x) = y$. Resulta que h es continua (de forma análoga al Teorema 1.1.1. Además, h es inyectiva pues g tiene también constante de expansividad γ. Por el teorema de invariancia del dominio concluimos que h es un homeomorfismo. $\square$

Definición 2.6.2. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo Axioma A o L-hiperbólico.*

- *Decimos que satisface la condición de transversalidad fuerte si $W^s(x)$ y $W^u(y)$ se intersecan transversalmente para cualquier para de puntos $x, y \in \Omega(f)$.*

- *Decimos que f tiene o exhibe un ciclo si existen piezas básicas $\Lambda_{i_1}, \cdots, \Lambda_{i_{k-1}}, \Lambda_{i_k} = \Lambda_{i_1}$ tales que*

$$W^u(\Lambda_{i_j}) \bigcap W^s(\Lambda_{i_{j+1}}) \neq \emptyset, \ 1 \leq j \leq k-1.$$

Por comodidad, hagamos la siguiente notación para la intersección de piezas básicas:

$$\Lambda_i \ll \Lambda_j \Longleftrightarrow W^u(\Lambda_i)\bigcap W^s(\Lambda_j) \neq \emptyset.$$

Observación 2.6.2. *Si f es Axioma A entonces no puede tener 1-ciclos. Sin embargo, si f es L-hiperbólico podría tenerlos.*

Ejercicio 2.6.1. *Si f es $\mathcal{R}$-hiperbólico entonces no tiene ciclos.*

El siguiente teorema se enuncia sin demostración.

Teorema 2.6.2 ([R1][R2])**.** *Si $f : M \to M$ es Axioma A y satisface la condición de transversalidad $\Longrightarrow$ f es C^1-estructuralmente estable*

El próximo resultado es el objetivo de esta sección.

Teorema 2.6.3 (Ω-estabilidad [S4])**.** *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo Axioma A sin ciclos o un difeomorfismo L-hiperbólico sin ciclos. Entonces f es Ω-estable.*

Demostración: Demostremos el teorema para el caso que f es L-hiperbólico (de hecho en este caso, mostraremos que f es Axioma A). Sean $\Lambda_1, ..., \Lambda_k$ las piezas básicas de la descomposición espectral. La idea es reducir la Ω-estabilidad a una estabilidad local de las piezas básicas.

Para ello consideremos U_i entorno de Λ_i disjuntos dos a dos y tal que $f(U_i) \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Afirmamos que existe $\mathcal{V}$ entorno de f tal que si $g \in \mathcal{V}$ entonces

$$\Omega(g) \subset U_1 \cup ... \cup U_k$$

y además

$$\Omega(g) \cap U_i \subset \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} g^n(U_i).$$

La idea es que si esto no sucede entonces hay difeomorfismos g_n cercanos a f que “dejan una sombra” en la dinámica de f y se crea un ciclo (ver Figura 2.7).

Supongamos pues por absurdo que tal $\mathcal{V}$ no existe. Luego, existe una sucesión $g_n \to f$ y un sucesión $x_n \in \Omega(g_n)$ tal que $x_n \notin \cup_i U_i$. Como $x_n \in \Omega(g_n)$ existe $y^n_m \to_m x_n$ y $l^n_m \to_m \infty$ tal que $g_n^{l_m}(y^n_m) \to x_n$. Podemos suponer que $x_n \to z_1$. Obviamente $z_1 \notin \cup_i U_i$.

Ahora, existe i_1 tal que $\alpha(z_1, f) \subset \Lambda_{i_1}$. En particular $z_1 \in W^u(\Lambda_{i_1})$. De igual forma, existe i_2 tal que $\omega(z_1) \subset \Lambda_{i_2}$ y $z_0 \in W^s(\Lambda_{i_2})$. Observamos que entonces $W^u(\Lambda_{i_1}) \cap W^s(\Lambda_{i_2}) \neq \emptyset$ esto es:

$$\Lambda_{i_1} \ll \Lambda_{i_2}.$$

Ahora, existe k_1 tal que $f^k(z_1) \in U_{i_2}$ para $k \geq k_1$. Como

$$g_n \to f, \quad x_n \to z_1, \quad y_m^n \to_m x_n$$

concluimos que para n y m suficientemente grandes $g_n^{k_1}(y_m^n) \in U_{i_2}$. Sea

$$l_1^n(m) = \text{mín}\{j \geq k_1 : g_n^j(y_m^n) \notin U_{i_2}\}.$$

Se tiene que $l_1^n(m)$ existe pues $g_n^{l_m}(y_m) \to x_n$ y además $l_1^n(m) \leq l_m^n$. Por otra parte $l_1^n(m) - k_1 \to \infty$: de lo contrario contradeciríamos que $f^k(z_1) \in U_{i_2}$ para $k \geq k_1$.

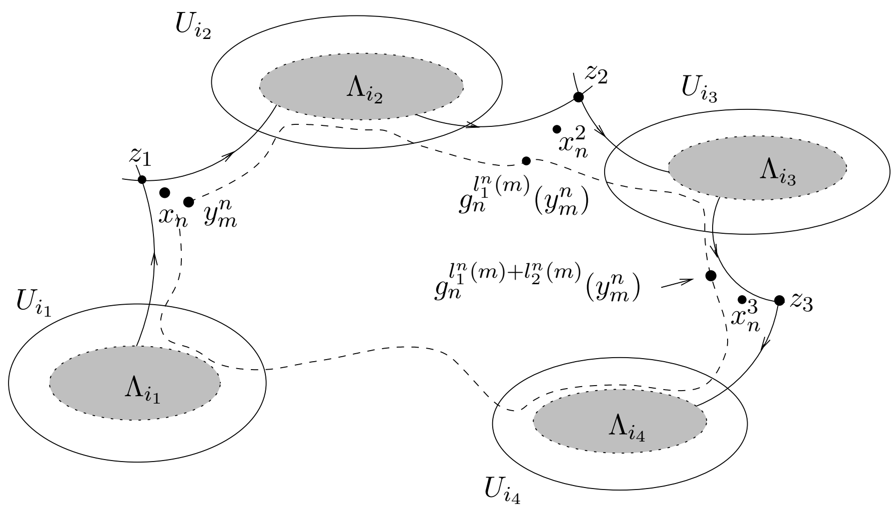


Figura 2.7: Creación de ciclo via sombra de g_n

Sea x_n^2 punto de acumulación de $g_n^{l_1^n(m)}(y_m^n)$ y sea z_2 punto de acumulación de x_n^2. Se tiene que $f^{-j}(z_2) \in U_{i_2}$ para todo $j \geq 0$ pues $l_1^n(m) - k_1 \to \infty$. Luego $\alpha(z_2) \in \Lambda_{i_2}$ y por lo tanto $z_2 \in W^u(\Lambda_{i_2})$. Ahora, si $z_1 \in \mathcal{O}^+(z_2)$ tendríamos que $\Lambda_{i_2} \ll \Lambda_{i_2}$ lo cual es absurdo pues no hay ciclos. Por otra parte, existe i_3 tal que $\omega(z_2) \subset \Lambda_{i_3}$ y por lo tanto

$$\Lambda_{i_1} \ll \Lambda_{i_2} \ll \Lambda_{i_3}.$$

Además existe k_2 tal que $f^k(z_2) \in U_{i_3}$ para $k \geq k_2$. Como $z_1 \notin \mathcal{O}^+(z_2)$ concluimos que para n, m suficientemente grandes $l_1^n(m) + k_2 < l_m^n$. De la misma forma que antes construimos $l_2^n(m), x_n^3$ punto de acumulación de $g_n^{l_1^n(m)+l_2^n(m)}(y_m^n)$ y z_n^3 punto de acumulación de x_n^3. Así, razonando inductivamente, encontramos una sucesión $i_i, i_2, ..., i_n, ...$ tal que

$$\Lambda_{i_1} \ll \Lambda_{i_2} \ll ... \ll \Lambda_{i_n} \ll ...$$

Como hay un número finito de piezas básicos concluimos que hay un ciclo, lo cual es absurdo. Esto demuestra que existe $\mathcal{V}$ tal que para $g \in \mathcal{V}$ se tiene $\Omega(g) \subset U_1 \cup ... \cup U_k$. Como podemos elegir $\mathcal{V}$ tal que $g(U_i) \cap U_j = \emptyset$ para $g \in \mathcal{V}$ concluimos que si $x \in \Omega(g) \cap U_i$ entonces $g^n(x) \in U_i$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Para terminar la demostración del teorema, vamos a probar la estabilidad local, es decir, si definimos

$$\Lambda_i(g) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(U_i)$$

entonces existe $h_i : \Lambda_i(g) \to \Lambda_i(f)$ tal que $f \circ h_i = h_i \circ g$.

Para esto, asumiremos además que $U_i, i = 1, .., k$ y $\mathcal{V}$ son suficientemente chicos de forma que lo siguiente se satisface:

- Existe $\gamma > 0$ tal que para todo $g \in \mathcal{V}$ se tiene que $g_{/\Lambda_i(g)}$ tiene constante de expansividad γ.

- Sea $\alpha > 0$ tal que toda α-pseudo órbita en $\Lambda_i(f)$ para f es $\gamma/4$ sombreada por una órbita en Λ_i. Requerimos entonces

  - Existe $\delta < \text{mín}\{\alpha/3, \gamma/4\}$ tal que si x, y verifican $d(x, y) < \delta$ entonces $d(g(x), g(y)) < \alpha/3$ para toda $g \in \mathcal{V}$.
  - $\Lambda_i(g) \subset \{y \in M : d(y, \Lambda_i(f)) < \delta\}$.
  - $d(g(x), f(x)) < \alpha/3$ para todo $x \in M$ y para toda $g \in \mathcal{V}$.

Sea entonces $x \in \Lambda_i(g)$. Elegimos $x_n \in \Lambda_i(f)$ tal que $d(x_n, g^n(x)) < \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Resulta entonces que $\{x_n\}$ es una α-pseudo órbita:

$$\begin{aligned} & d(f(x_n), x_{n+1}) \leq \\ \leq\ & d(f(x_n), g(x_n)) + d(g(x_n), g(g^n(x))) + d(g^{n+1}(x), x_{n+1}) \\ <\ & \alpha/3 + \lambda/3 + \alpha/3 = \alpha. \end{aligned}$$

Luego existe y tal que $d(f^n(y), x_n) < \gamma/4$. Por lo tanto, dado $x \in \Lambda_i(g)$ existe $y \in \Lambda_i(f)$ tal que $d(f^n(y), g^n(x)) < \gamma/2$. Además este y es único pues γ es constante de expansividad en Λ_i. Luego, podemos definir $h_i : \Lambda_i(g) \to \Lambda_i(f)$ por $h(x) = y$, es decir, $h(x)$ es el único punto que verifica

$$d(f^n(h_i(x)), g^n(x)) \leq \gamma/2 \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}.$$

Por la propia definición resulta que $f \circ h_i = h_i \circ g$. Además, h es continua e inyectiva pues γ también es constante de expansividad de g en $\Lambda_i(g)$. Falta ver que h_i es sobreyectiva para concluir que $h_i : \Lambda_i(g) \to \Lambda_i(f)$ es un homeomorfismo.

Consideremos $g \in \mathcal{V}$ (que supondremos conexo) y consideremos un arco continuo $g_t \in \mathcal{V}, 0 \leq t \leq 1$ tal que $g_0 = f, g_1 = g$. Sea p_0 un punto periódico de período k de f. Como p_0 es hiperbólico, existe $s > 0$ y una única función continua $p : [0, s] \to M$ tal que $p(t)$ es un punto periódico de $g_t, p(0) = p$. Afirmamos que p_t se puede extender (de manera única) a todo $[0, 1]$. Sea $s_0 = \sup\{s \in [0, 1] : \exists p : [0, s]\}$ donde p es continua $g_t(p(t)) = p(t), p(0) = p_0$. Supongamos que $s_0 < 1$. Sea $p(s_0)$ punto límite de $p(t)$ cuanto $t \to s_0$. Luego $p(s_0)$ es un punto periódico de g_{s_0} de período menor o igual que k. Como $\mathcal{O}(p(s_0)) \subset U_i$ concluimos que $p(s_0)$ es hiperbólico. Luego, para t cerca de s_0 existe un único punto $p(t)$ periódico de período igual al de $p(s_0)$ en un entorno de $p(s_0)$. Entonces, el período es k y podemos extender p a un entorno de s_0. Esto contradice que s_0 era el supremo, y por lo tanto probamos nuestra afirmación.

Por otra parte, si p_0 y q_0 son puntos periódicos distintos de f entonces $p(t) \neq q(t)$ para todo $t \in [0, 1]$ por el mismo argumento. En conclusión, g tiene tantos puntos periódicos de período k en $\Lambda_i(g)$ como f tiene en $\Lambda_i(f)$. Como h_i es inyectiva y manda puntos periódicos de periodo k en puntos periódicos de período k se tiene que

$$h_i(\Lambda_i(g)) \supset Per(f_{/\Lambda_i(f)}).$$

Como los puntos periódicos de f son densos en $\Lambda_i(f)$ y $\Lambda_i(g)$ es compacto concluimos que h_i es sobre.

Finalmente, haciendo $h : \Omega(g) \to \Omega(f)$ por $h(x) = h_i(x)$ si $x \in \Lambda_i(g)$ tenemos la conjugación buscada.

$\square$

Como un difeomorfismo $\mathcal{R}$-hiperbólico no tiene ciclos, concluimos:

Corolario 2.6.1. *Sea f un difeomorfismo $\mathcal{R}$-hiperbólico. Entonces f es Ω-estable.*

2.7. Ejercicios

1. Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y Λ un conjunto hiperbólico tal que $E^u(x) = \{0\}$ $\forall x \in \Lambda$. Probar que Λ consiste un número finito de órbitas periódicas atractoras.

2. Sea $f : M \to M$ difeomorfismo Ω estable y p un punto periódico de f. Probar que p tiene que ser hiperbólico.

3. Sea f difeomorfismo C^r tal que $\Omega(f)$ consiste de una cantidad finita de órbitas periódicas hiperbólicas y supongamos que existe una función $V : M \to \mathbb{R}$ tal que $V(f(x)) \leq V(x)$ para todo $x \in M$ y que $V(f(x)) = f(x)$ sii x es periódico. Probar que bajo estas condiciones f es Ω-estable.

4. Sea M una variedad compacta y $f : M \to \mathbb{R}$ una función de clase C^{r+1}, $r \geq 1$. Considere el campo $X = grad(f)$ que es de clase C^r y sea ϕ_t su flujo.

   a) Mostrar que $f(\phi_t))$ es creciente con t. Concluir que ϕ_t no tiene órbitas periódicas. ¿Quién es $\Omega(X)$?

   b) Probar que p es una singularidad sii p es un punto crítico de f. Probar que p es una singularidad hiperbólica sii el hessiano de f en p es no degenerado. Probar que p es un atractor (repulsor) sii p es un máximo (mínimo) local de f. (Una singularidad p es hiperbólica si DX_p no tiene valores propios con parte real nula.)

c) Decimos que f es una función de Morse si todos sus puntos críticos son no degenerados. Probar que si f es de Morse entonces X es Ω-estable (es decir, si Y es un campo C^r cerca de X entonces existe $h : \Omega(X) \to \Omega(Y)$ homeomorfismo tal que $h(\mathcal{O}_X(x)) = \mathcal{O}_Y(h(x))$.)

d) Concluir que el subconjunto de $X^r_{grad}(M)$ (campos gradientes en M de clase C^r) que son Ω-estables es abierto y denso en X^r_{grad}. Sug: use el teorema de Morse, que dice que el conjunto de funciones de Morse es abierto y denso en $C^{r+1}(M;\mathbb{R})$.

Capítulo 3

Perturbaciones en la topología C^1.

En este capitulo estudiaremos algunas técnicas y resultados de perturbación en la topología C^1 que utilizaremos en los capítulos siguientes. Estas técnicas ponen de manifiesto una característica de la topología C^1 : es esencialmente *lineal*.

3.1. Lema de Franks

El siguiente lema elemental es de uso frecuente en la topología C^1. Básicamente dice (y en este sentido lo utilizaremos después) que cualquier perturbación del diferencial de f a lo largo de una órbita periódica es realizado como el diferencial de una perturbación g de f (a lo largo de la misma órbita periódica). Este hecho sera crucial cuando estudiemos sistemas que son C^1 estables.

Lema 3.1.1 (Lema de Franks [F]). *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo C^1 y sea $\mathcal{U}(f)$ un entorno de f. Entonces existe $\mathcal{U}_0(f) \subset \mathcal{U}(f)$ y $\epsilon > 0$ tal que si $g \in \mathcal{U}_0(f)$, $S \subset M$ es un conjunto finito $S = \{p_1, p_2, \dots p_m\}$ y L_i, $i = 1, \dots, m$ son mapas lineales $L_i : TM_{p_i} \to TM_{f(p_i)}$ tales que $\|L_i - D_{p_i} g\| \leq \epsilon$, $i = 1, \dots, m$ entonces existe $\tilde{g} \in \mathcal{U}(f)$ tal que $\tilde{g}(p_i) = g(p_i)$ y $D_{p_i}\tilde{g} = L_i$. Además, si U es un entorno de S podemos tomar $\tilde{g}$ tal que $\tilde{g}(x) = g(x)$ para todo $x \in \{p_1, p_2 \dots p_m\} \cup (M \backslash U)$.*

Demostración: [Idea la prueba] La demostración se basa en la siguiente estimación:

Sea $g(x) = Ax + \phi(x)$ con $Dg_0 = A$, $\phi(0) = 0$ y $D\phi_0 = 0$, ϕ de clase C^1. Sea L lineal tal que $\|L - A\| < \epsilon$.

Sea δ suficientemente chico tal $\|D\phi_x\| \leq \epsilon$ si $\|x\| \leq \delta$. Consideremos una función "chichón"$\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \rho(x) \leq 1$, $\rho(x) = 1$ si $\|x\| \leq \delta/2, \rho(x) = 0$ si $\|x\| \geq \delta$ y $\|\nabla\rho(x)\| \leq \frac{4}{\delta}$.

Sea $G(x) = g(x) + \rho(x)(Lx - g(x))$. Resulta que $G(x) = Lx$ si $\|x\| \leq \delta/2$ y $G(x) = g(x)$ si $\|x\| > \delta$. Para estimar la distancia C^1 entre G y g basta estudiar cuando $\|x\| < \delta$. Obviamente $\|G(x) - g(x)\| \leq \|L - A\|\|x\| + \|\phi(x)\| < 2\epsilon\|x\|$.

Por otra parte $DG_x - Dg_x = \rho(x)(L - A - D\phi_x) + ((L-A)x - \phi)^T.\nabla\rho(x)$

$$\begin{aligned}
\|DG_x - Dg_x\| &\leq |\rho(x)|(\|L - A\| + \|D\phi_x\|) + \epsilon\|\nabla\rho(x)\| \\
&\leq 2\epsilon + 2\epsilon\|x\|\frac{4}{\delta} \leq 10\epsilon.
\end{aligned}$$

El lema se concluye de la estimación anterior usando cartas locales (via mapa exponencial) en cada punto $x \in S$.

□

3.2. El Closing Lemma y el Connecting Lemma

Un clásico problema en sistemas dinámicos conocido como "closing lemma" pregunta si es posible, cuando tenemos una órbita recurrente, es decir un punto cuya órbita vuelve en el futuro arbitrarimente cerca de si mismo, "cerrar" la órbita, en otras palabras, mediante una perturbación crear una órbita periódica (ver Figura 3.1). Más en general: dado un sistema dinámico arbitrario $f : M \to M$ y un punto $x \in \Omega(f)$, un entorno de $\mathcal{V}(f)$ y $\epsilon > 0$ entonces ¿existe $g \in \mathcal{V}(f)$ e $y \in B(x, \epsilon)$ tal que y es periódico para g? Ahora, no hemos dicho con respecto a que topología consideramos el entorno $\mathcal{V}(f)$! Dependiendo de esta, la solución es afirmativa o aún es un problema abierto. Los demostración de los resultados que en esta sección se enunciaran exceden el propósito de estas notas. Sugerimos al lector leer el apéndice en [BDV] y luego consultar las referencias allí incluidas.

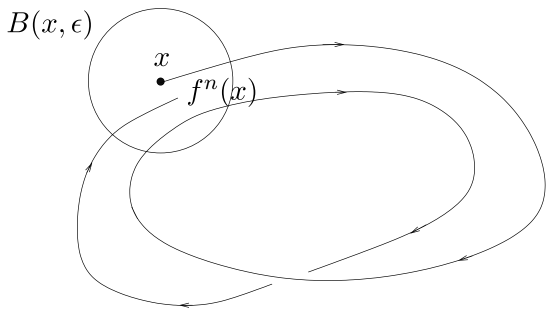


Figura 3.1:

La idea "inocente" para atacar este problema es: si x y $f^n(x)$ están cerca, entonces empujar el punto $f^n(x)$ hacia x (es decir, conseguir g de forma que $g(f^{n-1}(x)) = x$) y así lograr una órbita periódica. Para hacer esto hay que tener cuidado de que $g = f$ en los puntos intermediarios, es decir, $g^i(x) = f^i(x)$ para $i = 0, ..., n-1$. Esto es fácilmente realizable en la topología C^0 (y se deja como ejercicio para el lector). Pero en la topología C^1, para mover un punto a otro se precisa cierto espacio: si queremos h tal que $h(x) = y$, y h esté $\gamma\, C^1$-cerca de la identidad entonces el soporte de h contiene $B(x, d(x,y)/\gamma)$. Pero entonces, cuando movemos $f^n(x)$ hacia x podemos estar moviendo puntos intermediarios y así perdemos control sobre la órbita entre x y $f^n(x)$ (ver Figura 3.2).

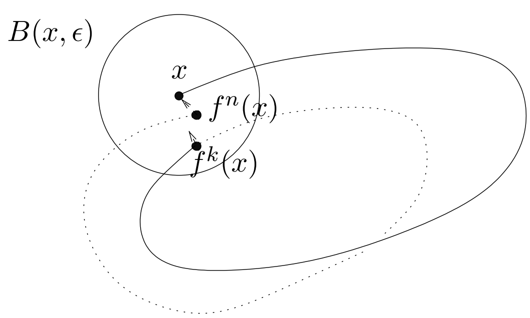


Figura 3.2:

Sin embargo, el "closing lemma" tiene respuesta afirmativa en la topología C^1. Es un resultado clásico y fundamental debido a C. Pugh ([Pu1]). La idea de Pugh fue, para tener control sobre el soporte de la perturbación, realizar la misma en varios pasos, es decir, en vez de mover $f^n(x)$ a x en un paso solo, ir empujando la órbita futura de $f^n(x)$ hacia la órbita de x y así lograr cerrarla. En realidad, lo que se prueba es que hay, entre los puntos de la órbita futura de x que están cerca de x, dos puntos intermediarios $f^k(x), f^j(x)$ con $k < j$ que están en buena posición de forma que el argumento se puede aplicar: empujar la órbita de $f^j(x)$ hasta pegarla con la de $f^k(x)$ en N pasos, $N < j - k$ (ver Figura 3.3.

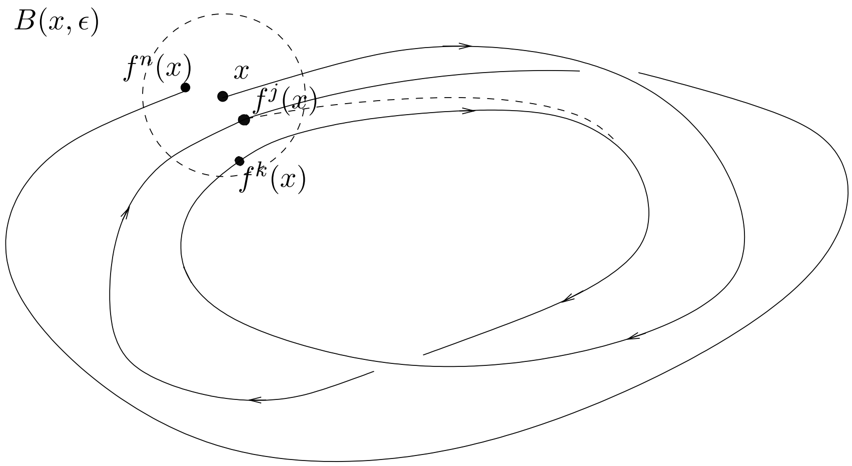


Figura 3.3:

Otro problema de similares características es el siguiente: supongamos que tenemos dos puntos p y q tales que $\omega(p) \cap \alpha(q) \neq \emptyset$, es decir, hay puntos del futuro de p que están muy cerca de puntos del pasado de q; ¿es posible entonces "conectar" las órbitas? Es decir, mediante una pequeña perturbación, ¿es posible hacer que la órbita futura de p pase ahora por el punto q? (ver figura 3.4).

Este problema también tiene una solución afirmativa en la topología C^1. Fue resuelto originalmente por S. Hayashi ([Ha]), mediante una inteligente extensión de las técnicas desarrolladas por C. Pugh y ha tenido un impacto sustancial en la teoría de sistemas dinámicos en la topología C^1. El enunciado que sigue lo extraemos de [WX].

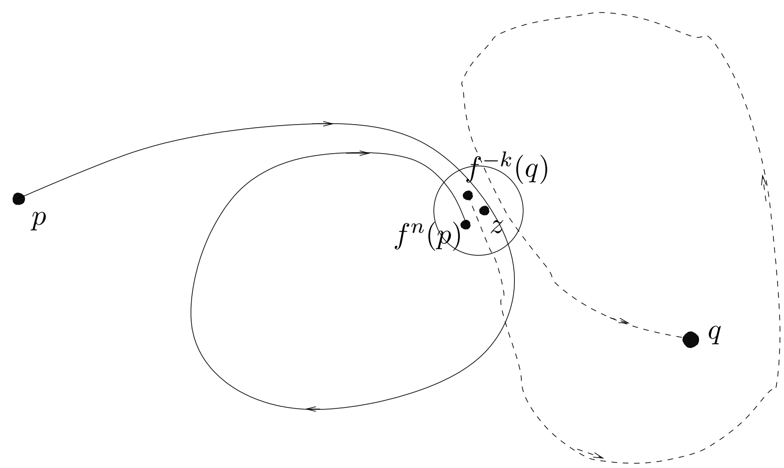


Figura 3.4:

Teorema 3.2.1 (Connecting Lemma). *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y sea $\mathcal{V}$ un entorno de f en la topología C^1 y $z \in M$ un punto que no es periódico. Entonces, existe un natural $N \geq 1$, $\sigma > 1$ tal que para $\delta > 0$ se verifica que $f^j(B(z,\delta))$, $0 \leq j \leq N$ son disjuntas dos a dos, luego si:*

1. *Existe $p \notin \Delta(z,\delta) := \bigcup_{j=0}^{N} f^j(B(z,\delta))$ y existe $n > 0$ tal que $f^n(p) \in B(z, \delta/\sigma)$,*
2. *Existe $q \notin \Delta(z,\delta)$ y existe $m > 0$ tal que $f^{-m}(q) \in B(z, \delta/\sigma)$,*

entonces existe $g \in \mathcal{V}$ tal que $q \in \mathcal{O}_g^+(p)$. Además $g = f$ en $\Delta(z,\delta)^c$.

Observación 3.2.1. *Obviamente vale un resultado similar, tomando el tubo hacia el pasado $\Delta(z,\delta) := \bigcup_{j=0}^{N} f^{-j}(B(z,\delta))$.*

Enunciemos ahora Closing Lemma y veamos como se deriva del Connecting Lemma.:

Teorema 3.2.2 (Closing Lemma de Pugh). *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y sea $x \in \Omega(f)$. Entonces, para todo $\mathcal{V}$ entorno C^1 de f y $\epsilon > 0$ existe $g \in \mathcal{V}$ e $y \in B(x,\epsilon)$ tal que $y \in Per(g)$.*

Demostración: sea $\mathcal{V}$ entorno de f, $x \in \Omega(f)$ y $\epsilon > 0$. Ahora, si x es periódico no hay nada que probar. Luego, supongamos que x no es periódico, y consideremos N como en el Connecting Lemma. Podemos encontrar $\delta < \epsilon$ tal que $f^j(B(x,\sigma\delta))$, $0 \leq j \leq N+1$ son disjuntas dos a dos. Como x es no errante, existe $y \in B(x,\delta)$ tal que $f^m(y) \in B(x,\delta)$ para algún m (que necesariamente es mayor que $N+1$.). Finalmente, si hacemos $p = q = f^{N+1}(y)$ tenemos, por el Connecting Lemma, que existe $g \in \mathcal{V}$ tal que $q = p \in \mathcal{O}_g^+(p)$, es decir, p es periódico, y como $f = g$ afuera de $\Delta(x,\delta)$ concluimos que $\mathcal{O}_g(p) \cap B(x,\delta) \neq \emptyset$. $\square$

Veamos ahora una consecuencia importante.

Corolario 3.2.1. *[Pu2] Existe $\mathcal{R}$ residual en $Diff^1(M)$ tal que si $f \in \mathcal{R}$ entonces $\Omega(f) = \overline{Per(f)}$.*

Demostración: Sea $\{U_n\}$ base de la topología en M. Para cada n definimos $\mathcal{V}_n = int\{f : Per(f) \cap U_n \neq \emptyset\}$ y sea $\mathcal{R}_n = \mathcal{V}_n \cup \overline{\mathcal{V}_n}^c$. Es claro que $\mathcal{R}_n$ es abierto y denso. Observemos que si $f \in \overline{\mathcal{V}_n}^c$ entonces $Per(f) \cap U_n = \emptyset$: de lo contrario, existe g arbitrariamente cercano a f tal que g tiene un punto periódico hiperbólico en U_n y por lo tanto $g \in \mathcal{V}_n$, absurdo.

Sea $\mathcal{R} = \cap_n \mathcal{R}_n$. Entonces $\mathcal{R}$ es residual. Sea $f \in \mathcal{R}$ y x un punto no errante y sea $\epsilon > 0$. Sea U_n tal que $x \in U_n \subset B(x,\epsilon)$. Como $f \in \mathcal{R}_n$ concluimos que $f \in \mathcal{V}_n$ o bien $f \in \overline{\mathcal{V}_n}^c$. El último caso no puede ser pues contradice el Closing Lemma. Luego $f \in \mathcal{V}_n$ y luego $x \in \overline{Per(f)}$. $\square$

Volviendo al problema de cerramiento de órbitas, el Closing Lemma nos dice que si tenemos un punto recurrente x de f podemos entonces encontrar g perturbación y p periódico cerca de x. Sin embargo, no nos da información sobre si la órbita de p según g sombrea la órbita de x según f. De hecho la técnica del Closing Lemma y el Connecting Lemma dice que la órbita periódica encontrada sombrea "parte" de la órbita de x. Sin embargo, para un conjunto de probabilidad total tenemos buena información:

Teorema 3.2.3 (Closing Lemma Ergódico [Ma1])**.** *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo. Existe un conjunto $\Sigma(f)$ de probabilidad total tal que si $x \in \Sigma(f)$ entonces para todo entorno $\mathcal{V}(f)$ y $\epsilon > 0$ existe $g \in \mathcal{V}$ y $p \in Per(g)$ tal que $d(f^j(x), g^j(p)) < \epsilon$ para $0 \leq j \leq n$ donde n es el período de g. Además $g = f$ en $M - B(\mathcal{O}(x), \epsilon)$.*

3.3. Producto de matrices

En esta sección estudiaremos producto de matrices "que son establemente" hiperbólicas. La motivación es el estudio de difeomorfismos $f : M \to M$ tal que sus puntos periódicos son hiperbólicos y que permanecen hiperbólicos para cualquier perturbación (pequeña) de f. La técnicas aquí utilizadas han sido esencialmente desarrolladas por Mañe ([Ma1]). Para simplicar la exposición nos restringiremos al caso bidimensional donde podemos dar pruebas elementales que, sin embargo, contienen las ideas fundamentales. Recordemos que si $A \in GL_2(\mathbb{R}^2)$ entonces la minima norma o co-norma de A se define como $m(A) = \text{ínf}\{\|Av\| : \|v\| = 1\}$. Sea $C > 1$.

Consideremos

$$\mathcal{G}(C) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) : \frac{1}{C} \leq m(A), \|A\| \leq C\}.$$

Si $A = A_n \dots A_1$ con $A_i \in \mathcal{G}(C)$ y $\epsilon < \frac{1}{2C}$ denotemos por

$$B(A, \epsilon) = \{B \in GL_2(\mathbb{R}) : B = A'_n \dots A'_1 \text{ con } \|A'_i - A_i\| < \epsilon, i = 1, ..., n.\}$$

Decimos A es hiperbólica contractiva si los valores propios de A tienen módulo menor que 1. Diremos que A es hiperbólica tipo silla si A tiene valores propios λ, σ con $0 < |\lambda| < 1 < |\sigma|$.

Queremos estudiar que condiciones debe satisfacer un producto de matrices $A = A_n ... A_1$ para que cualquier matriz en $B(A, \epsilon)$ sea también hiperbólica. Observemos que si una matriz es hiperbólica, entonces cualquier perturbación pequeña también es hiperbólica, pero lo que nos interesa es fijar la perturbación *apriori*, fijando ϵ de antemano. Además, queremos resaltar que fijado ϵ, si tomamos un producto cualquiera $A = A_n .... A_1$ entonces una matriz $B \in B(A, \epsilon)$ puede estar "muy lejos" de A (por ej, $\|A - B\|$ puede ser arbitrariamente grande.)

3.3.1. Producto de matrices contractivos

En esta sección estudiaremos productos de matrices $A = A_n ... A_1$ con $A_i \in \mathcal{G}(C)$ tal que toda matriz en $B(A, \epsilon)$ es hiperbólica contractiva. Comencemos con un lema elemental.

Lema 3.3.1. *Sea $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineal invertible. Entonces existen $\{e_1, f_1\}$ y $\{e_2, f_2\}$ ortonormales tales que $Ae_1 = m(A)e_2$ y $Af_1 = \|A\| f_2$.*

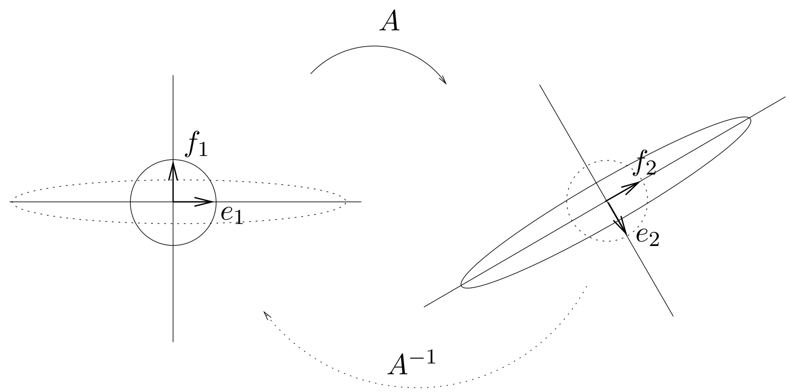


Figura 3.5:

Demostración: Sea $S^1 = \{v : \|v\| = 1\}$. Si existe r tal que $\|Av\| = r$ para todo $v \in S^1$ entonces A es una roto-homotecia y no hay nada que probar. Si esto no sucede, entonces $A(S^1)$ es una elipse. Designemos por e y E su semiejes menor y mayor. Es claro sus direcciones son perpendiculares y que $m(A) = e, \|A\| = E$. Luego definimos $\{e_2, f_2\}$ ortonormales en las direcciones de estos ejes. Sea $e_1 = \frac{A^{-1}e_2}{\|A^{-1}e_2\|}$ y $f_1 = \frac{A^{-1}f_2}{\|A^{-1}f_2\|}$. Falta ver que $\{e_1, f_1\}$ son perpendiculares, pero esto resulta de aplicar el razonamiento anterior a A^{-1} y observando que $\|A^{-1}\| = m(A)^{-1}$ y que $m(A^{-1}) = \|A\|^{-1}$. $\square$

El siguiente corolario lo usaremos mas adelante.

Corolario 3.3.1. *Sea $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineal invertible, $\delta > 0$ y $v \in \mathbb{R}^2$. Entonces existe una rotación $R, \|R - Id\| < 2\delta$ tal que*

$$\|ARv\| \geq \delta \|A\| \|v\|.$$

Demostración: Sean $\{e_i, f_i\}, i = 1, 2$ como en el lema anterior. Luego, es claro que existe R como en el enunciado tal que $Rv = ae_1 + bf_1$ donde $|b| \geq \delta\|v\|$. Luego

$$\|ARv\|^2 = a^2\|Ae_1\|^2 + b^2\|Af_1\|^2 \geq b^2\|A\|^2$$

de donde $\|ARv\| \geq \delta\|A\|\|v\|$. $\square$

Lema 3.3.2. *Sea* $\epsilon > 0$. *Entonces existe* $K = K(\epsilon, C)$ *tal que si* $A = A_n ... A_1$ *con* $A_i \in \mathcal{G}(C)$ *y toda* $A' \in B(A, \epsilon)$ *es contractiva, entonces* $\|A'\| \leq K$ *para toda* $A' \in B(A, \epsilon/2)$.

Demostración: Como $\epsilon < \frac{1}{2C} < C$, si $A' = A'_n ... A'_1 \in B(A, \epsilon)$ con $\|A'_i - A_i\| < \epsilon$ entonces $A'_i \in \mathcal{G}(2C)$. Por otra parte, si $A' \in B(A, \epsilon/2)$ entonces toda $B \in B(A', \epsilon/2)$ es hiperbólica contractiva. Sea $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{4C}$, $\alpha = \epsilon_1/2$ y n_1 tal que $(1 + \epsilon_1)^{-n_1} < \alpha$. Afirmamos que $K = \text{máx}\{(2C)^{n_1}, 1/\alpha\}$ satisface el lemma.

Sea entonces $A = A_n .... A_1$ como en el lemma y $A' = A'_n ... A'_1 \in B(A, \epsilon/2)$. Luego, si $n \leq n_1$ entonces $\|A'\| \leq \|A'_n\| ... \|A'_1\| \leq (2C)^{n_1} \leq K$. Supongamos entonces que $n \geq n_1$. Afirmamos que en ese caso se tiene que $m(A') \leq \alpha$. De lo contrario, tomando $A''_i = (1+\epsilon_1)A'_i$ concluimos que $A'' = A''_n ... A''_1 \in B(A', \epsilon/2)$ y luego $m(A'') = (1 + \epsilon_1)^n m(A') > \alpha \frac{1}{\alpha} = 1$ y por lo tanto A'' no es contractiva.

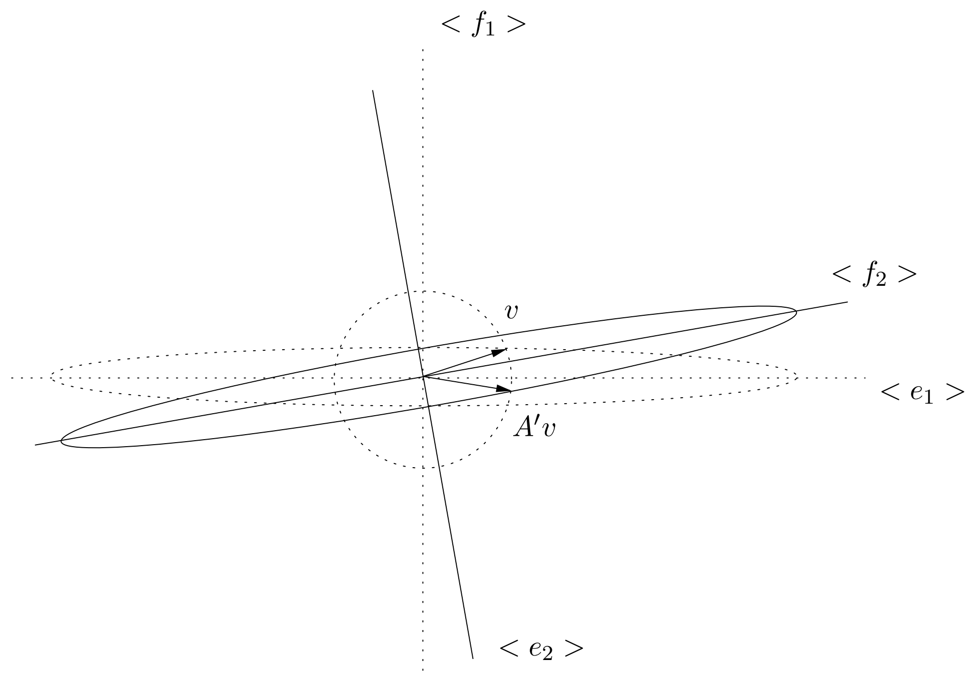


Figura 3.6:

Ahora, si $\|A'\| > K$ llegaremos a una contradicción. Consideremos $\{e_i, f_i\}, i = 1, 2$ como en el lema 3.3.1. Sea $v = ae_1 + bf_1, \|v\| = 1$ tal que $\|A'v\| = 1$. Como $A'v = am(A')e_2 + b\|A'\|f_2$ y por lo tanto $\sphericalangle(A'v, f_2) \leq \frac{|a|m(A')}{|b|\|A'\|} < m(A') \leq \alpha$. Análogamente, razonando con A'^{-1} concluimos que $\sphericalangle(v, e_1) \leq \alpha$. Afirmamos que necesariamente $\sphericalangle(e_1, f_2) < 2\alpha$. De lo contrario, consideremos el cono $V = \{u : \sphericalangle(u, e_1) \geq \alpha\}$. Pero entonces $A'(V) \subset V$ y tendríamos una dirección $< u >$ invariante, pero como $\|A'u\| \geq 1$ pues $u \in V$ tenemos que A' no es contractiva lo cual es absurdo. Pero entonces, $\sphericalangle(v, A'v) \leq 2\alpha < \epsilon_1$. Luego, existe rotación R tal que $\|R\| \leq \epsilon_1$ tal que $R(A'v) = \pm v$. Sea $B_i = A'_i$ si $1 \leq i < n$ y $B'_n = R \circ A'_n$. Entonces $B = B_n....B_1 \in B(A', \epsilon/2)$ y tiene valor propio de modulo 1. Esto es una contradicción y concluye la demostración del lema. $\square$

Para lo que sigue, usaremos la siguiente notación: si $A_1, ..., A_n \in GL_2(\mathbb{R}^2)$, escribimos $\prod_{j=1}^n A_j = A_n....A_1$.

Lema 3.3.3. *Sea $\epsilon > 0$ y $C > 0$. Entonces existen $K_0 > 0, 0 < \lambda < 1$ y $m_0 > 0$ tal que si $A = A_n...A_1, A_i \in \mathcal{G}(C)$ y toda $A' \in B(A, \epsilon)$ es hiperbólica contractiva, entonces tomando $k = [n/m_0]$ se tiene que*

$$\prod_{j=0}^{k-1} \left\| \prod_{i=1}^{m_0} A_{jm_0+i} \right\| \leq K_0 \lambda^k.$$

Demostración: Sea K como en el anterior Lemma 3.3.2. Sea $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{4C}$ y $\delta < \epsilon_1/2$. Sea m_0 tal que $\lambda^{-1} := \delta(1+\epsilon_1)^{m_0} > 1$. Sea ahora $A = A_n....A_1$ como en el enunciado y $k = [n/m_0]$. Consideremos $A'_i = (1 + \epsilon_1)A_i, i = 1...., km_0$. Definimos inductivamente $v_0, v_1, ..., v_k$ inductivamente así: sea $v_0 \in \mathbb{R}^2$ cualquiera. Para $0 \leq j \leq k - 1$ sea

$$v_{j+1} = \prod_{i=1}^{m_0} A'_{jm_0+i} R_j v_j$$

donde R_j es una rotación como en Corolario 3.3.1, es decir $\|R_j - I\| < 2\delta < \epsilon_1$ y

$$\left\| \prod_{i=1}^{m_0} A'_{jm_0+i} R_j v_j \right\| \geq \delta \left\| \prod_{i=1}^{m_0} A'_{jm_0+i} \right\| \|v_j\|.$$

Hacemos $A''_1 = A'_1 \circ R_0$ y para $j = 1, ..., k-1$ hacemos $A''_{jm_0} = A'_{nm_0} \circ R_j$. Si i no es múltiplo de m_0 definimos $A''_i = A'_i$. Observemos que $\prod_{i=1}^{m_0} A''_{jm_0+i} v_j = v_{j+1}$. Luego

$$\begin{aligned} \|v_{j+1}\| &= \left\| \prod_{i=1}^{m_0} A''_{jm_0+i} v_j \right\| = \left\| \prod_{i=1}^{m_0} A'_{jm_0+i} R_j v_j \right\| \\ &\geq \delta \left\| \prod_{i=1}^{m_0} A'_{jm_0+i} \right\| \|v_j\| \\ &= \delta(1+\epsilon_1)^{m_0} \left\| \prod_{i=1}^{m_0} A_{jm_0+i} \right\| \|v_j\|. \end{aligned}$$

Además se tiene que $A'' = A''_n....A''_1 \in B(A, \epsilon/2)$ y por lo tanto por el Lema 3.3.2 se tiene que

$$\|A''\| \leq K$$

Además, $m(A''_i) \geq \frac{1}{2C}$. Luego

$$\begin{aligned} K\|v_0\| &\geq \|A''v_0\| = \|A''_n...A''_{km_0+1} v_k\| \\ &\geq m(A''_n...A''_{km_0+1})\|v_k\| \geq \left(\frac{1}{2C}\right)^{m_0} \|v_k\| \\ &\geq \left(\frac{1}{2C}\right)^{m_0} \delta(1+\epsilon_1)^{m_0} \left\| \prod_{i=1}^{m_0} A_{(k-1)m_0+i} \right\| \|v_{k-1}\| \geq ... \\ &\geq \left(\frac{1}{2C}\right)^{m_0} \delta^{m_0}(1+\epsilon_1)^{km_0} \prod_{j=0}^{k-1} \left\| \prod_{i=1}^{m_0} A_{jm_0+i} \right\| \|v_0\| \end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando $K_0 = K\left(\frac{2C}{\delta}\right)^{m_0}$ tenemos que

$$\prod_{j=0}^{k-1} \left\| \prod_{i=1}^{m_0} A_{jm_0+i} \right\| \leq K_0(1+\epsilon_1)^{-km_0} = K_0 \lambda^k.$$

$\square$

3.3.2. Producto de matrices tipo silla

Ahora estudiaremos producto de matrices A “establemente” hiperbólicas tipo silla. El primer lema nos dice que los valores propios estan (exponencialmente) uniformemente alejados de 1.

Lema 3.3.4. *Sea $A = A_n \dots A_1$ con $A_i \in \mathcal{G}(C)$ y tal que A es hiperbólica tipo silla. Sean λ, σ los valores propios de A, $0 < |\lambda| < 1 < |\sigma|$. Supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que si $A' \in B(A, \epsilon)$ también es hiperbólica. Entonces, existe ϵ_1 tal que $|\lambda| < (\frac{1}{1+\epsilon_1})^n$ y $|\sigma| > (1+\epsilon_1)^n$.*

Demostración: Sea $\epsilon_1 < \epsilon/M$. Luego si $\|C - I\| < \epsilon_1$ entonces $\|CB - B\| < \epsilon$ si $B \in \mathcal{G}(C)$. Supongamos, por ejemplo, que $(\frac{1}{1+\epsilon_1})^n < |\lambda| < 1$. Sea $\mu = |\lambda|^{1/n}$ y sea $A'_i = \frac{1}{\mu} A_i$ y sea $A' = A'_n \dots A'_1$. Sea v tal que $Av = \lambda v$. Entonces $A'v = \frac{\lambda}{\mu^n} v$ y A' no es hiperbólica. □

Observación 3.3.1. *En el caso que estamos tratando, como los subespacios son unidimensionales, no hay diferencia entre el módulo del valor propio, la norma del diferencial $\|A_{/E^s}\|$ y el producto $\prod_i \|A_{i/E_i^s}\|$ donde $E_i^s = A_i ... A_1(E^s)$. Cuando estamos en dimensiones mayores, vale un resultado análogo al Lema 3.3.3.*

El siguiente lema nos dice que si en una matriz hiperbólica el ángulo entre el espacio estable e inestable es muy chico entonces con una pequeña perturbación logramos que no sea hiperbólica.

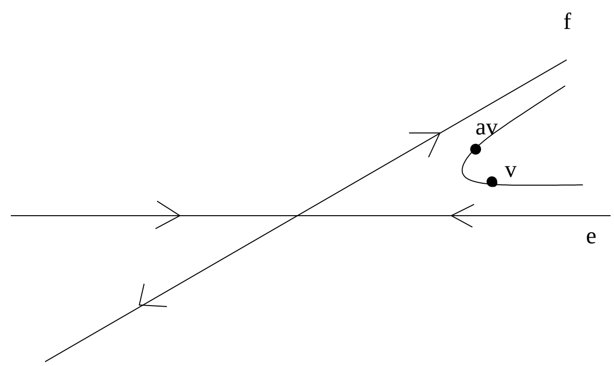


Figura 3.7: Si hay ángulos pequeños, hay puntos cuya imagen está cerca.

Lema 3.3.5. *Sea $A = \begin{pmatrix} \lambda & K \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$ con $0 < |\lambda| < 1 < \sigma$. Supongamos que $|\sigma - \lambda| > c > 0$. Sea $0 < \epsilon_1 < 1/2$ y sea $\epsilon_0 < \epsilon_1$ tal que $\frac{2\epsilon_0}{c} < \epsilon_1$.*

Entonces, si $\left|\frac{\sigma-\lambda}{K}\right| < \epsilon_0$ *existe* $\eta, |\eta| < \epsilon_1$ *tal que* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \eta & 1 \end{pmatrix} A$ *tiene valor propio* 1.

Demostración:

$$Det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \eta & 1 \end{pmatrix} A - Id\right) = (\sigma-1)(\lambda-1) - \eta K.$$

Luego, si $\eta = \frac{(\sigma-1)(\lambda-1)}{K}$ se tiene que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \eta & 1 \end{pmatrix} A$ tiene valor propio 1. Es inmediato ver que $|\eta| < \epsilon_1$. □

Corolario 3.3.2. *Sea* $\epsilon > 0$. *Existe* α *tal que si* $A = A_n \dots A_1$ *es hiperbólica con* $A_i \in \mathcal{G}(C)$ *y se cumple que* A' *es hiperbólica para cualquier* $A' \in B(A, \epsilon)$ *entonces se tiene que* $\sphericalangle(E^s_A, E^u_A) > \alpha$.

Demostración: Sea ϵ_1 como en el lema 3.3.4 y sea $c = \epsilon_1$. Consideremos ϵ_0 como en el lema 3.3.5. Basta tomar entonces $\tan(\alpha) = \epsilon_0$. Puesto que si el resultado no fuera cierto basta expresar A en la base $E^s_A \oplus (E^s_A)^\perp$ y considerar $A'_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \eta & 1 \end{pmatrix} A_n$ y $A'_i = A_i, i = 1, ..., n-1$. con η como en lema anterior. □

Sea $A = A_n, ...A_1$ con $A_i \in \mathcal{G}(C)$. Denotaremos por

$$A(i) := \prod_{j=1}^{i} A_j = A_i \dots A_1; \quad 1 \le i \le n.$$

Si A es hiperbólica, sea $E^s_i := A(i)E^s_A$ y $E^u_i := A(i)E^u_A$.

Observación 3.3.2. *Si* $A = A_n...A_1$ *es hiperbólica y también lo es cualquier* $A' \in B(A, \epsilon)$ *entonces* $C = A_m...A_1.A_n...A_{m+1}$ *y cualquier matriz en* $B(C, \epsilon)$ *también es hiperbólica. Por lo tanto, en estas condiciones* $\sphericalangle(E^s_i, E^u_i) > \alpha$.

Lema 3.3.6. *Sea* $\epsilon > 0$. *Existe* $m > 0$ *tal que si* $A_i \in \mathcal{G}(C), i = 1, \dots, n$ *con* $n > m$ *y* $A = A_n...A_1$ *es hiperbólica y* A' *es hiperbólica para cualquier* $A' \in B(A, \epsilon)$ *entonces si* $v \in E^s_A$, $w \in E^u_A$ *con* $\|v\| = \|w\| = 1$ *se tiene que*

$$\frac{\|A(m)v\|}{\|A(m)w\|} < \frac{1}{2}.$$

Demostración: Observar primero que existe α tal que si $A = A_n \dots A_1$ es hiperbólica y toda matriz en $B(A, \epsilon)$ es hiperbólica, entonces para cualquier $A' \in B(A, \epsilon/2)$ se tiene que $\sphericalangle(E^s_{A'}, E^u_{A'}) > \alpha$.

Por otra parte si $A = A_n ... A_1$ es hiperbólica y $\sphericalangle(E^s_i, E^u_i) > \alpha$ para $i = 1, ..., n$ entonces para cada i podemos definir una nueva métrica $<,>_i$ declarando que E^s_i y E^u_i sean ortogonales. Estas métricas son "uniformemente" equivalentes a la métrica original. En particular, existe K tal que si $u \in \mathbb{R}^2$ entonces $\|u\|_i \leq K\|u\|$. También, dado β_0 existe β_1 tal que si el ángulo entre dos subespacios es menor que β_1 según $<,>_i$ entonces el ángulo según la métrica original es menor que β_0. Tomemos $\beta_0 < \alpha$ y consideremos este β_1.

Hecha esta observación probemos la existencia de m. Sea $\epsilon_1 = \epsilon/2C$ y sea $\epsilon_0 < \epsilon_1/K$. Sea m tal que $2(1+\epsilon_0)^{m-1} > \frac{1}{\beta_1}$. Afirmamos que este m es el buscado. Razonando por absurdo, supongamos que si A es como en el enunciado, entonces

$$\frac{\|A(m)v\|}{\|A(m)w\|} \geq \frac{1}{2}.$$

Con respecto a la descomposición $E^s_i \oplus E^u_i$ definamos

$$A'_i = A_i \begin{pmatrix} 1+\epsilon_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si $i = 2, ..., n-1$. Observemos que

$$A_n A'_{n-1} ... A'_2 A_1 \begin{pmatrix} \epsilon_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\epsilon_0)^{n-2}\lambda\epsilon_0 \\ \sigma \end{pmatrix}$$

ya que no se han modificado los subespacios invariantes. Sea

$$\eta = \frac{(1+\epsilon_0)^{n-2}\lambda\epsilon_0}{\sigma}.$$

Se tiene que $|\eta| < \epsilon_0$ ya que $|\lambda| < (1+\epsilon_1)^{-n}$. Consideremos ahora

$$A'_1 = A_1 \begin{pmatrix} 1 & \epsilon_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A'_n = \begin{pmatrix} 1 & -\eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A_n.$$

Tenemos que $A' = A'_n \dots A'_1 \in B(A, \epsilon/2)$. Además $E^s_{A'} = E^s_A$. Por otra parte

$$A' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A'_n A'_{n-1} ... A'_2 A_1 \begin{pmatrix} \epsilon_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta\sigma \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix}$$

y por lo tanto $E^u_{A'} = E^u_A$. Por otra parte

$$\begin{aligned}
\sphericalangle(A'(m)(E^s_{A'}), A'(m)(E^u_{A'})) &< \frac{\|A'(m)w\|}{\|A'(m)v\|} \\
&\leq \frac{\|A(m)w\|}{(1+\epsilon_0)^{m-1}\|A(m)v\|} \\
&\leq \frac{1}{2(1+\epsilon_0)^{m-1}} \\
&< \beta_1.
\end{aligned}$$

Esto es absurdo pues $A' \in B(A, \epsilon/2)$ y por lo tanto los ángulos (según la métrica original) de los subespacios invariantes son $> \alpha$. $\square$

3.4. Aplicaciones a $\mathcal{F}^1(M)$.

En esta sección aplicaremos los resultados de producto de matrices que estudiamos en la sección anterior a difeomorfismos de variedades tal que sus puntos periódicos son "establemente hiperbólicos". La vinculación esta dada por el Lema de Franks (Lema 3.1.1).

Sea M una variedad. Denotemos por $\mathcal{F}^1(M)$ al interior C^1 del conjunto de los difeomorfismos tal que todos sus puntos periódicos son hiperbólicos, es decir:

$$\mathcal{F}^1 = int\{f \in Diff^1(M) : \text{ si } p \in Per(f) \Longrightarrow p \text{ es hiperbólico}\}.$$

Equivalentemente, si $f \in \mathcal{F}^1(M)$ entonces existe $\mathcal{U}$ entorno de f en $Diff^1(M)$ tal que si $g \in \mathcal{U}$ y $p \in Per(g)$ entonces p es hiperbólico.

El siguiente resultado nos da mucha información sobre el comportamiento del diferencial en los puntos periódicos y será fundamental para el capítulo siguiente.

Teorema 3.4.1. *[Ma1] Sea $f \in \mathcal{F}^1(M)$. Entonces existe $\mathcal{V}_0$ entorno de f y constantes $K_0 > 0, 0 < \lambda < 1$ y naturales m_0 y m tal que para $g \in \mathcal{V}_0$ se cumple:*

1. *si p es un punto periódico de periodo $n \geq m_0$ y $E^s(p), E^u(p)$ son los espacios estables e inestables de p entonces, haciendo $k = [n/m_0]$, se tiene que*
$$\prod_{j=0}^{k-1} \|Dg^{m_0}_{/E^s(g^{jm_0}(p))}\| < K_0\lambda^k$$

$$\prod_{j=0}^{k-1} \|Dg^{-m_0}_{/E^u(g^{-jm_0}(p))}\| < K_0\lambda^k$$

2. si $p \in Per(g)$ es tipo silla y período $\geq m$ entonces

$$\|Dg^{m}_{/E^s(p)}\|.\|Dg^{-m}_{/E^u(g^m(p))}\| < \frac{1}{2}.$$

Demostración: Haremos la demostración en caso de que M es una variedad de dimensión dos. El caso general se deduce de la misma forma, pero usando las versiones a cualquier dimensión de los resultados de la sección anterior (análogos resultados pero demostración mas técnica). Sea $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}^1(M)$ entorno de f. Utilizando el lema de Franks vemos que existe $\mathcal{V}_0$ y $\epsilon > 0$ tal que si $g \in \mathcal{V}_0$ y $p \in Per(g)$ y $L_i : T_{g^i(p)}M \to T_{g^{i+1}(p)}M; i = 0, ..., n-1$ donde $n = per(p)$ verifican $\|L_i - Dg_{g^i(p)}\| < \epsilon$ entonces existe $\tilde{g} \in \mathcal{U}$ tal que $\mathcal{O}(p, \tilde{g}) = \mathcal{O}(p, g)$ y $D\tilde{g}_{g^i(p)} = L_i$. Podemos suponer además que existe $C > 0$ tal que para todo $g \in \mathcal{V}_0$ se tiene que $\frac{1}{C} \leq m(Dg_x) \leq \|Dg_x\| \leq C$ para todo $x \in M$.

Identificando cada plano tangente con $\mathbb{R}^2$ y haciendo $A_i = Dg_{g^i(p)}$ tenemos que $A = A_n \dots A_1$ es hiperbólica y toda matriz en $B(A, \epsilon)$ también es hiperbólica (pues de lo contrario existiría $\tilde{g} \in \mathcal{U}$ tal que p es un punto periódico no hiperbólico de $\tilde{g}$ lo cual es absurdo pues $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}^1(M)$). Por lo tanto estamos en condiciones de aplicar los resultados de la sección anterior.

Para la primera parte, la existencia de K_0, λ y m_0 esta dada por el Lema 3.3.3 cuando p es un punto periódico atractor o repulsor (apicando el mismo lema a f^{-1}). Cuando p es silla, en el caso de dimensión dos se deduce del Lema 3.3.4 (en dimensión mayor ver Observación 3.3.1).

La segunda parte se deduce del Lema 3.3.6. □

Observación 3.4.1. *En el caso $dimM = 2$ y p punto periódico tipo silla, entonces en 1) se puede tomar $K_0 = 1$ y $m_0 = 1$ por el Lema 3.3.4.*

Para ver la potencia del resultado anterior, demostraremos el siguiente teorema debido a Pliss:

Teorema 3.4.2. *[Pl] Sea $f \in \mathcal{F}^1(M)$. Entonces f tiene una cantidad finita de puntos periódicos atractores (pozos).*

Demostración: Supongamos por contradicción que $f \in \mathcal{F}^1(M)$ tiene infinitos puntos periódicos atractores que denotaremos por p_n. El período π_n de p_n tiene que crecer a infinito con n pues de lo contrario, tomando un punto de acumulación, llegaríamos a la existencia de un punto periódico no hiperbólico de f. Luego, a partir un cierto n_0, se tiene que $\pi_n > m_0$ para todo $n \geq n_0$ y por lo tanto, si $n \geq n_0$ tenemos que

$$\prod_{j=0}^{k_n-1} \left\| Df^{m_0}_{f^{jm_0}(p)} \right\| \leq K_0 \lambda^{k_n} \tag{3.1}$$

por el teorema anterior, donde $k_n = [\pi_n/m_0]$.

La idea es probar que puntos periódicos atractores con esta última condición tiene una cuenca de atracción uniforme. Como diferentes órbitas periódicas atractoras tienen cuencas de atracción disjuntas llegaríamos a un absurdo. Precisamos el siguiente lema que es una versión simple de un lema debido a Pliss ([Pl]) y que veremos mas adelante (ver Lema 4.4.2).

Lema 3.4.1. *Sea $0 < \gamma < 1$ y una sucesión $\{a_n\}$ de numeros reales positivos y periódica, es decir, existe N tal $a_{i+N} = a_i$ para todo i. Supongamos que $\prod_{i=0}^{N-1} a_i \leq \gamma^N$. Entonces, existe j tal que $\prod_{i=0}^{l-1} a_{i+j} \leq \gamma^l$ para todo $l \geq 1$.*

Demostración: Supongamos por contradicción que para todo j existe $n(j)$ tal que $\prod_{i=0}^{n(j)-1} a_{i+j} > \gamma^{n(j)}$. Obviamente tenemos que $n(j) < N$ y por lo tanto existe $1 > \gamma_1 > \gamma$ tal que la desigualdad anterior vale para γ_1, es decir $\prod_{i=0}^{n(j)-1} a_{i+j} > \gamma_1^{n(j)}$ para todo j. Tomemos $n_0 = n(0), n_1 = n(n_0)$ e inductivamente $n_{k+1} = n(n_k)$. Sea $c = min\{a_i\}$ y sea m tal que

$$c^N \gamma_1^{Nm} > \gamma^{Nm}.$$

Podemos tomar k tal que $(m-1)N < n_0 + n_1 + ... + n_k \leq mN$. Pero entonces

$$\begin{aligned} \gamma^{Nm} &\geq \prod_{i=0}^{Nm-1} a_i = \prod_{s=0}^{k-1} \prod_{i=0}^{n_s-1} a_{i+n_s} \prod_{i=n_0+\ldots+n_k}^{Nm-1} a_i \\ &\geq c^N \prod_{s=0}^{k-1} \gamma_1^{n_s} \geq c^N \gamma_1^{Nm} > \gamma^{Nm}. \end{aligned}$$

Esto es absurdo y terminamos la demostración del lema $\square$

Continuando con la demostración del teorema, sea $\gamma, \lambda < \gamma < 1$ y t_0 tal que $K_0\lambda^k < \gamma^k$ para todo $k \geq t_0$. Luego, si p_n es tal que $\pi_n[\pi_n/m_0] = \pi_n k_n > t_0$ entonces, haciendo

$$a_i = \left\| Df^{m_0}_{f^{im_0}(p_n)} \right\|$$

para $i \geq 0$ tenemos que a_i es periódica (de periodo $N = \pi_n k_n$) y además por (3.1)

$$\prod_{i=0}^{N-1} a_i \leq (K_0\lambda^k)^{\pi_n} \leq \gamma^N.$$

Aplicando el lema tenemos entonces que existe j tal que

$$\prod_{i=0}^{l-1} a_{i+j} \leq \gamma^l \quad \forall\ l \geq 1.$$

Si llamamos $q_n = f^{jm_0}(p_n)$ concluimos entonces que

$$\prod_{i=0}^{l-1} \left\| Df^{m_0}_{f^{im_0}(q_n)} \right\| \leq \gamma^l \ \ \forall l \geq 1. \tag{3.2}$$

Es decir, hemos encontrado $q_n \in \mathcal{O}(p_n)$ donde el diferencial tiene un comportamiento contractivo uniforme en el futuro. Esto implica que q_n tiene una cuenca uniforme. Para ver esto, sea $c > 0$ tal que $\gamma(1+c) := \nu < 1$ y sea $\epsilon > 0$ tal que si $d(x,y) < \epsilon$ entonces

$$\frac{\|Df^{m_0}_x\|}{\|Df^{m_0}_y\|} < 1 + c. \tag{3.3}$$

Ahora, sea $z \in B(q_n, \epsilon)$. Se tiene entonces por (3.3) que

$$\|Df^{m_0}_z\| < \|Df^{m_0}_{q_n}\|(1+c) < \nu. \tag{3.4}$$

Por lo tanto

$$f^{m_0}(B(q_n,\epsilon)) \subset B(f^{m_0}(q_n), \nu\epsilon) \subset B(f^{m_0}(q_n), \epsilon). \tag{3.5}$$

De ahí deducimos, usando (3.2), (3.3) y (3.5), que

$$\|Df^{m_0}_{f^{m_0}(z)}\|\|Df^{m_0}_z\| < \|Df^{m_0}_{f^{m_0}(q_n)}\|\|Df^{m_0}_{q_n}\| \leq \gamma^2(1+c)^2 < \mu^2. \tag{3.6}$$

Pero entonces

$$f^{2m_0}(B(q_n,\epsilon)) \subset B(f^{2m_0}(q_n),\nu^2\epsilon) \subset B(f^{2m_0}(q_n),\epsilon).$$

Razonando inductivamente concluimos que

$$\prod_{i=0}^{l-1}\left\|Df^{m_0}_{f^{im_0}(z)}\right\| \leq (1+c)^l \prod_{i=0}^{l-1}\left\|Df^{m_0}_{f^{im_0}(q_n)}\right\| < \mu^l$$

y que

$$f^{lm_0}(B(q_n,\epsilon)) \subset B(f^{lm_0}(q_n),\nu^l\epsilon)$$

para todo $l \geq 1$. Esto quiere decir que si $z \in B(q_n,\epsilon)$ entonces que $d(f^{jm_0}(z), f^{jm_0}(q_n)) \to_j 0$.

Finalmente llegaremos a la contradicción buscada: existen $n_1 \neq n_2$ suficientemente grandes ($\pi_{n_i}/m_0 > t_0$) tal que existen $q_{n_i} \in \mathcal{O}(p_{n_i})$ que satisfacen lo anterior y que $B(q_{n_1},\epsilon) \cap B(q_{n_2},\epsilon) \neq \emptyset$. Pero si z está en la intersección se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &< d(f^{jm_0}(q_{n_1}), f^{jm_0}(q_{n_2})) \\ &\leq d(f^{jm_0}(z), f^{jm_0}(q_{n_1})) + d(f^{jm_0}(z), f^{jm_0}(q_{n_2})) \to 0. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración del teorema. □

Para terminar este capítulo, como aplicación del Closing Lemma, probemos que si $f \in \mathcal{F}^1$ entonces $\Omega(f) = \overline{Per(f)}$.

Lema 3.4.2. *Sea $f \in \mathcal{F}^1$. Entonces existe $\mathcal{V}$ entorno de f tal que si U es entorno de $\overline{Per(f)}$ y $g \in \mathcal{V}$ es tal $g = f$ en U entonces $Per(g) = Per(f)$. Mas en particular, si $P_i(f)$ denota el conjunto de los puntos periódicos de indice i e U_i es un entorno de $\overline{P_i(f)}$ y $g \in \mathcal{V}$ es tal $g = f$ en U_i entonces $P_i(g) = P_i(f)$. Además $\Omega(f) = \overline{Per(f)}$.*

Demostración: Sea $\mathcal{V}$ componente conexa de $\mathcal{F}^1(M)$ que contiene a f. Sea U entorno de $\overline{Per(f)}$ y sea $g \in \mathcal{V}$ con $g = f$ en U. Supongamos que existe un punto periódico de período n de g en U^c. Consideremos $\nu : \mathcal{V} \to \mathbb{Z}$ donde $\nu(h) = \sharp\{y : h^n(y) = y, h^j(y) \neq y, 1 \leq j \leq n-1\}$. Es claro que $\nu(g) > \nu(f)$. Por otra parte ν es continua (puesto que $\mathcal{V} \subset \mathcal{F}^1(M)$ y entonces hay una cantidad finita de puntos periódicos de período n y por Teorema 1.2.3 tenemos continuidad) y como $\mathcal{V}$ conexo, es constante, absurdo. El mismo argumento se aplica a los puntos periódicos de índice i.

Probemos ahora entonces que $\Omega(f) = \overline{Per(f)}$. Supongamos por absurdo que existe $x \in \Omega - \overline{Per(f)}$. Sea $\mathcal{V}$ como antes y sea N como en el Connecting Lemma. Sea U entorno compacto de $\overline{Per(f)}$ tal que $f^j(x) \notin U$, $0 \leq j \leq N$. Pero entonces, existe $g \in \mathcal{V}$ tal que $g = f$ en U y g tiene un punto periódico cercano a x, esto es absurdo por lo anterior. $\square$

Capítulo 4

La conjetura de estabilidad

En el capítulo 2 vimos que la presencia de hiperbolicidad implica algún tipo de estabilidad. En particular probamos que si f es Anosov, entonces es C^1 estructuralmente estable y que si f es L-hiperbólico o Axioma A sin ciclos entonces es Ω-estable. En realidad, Palis y Smale formularon la siguiente conjetura (ver Definición 2.6.2):

Conjetura de estabilidad ([PS]):

- $f : M \to M$ es C^r estructuralmente estable si y solamente si f es Axioma A y satisface la condición de transversalidad fuerte.

- f es C^r Ω-estable si y solamente si f es Axioma A sin ciclos.

Los Teoremas 2.6.2 y 2.6.3 dicen que si f es Axioma A sin ciclos (con transversalidad fuerte) entonces f es Ω -estable (respec. estructuralmente estable). En este capítulo nos dedicaremos a probar el recíproco. De hecho, lo importante es probar que si es C^1 Ω-estable o C^1 estructuralmente estable entonces es Axioma A pues se tienen el siguiente resultado (que no demostraremos):

Teorema 4.0.3. *([P2], [R3])*

1. *Supongamos que f es C^r Ω estable (o $f \in \mathcal{F}^1(M)$) y Axioma A. Entonces f no tiene ciclos.*

2. *Supongamos que f es C^r estructuralmente estable y Axioma A. Entonces f satisface la condición de transversalidad fuerte.*

Si bien mucha gente ha contribuido con importantes resultados en relación a la conjetura de estabilidad, el nombre clave es Mañe, quien a lo largo de varios trabajos desarrollo ideas novedosas y técnicas fundamentales para probar la conjetura de estabilidad. El trabajo principal es [Ma2] donde prueba la conjetura de estabilidad (C^1 estructuralmente estable implica Axioma A). Usando las ideas contenidas en este trabajo, Palis [P3] prueba la $C^1\,\Omega$ conjetura de estabilidad. Recordemos que si f es C^1-estructuralmente estable entonces f es $C^1\Omega$ estable. Por otra parte, si f es $C^1\,\Omega$-estable entonces $f \in \mathcal{F}^1(M)$. Finalmente, Aoki ([A]) y Hayashi ([Ha2]) probaron que $\mathcal{F}^1(M)$ implica Axioma A.

El objetivo principal de este capítulo es el siguiente:

Teorema 4.0.4. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo en $\mathcal{F}^1(M)$. Entonces f es L-hiperbólico (o Axioma A).*

Las ideas desarrolladas por Mañé han probado ser muy fecundas a la hora de estudiar fenómenos robustos en la topología C^1. La demostración que haremos sigue estas ideas. sin embargo, debido al progreso de la técnica (fundamentalmente el Connecting Lemma) varios pasos serán reducidos.

La idea básica de la demostración es utilizar la descomposición en espacios estables e inestables en los puntos periódicos. El Teorema 3.4.1 nos da una información inicial pero importante: hay buena contracción en el espacio estable pero *en el período* de un punto periódico (análogamente para el inestable). Sin embargo, para obtener hiperbolicidad, deberíamos probar contracción uniforme o "paso a paso". Pero si esto no sucede, entonces en las órbitas periódicas hay "huecos" con hiperbolicidad muy débil. La idea es, a partir de estos "huecos" y mediante un argumento de sombreado, construir una órbita periódica con hiperbolicidad débil *en el período*, llegando así a una contradicción.

Primero estudiaremos el concepto de descomposición dominada. En la sección 4.2 probaremos el teorema en un caso particular y sin apelar a resultados que no hemos probado, básicamente usando la técnicas de las secciones 1.5, 3.3.2 y 3.4. En la sección 4.3 demostraremos el teorema para el caso de superficies. Finalmente, en la sección 4.4 demostraremos el teorema en general. De cualquier forma, estas secciones son independientes.

4.1. Descomposición Dominada

El concepto de descomposición dominada es una forma débil de hiperbolicidad. Al igual que en la hiperbolicidad, tenemos una descomposición del fibrado tangente sobre un un conjunto en suma directa de subfibrados invariantes, pero, a diferencia de la hiperbolicidad, no tenemos *apriori* información sobre contracción o expansión uniforme en estos subfibrados, solo tenemos una relación de dominación entre ellos.

Definición 4.1.1. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo. Un conjunto invariante Λ tiene descomposición dominada de indice i si para cada $x \in \Lambda$ existe una descomposición del espacio tangente $T_xM = E(x) \oplus F(x)$ (ambos no triviales) tales que:*

1. *$dimE(x) = i$ para todo $x \in \Lambda$.*
2. *$Df_xE(x) = E(f(x))$ y $Df_xF(x) = F(f(x))$.*
3. *Existen constantes $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que*

$$\|Df^n_{/E(x)}\|\|Df^{-n}_{/F(f^n(x))}\| \leq C\lambda^n, \; n \geq 0$$

Observación 4.1.1. *Recordando que $m(A)$ denota la mínima norma o co-norma de A, la condición 3) es equivalente a*

$$\|Df^n_{E(x)}\| \leq C\lambda^n m(Df^n_{/F(x)})$$

y también equivalente a

$$\frac{\|Df^n_x v_E\|}{\|v_E\|} \leq C\lambda^n \frac{\|Df^n_x v_F\|}{\|v_F\|} \;\; \forall v_E \in E(x), v_F \in F(x).$$

Nos referiremos a C, λ como constantes de dominación.

Teorema 4.1.1. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y sea Λ un conjunto con descomposición dominada de indice i. Entonces:*

1. *$\overline{\Lambda}$ también tiene descomposición dominada de indice i.*
2. *Los fibrados $E(x)$y $F(x)$ varían continuamente.*
3. *El ángulo entre E y F esta acotado uniformemente por debajo.*

Demostración: Si $x \in \overline{\Lambda}$ tomamos $x_n \in \Lambda$ tal que $x_n \to x$ y podemos suponer que $E(x_n)$ y $F(x_n)$ convergen a subespacios $E(x)$ y $F(x)$. Definimos $E(f^n(x)) = Df^n(E(x))$ y análogamente hacemos con $F(f^n(x))$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. Luego $dimE(x) = i$ y se deduce inmediatamente que si $z = f^m(x)$ entonces

$$\|Df^n_{/E(z)}\|\|Df^{-n}_{/F(f^n(z))}\| \leq C\lambda^n,\ n \geq 0.$$

Por lo tanto, $T_xM = E(x) \oplus F(x)$.

Por otra parte, si para otra sucesión $y_n \to x$ tenemos que $E(y_n)$ converge a $\tilde{E}(x) \neq E(x)$ y $dimE(x) = dim\tilde{E}(x)$ podemos tomar $v \in \tilde{E}$ con $\|v\| = 1$ donde $v = v_E + v_F$ con $v_F \neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|Df^n_{/\tilde{E}(x)}\| &\geq \|Df^n v\| \geq \|Df^n v_F\| - \|Df^n v_E\| \\
&\geq m(Df^n_{/F(x)})\|v_F\| - \|Df^n_{E(x)}\|\|v_E\| \\
&= \|Df^n_{E(x)}\| \left(\frac{m(Df^n_{/F(x)})}{\|Df^n_{E(x)}\|}\|v_F\| - \|v_E\| \right) \\
&\geq \|Df^n_{E(x)}\| \left(\frac{\|v_F\|}{C\lambda^n} - \|v_E\| \right)
\end{aligned}$$

y por lo tanto $\frac{\|Df^n_{/\tilde{E}}\|}{\|Df^n_{/E}\|} \to \infty$. Intercambiando los papeles de E y $\tilde{E}$ llegamos a una contradicción. Esto muestra que los subespacios $E(x)$ y $F(x)$ están bien definidos. También prueba la continuidad de $E(x)$ y $F(x)$.

Finalmente, los ángulos están uniformemente acotados por debajo (de los contrario tendríamos para alguna sucesión x_n que $E(x_n)$ y $F(x_n)$ convergen respectivamente a $E(x)$ y $F(x)$ donde $E(x) \cap F(x) \neq \{0\}$ pero sabemos que $T_xM = E(x) \oplus F(x)$). $\square$

Observación 4.1.2. *En la definición de descomposición dominada se podría pedir la continuidad de los espacios $E(x)$ y $F(x)$ en vez de que tengan dimensión constante. También queremos remarcar que en un conjunto pueden co-existir varias descomposiciones dominadas (de diferente dimensión claro).*

Lema 4.1.1. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo, Λ un subconjunto invariante tal que $T_\Lambda = E \oplus F$, $dimE(x) = i$ para todo $x \in \Lambda$. Entonces* *la descomposición es dominada si y solamente si existe m_0 tal que*

$$\|Df^{m_0}_{/E(x)}\|\|Df^{-m_0}_{/F(f^{m_0}(x))}\| < \frac{1}{2} \ \forall x \in \Lambda.$$

Demostración: Para el directo basta tomar m_0 tal que $C\lambda^{m_0} < 1/2$.

Para el recíproco, sea $C_1 = \sup\left\{\frac{\|Df^j_{/E(x)}\|}{m(Df^j_{/F(x)})} : x \in \Lambda, 1 \leq j \leq m_0\right\}$, $\lambda = (1/2)^{1/m_0}$ y $C = C_1/\lambda^{m_0}$. Luego, para $n \geq 0$ escribimos $n = km_0 + r$ con $0 \leq r < m_0$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{\|Df^n_{/E(x)}\|}{m(Df^n_{/F(x)})} &\leq \frac{\|Df^r_{/E(f^{km_0}(x))}\|}{m(Df^r_{/F(f^{km_0}(x))})}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\|Df^{m_0}_{/E(f^{im_0}(x))}\|}{m(Df^{m_0}_{/F(f^{im_0}(x))})} \\
&\leq C_1\left(\frac{1}{2}\right)^k = C_1\lambda^{km_0} \leq \frac{C_1}{\lambda^{m_0}}\lambda^n = C\lambda^n
\end{aligned}$$

□

Como consecuencia de lo anterior y del Teorema 3.4.1 tenemos:

Corolario 4.1.1. *Sea $f \in \mathcal{F}^1(M)$. Entonces $\overline{Per_i(f)}$ tiene descomposición dominada de indice i.*

Ahora bien, en el capítulo 2 vimos que si un conjunto es hiperbólico para f entonces hay un entorno U del conjunto y un entorno $\mathcal{V}$ de f tal que el maximal invariante en U de $g \in \mathcal{V}$ también es hiperbólico. El resultado que sigue dice que lo mismo sucede con conjuntos de descomposición dominada. La demostración se deja como ejercicio.

Teorema 4.1.2. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y sea Λ un conjunto compacto invariante con descomposición dominada de indice i, $T_\Lambda = E \oplus F$. Entonces, existe U entorno (compacto) de Λ, $\mathcal{V}$ entorno de f tal que:*

1. *si $g \in \mathcal{V}$ entonces existe descomposición dominada de indice i , $T_xM = E(x,g) \oplus F(x,g)$ para todo $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} g^n(U)$.*
2. *Podemos elegir constantes de dominación uniformes en $\mathcal{V}$.*

3. *Además, dado $c > 0$ y m_0 existe $\delta > 0$ y podemos tomar U y $\mathcal{V}$ de forma que dados $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} g^n(U), y \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)$ con $d(x,y) < \delta$ entonces*
$$\frac{1}{1+c} \leq \frac{\|Df^{m_0}_{/E(x,f)}\|}{\|Dg^{m_0}_{/E(y,g)}\|} \leq 1+c$$
$$\frac{1}{1+c} \leq \frac{\|Df^{-m_0}_{/F(x,f)}\|}{\|Dg^{-m_0}_{/F(y,g)}\|} \leq 1+c$$

En varias ocasiones queremos determinar cuando un conjunto con descomposición dominada es hiperbólico. A continuación veremos un lema simple que nos da condiciones para esto. Precisamos una definición.

Definición 4.1.2. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfimo Λ un conjunto invariante tal que su fibrado tangente admite una descomposición $T_\Lambda M = E \oplus F$ Df-invariante. Decimos que E es contractivo si existe $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que $\|Df^n_{/E(x)}\| \leq C\lambda^n$ para todo $n \geq 0$ y para todo $x \in \Lambda$. Decimos que F es expansivo si F es contractivo para f^{-1}, es decir, $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que $\|Df^{-n}_{/F(x)}\| \leq C\lambda^n$ para todo $n \geq 0$ y para todo $x \in \Lambda$.*

Lema 4.1.2. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfimo Λ un conjunto compacto invariante tal que su fibrado tangente admite una descomposición $T_\Lambda M = E \oplus F$ invariante. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *E es contractivo*
2. *Existe $m > 0$ tal que $\|Df^m_{/E(x)}\| < \frac{1}{2}$ para todo $x \in \Lambda$.*
3. *Existe $N > 0$ tal que para todo $x \in \Lambda$ existe $n(x), 1 \leq n(x) \leq N$ tal que $\|Df^{n(x)}_{/E(x)}\| < \frac{1}{2}$.*
4. *Para todo $x \in \Lambda$ se tiene que $\|Df^n_{/E(x)}\| \to_n 0$.*

Demostración. Ejercicio. □

4.2. Un caso particular

El objetivo de esta sección es probar el siguiente

Teorema 4.2.1. *Sea $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ difeomorfismo en $\mathcal{F}^1(\mathbb{T}^2)$ y tal que $\overline{Per(f)} = \mathbb{T}^2$. Entonces f es un difeomorfismo de Anosov.*

Observemos primero que como $f \in \mathcal{F}^1(M)$ y $\overline{Per(f)} = \mathbb{T}^2$ entonces, todos los puntos periódicos son hiperbólicos tipo silla. Luego, en virtud del Corolario 4.1.1 y del Teorema 3.4.1 tenemos que existe descomposición dominada en todo $\mathbb{T}^2$. Además, existe $0 < \lambda < 1$ tal que si $p \in Per(f)$ es un punto periódico de período n entonces

$$\|Df^n_{/E^s(p)}\| < \lambda^n \text{ y } \|Df^{-n}_{/E^u(p)}\| < \lambda^n.$$

4.2.1. Integrabilidad de la descomposición dominada

En esta sección demostraremos el siguiente:

Teorema 4.2.2. *Sea $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ difeomorfismo tal que todos sus puntos periódicos son hiperbólicos y $\overline{Per(f)} = \mathbb{T}^2$ y con descomposición dominada $E \oplus F$ en todo $\mathbb{T}^2$. Entonces E y F son únicamente integrables. Además si x, y están en una misma curva integral de E entonces $d(f^n(x), f^n(y)) \to_{n\to\infty} 0$. Análogamente para curvas integrales de F en el pasado.*

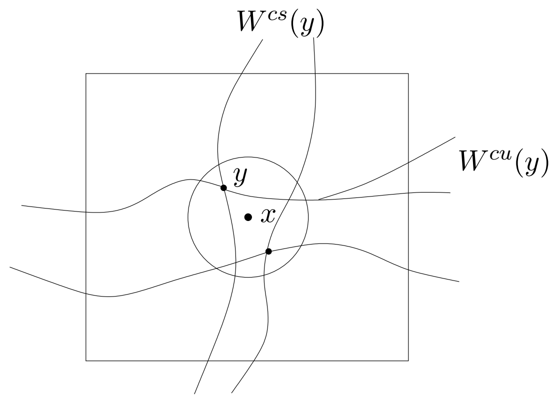
La demostración de este teorema tiene cierta similitud con lo que lo hecho en la sección 1.5. Sin embargo, como en principio no tenemos propiedades de contracción y expansión debemos explotar la relación que hay entre E y F. Como hay una simetría entre estos por la dominancia todo resultado que obtengamos para E en el futuro vale un análogo para F en el pasado.

Sean X^E y X^F campos unitarios tangentes continuos con $X^E \in E, X^F \in F$. Por el teorema de Peano tenemos que E y F son integrables. Debemos mostrar la unicidad.

Para cada $x \in \mathbb{T}^2$ denotaremos por $R_\epsilon(x)$ al conjunto (identificado via el mapa exponencial) $B^{cs}_\epsilon(x) \times B^{cu}_\epsilon(x)$ donde $B^{cs}_\epsilon(x)$ (respect $B^{cu}_\epsilon(x)$) es una bola de radio ϵ en $E(x)$ (respect $F(x)$) centrada en $0 \in T_x\mathbb{T}^2$ Denotaremos por $\partial^{cs} R_\epsilon(x)$ a $\{\pm\epsilon\} \times B^{cu}_\epsilon$. Análogamente $\partial^{cu} R_\epsilon(x)$. Si $y \in R_\epsilon(x)$ denotaremos por $J^{cs}_\epsilon(y)$ a la componente conexa de la curva integral por y de X^E intersección R_ϵ que contiene a y. Y de forma análoga J^{cu}. Los siguientes tres lemas son consecuencia inmediata de la continuidad e invariancia de los subespacios E y F, y del ángulo uniformemente acotado por debajo entre ellos.

Lema 4.2.1. *Para todo ϵ suficientemente chico existe γ tal que si $y \in R_\gamma(x)$ entonces $J^{cs}_\epsilon(y) \cap \partial^{cu} R_\epsilon = \emptyset$ y $J^{cs}_\epsilon(y)$ interseca ambas componentes de $\partial^{cs} R_\epsilon$. Análogamente para $J^{cu}_\epsilon(y)$.*

Lema 4.2.2. *Dado ϵ existe γ tal que si $w \in J^{cu}_\epsilon(y))$ y $w, y \in R_\gamma(x)$ entonces existe curva integral de F por $f(y)$ tal que $f(w) \in J^{cu}_\epsilon(f(y))$ (con respecto a $R_\epsilon(f(x))$.)*



Denotemos por $W^{cs}_K(x)$ una arco de curva integral de E por x de longitud $2K$ centrado en x. De forma análoga $W^{cu}_K(x)$.

Lema 4.2.3. *Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(W^{cs}_\delta(x))$ esta contenido en un curva integral $W^{cs}_\epsilon(f(x))$. Análogamente $f^{-1}(W^{cu}_\delta(x))$ esta contenido en una curva integral $W^{cu}_\epsilon(f^{-1}(x))$.*

Demostremos ahora que bajo ciertas condiciones se cumple la integrabilidad única local.

Lema 4.2.4. *Sea x en $\mathbb{T}^2$ tal que dado $\gamma > 0$ existe γ_1 tal que si $y \in W^{cs}_{\gamma_1}$ (cualquiera sea esta curva integral local) se tiene que $d(f^n(x), f^n(y)) < \gamma$ para todo $n \geq 0$. Entonces E es únicamente integrable en x.*

Demostración: Supongamos por absurdo que existen dos curvas integrales locales de E por x. Como el conjunto donde ellas coinciden es cerrado, el complemento es abierto y sea y un punto del borde de una componente conexa arbitrariamente cerca de x . Sea ϵ suficientemente chico y sea γ como en los lemas previos. Sean J_1 y J_2 dos E curvas integrales.

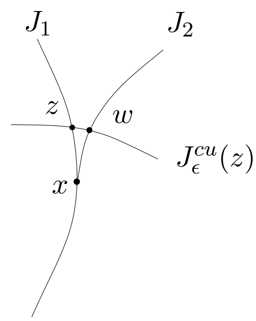


Figura 4.1: Variedades centro estables no únicas.

Por lo anterior existen $z \in J_1$, $w \in J_2, z \neq w$ tales que $z, w \in R_\gamma(x)$ y $w \in J_\epsilon^{cu}(z)$. Podemos suponer además que $z \in W_{\gamma_1}^{cs}(x)$ así como también w. Luego, concluimos que $f^n(z), f^n(w) \in R_\gamma(f^n(x)$ y aplicando el segundo lema inductivamente concluimos que $f^n(w) \in J_\epsilon^{cu}(f^n(z))$.

Sea $\tilde{C} = \tilde{C}(\epsilon)$ de forma tal que si $y \in W_{loc}^{cs(u)}(z)$ entonces

$$\tilde{C}^{-1} d_{cs(u)}(y, z) < d(y, z) < \tilde{C} d_{cs(u)}(y, z).$$

Donde $d_{cs(u)}$ denota la longitud del arco de variedad centro estable (inestable) que une y con z.

Se puede considerar δ y γ de forma tal que si $d(u, v) < \gamma$ entonces

$$\|Df|_{E(u)}\| < (1+\delta)\|Df|_{E(v)}\| \qquad \|Df^{-1}|_{F(u)}\| < (1+\delta)\|Df^{-1}|_{F(v)}\|$$

y además $(1+\delta)^2\lambda < 1$, donde λ es la constante de dominación.

Esto lleva a un absurdo pues:

$$\begin{aligned}
d(z,w) &= d(f^{-n}(f^n(z)), f^{-n}(f^n(w))) \\
&\leq \tilde{C} d_{cu}(f^{-n}(f^n(z)), f^{-n}(f^n(w))) \\
&\leq \tilde{C}^2(1+\delta)^n \|Df^{-n}|_{F(f^n(x))}\| d(f^n(z), f^n(w)) \\
&\leq \tilde{C}^2(1+\delta)^n \|Df^{-n}|_{F(f^n(x))}\|. \\
&\quad .(d(f^n(x), f^n(z)) + d(f^n(x), f^n(w))) \\
&\leq \tilde{C}^2(1+\delta)^n \|Df^{-n}|_{F(f^n(x))}\| \tilde{C}^2(1+\delta)^n \|Df^n|_{E(x)}\|. \\
&\quad .(d(x,z) + d(x,w)) \\
&\leq \tilde{C}^4(1+\delta)^{2n} C\lambda^n (d(x,z) + d(x,w)) \\
&= \tilde{C}^4 C(d(x,z) + d(x,w))((1+\delta)^2\lambda)^n \to 0
\end{aligned}$$

Lo cual resulta absurdo pues $z \neq w$. □

Lema 4.2.5. *Sea $f : M^2 \to M^2$ un difeomorfismo que admite descomposición dominada $TM = E \oplus F$. Entonces, dado $\rho < 1$ y $C > 0$ existe ϵ tal que si para $x \in M$ se cumple que $\|Df^n|_{E(x)}\| < C\rho^n$ entonces si $y \in W^{cs}_\epsilon$ se cumple que $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon$ y además tiende a cero.*

Demostración: Se puede suponer sin pérdida de generalidad (tomando una potencia de f si fuese necesario) que $\|Df^n|_{E(x)}\| < \rho^n$.

Sea δ tal que $(1+\delta)\rho < 1$, se puede considerar ϵ_1 de forma tal que si $d(z,w) < \epsilon_1$ entonces

$$\|Df|_{E(z)}\| < (1+\delta)\|Df|_{E(w)}\|$$

Sea $\epsilon > 0$ tal que $f(W^{cs}_\epsilon(z)) \subset W^{cs}_{\epsilon_1}(f(z))$ para cualquier z. Sea x como en el lema. Entonces $f(W^{cs}_\epsilon(x)) \subset W^{cs}_{\epsilon_1}(f(x))$. Por otra parte $\ell(f(W^{cs}_\epsilon(x)) < (1+\delta)\rho\epsilon < \epsilon$. Así $f(W^{cs}_\epsilon(x)) \subset W^{cs}_\epsilon(f(x))$. Inductivamente se prueba que $f^n(W^{cs}_\epsilon(x)) \subset W^{cs}_{\epsilon_1}(f^n(x))$ y que $\ell(f^n(W^{cs}_\epsilon(x)) < ((1+\delta)\rho)^n\epsilon < \epsilon$ y se concluye el resultado. □

Corolario 4.2.1. *Sea $p \in Per(f)$ entonces $W^s(p)$ y $W^u(p)$ son curvas integrales de E y F respectivamente.*

Para concluir el teorema entonces basta probar que estamos en las condiciones del Lema 4.2.4, lo que haremos a seguir. Es fácil ver que es suficiente probar que para cualquier $x \in \mathbb{T}^2$ y para cualquier $\epsilon > 0$

tenemos que $\ell(f^{-n}(W^{cs}_\epsilon(x))) \to \infty$. Consideremos entonces $R_\epsilon(x)$ como antes. Como los puntos periódicos son densos tomemos p periódico tal que $p \in R_\gamma(x)$. Como $W^u(p)$ es una curva integral (y de longitud infinita) de F tenemos que $W^u(p) \cap W^{cs}_\epsilon(x) \neq \emptyset$. y esta intersección es transversal. Luego, por aplicación directa del teorema de Hartman (o si se prefiere el λ-lema) concluimos que $\ell(f^{-n}(W^{cs}_\epsilon(x))) \to \infty$.

Observación 4.2.1. *Como consecuencia del teorema de esta sección tenemos estructura de producto local como en la sección 1.5.*

4.2.2. Prueba del Teorema 4.2.1

Recordemos que f tiene descomposición dominada $E \oplus F$ en todo $\mathbb{T}^2$ y que existe $0 < \lambda < 1$ tal que si $p \in Per(f)$ es un punto periódico de periodo n entonces

$$\|Df^n_{/E^s(p)}\| < \lambda^n \text{ y } \|Df^{-n}_{/E^u(p)}\| < \lambda^n.$$

Queremos probar que Df contrae exponencialmente a E y que Df^{-1} contrae exponencialmente a F (ver Definición 4.1.2).

Supongamos por absurdo que E no es contraído exponencialmente en $\mathbb{T}^2$. Sea $\mathcal{F}$ la familia de subconjuntos compactos invariantes Λ tal que E no es contraído exponencialmente en Λ. Ordenamos $\mathcal{F}$ por inclusion. Sea $\{\Lambda_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ una cadena totalmente ordenada. Entonces $A = \bigcap_\gamma \Lambda_\gamma$ es un compacto invariante y E no es contraído en A (de lo contrario E seria contraído exponencialmente en el maximal invariante de un entorno compacto de A el cual incluiría algún Λ_γ.) Luego $\mathcal{F}$ tiene un conjunto maximal Λ_0. Es decir, E es contraído exponencialmente en cualquier subconjunto compacto propio de Λ_0 pero E no es contraído en Λ_0.

Probemos que existe $x \in \Lambda_0$ tal que $\|Df^n_{/E(x)}\| \geq \frac{1}{2}$ para cualquier $n \geq 0$. Si para todo x existe n_x tal que $\|Df^{n_x}_{/E(x)}\| < 1/2$, por Lema 4.1.2 tendríamos que E es contraído exponencialmente en Λ_0. Esto prueba la existencia del x antes mencionado. Probemos que este x es recurrente. De hecho vale que $\omega(x) = \Lambda_0$. Razonando por absurdo, si $\omega(x) \subsetneq \Lambda_0$ concluimos que E es contraído exponencialmente en $\omega(x)$ y por lo tanto $\|Df^n_{/E(x)}\| \to 0$ lo cual es absurdo.

Sea γ tal que $1-\gamma > \lambda$ y sea n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces $\frac{1}{2}(1-\gamma)^n >$

λ^n. Sea $\eta > 0$ tal que si $d(z, y) < \eta$ entonces

$$1 - \gamma \leq \frac{\|Df_{/E(z)}\|}{\|Df_{/E(y)}\|}.$$

Sea $R_\delta(x)$ un entorno con estructura de producto local tal que si $z \in R_\delta$ y $J^s(z)$ es la componente conexa de $W^{cs}(z)$ que contiene a z entonces $\ell(f^n(J(z))) < \eta/2$ si $n \geq 0$. Análogamente para $J^u(z)$ en el pasado. Sea ahora $n \geq n_0$ tal que

- $f^n(x) \in R_\delta(x)$.
- $f^n(J^s(x)) \subset R_\delta(x)$.
- $f^{-n}(J^u(f^n(x))) \subset R_\delta(x)$.

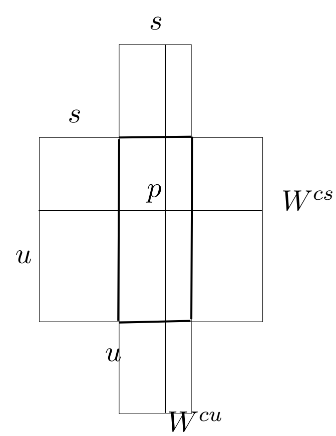


Figura 4.2: Puntos periódicos en el corte de rectángulos

Sea Q el subrectángulo $J^s(x) \times f^{-n}(J^u(f^n(x)))$ en R_δ y

$$Q' = f^n(J^s(x)) \times J^u(f^n(x)).$$

Luego $f^n(Q) = Q'$ y tenemos que existe $p \in Q \cap Q'$ punto periódico (ver también Lema 1.5.2). Se tiene que n es el periodo de p o un múltiplo del mismo. Por otro lado tenemos que $d(f^j(p), f^j(x)) < \eta$ para $j = 0, 1, \ldots, n$. Por lo tanto

$$\lambda^n > \|Df^n_{/E(p)}\| = \frac{\|Df^n_{/E(p)}\|}{\|Df^n_{/E(x)}\|}\|Df^n_{/E(x)}\| \geq \frac{(1-\gamma)^n}{2} > \lambda^n$$

y llegamos a una contradicción. Esto concluye que E es contraído en $\mathbb{T}^2$. De forma similar se prueba que F es contraído exponencialmente en el pasado y la demostración del teorema esta terminada..

4.3. El caso de superficies

Nos dedicaremos ahora a probar el Teorema 4.0.4 cuando M es un superficie. Si bien puede demostrarse con técnicas similares a las de la sección anterior, lo probaremos usando el Closing Lemma Ergódico (Teorema 3.2.3), resultado que también utilizaremos en la siguiente sección. Supongamos entonces que M es una superficie y sea $f : M \to M$ tal que $f \in \mathcal{F}^1(M)$. Por el Lema 3.4.2 tenemos que $\Omega(f) = \overline{Per(f)}$. Denotemos por $P(f)$ el conjunto de pozos (órbitas periódicas atractoras) de f, por $R(f)$ el conjunto de fuentes (órbitas periódicas repulsoras) y por $Per_s(f)$ los puntos periódicos tipo silla. Ahora, por el Teorema 3.4.2 tenemos que $P(f)$ y $R(f)$ son conjuntos finitos (y además aislados en $\Omega(f)$). Luego

$$\Omega(f) = \overline{Per(f)} = P(f) \cup \overline{Per_s(f)} \cup R(f).$$

Por lo tanto basta probar que $\overline{Per_s(f)}$ es hiperbólico. La idea es la siguiente: como $P(f)$ y $R(f)$ son finitos y disjuntos de $\overline{Per_s(f)}$ y $f \in \mathcal{F}^1(M)$ lo mismo sucede para g cercano a f, luego si $\overline{Per_s(f)}$ no es hiperbólico, usando el Closing Lemma Ergódico, construiremos un nuevo pozo o fuente.

Ahora, por el Teorema 3.4.1 y Corolario 4.1.1 tenemos que:

- $\Lambda := \overline{Per_s(f)}$ tiene descomposición dominada de indice 1 , $T_\Lambda M = E \oplus F$, es decir, existe $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que

$$\|Df^n_{/E(x)}\|\|Df^{-n}_{/F(f^n(x))}\| \leq C\lambda^n, \ n \geq 0$$

- Si $p \in Per_s(f)$ y tiene período n entonces

$$\|Df^n_{/E^s(p)}\| < \lambda^n \quad \text{y} \quad \|Df^{-n}_{/E^u(p)}\| < \lambda^n. \tag{4.1}$$

Supongamos por contradicción que $\overline{Per_s(f)}$ no es hiperbólico. Sea U entorno de $\overline{Per_s(f)}$ y $\mathcal{V}$ entorno de f tal que si $g \in \mathcal{V}$ entonces $P(g) \cup R(g) \cap U = \emptyset$ para $g \in \mathcal{V}$. Sea $\epsilon > 0$ y $\mathcal{V}_0$ como en Lema 3.1.1 aplicado a $\mathcal{V}$. Podemos suponer que existe K tal que $\|Dg_x\| \leq K$ para todo $x \in M$ y para toda $g \in \mathcal{V}_0$ Sea $\epsilon_1 < \epsilon/K$. Además, podemos suponer que U y $\mathcal{V}_0$ satisfacen el Teorema 4.1.2. Sea $c > 0$ tal que

$$(1+c)^2\lambda^{1/2} < 1, \qquad (1+c)^2 < 1 + \epsilon_1. \tag{4.2}$$

y tomemos δ correspondiente según el mismo teorema.

Ahora, si $\overline{Per_s(f)}$ no es hiperbólico, entonces E no es contractivo o F no es expansivo. Supongamos el primer caso, el otro se deduce de forma análoga. Para cada n existe $x_n \in \overline{Per_s(f)}$ tal que si $0 \leq j \leq n$ entonces

$$\left\|Df^j_{E(x_n)}\right\| = \prod_{i=0}^{j-1} \left\|Df_{E(f^i(x_n))}\right\| \geq \frac{1}{2}$$

(ver Lema 4.1.2). Luego, si x es un punto de acumulación de x_n se tiene que para todo $j \geq 0$:

$$\left\|Df^j_{E(x)}\right\| = \prod_{i=0}^{j-1} \left\|Df_{E(f^i(x))}\right\| \geq \frac{1}{2}.$$

Sea entonces

$$\nu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)}$$

donde δ_z es la medida de probabilidad concentrada en $\{z\}$. Sea ν punto de acumulación de ν_n. Es fácil ver que ν es una medida de probabilidad invariante. Se cumple también que:

$$\int_M \log \|Df_{E(y)}\| d\nu(y) \geq 0$$

pues, como $y \to \log \|Df_{/E(y)}\|$ es continua,

$$\begin{aligned}\int_M \log \|Df_{/E(y)}\| d\nu(y) &= \lim_n \int_M \log \|Df_{/E(y)}\| d\nu_n(y) \\ &= \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \|Df_{/E(f^j(x))}\| \\ &\geq \lim_n \frac{1}{n} \log \left(\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Pero entonces, por el teorema de descomposición de medidas en medidas ergódicas (ver por ejemplo [Ma3]), existe μ medida de probabilidad y ergódica tal que

$$\int_M \log \|Df_E(y)\| d\mu(y) \geq 0.$$

Sea z genérico según μ. Entonces, existe n_0 tal para todo $n \geq n_0$ se cumple que

$$\|Df^n_{/E(z)}\| \geq \left(\frac{1}{1+c}\right)^n. \tag{4.3}$$

Observemos que z no es periodico lo anterior contradiría (4.1). Ahora, por el Teorema 3.2.3 (Closing Lemma Ergódico), podemos suponer que $z \in \Sigma(f)$, es decir, podemos elegir $n \geq n_0$, $g \in \mathcal{V}$ y $p \in Per(g) \cap U$ de período n tal que

$$d(f^j(z), g^j(p)) \leq \delta \ \ 0 \leq j \leq n-1.$$

Pero entonces, de (4.3) y (4.2), concluimos

$$\|Dg^n_{/E(p,g)}\| = \prod_{j=0}^{n-1} \|Dg_{/E(g^j(p),g)}\| \geq (\frac{1}{1+c})^{2n} > \lambda^{n/2} > \lambda^n.$$

Esto implica, por la dominación, que

$$\|Dg^{-n}_{/F(p,g)}\| \leq C\lambda^{n/2} < 1$$

si n es suficientemente grande. Ahora, haciendo

$$L_i := (1+\epsilon_1)Dg_{g^i(p)} : T_{g^i(p)}M \to T_{g^{i+1}(p)}M, \quad i = 0, ...n-1,$$

se tiene que $\|L_i - Dg_{g^i(p)}\| < \epsilon$. Pero entonces, por el Lema 3.1.1 se tiene que existe $\tilde{g} \in \mathcal{V}$ tal que $\tilde{g}^i(p) = g^i(p), i = 0, ..., n$ y $L_i = D\tilde{g}_{g^i(p)}$. Pero lo anterior implica que p debe ser un repulsor de $\tilde{g}$. Esto es absurdo pues $p \in U$ y $F(\tilde{g}) \cap U = \emptyset$.

Esto concluye la demostración del Teorema 4.0.4 en el caso de superficies. Para terminar esta sección veremos como consecuencia un resultado también debido a Mañe que nos da una cierta descripción de lo que sucede en $Diff^1(M)$ (ver también secciones 5.2 y 5.3):

Teorema 4.3.1. *Sea M una superficie. Existe un conjunto residual $\mathcal{R}$ en $Diff^1(M)$ tal que si $f \in \mathcal{R}$ entonces alguna de las siguientes afirmaciones es verdadera*

1. *f tiene infinitos puntos periódicos atractores*
2. *f tiene infinitos puntos periódicos repulsores*
3. *f es Axioma A.*

Demostración: [Idea de la prueba:] La función que asocia $Diff^1(M) \ni f \to \overline{P(f)}$ donde $P(f)$ es el conjunto de puntos periódicos hiperbólicos atractores es una función semicontinua inferiormente. Luego existe un residual $\mathcal{R}_1$ de puntos de continuidad de esta función. Análogamente, existe residual $\mathcal{R}_2$ de puntos de continuidad de la función que asocia $Diff^1(M) \ni f \to \overline{R(f)}$. Sea $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$. Consideremos $f \in \mathcal{R}$. Si f no satisface (1) o (2) del teorema, entonces la cantidad de pozos y fuentes es constante en un entorno de f. Por lo tanto $f \in \mathcal{F}^1(M)$. Esto implica entonces la opción (3).

□

4.4. El caso general

En esta sección probaremos el Teorema 4.0.4: *si $f \in \mathcal{F}^1(M)$ entonces f es Axioma A.* Por el Lema 3.4.2 tenemos que $\Omega(g) = \overline{Per(f)}$. Por lo tanto basta probar que $\overline{Per(f)}$ es un conjunto hiperbólico. Denotemos por $P_i(f)$ al conjunto de puntos periódicos de f de indice i y sea

$$\Omega_i(f) = \overline{P_i(f)}.$$

Basta probar entonces que $\Omega_i(f)$ es un conjunto hiperbólico para $0 \leq i \leq dimM$.

Por el Teorema 3.4.1 y el Corolario 4.1.1 tenemos que existe $\mathcal{V}_0$ entorno de f y constantes $K_0 > 0, C > 0, 0 < \lambda < 1$, y m_0 tal que para todo $1 \leq i \leq dimM - 1$ y $g \in \mathcal{V}_0$ se tiene que

1. $\Omega_i(g)$ tiene descomposición dominada de indice i,
$$T_{\Omega_i(g)}M = E_i(g) \oplus F_i(g).$$
Si $p \in P_i(g)$ entonces $E_i(p,g) = E^s(p,g), F_i(p,g) = E^u(p,g)$.

2. Para $x \in \Omega_i(g)$ se tiene que
$$\|Dg^n_{E_i(x)}\| \|Dg^{-n}_{F_i(g^n(x))}\| \leq C\lambda^n \tag{4.4}$$
y
$$\text{y } \|Dg^{m_0}_{E_i(x)}\| \|Dg^{-m_0}_{F_i(g^n(x))}\| \leq \frac{1}{2}.$$

3. Si $p \in P_i(g)$ tiene período $n \geq m_0$ y $k = [n/m_0]$ entonces
$$\prod_{j=0}^{k-1} \|Dg^{m_0}/E_i(g^{jm_0}(p))\| < K_0\lambda^k \tag{4.5}$$
$$\prod_{j=0}^{k-1} \|Dg^{-m_0}/F_i(g^{-jm_0}(p))\| < K_0\lambda^k. \tag{4.6}$$

Recordemos también que por el Teorema 3.4.2 tenemos que $\Omega_0(f) = P_0(f), \Omega_{dimM}(f) = P_{dimM}(f)$ son finitos (y por lo tanto hiperbólicos).

Para probar el teorema, haremos un argumento inductivo en $j, 1 \leq j \leq dimM - 1$:

Teorema 4.4.1. *Supongamos que $f \in \mathcal{F}^1(M)$ y tal que Ω_i es hiperbólico para $0 \leq i \leq j-1$. Entonces $\Omega_j(f)$ también es hiperbólico.*

Es claro que este Teorema implica lo que queremos probar, pues el primer paso ya los sabemos: $\Omega_0(f)$ es hiperbólico (finito) si $f \in \mathcal{F}^1(M)$. Ahora, la demostración del Teorema 4.4.1 la dividiremos en tres pasos o teoremas y que demostraremos en la secciones subsiguientes:

Teorema 4.4.2. *Supongamos que $f \in \mathcal{F}^1(M)$ y tal que Ω_i es hiperbólico para $0 \leq i \leq j-1$. Entonces*

$$\Omega_j(f) \bigcap \bigcup_{s=0}^{j-1} \Omega_i(f) = \emptyset.$$

La idea principal de la demostración de este teorema es que si al afirmación es falsa, entonces, mediante el uso del Connecting Lemma podemos crear un nuevo punto homoclínico para algún $\Omega_i(g)$, $1 \leq i \leq j-1$ donde g es arbitrariamente cercano a f. Esto será una contradicción con que $f \in \mathcal{F}^1(M)$.

Teorema 4.4.3. *Supongamos que $f \in \mathcal{F}^1(M)$ y tal que Ω_i es hiperbólico para $0 \leq i \leq j-1$ y que $\Omega_j(f) \bigcap \bigcup_{s=0}^{j-1} \Omega_i(f) = \emptyset$. Entonces el subfibrado E_j en $\Omega_j(f)$ es contractivo.*

La demostración está basada en el Closing Lemma Ergódico: si E_j no es contractivo entonces $\Omega_j(f) \bigcap \bigcup_{s=0}^{j-1} \Omega_i(f) \neq \emptyset$.

Teorema 4.4.4. *Supongamos que $f \in \mathcal{F}^1(M)$ y tal que el subfibrado E_j en $\Omega_j(f)$ es contractivo. Entonces el subfibrado F_j es expansivo (y por lo tanto $\Omega_j(f)$ es hiperbólico).*

La idea de la prueba es la siguiente: si F_j no es expansivo, entonces encontraremos $p \in P_j(f)$ con hiperbolicidad débil en el período y sabemos que esto es imposible por (4.6).

4.4.1. Prueba del Teorema 4.4.2

Sea $f \in \mathcal{F}^1(M)$ y supongamos que $\Omega_i(f)$ es hiperbólico para $0 \leq i \leq j-1$ y, razonando por contradicción, que

$$\Omega_j(f) \bigcap \bigcup_{s=0}^{j-1} \Omega_i(f) \neq \emptyset.$$

Luego, existe $i, 1 \leq i \leq j-1$ tal $\Omega_j(f) \cap \Omega_i(f) \neq \emptyset$. (Recordar que $\Omega_0(f)$ son órbitas periódicas repulsoras). Como $\Omega_i = \overline{P_i(f)}$ es hiperbólico, tiene estructura de producto local y además tiene descomposición espectral (ver Corolario 2.4.4 y Observación 2.5.1):

$$\Omega_i(f) = \Lambda_1 \cup ... \cup \Lambda_m$$

donde Λ_i es compacto, invariante, transitivo, y además maximal invariante. Luego, existe k tal que $\Omega_j(f) \cap \Lambda_k \neq \emptyset$. En particular existe una sucesión $p_n \in P_j(f)$ tal que $d(p_n, \Lambda_k) \to_n 0$. Sea U_k entorno de Λ_k tal que Λ_k es maximal invariante en U_k. Deducimos que $\mathcal{O}(p_n) \cap U_k^c \neq \emptyset$. Consideremos entonces l_n y m_n tal que

$$l_n = \text{ínf}\{j \leq 0 : f^i(p_n) \in U_k,\, 0 \leq i \leq j\}$$

$$m_n = \sup\{j \geq 0 : f^i(p_n) \in U_k,\, 0 \leq i \leq j\}.$$

Sean x, y puntos de acumulación de $f^{l_n}(p_n)$ y de $f^{m_n}(p_n)$ respectivamente. Observemos que $x, y \notin \Lambda_k$, que $f^j(x) \in U_k \; \forall\, j \geq 0$ y que $f^{-j}(y) \in U_k \; \forall\, j \geq 0$. Mas aún, $\mathcal{O}^+(x, f) \cap \mathcal{O}^-(y, f) = \emptyset$. Como Λ_k es maximal invariante, también concluimos que existen $x_0, y_0 \in \Lambda_k$ tal que $x \in W^s(x_0), y \in W^u(y_0)$.

Sea $\mathcal{V} \subset \mathcal{F}^1(M)$ entorno conexo de f. Tomemos N y σ de forma que podemos aplicar el Connecting Lemma (Teorema 3.2.1) para x y para y (ver Obervación 3.2.1). Podemos elegir $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que los “tubos de conexion”son disjuntos, i.e.,

$$\Delta(x, \delta) \bigcap \Delta(f^{-N}(y), \delta) = \emptyset.$$

Además, podemos suponer que $f^j(x) \notin \Delta(x, \delta) \cup \Delta(f^{-N}(y), \delta)$ para $j > N$ y que $f^{-j}(y) \notin \Delta(x, \delta) \cup \Delta(f^{-N}(y), \delta)$ para $j > N$. Mas aún, podemos tomar U_1 entorno de $\Omega_i(f)$ disjunto de estos tubos.

Para n suficientemente grande, existe $q_n \in \mathcal{O}(p_n)$ con

$$q_n \in B(f^{-N}(y), \delta/\sigma)).$$

Aplicando el Connecting Lemma dos veces, primero en $\Delta(x, \delta)$ y luego en $\Delta(f^{-N}(y), \delta)$ obtendremos g en $\mathcal{V}$ pues las perturbaciones tiene soporte disjunto. Es decir, conectamos primero en $\Delta(x, \delta)$ de forma tal que la $f^{N+1}(x)$ está en la órbita futura de q_n por g_1. Si, k es la primera vez que la órbita de q_n según f corta $\Delta(x, \delta)$ entonces $g_1^j(q_n) = f^j(q_n), 0 \leq j \leq k$ y por lo tanto la órbita pasada de $f^{N+1}(x)$ según g_1 interseca $B(f^{-N}(y), \delta/\sigma))$. Conectando ahora en $\Delta(f^{-N}(y), \delta)$ encontramos $g \in$

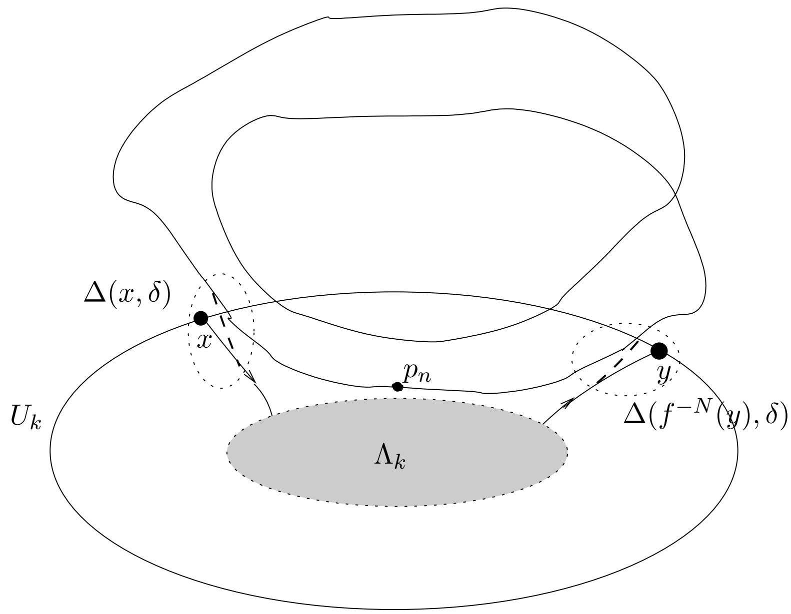


Figura 4.3:

$\mathcal{V}$ tal que $f^{N+1}(x) \in \mathcal{O}^+(f^{-N-1}(y), g)$ Pero como $g = f$ afuera de $\Delta(x,\delta) \cup \Delta(f^{-N}(y),\delta)$ concluimos que

$$(W^s(x_0, g) - \Lambda_k) \bigcap (W^u(y_0, g) - \Lambda_k) \neq \emptyset.$$

Podemos suponer también que esta intersección es transversal (si no lo fuera, hacemos una pequeña perturbación para que si lo fuera, y con soporte disjunto que U_1).

En conclusión, encontramos $g \in \mathcal{V}$ tal que $g = f$ en U_1 y $x_0, y_0 \in \Lambda_k$ tal que

$$(W^s(x_0, g) - \Lambda_k) \overline{\pitchfork} (W^u(y_0, g) - \Lambda_k) \neq \emptyset.$$

Pero entonces existe un punto periódico $p \in \Lambda_k$ y un punto homoclínico transversal fuera de Λ_k. Esto implica que g tiene un punto periódico de indice i fuera de $\Omega_i(f)$. Como $g = f$ en U_1 entorno de $\Omega_i(f)$ llegamos a una contradicción con el Lema 3.4.2.

4.4.2. Prueba del Teorema 4.4.3

La demostración de este teorema es muy similar a la prueba que hicimos en el caso de superficies. Por hipótesis, sabemos que $f \in \mathcal{F}^1(M)$, Ω_i es hiperbólico para $0 \leq i \leq j-1$ y que

$$\Omega_j(f) \bigcap \bigcup_{s=0}^{j-1} \Omega_i(f) = \emptyset. \tag{4.7}$$

Sea U_j entorno de $\Omega_j(f)$ y V entorno de $\displaystyle\bigcup_{s=0}^{j-1} \Omega_i(f)$ con $U \cap V = \emptyset$.

Ahora, argumentando por el absurdo, supongamos que E_j no es contractivo. Luego, por Lema 4.1.2, para cada n existe $x_n \in \Omega_j(f)$ tal que si $0 \leq k \leq n$ entonces

$$\prod_{i=0}^{k-1} \left\| Df^{m_0}_{E_j(f^{im_0}(x_n))} \right\| \geq \frac{1}{2}.$$

Luego, si x es un punto de acumulación de x_n se tiene que para todo $k \geq 0$:

$$\prod_{i=0}^{k-1} \left\| Df^{m_0}_{E_j(f^{im_0}(x_n))} \right\| \geq \frac{1}{2}.$$

Sea entonces

$$\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^{im_0}(x)}$$

donde δ_z es la medida de probabilidad concentrada en $\{z\}$. Sea ν punto de acumulación de ν_n, i.e., $\nu_k \to \nu$. Es fácil ver que ν es una medida de probabilidad f^{m_0} invariante. Se cumple también que:

$$\int_M \log \|Df^{m_0}_{E_j(y)}\| d\nu(y) \geq 0$$

pues, como $y \to \log \|Df^{m_0}_{/E_j(y)}\|$ es continua,

$$\begin{aligned}
\int_M \log \|Df^{m_0}_{/E(y)}\| d\nu(y) &= \lim_k \int_M \log \|Df^{m_0}_{/E_j(y)}\| d\nu_{n_k}(y) \\
&= \lim_k \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \log \|Df^{m_0}_{/E_j(f^{im_0}(x))}\| \\
&\geq \lim_k \frac{1}{n_k} \log(\frac{1}{2}) = 0.
\end{aligned}$$

Pero entonces, por el teorema de descomposición de medidas en medidas ergódicas, existe μ medida de probabilidad y ergódica para f^{m_0} tal que

$$\int_M \log \|Df^{m_0}_{/E_j(y)}\| d\mu_1(y) \geq 0. \tag{4.8}$$

Sea $\mu_1 = \sum_{i=0}^{m_0-1} f^i_* \mu$. Esta medida es f invariante. Luego, podemos elegir z genérico según μ y μ_1 (es decir, podemos aplicar el Teorema de Birkhoff para z según f^{m_0} y $z \in \Sigma(f)$, de forma que podemos aplicar el Closing Lemma Ergódico). Elijamos $0 < c < 1$ tal que

$$(1+c)^2 \lambda^{m_0/2} < 1 \tag{4.9}$$

Ahora, existe n_0 tal para todo $n \geq n_0$ se cumple, tomando $k = [n/m_0]$, que

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^{m_0}_{E_j(f^{im_0}(z))}\|\| \geq \left(\frac{1}{1+c}\right)^k. \tag{4.10}$$

Observemos que z no puede ser periódico para f pues si lo fuera, de (4.4) y (4.10) concluimos que

$$\prod_{j=0}^{k-1} \|Df^{-m_0}_{/\tilde{F}_j(f^{-j}(z))}\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k (1+c)^k < 1.$$

Pero esto implica que el índice de z es menor o igual que j. Como menor que j no puede ser pues $z \in \Omega_j(f)$ y se tiene (4.7). Pero de indice j no puede ser por (4.8). Asi, z no es periódico.

Continuando con la demostración podemos elegir $n \geq n_0$, $g \in \mathcal{V}$ tal que $g = f$ en V y $p \in Per(g) \cap U_j$ de período n tal que

$$d(f^j(z), g^j(p)) \leq \delta \ \ 0 \leq j \leq n-1.$$

Pero entonces,

$$\prod_{j=0}^{k-1} \|Dg^{m_0}_{/\tilde{E}_j(g^j(p),g)}\| \geq \left(\frac{1}{1+c}\right)^{2k} > \lambda^{km_0/2} > \lambda^{n/2} \tag{4.11}$$

Esto implica, por la dominación (4.4), que

$$\|Dg^{-n}_{/F(p,g)}\| \leq \prod_{j=0}^{k-1} \|Dg^{m_0}_{/\tilde{F}_j(g^j(p),g)}\| \leq C\lambda^{n/2} < 1$$

si n es suficientemente grande ($k = [n/m_0]$). Luego, el índice de p es $\leq j$. Pero de (4.5) y (4.11) se deduce que $p \in P_i(g)$ para algún $i < j$. Pero como $g = f$ en V se tiene que $P_i(f) = P_i(g)$ (por Lema 3.4.2). Como $V \cap U_j = \emptyset$ llegamos a una contradicción.

4.4.3. Prueba del Teorema 4.4.4

Sea $f \in \mathcal{F}^1(M)$ y supongamos en la descomposición dominada

$$T_{\Omega_j(f)}M = E_j \oplus F_j$$

tengamos que $E_j = E^s_j$ es contractivo, Queremos probar que F_j es expansivo (recordar Definición 4.1.2 y Lema 4.1.2). Sabemos que $T_{\Omega_j(f)}M = E^s_j \oplus F_j$ es dominada y existen $K_0, 0 < \lambda < 1$ y m_0 tales que si $p \in P_j(f)$ tiene período $n \geq m_0$ y $k = [n/m_0]$ entonces

$$\prod_{i=0}^{k-1} \left\|Df^{-m_0}/F_j(f^{-im_0}(p))\right\| < K_0\lambda^k \tag{4.12}$$

Consideremos $g = f^{m_0}$. Luego $\Lambda := \Omega_j(f)$ es invariante por g, la descomposición $T_\Lambda M = E^s_j \oplus F_j$ es dominada para g, E^s_j es contractivo para g. Por lo tanto podemos suponer que (tomando metrica adaptada o tomando $g = lm_0$ con l suficientemente grande)

$$\|Dg_{/E^s_j(x)}\| \leq \lambda \ \ \forall x \in \Lambda \tag{4.13}$$

Ahora, F_j es expansivo para f si y solamente si es expansivo para g. Por otra parte, si $p \in P_j(f)$ entonces $p \in P_j(g)$ también y viceversa.

Sea k_0 y $0 < \lambda_0 < 1$ tal que $K_0\lambda^k < \lambda_0^k$ para todo $k \geq k_0$. Observemos entonces que si $p \in P_j(f)$ tiene período $n_p \geq k_0 m_0$ entonces

$$\prod_{i=0}^{m_0 n_p - 1} \|Dg^{-1}_{F_j(g^{-i}(p))}\| = \prod_{i=0}^{m_0 n_p - 1} \|Df^{-m_0}/F_j(f^{-im_0}(p))\| < \lambda_0^{m_0 n_p} \tag{4.14}$$

Por lo tanto, si ν_p es el g-periódo de p entonces:

$$\prod_{i=0}^{\nu_p - 1} \|Dg^{-1}_{F_j(g^{-i}(p))}\| < \lambda_0^{\nu_p} \tag{4.15}$$

Observemos también que si ν_p es el g-período de un punto periódico en Λ entonces su f-período es $n_p \geq \nu_p/m_0$.

Para el siguiente lema (de sombreado) precisamos algunas nociones: sea $\gamma < 1$, decimos que $(x, g^m(x))$ es un segmento γ-hiperbólico si

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Dg_{E_j^s(g^i(x))}\| \leq \gamma^k \quad \text{y} \quad \prod_{i=0}^{k-1} \|Dg^{-1}_{F_j(g^{-i}(g^m(x)))}\| \leq \gamma^k$$

para $0 \leq k \leq m$. El resultado que sigue dice que si tenemos una sucesión finita de segmentos hiperbólicos donde el punto final de uno esta cerca del punto inicial del próximo y el punto final del último segmento esta cerca del punto inicial del primero, entonces podemos sombrear los segmentos por una órbita periódica. Si bien omitiremos la prueba, la misma se basa en argumentos cuyas ideas ya hemos visto en los capítulos anteriores (ver Figura 4.4). El lector interesado podría consultar por ejemplo [G].

Lema 4.4.1. *Sea g un difeomorfismo, Λ un conjunto compacto invariante con descomposición dominada de indice j $T_\Lambda M = E_j \oplus F_j$. Sea $0 < \gamma < 1$ y $\delta > 0$ dados. Entonces existe $\epsilon = \epsilon(\gamma, \delta) > 0$ tal que si $(x_i, g^{m_i}(x_i))$ con $1 \leq i \leq k$ son segmentos γ hiperbólicos y se verifica que*

$$d(g^{m_i}(x_i), x_{i+1}) < \epsilon \quad y \quad d(g^{m_k}(x_k), x_1) < \epsilon,$$

entonces existe p de período $n = \sum_{i=1}^k m_i$ y además, si $1 \leq j_i \leq m_i, 1 \leq i \leq k$ entonces

$$d(g^{m_1 + \ldots + m_{i-1} + j_i}(p), g^{j_i}(x_i)) < \delta.$$

El siguiente resultado es conocido como Lema de Pliss [Pl], aunque solo lo enunciaremos según nuestros intereses.

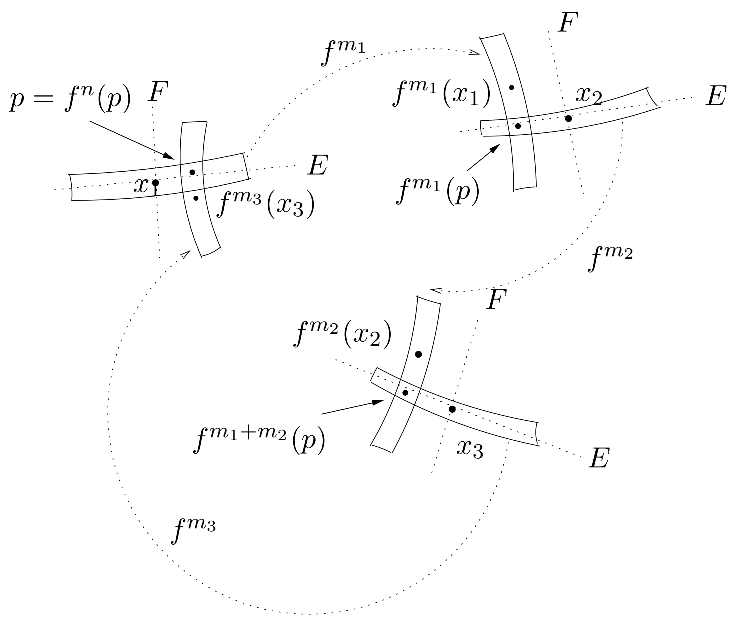


Figura 4.4:

Lema 4.4.2. *Sean dados $C > 0$ y $\gamma_1 < \gamma_2 < 1$. Entonces existe $N = N(\gamma_1, \gamma_2)$ tal que si $a_0, ..., a_{N-1}$ son números positivos con $a_i > C, i = 0, .., N-1$ y $\prod_{i=0}^{N-1} a_i < \gamma_1^N$ entonces existe $n_0, 1 < n_0 < N$ tal que*

$$\prod_{i=0}^{k-1} a_{n_0+i} < \gamma_2^k, \qquad 0 \leq k \leq N - n_0.$$

Demostración: Sea N tal que $\gamma_1^N < c\gamma_2^{N-1}$. Sean $a_0, ..., a_{N-1}$ como en el enunciado y supongamos que el resultado no es cierto. Entonces, para cada $1 \leq j \leq N-1$ existe $1 \leq n(j) \leq N-j$ tal que $\prod_{i=0}^{n(j)-1} a_{j+i} \geq \gamma_2^{n(j)}$. Sea $n_1 = n(1), n_2 = n(n_1)...n_k = n(n_{k-1})...$ Luego, existe k tal que $n_1 + n_2 + ...n_k = N - 1$ Pero entonces

$$\gamma_1^N > \prod_{i=0}^{N-1} a_i = a_0 \prod_{j=1}^{k-1} \prod_{i=0}^{n_{j+1}-1} a_{n_j+i} > c\gamma_2^{N-1} > \gamma_1^N.$$

$\square$

Continuando con la demostración del teorema, supongamos por contradicción que F_j no es expansivo para g. Sea λ_0 como antes y tomamos $\lambda_1, \lambda_2, \gamma_1, \gamma_2$ y $c > 0$ tales que

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1; \quad \lambda_1(1+c) < \lambda_2; \quad \gamma_2(1+c) < 1 \tag{4.16}$$

Sea

$$C = \text{ínf}\{m(\|Dg_x^{-1}\|) : x \in M\}$$

y tomemos $N(\gamma_1, \gamma_2)$ como en el Lema 4.4.2. Observamos que si $p \in \Lambda$ tiene período $\nu_p > k_0 m_0^2$ entonces por (4.15) y por Lema 3.4.1 (denotando por $a_i = \|Dg^{-1}_{F_j(g^{-i}(q_p))}\|$) se tiene que existe $q_p \in \mathcal{O}(p, g)$ tal que

$$\prod_{i=0}^{l-1} \|Dg^{-1}_{F_j(g^{-i}(q_p))}\| < \lambda_0^l < \gamma_2^l \ \ \forall j \geq 1 \tag{4.17}$$

Consideremos, para cualquier $p \in P_j(g)$ de período $\nu_p > k_0 m_0^2$, los naturales $n_0 = 0 < n_1 < ... < n_s = \nu_p$ (que llamaremos tiempos hiperbólicos) tales que llamando $q_i(p) = g^{-n_i}(q_p), 0 \leq i \leq s$ se cumple:

$$\prod_{i=0}^{l-1} \|Dg^{-1}_{F_j(g^{-i}(q_i))}\| < \gamma_2^l \ \ \forall j \geq 1. \tag{4.18}$$

Sea $T_p = \text{máx}\{n_{i+1} - n_i : i = 0, ..., s-1\}$.

Afirmamos que si existe L tal que $T_p < L$ para todo $p \in P_j(g)$ con $\nu_p > k_0 m_0^2$ entonces F_j es expansivo. Para probar esta afirmación, observemos primero que si $C_1 = \sup\{\|Dg_x^{-r}\| : x \in M0 \leq r \leq L\}$ entonces si $z \in \mathcal{O}(p, g)$ con $p \in P_j(g), \nu_p > k_0 m_0^2$ y $n \geq L$ entonces existe $q_i(p) = g^{-l_i}(z)$ con $0 \leq l_i \leq L$ y por lo tanto

$$\|Dg^{-n}_{/F_j(z)}\| \leq \|Dg^{-l_i}_{/F_j(z)}\| \prod_{i=0}^{n-l_i-1} \|Dg^{-1}_{F_j(g^{-i}(q_i))}\| < C_1 \gamma_2^{n-L} \tag{4.19}$$

Por otra parte, existe una cantidad finita de órbitas periodicas de g en $P_j(g)$ de período $\leq k_0 m_0^2$, y son todas hiperbólicas, existe $C_2 > 0$ y $0 < \sigma < 1$ tal que

$$\|Dg^{-n}_{F_j(z)}\| \leq C_2 \sigma^n \tag{4.20}$$

para todo $n \geq 0$ y z cualquier punto periódico de g de período $\leq k_0 m_0^2$. Si m es tal que $\max\{C_1\gamma^{m-L}, C_2\sigma^m\} < \frac{1}{2}$ concluimos de (4.19) y de (4.20) que dado cualquier $p \in P_j(g)$ se tiene que

$$\|Dg^{-m}_{/F_j(p)}\| \leq \frac{1}{2}.$$

Como $P_j(g)$ es denso en Λ tenemos la misma condición para todo $p \in \Lambda$ y por Lema 4.1.2 concluimos que F_j es expansivo. Esto prueba la afirmación.

Pero entonces, como estamos suponiendo que F_j no es expansivo, tenemos que $\sup\{T_p : p \in P_j(g), \nu_p \geq k_0 m_0^2\} = \infty$.

Sea $p_n \in P_j(g)$ una sucesión tal que $T_{p_n} \to_n \infty$ (en particular $\nu_{p_n} \to \infty$ también). Sean $n_i(p_n)$ y $n_{i+1}(p_n)$ tiempos hiperbólicos consecutivos de la órbita de p_n (es decir $q_i(p_n)$ y $q_{i+1}(p_n)$ puntos de la órbita que p_n que verifican (4.18)) y tal $m_n := n_{i+1} - n_i = T_{p_n}$. Para simplificar la notación, hagamos $y_n = q_i(p_n)$ e $x_n = q_{i+1}(p_n)$ Observemos que $g^{m_n}(x_n) = y_n$ y que $g^{\nu_n - m_n}(y_n) = x_n$. Observamos que x_n e y_n verifican (4.18). Como $m_n \to \infty$ podemos suponer (a partir de un cierto n) que $m_n > N$. Afirmamos entonces que

$$\prod_{i=0}^{m_n-1} \|Dg^{-1}_{F_j(g^{-i}(y_n))}\| \geq \gamma_1^{m_n} \tag{4.21}$$

pues de contrario haciendo $a_i = \|Dg^{-1}_{F_j(g^{-i}(y_n))}\|$ y aplicando el Lema 4.4.2, existiría $i_0, 1 \leq i_0 \leq m_n - 1$ tal que

$$\prod_{i=0}^{l-1} \|Dg^{-1}_{F_j(g^{-i}(g^{-i_0}(y_n)))}\| < \gamma_2^l \;\; 1 \leq l \leq m_n - i_0$$

pero entonces para $l \geq m_n - i_0$ se tiene que

$$\prod_{i=0}^{l-1} \|Dg^{-1}_{F_j(g^{-i}(g^{-i_0}(y_n)))}\| =$$

$$= \prod_{i=0}^{m_n-i_0-1} \|Dg^{-1}_{F_j(g^{-i}(g^{-i_0}(y_n)))}\| \prod_{i=0}^{l-m_n-1} \|Dg^{-1}_{F_j(g^{-i}(x_n))}\| \leq \gamma_2^l$$

Esto quiere decir que $g^{-i_0}(y_n)$ verifica (4.18) pero esto es absurdo pues no hay tiempos hiperbólicos entre y_n y x_n (de otra forma: $n_i+i_0 < n_{i+1}$.)

Sea ahora U entorno compacto de Λ tal que en g tiene descomposición dominada $E^s_j \oplus F_j$ en $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} g^n(U)$ y sea $\delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$ entonces

$$\frac{1}{1+c} \le \frac{\|Dg_{/E_j(x)}\|}{\|Dg_{/E_j(y)}\|} \le 1+c \quad \text{y} \quad \frac{1}{1+c} \le \frac{\|Dg^{-1}_{/F_j(x)}\|}{\|Dg^{-1}_{/F(y)}\|} \le 1+c \qquad (4.22)$$

Sea δ definido recién y $\epsilon = \epsilon(\gamma_2, \delta)$ según Lema 4.4.1. Sean x e y puntos de acumulación de x_n e y_n respectivamente. Observemos que

$$(x_n, g^{m_n}(x_n)) \qquad \text{y} \qquad (y_n, g^{\nu_n - m_n}(y_n))$$

son γ_2 segmentos hiperbólicos. Además $g^{m_n}(x_n) = y_n$ y $g^{\nu_n - m_n}(y_n) = x_n$. Tomemos n_1 tal que $d(x_{n_1}, x) < \epsilon/2$ y $d(y_{n_1}, y) < \epsilon/2$. Luego, tomamos n_2 tal que $d(x_{n_2}, x) < \epsilon/2$ y $d(y_{n_2}, y) < \epsilon/2$ y tal que se verifica

$$\gamma_1^{m_{n_2}} C^{\nu_{n_1} - m_{n_1}} > \lambda_2^{m_{n_2} + \nu_{n_1} - m_{n_1}}. \qquad (4.23)$$

Sea $m := m_{n_2} + \nu_{n_1} - m_{n_1}$. Entonces, por Lema 4.4.1 aplicado a los segmentos $(y_{n_1}, g^{\nu_{n_1} - m_{n_1}}(y_n))$ y $(x_{n_2}, g^{m_{n_2}}(x_n))$ existe p punto periódico de g de período m tal que

$$d(g^j(p), g^j(y_{n_1})) < \delta \qquad 0 \le j \le \nu_{n_1} - m_{n_1} - 1$$

y

$$d(g^{j+\nu_{n_1} - m_{n_1}}(p), g^j(x_{n_2})) < \delta \qquad 0 \le j \le m_{n_2}.$$

Entonces, de (4.13), (4.16), (4.21), (4.22) y (4.23) concluimos que

$$\lambda_1^m < \frac{\lambda_2^m}{(1+c)^m} \le \prod_{i=0}^{m-1} \|Dg^{-1}_{F_j(g^{-i}(p))}\| \le \gamma_2^m (1+c)^m < 1 \qquad (4.24)$$

y

$$\prod_{i=0}^{m-1} \|Dg_{E^s_j(g^i(p))}\| \le \lambda^m (1+c)^m < 1 \qquad (4.25)$$

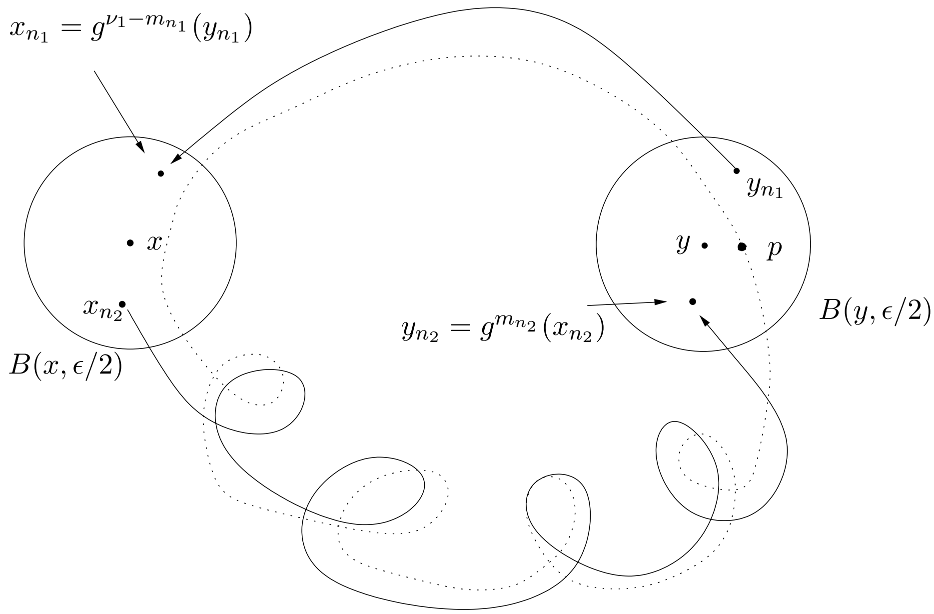


Figura 4.5:

Esto quiere decir que p tiene indice j. Por otra parte, si n_p es el período de p según f (observar que $n_p \geq m/m_0$ que es $\geq k_0$ si m es suficientemente grande), entonces concluimos que, haciendo $k = [n/m_0]$,

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^{-m_0}/F_j(f^{-im_0}(p))\| > \lambda_1^k > \lambda_0^k > K_0\lambda^k$$

contradiciendo (4.12). Así, llegamos a un absurdo y concluimos la prueba del teorema.

Capítulo 5

El Universo $Diff^1(M)$.

En los capítulos previos describimos la dinámica de los sistemas hiperbólicos y además vimos que la hiperbolicidad caracteriza a los sistemas que son C^1- estables. Es natural preguntarse que "porción" ocupan los sistemas hiperbólicos en el universo $Diff^1(M)$. En la década de los sesenta se creía o "soñaba" con que fueran la mayoría. Sin embargo esto no es así. En este capítulo haremos una breve descripción de este fenómeno. No pretendemos de ninguna forma ser exhaustivos en el estudio de difeomorfismos fuera del mundo hiperbólico, solamente queremos dar al lector una pintura "a grosso modo" de cuales son los mecanismos y la complejidad dinámica en este contexto. Para una descripción exhaustiva de la dinámica fuera de la hiperbolicidad recomendamos al lector consultar [PT] y [BDV].

5.1. Ciclos heterodimensionales

Al final de la década del 60 ya eran conocidos ejemplos robustamente no hiperbólicos (por ejemplo [AS]), esto es, abiertos $\mathcal{V} \subset Diff^1(M)$ tales que ningún $g \in \mathcal{V}$ es hiperbólico (Axioma A o L-hiperbólico). La idea es conseguir puntos periódico hiperbólicos de diferente índice que pertenezcan a un conjunto transitivo de forma *robusta*. Cuando esto sucede no podemos podemos tener hiperbolicidad global (recordar Teorema 2.5.1 y Observación 2.5.1).

Comencemos con la siguiente Proposición cuya demostración dejamos como ejercicio:

Proposición 5.1.1. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo. Sean Λ_1 y Λ_2 conjuntos hiperbólicos transitivos tales que*

$$W^s(\Lambda_1) \pitchfork W^u(\Lambda_2) \neq \emptyset \quad y \quad W^s(\Lambda_2) \pitchfork W^u(\Lambda_1) \neq \emptyset.$$

Entonces, Λ_1 y Λ_2 pertenecen a un conjunto transitivo.

El truco para conseguir los ejemplos antes mencionados es que la dimensión de $W^s(\Lambda)$ puede ser mayor que la dimensión de $W^s(x)$ para $x \in \Lambda$! Es decir, si Λ es hiperbólico, y $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$ con $dimE^s(x) = i$ para todo $x \in \Lambda$ puede suceder que $dimW^s(\Lambda) = i + 1$. De hecho, si Λ es el *solenoide*, entonces $dimE^s = 2$ pero $dimW^s(\Lambda) = 3$ pues Λ es un atractor (observar que $D \times S^1 \subset W^s(\Lambda)$). Si bien en este caso Λ es un atractor, es fácil construir ejemplos donde no lo sea. Por ejemplo, si $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ es Anosov, entonces $f \times f : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ también lo es. Sea p punto fijo de f. Entonces, si $\Lambda = \{p\} \times \mathbb{T}^2$ es hiperbólico transitivo, $dimE^s_\Lambda = 2$ pero $W^s(\Lambda) = W^s(p) \times \mathbb{T}^2$ que tiene dimensión 3.

Pero entonces no es difícil imaginarse como construir los ejemplos anteriores, tomando dos conjuntos hiperbólicos transitivos de diferente índice que satisfagan las hipótesis de la Proposición anterior. En la Figura 5.1 tenemos $f : M \to M$ con $dimM = 4$, se tiene que un toro $\Lambda_1 = \mathbb{T}^2 \subset M$ donde $f_{/\mathbb{T}^2}$ es Anosov, pero $dimW^s(\mathbb{T}^2) = dimW^u(\mathbb{T}^2) = 3$ y p es un punto fijo hiperbólico con $dimW^s(p) = 1$ y $dimW^u(p) = 3$. Y $W^s(p)$ tiene una intersección transversal con $W^u(\mathbb{T}^2)$ y $W^u(p)$ tiene una intersección transversal con $W^s(\mathbb{T}^2)$. Aplicando la proposición, se tiene que p y $\mathbb{T}^2$ pertencen a un mismo conjunto transitivo. Pero como p y y los puntos de $\mathbb{T}^2$ tienen diferente dimensión de su espacio estable, f no puede ser Axioma A. Esta "construcción" es robusta por perturbaciones C^1, es decir existe $\mathcal{V}(f)$ entorno de f donde tenemos la misma situación.

Definición 5.1.1. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo. Decimos que f tiene un ciclo heterodimensional si existen puntos periódicos hiperbólicos p y q de diferente indice tal que*

$$W^s(p) \cap W^u(q) \neq \emptyset \quad y \quad W^u(p) \cap W^s(q) \neq \emptyset.$$

Notemos que si f tiene un ciclo, entonces algunas de las intersecciones anteriores no es transversal. Luego, por el Teorema de Kupka-Smale 1.4.2, esta situación no es genérica. Sin embargo este teorema no

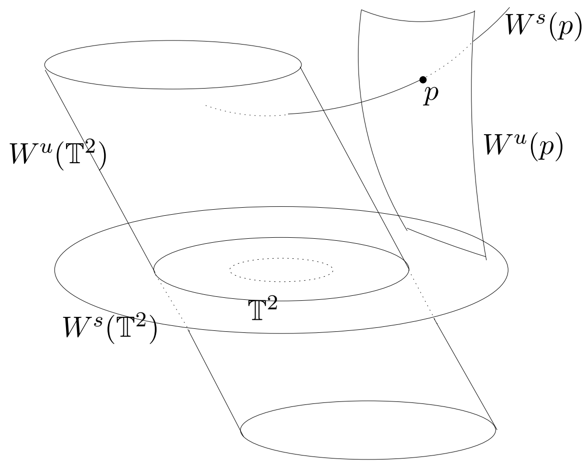


Figura 5.1:

hace referencia a la dinámica global. De hecho, si en "ejemplo" anterior tomamos $q \in \mathbb{T}^2$ periódico, entonces $H(q,g) = H(p,g)$ para toda $g \in \mathcal{V}$ (y densamente en $\mathcal{V}(f)$ se tiene un ciclo entre p_g y q_g via el Connecting Lemma). Es interesante observar que C^1 genericamente, clases homoclínicas son disjuntas o coinciden ([CMP]).

Una pregunta natural es si ejemplos como el anterior se pueden lograr de forma que toda la variedad sea un conjunto transitivo. Es decir, ¿existen abiertos $\mathcal{U} \subset Diff^1(M)$ tales que si $g \in \mathcal{U}$ entonces es transitivo en M y no es Anosov? Observar que por el Teorema 4.3.1 esto no es posible en superficies. Sin embargo, si la dimensión de M es ≥ 3 entonces la respuesta es afirmativa. El primer ejemplo es debido a M. Shub ([Sh2]) en $\mathbb{T}^4$. Mañe ([Ma4]) dio un ejemplo en $\mathbb{T}^3$. Finalmente C. Bonatti y L. Diaz ([BD1]) dieron nuevos ejemplos en una clase amplia de variedades. De cualquier forma, los difeomorfismos robustamente transitivos necesariamente tienen una estructura débil de hiperbolicidad:

Teorema 5.1.1. *[BDP] Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo robustamente transitivo, es decir, existe $\mathcal{V}(f)$ entorno de f en $Diff^1(M)$ tal que todo difeomorfismo $g \in \mathcal{V}$ es transitivo. Entonces M admite descomposición dominada $TM = E \oplus F$.*

5.2. Fenómeno de Newhouse y tangencias homoclínicas

La obstrucción a la hiperbolicidad mediante ciclos no es posible obtenerla en superficies. Sin embargo, a través de una serie de trabajos verdaderamente originales y novedosos, Newhouse ([N2], [N3],[N4]) probó que los sistemas hiperbólicos no son densos en $Diff^r(M)$ cuando M es una superficie y $r \geq 2$.

Definición 5.2.1. *Sea $f: M \to M$ un difeomorfismo. Decimos que f exhibe una tangencia homoclínica si existe p punto periódico hiperbólico tal que $W^s(p)$ y $W^u(p)$ tienen un punto de intersección no transversal.*

Definición 5.2.2. *Sea $\mathcal{V} \subset Diff^r(M)$. Decimos que en $\mathcal{V}$ hay persistencia de tangencias homoclínicas si para cada $g \in \mathcal{V}$ existe un conjunto Λ_g hiperbólico transitivo y maximal invariante (conjunto básico) y que depende continuamente con g tal que existen $x, y \in \Lambda_g$ de forma que $W^s(x)$ y $W^u(y)$ tiene una intersección no trasversal.*

Observamos que si $\mathcal{V}$ tiene peristencias de tangencias, entonces densamente f exhibe una tangencia homoclínica (asociada a punto periódico hiperbólico). Enunciemos ahora el resultado de Newhouse:

Teorema 5.2.1. *Sea $f: M^2 \to M^2$ un difeomorfismo $C^r, r \geq 2$ de una superficie M^2 que presenta una tangencia homoclínica. Entonces existe $\mathcal{V} \subset Diff^r(M^2), r \geq 2$ abierto tal que:*

1. *$f \in \overline{\mathcal{V}}$.*
2. *$\mathcal{V}$ tiene persistencia de tangencias.*
3. *Existe $\mathcal{R}$ residual en $\mathcal{V}$ tal que todo difeomorfismo $g \in \mathcal{R}$ tiene infinitos puntos periódicos atractores (pozos) o todo difeomorfismo $g \in \mathcal{R}$ tiene infinitos puntos periódicos repulsores (fuentes).*

Este resultado muestra la complejidad dinámica que genera la presencia de una tangencia homoclínica. El resultado de Newhouse no es conocido en la topologiía C^1 en superficies. Es un problema abierto aún si los difeomorfismos Axioma A son C^1 densos en superficies.

El resultado de Newhouse fue extendido a dimensiones mayores por J. Palis y M. Viana ([PV]), bajo condiciones de disipación fuerte, y también en topología $C^r, r \geq 2$. Sin embargo, es conocido también en topología C^1 :

Teorema 5.2.2. *[BD2] Para cualquier variedad M con $dimM \geq 3$ existe $\mathcal{V} \subset Diff^1(M)$ abierto y $\mathcal{R}$ residual en $\mathcal{V}$ tal que si $f \in \mathcal{R}$ tiene infinitos puntos periódicos atractores.*

El ejemplo esta basado en la existencia de un ciclo robusto sin descomposición dominada. En dimensión 3 se puede establecer lo siguiente: existe un abierto $\mathcal{V}$ en $Diff^1(M)$ tal que para todo $g \in \mathcal{V}$ se tiene que

- Existen dos puntos periódicos hiperbólicos p y q de indice 1 y 2 respectivamente (y que dependen continuamente de g)
- p tiene un valor propio complejo $\sigma, |\sigma| > 1$.
- q tiene un valor propio complejo $\mu, |\mu| < 1$.
- $H(p, g) = H(q, g)$.

La existencia de los valores propios complejos prohíbe que exista una descomposición dominada (no trivial) en $H(p) = H(q)$ (y hay persistencia de tangencias!). El resultado anterior también entonces se puede conseguir como consecuencia del siguiente:

Teorema 5.2.3. *[BDP] Existe un conjunto residual $\mathcal{R} \subset Diff^1(M)$ tal que para todo difeomorfismo $f \in \mathcal{R}$ y un punto periódico p de f alguna de las siguiente afirmaciones es verdadera:*

- *$H(p, f)$ esta contenida en la clausura de infinitos puntos periódicos atractores o repuslores*
- *$H(p, f)$ admite una descomposición dominada.*

5.3. La conjetura de Palis

Hemos visto que la obstrucción a la hiperbolicidad vienen basicamente de dos fenómenos: existencia de ciclos heterodimensionales o existencia de tangencias homoclínicas. A finales de los años 80 J. Palis formula la siguiente:

Conjetura: [PT] *Sea $f : M \to M$ un difeomorfimos C^r. Entonces f se puede C^r aproximar por un difeomorfismo g tal que:*

1. *g tiene un ciclo heterodimensional.*

2. *g exhibe una tangencia homoclínica*

3. *g es (escencialmente) hiperbólico.*

Un difeomorfismo f es esencialmente hiperbólico si tiene una cantidad finita de atractores hiperbólicos cuya cuenca de atracción es densa (o de medida total) en la variedad. Todo difeomorfismo Axioma A o L-hiperbólico satisface esta condición.

Como en superficies no hay existencia de ciclos tenemos la siguiente formulación: *Todo difeomorfismo de superficie se puede aproximar C^r por un difeomorfismo g tal que*

1. *g exhibe una tangencia homoclínica*

2. *g es (escencialmente) hiperbólico.*

Tenemos el siguiente resultado que dice que la conjetura es cierta en superficies en la topología C^1.

Teorema 5.3.1. *[PuSa] Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo, $dim M = 2$. Entonces, f se puede aproximar C^1 por un difeomorfismo g tal que*

1. *g exhibe una tangencia homoclínica*

2. *g es Axioma A.*

Recientemente, E. Pujals y S. Crovisier anunciaron la prueba de la conjetura de Palis en la topología C^1 en cualquier dimensión.

Apéndice A

Nociones básicas de dinámica

Definición A.0.1. *Sea M un espacio métrico compacto. Un sistema dinámico discreto en M es una $F : \mathbb{Z} \times M \to M$ continua tal que:*

1. $F(0, \cdot) = id$
2. $F(n, F(m, x)) = F(n + m, x)$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in M$.

Observación A.0.1. *Si definimos para cada $n \in \mathbb{Z}$ el mapa $F_n : M \to M$ por $F_n(x) = F(n, x)$, tenemos que $F_n \circ F_m = F_{n+m}$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$. En particular, $f = F_1$ es un homeomorfismo (su inversa es $f^{-1} = F_{-1}$) y se cumple que $F_n = f^n$. Por esto, un sistema dinámico discreto está generado por un homeo $f : M \to M$.*

Definición A.0.2. *Un sistema dinámico continuo o flujo es una $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ continua tal que*

1. $\varphi(0, \cdot) = id_M$
2. $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t + s, x)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$, $\forall x \in M$.

Observación A.0.2. *Igual que en el caso continuo, si para cada $t \in \mathbb{R}$ definimos $\varphi_t : M \to M$ por $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ se tiene que $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$.*

Definición A.0.3. *Sea $x \in M$.*

1. *Si $f : M \to M$ homeo, la órbita de x es $\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) : \ n \in \mathbb{Z}\}$.*
   La órbita futura de x es $\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x) : \ n \geq 0\}$.
   La órbita pasada de x es $\mathcal{O}^-(x) = \{f^n(x) : \ n \leq 0\}$.

2. *Si $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ flujo, la órbita de x es $\mathcal{O}(x) = \{\varphi(t, x) : \ t \in \mathbb{R}\}$.*
   La órbita futura de x es $\mathcal{O}^+(x) = \{\varphi(t, x) : \ t \geq 0\}$.
   La órbita pasada de x es $\mathcal{O}^-(x) = \{\varphi(t, x) : \ t \leq 0\}$.

Ejemplos:

1. $M = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\} \approx \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. La identificación está dada por $exp : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$, con $exp(t) = e^{2\pi i t}$.
   Definimos la *rotación de ángulo* α por $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod 1$ o, equivalentemente, $R_\alpha(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i (t+\alpha)}$.

2. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es C^1 tal que $\sup_{x \in \Omega} \|f(x)\| < \infty$. Consideramos la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)\,(1)$. Tenemos que $\varphi(t, x) = \varphi(t, 0, x) =$ tiempo t de la solución de (1) que en 0 pasa por x es un flujo en Ω.

3. Sea M una variedad compacta y $X : M \to TM$ un campo de vectores tangentes de clase C^1. Usando cartas locales, encontramos que por cada $x \in M$, $\exists!\ \varphi_x : \mathbb{R} \to M$ tal que $\varphi_x(0) = x$ y $\dfrac{\partial \varphi_x(t)}{\partial t} = X(\varphi_x(t))$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Si definimos $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$ tenemos un flujo en M.

4. Sea $M = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ y sea $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ la proyección canónica. Sea $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo de vectores tal que $X((x, y) + (n, m)) = X(x, y)$, $\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2$ (X define un campo de vectores en $\mathbb{T}^2$). Sea $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el flujo asociado a X en $\mathbb{R}^2$. Entonces, se cumple que $\varphi_t((x, y) + (n, m)) = \varphi_t(x, y) + (n, m)$, $\forall t \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2, (n, m) \in \mathbb{Z}^2$, ya que si definimos $\psi(t) = \varphi_t(x, y) + (n, m) \Longrightarrow \begin{cases} \dot{\psi}(t) = X(\psi(t)) \\ \psi(0) = (x, y) + (n, m) \end{cases}$ Luego, $\varphi_t(x, y) + (n, m) = \varphi_t((x, y) + (n, m))$. Entonces $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $\tilde{\varphi}(t, \pi(x, y)) = \pi(\varphi(t, (x, y)))$ es un flujo en $\mathbb{T}^2$.
   Un caso particular muy importante es cuando $X = \text{cte} = (1, \alpha)$, donde $\varphi(t, x) = x + t(1, \alpha)$ y luego $\tilde{\varphi}(t, \pi(x)) = \pi(\varphi(t, x))$ se llama *flujo lineal de pendiente* α en T^2.

Definición A.0.4. *Sea $f : M \to M$ un sistema dinámico discreto.*

- *Un punto $p \in M$ se dice fijo si $f(p) = p$.*
- *Un punto $p \in M$ se dice periódico si existe $k \geq 1$ tal que $f^k(p) = p$. Se llama período de p al* $\text{mín}\{k \geq 1 : \ f^k(p) = p\}$.

La definición para flujos es:

- *Un punto $p \in M$ se dice punto de equilibrio (o singularidad) si $\varphi_t(p) = p$, $\forall t \in \mathbb{R}$.*
- *La órbita por $p \in M$ se dice periódica si nno es una singularidad y existe $t > 0$ tal que $\varphi_t(p) = p$, para algún $t > 0$. Se llama período de p al* $\text{mín}\{t > 0 : \ \varphi_t(p) = p\}$.

Definición A.0.5. *Si $f : M \to M$ es un sistema dinámico discreto y $x \in M$, definimos el ω-límite de x como*

$$\omega(x, f) = \{y \in M : \ \exists n_k \to +\infty \ \textit{tal que} \ f^{n_k}(x) \to y\}.$$

Análogamente, definimos el α-límite de x como

$$\alpha(x, f) = \{y \in M : \ \exists n_k \to -\infty \ \textit{tal que} \ f^{n_k}(x) \to y\}.$$

Observación A.0.3. $\alpha(x, f) = \omega(x, f^{-1})$.

Las definiciones para flujos son:

$$\omega(x) = \{y \in M : \ \exists t_k \to +\infty \ \textit{tal que} \ \varphi(t_k, x) \to y\} \ \textit{y}$$

$$\alpha(x) = \{y \in M : \ \exists t_k \to -\infty \ \textit{tal que} \ \varphi(t_k, x) \to y\}$$

Observamos que

1. Si $f : M \to M$ y p es un punto periódico, entonces, $\omega(p) = \alpha(p) = \mathcal{O}(p)$.
2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ homeomorfismo creciente y $x \in \mathbb{R}$. Entonces, $\omega(x) = \emptyset$ o $\omega(x)$ es un punto fijo.

Definición A.0.6. *Un subconjunto $A \subset M$ se dice invariante si*

$$\begin{cases} f(A) = A \text{ (caso s.d.d.)} \\ \varphi_t(A) = A, \ \forall t \in \mathbb{R} \text{ (caso flujo).} \end{cases}$$

Observación A.0.4. *Si A es invariante, entonces $f^m(A) = A$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.*

Proposición A.0.1. *$\omega(x)$ y $\alpha(x)$ son conjuntos cerrados e invariantes.*

Demostración: Lo hacemos en el caso $f : M \to M$.
Observemos que $\omega(x) = \bigcap_{k \geq 1} \overline{\{f^n(x) : \ n \geq k\}}$. Luego, $\omega(x)$ es cerrado.
Si $y \in \omega(x) \Longrightarrow \exists n_k \to +\infty$ tal que $f^{n_k}(x) \to y$. Sea $m \in \mathbb{Z}$. Entonces $f^{n_k+m}(x) \to f^m(y) \Longrightarrow f^m(y) \in \omega(x)$.
La demostración para el caso de flujos es análoga. $\square$

Proposición A.0.2. *Sea φ flujo y $\overline{\mathcal{O}^+(x)}$ compacto. Entonces, $\omega(x)$ es conexo.*

Demostración: $\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\varphi(t, x) : \ t \geq 0\}}$ es una intersección decreciente de compactos conexos. Luego, es conexa. $\square$

Proposición A.0.3. *Si $f : M \to M$ (con M compacto). Entonces $\omega(x)$ no se puede descomponer en dos subconjuntos cerrados, no vacíos, disjuntos e invariantes. Es decir, si $\omega(x) = A \cup B$, con A, B cerrados e invariantes y $A \cap B = \emptyset$, entonces $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.*

Demostración: Supongamos que podemos escribir a $\omega(x) = A \cup B$, con $f(A) = A$ y $f(B) = B$, A y B cerrados, no vacíos y disjuntos. Sean U_1 y V_1 abiertos disjuntos que contienen a A y B, respectivamente. Sea, $U = f^{-1}(U_1) \cap U_1$, $V = f^{-1}(V_1) \cap V_1$. Ambos son abiertos y disjuntos, $A \subset U$, $B \subset V$. Si $y \in U \Longrightarrow f(y) \in U_1$, y si $y \in V \Longrightarrow f(y) \in V_1$. Como $A \subset \omega(x) \Longrightarrow \exists n_1$ tal que $f^{n_1}(x) \in U$. Sea $m_1 = \text{mín}\{m > n_1 : f^m(x) \notin U\}$ (existe pues $B \subset \omega(x)$). Se verifica que $f^{m_1}(x) \notin V$ (ya que $f^{m_1}(x) \in U_1$). Análogamente, $\exists n_2 > m_1$ tal que $f^{n_2}(x) \in U$. Sea $m_2 = \text{mín}\{m > n_2 : \ f^m(x) \notin U\}$. En general, dado $n_k > m_{k-1}$ tal que $f^{n_k}(x) \in U$, construimos que $m_k = \text{mín}\{m > n_k : \ f^m(x) \notin U\}$. Se verifica que: $\begin{cases} m_k \to +\infty \\ f^{m_k}(x) \in A^c \\ \overline{\mathcal{O}^+(x)} \text{ es compacto} \end{cases} \Longrightarrow \omega(x) \cap (U^c \cap V^c) \neq \emptyset$, y esto es un absurdo. $\square$

Definición A.0.7. *Sea $f : M \to M$ un sistema dinámico. Un punto $x \in M$ es no-errante si $\forall U$ entorno de x, se tiene que $\exists n \geq 1$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$.*
Si $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ es un flujo, decimos que $x \in M$ es no-errante si $\forall U$ entorno de x, $\exists t \geq 1$ tal que $\varphi_t(U) \cap U \neq \emptyset$.

Notamos $\Omega(f) = \{x \in M : \ x \text{ es no errante}\}$, y lo llamamos *conjunto no errante.*

Observación A.0.5.

- *$\Omega(f)$ es cerrado e invariante.*
- *Si p es periódico $\Longrightarrow p \in \Omega(f)$.*
- *Si $x \in M \Longrightarrow \begin{cases} \omega(x) \subset \Omega(f) \\ \alpha(x) \subset \Omega(f) \end{cases}$*

Definición A.0.8. *Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo. Definimos el conjunto límite de f como*

$$L(f) = \overline{\bigcup_{x \in M} (\alpha(x) \cup \omega(x))}.$$

Definición A.0.9. *Sea $f : M \to M$ un sistema dinámico. Sea $x, y \in M$ y $\epsilon > 0$. Una ϵ-cadena de x a y es un conjunto finito $\{x_0, ..., x_n\}$ tal que $x_0 = x$, $x_n = y$ y $d(f(x_i), x_{i+1}) < \epsilon$ para $0 \leq i < n$.*

Decimos que x es recurrente por cadenas si para todo $\epsilon > 0$ existe una ϵ-cadena de x a x. El conjunto recurrente por cadenas $\mathcal{R}(f)$ es el conjunto de los puntos recurrentes por cadenas

Proposición A.0.4. *El conjunto $\mathcal{R}(f)$ es compacto e invariante. Además $\mathcal{R}(f_{/\mathcal{R}(f)}) = \mathcal{R}(f)$.*

Demostración. Ejercicio. $\square$

Observación A.0.6. *$Per(f) \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset \mathcal{R}(f)$.*

Dinámica de la Rotación: Consideremos $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod 1$. Distinguimos dos casos:

1. Caso $\alpha \in \mathbb{Q}$: sea $\alpha = \dfrac{p}{q}$, con $(p,q) = 1 \Longrightarrow R_\alpha^q(x) = x + p \equiv x \pmod 1$.

   Entonces, x es periódico (y de período q !). Luego, $\Omega(f) = S^1$ y todo punto es periódico con el mismo período.

2. Caso $\alpha \notin \mathbb{Q}$: primero observemos que R_α no tiene puntos periódicos:
   si $R_\alpha^n(x) = x \Longrightarrow x + n\alpha \equiv x \pmod 1 \Longrightarrow n\alpha \equiv 0 \pmod 1 \Longrightarrow \alpha \in \mathbb{Q}$. Sea $x \in S^1 \Longrightarrow \omega(x) \subset S^1$ compacto e invariante. Supongamos que $\omega(x) \subsetneq S^1 \Longrightarrow S^1 \backslash \omega(x) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j$, donde cada I_j es una componente conexa de $S^1\backslash\omega(x)$. Observemos que como R_α es un homeo, tenemos que $R_\alpha(I_n) = I_{n'}$ con $n \neq n'$. Más aún: $R_\alpha^n(I_j) \cap R_\alpha^m(I_j) = \emptyset$, $\forall n, m$ tales que $n \neq m$ (de lo contrario, existiría un punto periódico). Sin embargo, $|R_\alpha^n(I_j)| = |R_\alpha^m(I_j)|$, ya que R_α es un movimiento rígido.

   Conclusión: $\omega(x) = S^1$, $\forall x \in S^1$. Es decir, $\Omega(R_\alpha) = S^1$ y toda órbita (futura) es densa.

Dinámica del Flujo Lineal en $\mathbb{T}^2$: Tenemos el campo en $\mathbb{R}^2$ dado por $X_\alpha(x) = (1, \alpha)$. Luego, $\varphi_t^\alpha = x + t(1,\alpha)$ es el flujo de X_α en el plano. Sea $\tilde{\varphi_t^\alpha}(x) = \pi(\varphi_t^\alpha)$ el flujo lineal en $\mathbb{T}^2$.
Observamos que $\{0\} \times S^1$ es transversal al flujo (i.e., todas las órbitas cortan (transversalmente) a $\{0\} \times S^1$. Si $x \in \{0\} \times S^1$, fijémonos en el "primer retorno", es decir, la primera vez (en el futuro) en que la órbita por x corta a $\{0\} \times S^1$. Vemos que $\varphi_1(0,x) = (0,x) + (1,\alpha) = (1, x+\alpha)$. Luego, $R(x) = (x+\alpha) \pmod 1$. Es decir, el retorno es la rotación de ángulo α.
Conclusión:

1. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, entonces todas las órbitas del flujo lineal $\tilde{\varphi_t^\alpha}$ son periódicas. $\Omega(\tilde{\varphi^\alpha}) = \mathbb{T}^2$ y $\omega(x) = \alpha(x) = \mathcal{O}(x)$.

2. Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, entonces todas las órbitas del flujo lineal $\tilde{\varphi_t^\alpha}$ son densas. $\Omega(\tilde{\varphi^\alpha}) = \mathbb{T}^2$ y $\omega(x) = \alpha(x) = \mathbb{T}^2$, $\forall x$.

Corolario A.0.1. *Si r es una recta de pendiente irracional en $\mathbb{R}^2$, entonces $\pi(r)$, su proyección en T^2, es densa.*

Definición A.0.10. *$x \in M$ se dice recurrente en el* $\left\{ \begin{array}{c} \textit{futuro} \\ \textit{pasado} \end{array} \right\}$ *si* $\left\{ \begin{array}{c} x \in \omega(x) \\ x \in \alpha(x) \end{array} \right\}$. *Si x es recurrente en el futuro y en el pasado, decimos que x es recurrente.*

Ejemplos:

1. Si p es periódico $\Longrightarrow$ p es recurrente.

2. Todo punto es recurrente según la rotación R_α, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

3. Todo punto es recurrente según el flujo lineal $\tilde{\varphi}^\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

A.1. Transitividad

Definición A.1.1. *Sean M espacio topológico y $f : M \to M$ un s.d. Decimos que f es transitivo si $\exists x \in M$ tal que $\overline{\mathcal{O}(x)} = M$.*

Observación A.1.1. *Si M no es discreto, entonces f es transitivo $\Longleftrightarrow$ $\exists x$ tal que $\omega(x) = M$ o $\alpha(x) = M$.*

Demostración: ($\Longleftarrow$) Obvio.
($\Longrightarrow$) Como M no es discreto y $\overline{\mathcal{O}(x)} = M$, concluimos que $x \in \omega(x)$ o $x \in \alpha(x)$. Entonces, $\mathcal{O}(x) \subset \omega(x)$ o $\mathcal{O}(x) \subset \alpha(x)$. $\square$

Proposición A.1.1. *Sean M espacio métrico completo (separable) sin puntos aislados y $f : M \to M$ un s.d. Son equivalentes:*

1. *f es transitivo*

2. *dados A y B abiertos $\exists n \geq 0$ tal que $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$.*

3. *$\exists R_1$ residual tal que $\omega(x) = M$, $\forall x \in R_1$.*

4. *$\exists R_2$ residual tal que $\alpha(x) = M$, $\forall x \in R_2$.*

Demostración: 1) $\Longrightarrow$ 2) Sea $x \in M$ tal que $\overline{\mathcal{O}(x)} = M \Longrightarrow \omega(x) = M$ o $\alpha(x) = M$. Supongamos que $\alpha(x) = M \Longrightarrow \exists n_1$ tal que $f^{n_1}(x) \in B$ y $\exists n_2$, con $n_2 < n_1$ tal que $f^{n_2}(x) \in A \Longrightarrow f^{n_1 - n_2}(A) \cap B = \emptyset$.

2) $\Longrightarrow$ 3) Sea $\{B_n : n \geq 1\}$ una base numerable de la topología. Definimos $A_n = \{y \in M : f^m(y) \in B_n$ para algún $m \geq 0\}$. Luego, A_n es abierto y denso (por 2)). Tenemos que $R_1 = \bigcap_n A_n$ es residual. Sea $x \in R_1$ y sea U abierto $\Longrightarrow \exists n$ tal que $B_n \subset U$. Luego, como $x \in A_n$, $\forall n$ tenemos que $\exists m$ tal que $f^m(x) \in B_n \subset U \Longrightarrow \omega(x) = M$.

3) $\Longrightarrow$ 1) obvio.

La equivalencia con 4) es $1), 2), 3)$ con $g = f^{-1}$. □

Corolario A.1.1. *$f : M \to M$ es transitivo $\Longleftrightarrow$ si $A \subset M$ es abierto, transitivo e invariante entonces $\overline{A} = M$.*

Observación A.1.2. *Si $f : M \to M$ es transitivo y $\varphi : M \to \mathbb{R}$ continua es tal que $\varphi \circ f = \varphi \Longrightarrow \varphi = cte$.*

Demostración: Sea x_0 tal que $\overline{\mathcal{O}x_0} = M \Longrightarrow \varphi(f^n(x_0)) = \varphi(x_0)$, $\forall n \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \varphi$ es constante en un conjunto denso $\Longrightarrow \varphi = cte$. □

A.2. El shift de Bernoulli

Definición A.2.1. *$f : M \to M$ un homeomorfismo. Decimos que f es expansivo si $\exists \alpha > 0$ tal que si $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha$, $\forall n \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x = y$ (α es llamada constante de expansividad).*

Definición A.2.2. *Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo. Decimos que f es topológicamente mixing si dados U, V abiertos cualesquiera, existe $m > 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ $\forall n \geq m$.*

Veamos un ejemplo que, entre otras propiedades, es expansivo y topológicamente mixing.

Sea $M = \Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. En $\{0,1\}$ colocamos la topología discreta y dotamos a Σ con la topología producto. Luego, Σ es compacto. Si definimos $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|x_n - y_n|}{2^{|n|}}$, obtenemos una métrica en Σ compatible con la topología. Dado $\{x_n\} \in \Sigma$ y $N \in \mathbb{N}$, definimos el N-entorno de $\{x_n\}$ como

$$N(\{x_n\}) = \{\{y_n\} \in \Sigma : \ y_n = x_n \text{ si } |n| \leq N\}.$$

Se verifica que $N(\{x_n\})$ constituye una base de entornos de $\{x_n\}$. Definimos el *shift a la izquierda* o *shift de Bernoulli* (de dos símbolos) al homeomorfismo $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ tal que $\sigma(\{x_n\}) = \{y_n\}$ donde $y_n = x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Teorema A.2.1. *Sea $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ el shift de Bernoulli. Entonces:*

1. *σ es expansivo*
2. *$\overline{Per(\sigma)} = \Sigma$*
3. *σ es transitivo y topológicamente mixing.*
4. *Para cualquier $\{x_n\} \in \Sigma$ su conjunto estable*

$$W^s(\{x_n\}) = \{\{y_n\} : \ d(\sigma^j(\{y_n\}), \sigma^j(\{x_n\})) \to_j 0\}$$

e inestable

$$W^u(\{x_n\}) = \{\{y_n\} : \ d(\sigma^j(\{y_n\}), \sigma^j(\{x_n\})) \to_{j\to\infty} 0\}$$

son ambos densos en Σ.

Demostración: 1. Si $\{x_n\} \neq \{y_n\} \Longrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}$ tal que $x_m \neq y_m \Longrightarrow d(\sigma^{-m}(\{x_n\}), \sigma^{-m}(\{t_n\})) \geq 1$. Luego, cualquier $\alpha < 1$ es constante de expansividad.

2. Sea $\{x_n\} \in \Sigma$ cualquiera y fijemos un N entorno de $\{x_n\}$. Definimos $\{y_n\}$ como $y_n = x_n$ si $|n| \leq N$ y de forma periódica, es decir, $y_{k(2N+1)+j} = y_j$ si $-N \leq j \leq N$.

3. Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ dos puntos de Σ y fijemos U, un N_1 entorno de $\{x_n\}$, y V, un entorno N_2 de $\{y_n\}$. Tomemos $m > N_1 + 2N_2 + 1$ y sea $k \geq m$ cualquiera. Definimos $\{z_n\}$ tal que: $z_n = x_n$ si $|n| \leq N_1, z_{k+n} = y_n$ si $|n| \leq N_2$. Resulta entonces que $\sigma^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

4. Basta observar

$$W^s(\{x_n\}) = \{\{y_n\} : \ y_n = x_n, \ \forall n \geq k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}\}$$

y

$$W^u(\{x_n\}) = \{\{y_n\} : \ y_n = x_n, \ \forall n \leq k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}\}.$$

$\square$

A.3. Equivalencia dinámica

Terminamos este capítulo definiendo cuando dos sistemas dinámicos son ïguales".

Definición A.3.1. *Sean* $f, g : M \to M$ *dos sistemas dinámicos. Decimos que son conjugados si existe un homeomorfismo* $h : M \to M$ *tal que* $h \circ f = g \circ h$.

Para el caso de flujos tenemos las siguientes definiciones.

Definición A.3.2. *Sean* ϕ_t, ψ_t *dos flujos en* M. *Decimos que son conjugados si existe* $h : M \to M$ *homeomorfismo tal que* $h \circ \phi_t = \psi_t \circ h$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Se dice que los flujos ϕ_t, ψ_t *son orbitalmente equivalentes si existe* $h : M \to M$ *tal que* $h(\mathcal{O}_{\phi_t}(x)) = \mathcal{O}_{\psi_t}(h(x))$.

La conjugación entre sistemas dinámicos preserva todas las propiedades dinámicas, por ejemplo:

Teorema A.3.1. *Sea* M *compacto y sean* $f : M \to M$ *y* $g : M \to M$ *dos homeomorfismos conjugados por un homeomorfismo* $h : M \to M$ *Entonces:*

1. p *es periódico por* f *sii* $h(p)$ *es periódico por* g.
2. p *es recurrente por* f *sii* $h(p)$ *es recurrente por* g.
3. $h(\omega(x, f)) = \omega(h(x), g)$.
4. $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$.
5. f *es transitivo sii* g *es transitivo.*
6. f *es topológicamente mixing sii* g *es topológicamente mixing.*

Demostración. Ejercicio ∎

Bibliografía

[A] N. Aoki, The set of Axiom A with no cycles, *Bol. Soc. Bras. Mat.* **23**(1), (1992), 21-65.

[AS] R. Abraham, S. Smale, Nongenericity of Ω-stability, *Global analysis, Proc. Symp. Pure Math* **14** (1970)

[B] G. D. Birkhoff, Nouvelles recherches sur les systémes dynamiques, *Mem. Pont. Acad. Sci. Novi. Lyncaei* **1** (1935), 85-216.

[BD1] C. Bonatti, L. J. Diaz, Persistence of transitive diffeomorphisms, *Annals of Math* **143** (1995), 367-396.

[BD2] C. Bonatti, L. J. Diaz, Connexions heterocliniques et genericité d'une infinité de puitsou de sources, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **32** (1999), 125-150.

[BDP] C. Bonatti, L. J. Diaz, E. Pujals, A C^1-generic dichotomy for diffeomorphisms: weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources, *Ann. of Math.* **158** (2003), 355-418.

[BDV] C. Bonatti, L. J. Diaz, M. Viana, *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity*; A, Springer-Verlag, , 2005, xviii+384p.

[CMP] C. Carballo, C. Morales, M. J. Pacífico, Homoclinic classes for generic C^1 vector fields, *Ergod Theort and Dyn Syst* **23** (2003) 403-415.

[G] S. Gan, A generalized shadowing lemma, *Disc. and cont. dynam syst.* **8**(3) (2002), 627-632. Volume 8, Number 3, July 2002

[F] J. Franks, Necessary conditions for stability of diffeomorphisms, *Trans. Amer. Math. Soc.* **158** (1971) 301-308.

[H] P. Hartman; *Ordinary differential equations*, Willey, 1964.

[Ha] S. Hayashi, (1997) Connecting invariant manifolds and the solution of the C1-stability and Ω-stability conjectures for flows, *Ann. of Math.*, **145**, 81-137

[Ha2] S. Hayashi, Diffeomorphisms in $\mathcal{F}^1(M)$ satisfy Axiom A, *Ergod Theort and Dyn Syst* **12** (1992) 233-253.

[HPS] M. Hirsch, C. Pugh, M. Shub, Invariant manifolds, *Springer Lecture Notes in Math.*, **583** (1977).

[K] I. Kupka; Contriubtion à la théorie des chaps génériques, *Cont. Diff. Eq.* **2** (1963), 411-420.

[KH] Katok, A.,Hasselblatt, B.; *Intoduction to the modern theory of Dynamical Systems* Cambridge Univ. Press, 1995.

[L1] J. Lewowicz, Lyapunov functions and topological stability *Journal of Diff. Eq.*, **38**(2) (1980), 192-209.

[L2] J. Lewowicz, Persistence in Expansive Systems, *Ergod Theort and Dyn Syst*, **3** (1983), 567-578.

[Ma1] R. Mañé,An ergodic closing lemma, *Annals of Mathematics***116**(1982),503-540.

[Ma2] R. Mañé, A proof of the C^1 stability conjecture, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **66** (1988) 161-210.

[Ma3] R. Mañé, Ergodic Theory and Differential Dynamics, *Springer-Verlag* New York, 1987.

[Ma4] R. Mañé, Contributions to the stability conjecture, *Topology* **17**(1978), 383-396.

[N1] Newhouse, S., Hyperbolic limit sets. *Trans. Amer. Math. Soc.* **167** (1972), 125-150.

[N2] S. Newhouse, Non-density of Axiom A(a) on S^2, *Proc. A.M.S. Symp. Pure Math.* **14** (1970), 191-202.

[N3] S. Newhouse, Diffeomorphism with infinitely many sinks, *Topology* **13** (1974), 9-18.

[N4] S. Newhouse, The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms, *Publ. Math. I.H.E.S.* **50** (1979), 101-151.

[P1] J. Palis, On Morse-Smale dynamical systems, *Topology* **8** (1969), 385-405.

[P2] J. Palis, A note on Ω-stability. *Proc. A.M. S. Symp Pure Math* **14** (1970), 221-222.

[P3] J. Palis, On teh Ω-stability conjecture, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **66** (1988) 211-215.

[PS] J. Palis, S. Smale, Structural stability theorems, *Proc. A.M. S. Symp Pure Math* **14** (1970), 223-232.

[PdM] J. Palis, W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems*, Springer- Verlag, 1982.

[PT] J. Palis, F. Takens, Hyperoblicity and sensitive-chaotic dynamics at homoclinic bifurcations, *Cambridge Univ. Press*, 1993.

[PV] J.Palis, M. Viana High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many periodic attractors. *Ann. of Math. (2)* **140**, (1994), no. 1, 207–250.

[Pl] V. A. Pliss, On a conjecture due to Smale, *Diff. Uravnenija*, **8** (1972), 268-282.

[Pu1] C. Pugh, The closing lemma, *Amer. J. Math.* **89** (1967) 956-1009.

[Pu2] C. Pugh, An improved closing lemma and a general density theorem *Amer. J. Math.* **89** (1967), 1010-1021.

[PuSa] E.R. Pujals, M. Sambarino, Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms, *Ann. of Math.* **151** (2000), no. 3, 961-1023.

[R1] J. Robbin J, A structural stability theorem, *Annals of Math*, **94**(1971), 447-493.

[R2] C. Robinson, Structural stability of C1 diffeomorphisms. *Journal of Diff. Eq.* **22**(1976), 28-73.

[R3] C. Robinson, Structural stability implies Kupka-Smale, *Dynamical Systems, ed. M. Peixoto*, Academic Press, 1973, 443-449.

[S1] S. Smale; Stable manifolds for differential equations adn diffeomorphisms, *Ann. Scuola Sup. Pisa* **17**(1963), 97-116.

[S2] S. Smale, Diffeomorphisms with many periodic points, *Differential and Combinatorial Topology*, Princeton Univ. Press, (1964), 63-80.

[S3] Smale, S. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.***73** (1967), 747–817.

[S4] S. Smale, The Ω-stability theorem, *Proc. A.M. S. Symp Pure Math* **14** (1970), 289-297.

[Sh] M. Shub, Global Stability of Dynamical Systems, *Springer-Verlag*, 1987.

[Sh2] M. Shub, Topologically transitive diffeomorphisms on $\mathbb{T}^4$, *Lecture Notes in Math***206**(1970), 39.

[WX] L. Wen, Z, Xia, C^1 connecting lemmas, *Trans. Amer. Math. Soc.* **352** (2000), 5213-5230.

Índice alfabético