

Dinámica en el círculo  
EMALCA 2017

Pablo Guarino   Martín Sambarino

20 de mayo de 2017

# Índice general

<b>I Aspectos combinatorios y topológicos</b>	<b>5</b>
<b>1. Conceptos básicos en dinámica</b>	<b>6</b>
1.1. Introducción . . . . .	6
1.2. Recurrencia y Ergodicidad . . . . .	10
1.3. Conjuntos minimales . . . . .	16
1.4. Transitividad . . . . .	19
1.5. Equivalencia dinámica . . . . .	21
1.6. Algunos ejemplos caóticos . . . . .	22
1.6.1. El Shift de Bernoulli . . . . .	22
1.6.2. La Herradura de Smale . . . . .	24
1.6.3. Sistemas de Anosov lineales: el ejemplo de Thom . . . . .	27
1.7. El Teorema Ergódico de Birkhoff . . . . .	28
1.8. Práctico 1 . . . . .	28
<b>2. Homeomorfismos del círculo</b>	<b>34</b>
2.1. Número de rotación racional . . . . .	37
2.2. Número de rotación irracional . . . . .	39
2.3. Número de rotación y medidas invariantes . . . . .	40
2.4. Práctico 2 . . . . .	42
<b>3. Difeomorfismos del círculo</b>	<b>44</b>
3.1. Teorema de Denjoy, primera versión . . . . .	47
3.2. Algunas herramientas . . . . .	50
3.2.1. Tiempos de retorno . . . . .	50
3.2.2. Distorsión de cross-ratio . . . . .	51
3.3. Teorema de Denjoy, versión fuerte . . . . .	53

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	2
3.3.1. Prueba de la Proposición 3.3.1 y la Proposición 3.3.2 . . . . .	54
3.4. $\text{Diff}^r(S^1)$ desde el punto de vista genérico . . . . .	57
3.5. Práctico 3 . . . . .	61
<b>II Aspectos ergódicos y geométricos</b>	<b>64</b>
<b>4. Breve paréntesis sobre fracciones continuas</b>	<b>65</b>
4.1. Fracciones Continuas . . . . .	65
4.2. La condición Diofantina . . . . .	69
<b>5. Rigidez geométrica: Arnold-Herman-Yoccoz</b>	<b>71</b>
<b>6. Mapas críticos del círculo</b>	<b>73</b>
6.1. Mapas críticos del círculo . . . . .	73
6.2. Ejemplos analíticos . . . . .	74
6.2.1. La familia de Arnold . . . . .	75
6.2.2. Productos de Blaschke . . . . .	76
6.3. Una extensión del Teorema de Denjoy . . . . .	81
6.3.1. Cross-ratio degenerado . . . . .	83
6.3.2. La prueba de Yoccoz . . . . .	83
6.4. Rigidez geométrica de mapas críticos . . . . .	87

# Prólogo

Estas notas han sido escritas para la Escuela de Matemáticas para América Latina y el Caribe, EMALCA, que se celebrará en la ciudad de Medellín, Colombia, entre el 12 y el 23 de Junio de 2017. Nuestra idea es que las notas sirvan como complemento de las clases que serán ministradas durante la escuela. Manifestamos aquí nuestros sinceros agradecimientos a los organizadores de la escuela, por la oportunidad concedida.

Hemos organizado estas notas en dos partes, de tres capítulos cada una. La primera parte (Parte I) es una introducción al estudio de los *sistemas dinámicos* a través del espacio de fases más simple: el círculo. En el Capítulo 1 introducimos definiciones y ejemplos básicos de la teoría. En el Capítulo 2 nos enfocamos en homeomorfismos del círculo, y discutimos su principal invariante dinámico: el número de rotación. En el Capítulo 3 estudiamos difeomorfismos del círculo, tanto desde el punto de vista de la clasificación topológica, cuanto desde el punto de vista de la estabilidad estructural. Cada capítulo de esta primera parte finaliza con una lista de ejercicios (Práctico).

En la segunda parte de estas notas (Parte II) enunciaremos resultados de *rigidez geométrica*, tanto para difeomorfismos del círculo como para mapas con puntos críticos. En el Capítulo 4 recordamos algunas nociones básicas de aproximación de números irracionales por fracciones continuas, que serán útiles para enunciar algunos teoremas recientes de rigidez de difeomorfismos, cosa que haremos en el Capítulo 5. En el Capítulo 6 estudiamos homeomorfismos suaves del círculo que presentan puntos críticos. Los capítulos de esta segunda parte son de carácter más informativo (en comparación con aquellos de la Parte I), y los asuntos discutidos son un poco más complejos. Por ello, los capítulos de esta segunda parte no tienen ejercicios sugeridos.

El libro [8] es una agradable introducción a los sistemas dinámicos. Como referencias mas generales de sistemas dinámicos sugerimos los libros [29] y [41]. Los libros [3], [50] y [59] también son excelentes referencias, aunque mas avanzadas. El libro [46] es la referencia clásica de dinámica unidimensional real, mientras que para dinámica en una dimensión compleja destacamos [44] y [47].

Estaremos muy agradecidos si los lectores nos envían sugerencias, correcciones o comentarios para [pablo\\_guarino@id.uff.br](mailto:pablo_guarino@id.uff.br) y/o [samba@cmat.edu.uy](mailto:samba@cmat.edu.uy).

Pablo Guarino  
Universidade Federal Fluminense  
Niterói, Rio de Janeiro, Brasil

Martín Sambarino  
Universidad de la República  
Montevideo, Uruguay

Parte I

Aspectos combinatorios y  
topológicos

# Capítulo 1

## Conceptos básicos en dinámica

### 1.1. Introducción

**Definición 1.1.1.** Sea  $M$  un espacio topológico (de Hausdorff, métrico, completo, etc). Un *sistema dinámico discreto* en  $M$  es una función continua  $F : \mathbb{Z} \times M \rightarrow M$  tal que:

1.  $F(0, \cdot) = id$
2.  $F(n, F(m, x)) = F(n + m, x), \forall n, m \in \mathbb{Z}, \forall x \in M.$

*Observación 1.1.1.* Si definimos para cada  $n \in \mathbb{Z}$  el mapa  $F_n : M \rightarrow M$  por  $F_n(x) = F(n, x)$ , tenemos que  $F_n \circ F_m = F_{n+m}, \forall n, m \in \mathbb{Z}$ . En particular,  $f = F_1$  es un homeomorfismo (su inversa es  $f^{-1} = F_{-1}$ ) y se cumple que  $F_n = f^n$ . Por esto, un sistema dinámico discreto está generado por un homeo  $f : M \rightarrow M$ .

**Definición 1.1.2.** Un *sistema dinámico continuo* o *flujo* es una función continua  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  tal que

1.  $\varphi(0, \cdot) = id_M$
2.  $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t + s, x), \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in M.$

*Observación 1.1.2.* Igual que en el caso continuo, si para cada  $t \in \mathbb{R}$  definimos  $\varphi_t : M \rightarrow M$  por  $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$  se tiene que  $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ ,  $\forall t, s \in \mathbb{R}$ .

**Definición 1.1.3.** Sea  $x \in M$ .

1. Si  $f : M \rightarrow M$  homeo, la *órbita* de  $x$  es  $\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ .  
La *órbita futura* de  $x$  es  $\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x) : n \geq 0\}$ .  
La *órbita pasada* de  $x$  es  $\mathcal{O}^-(x) = \{f^n(x) : n \leq 0\}$ .
2. Si  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  flujo, la *órbita* de  $x$  es  $\mathcal{O}(x) = \{\varphi(t, x) : t \in \mathbb{R}\}$ .  
La *órbita futura* de  $x$  es  $\mathcal{O}^+(x) = \{\varphi(t, x) : t \geq 0\}$ .  
La *órbita pasada* de  $x$  es  $\mathcal{O}^-(x) = \{\varphi(t, x) : t \leq 0\}$ .

**Ejemplos:**

1.  $M = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \approx \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . La identificación está dada por  $exp : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1$ , con  $exp(t) = e^{2\pi it}$ .  
Definimos la *rotación de ángulo*  $\alpha$  por  $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$  o, equivalentemente,  $R_\alpha(e^{2\pi it}) = e^{2\pi i(t+\alpha)}$ .
2. Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  es un abierto y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  es  $C^1$  tal que  $\sup_{x \in \Omega} \|f(x)\| < \infty$ , consideramos la ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x)$ . (1)  
Tenemos que  $\varphi(t, x) = \varphi(t, 0, x)$  = tiempo  $t$  de la solución de (1) que en 0 pasa por  $x$  es un flujo en  $\Omega$ .
3. Sea  $M$  una variedad compacta y  $X : M \rightarrow TM$  un campo de vectores tangentes de clase  $C^1$ . Usando cartas locales, encontramos que por cada  $x \in M$ ,  $\exists ! \varphi_x : \mathbb{R} \rightarrow M$  tal que  $\varphi_x(0) = x$  y  $\frac{\partial \varphi_x(t)}{\partial t} = X(\varphi_x(t))$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .  
Si definimos  $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$  tenemos un flujo en  $M$ .
4. Sea  $M = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  y sea  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  la proyección canónica. Sea  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo de vectores tal que  $X((x, y) + (n, m)) = X(x, y)$ ,  $\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2$  ( $X$  define un campo de vectores en  $\mathbb{T}^2$ ). Sea  $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  el flujo asociado a  $X$  en  $\mathbb{R}^2$ . Entonces, se cumple que  $\varphi_t((x, y) + (n, m)) = \varphi_t(x, y) + (n, m)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2, (n, m) \in \mathbb{Z}^2$ ,  
ya que si definimos  $\psi(t) = \varphi_t(x, y) + (n, m) \implies \begin{cases} \dot{\psi}(t) = X(\psi(t)) \\ \psi(0) = (x, y) + (n, m) \end{cases}$   
Luego,  $\varphi_t(x, y) + (n, m) = \varphi_t((x, y) + (n, m))$ . Entonces  $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ ,  $\tilde{\varphi}(t, \pi(x, y)) = \pi(\varphi(t, (x, y)))$  es un flujo en  $\mathbb{T}^2$ .

Un caso particular muy importante es cuando  $X = \text{cte} = (1, \alpha)$ , donde  $\varphi(t, x) = x + t(1, \alpha)$  y luego  $\tilde{\varphi}(t, \pi(x)) = \pi(\varphi(t, x))$  se llama *flujo lineal de pendiente  $\alpha$*  en  $T^2$ .

**Definición 1.1.4.** Sea  $f : M \rightarrow M$  un sistema dinámico discreto.

- Un punto  $p \in M$  se dice *fijo* si  $f(p) = p$ .
- Un punto  $p \in M$  se dice *periódico* si existe  $k \geq 1$  tal que  $f^k(p) = p$ . Se llama *período* de  $p$  al  $\min\{k \geq 1 : f^k(p) = p\}$ .

La definición para flujos es:

- Un punto  $p \in M$  se dice *punto de equilibrio* (o *singularidad*) si  $\varphi_t(p) = p$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .
- La órbita por  $p \in M$  se dice *periódica* si existe  $t > 0$  tal que  $\varphi_t(p) = p$ , para algún  $t > 0$ . Se llama *período* de  $p$  al  $\min\{t > 0 : \varphi_t(p) = p\}$ .

Recordemos que la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $M$  es la generada por sus conjuntos abiertos. Una *probabilidad* es una medida de Borel  $\mu$  en  $M$  tal que  $\mu(M) = 1$ .

**Definición 1.1.5.** Una probabilidad  $\mu$  es *invariante* por  $f$  si  $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$  para todo conjunto de Borel  $A \subset M$ . En este caso, decimos también que  $f$  *preserva  $\mu$* .

*Ejemplos 1.* 1. Una medida de Dirac  $\delta_p$  es invariante por un homeomorfismo  $f$  si, y solo si,  $p$  es un punto fijo de  $f$ .

2. La medida de Lebesgue en el círculo es invariante para cualquier rotación.

3. Sea  $f : U \rightarrow U$  un difeomorfismo de clase  $C^1$  de un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Entonces  $f$  preserva la medida de Lebesgue si, y solo si,  $|\det Df(x)| = 1$  para todo  $x \in U$  (este ejemplo generaliza el anterior).

**Definición 1.1.6.** Si  $f : M \rightarrow M$  es un sistema dinámico discreto y  $x \in M$ , definimos el  $\omega$ -límite de  $x$  como

$$\omega(x, f) = \{y \in M : \exists n_k \rightarrow +\infty \text{ tal que } f^{n_k}(x) \rightarrow y\}.$$

Análogamente, definimos el  $\alpha$ -límite de  $x$  como

$$\alpha(x, f) = \{y \in M : \exists n_k \rightarrow -\infty \text{ tal que } f^{n_k}(x) \rightarrow y\}.$$

*Observación 1.1.3.*  $\alpha(x, f) = \omega(x, f^{-1})$ .

Las definiciones para flujos son:

$$\omega(x) = \{y \in M : \exists t_k \longrightarrow +\infty \text{ tal que } \varphi(t_k, x) \longrightarrow y\}$$

$$\alpha(x) = \{y \in M : \exists t_k \longrightarrow -\infty \text{ tal que } \varphi(t_k, x) \longrightarrow y\}$$

Observamos que

1. Si  $f : M \rightarrow M$  y  $p$  es un punto periódico, entonces,  $\omega(p) = \alpha(p) = \mathcal{O}(p)$ .
2. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  homeomorfismo creciente y  $x \in \mathbb{R}$ . Entonces,  $\omega(x) = \emptyset$  o  $\omega(x)$  es un punto fijo.

**Definición 1.1.7.** Un subconjunto  $A \subset M$  se dice *invariante* si

$$\begin{cases} f(A) = A \text{ (caso s.d.d.)} \\ \varphi_t(A) = A, \forall t \in \mathbb{R} \text{ (caso flujo).} \end{cases}$$

*Observación 1.1.4.* Si  $A$  es invariante, entonces  $f^m(A) = A, \forall m \in \mathbb{Z}$ .

**Proposición 1.1.1.**  $\omega(x)$  y  $\alpha(x)$  son conjuntos cerrados e invariantes.

*Demostración.* Lo hacemos en el caso  $f : M \rightarrow M$ .

Observemos que  $\omega(x) = \bigcap_{k \geq 1} \overline{\{f^n(x) : n \geq k\}}$ . Luego,  $\omega(x)$  es cerrado.

Si  $y \in \omega(x) \implies \exists n_k \longrightarrow +\infty$  tal que  $f^{n_k}(x) \longrightarrow y$ . Sea  $m \in \mathbb{Z}$ . Entonces  $f^{n_k+m}(x) \longrightarrow f^m(y) \implies f^m(y) \in \omega(x)$ .

La demostración para el caso de flujos es análoga.  $\square$

**Proposición 1.1.2.** Sea  $\varphi$  flujo y  $\overline{\mathcal{O}^+(x)}$  compacto. Entonces,  $\omega(x)$  es conexo.

*Demostración.*  $\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\varphi(t, x) : t \geq 0\}}$  es una intersección decreciente de compactos conexos. Luego, es conexa.  $\square$

**Proposición 1.1.3.** Si  $f : M \rightarrow M$  (con  $M$  espacio regular) y  $\overline{\mathcal{O}^+(x)}$  es compacta, entonces  $\omega(x)$  no se puede descomponer en dos subconjuntos cerrados, no vacíos, disjuntos e invariantes. Es decir, si  $\omega(x) = A \cup B$ , con  $A, B$  cerrados e invariantes y  $A \cap B = \emptyset$ , entonces  $A = \emptyset$  o  $B = \emptyset$ .

*Demostración.* Supongamos que podemos escribir a  $\omega(x) = A \cup B$ , con  $f(A) = A$  y  $f(B) = B$ ,  $A$  y  $B$  cerrados, no vacíos y disjuntos. Sean  $U_1$  y  $V_1$  abiertos disjuntos que contienen a  $A$  y  $B$ , respectivamente. Sea,  $U = f^{-1}(U_1) \cap U_1$ ,  $V = f^{-1}(V_1) \cap V_1$ . Ambos son abiertos y disjuntos,  $A \subset U$ ,  $B \subset V$ . Si  $y \in U \implies f(y) \in U_1$ , y si  $y \in V \implies f(y) \in V_1$ . Como  $A \subset \omega(x) \implies \exists n_1$  tal que  $f^{n_1}(x) \in U$ . Sea  $m_1 = \min\{m > n_1 : f^m(x) \notin U\}$  (existe pues  $B \subset \omega(x)$ ). Se verifica que  $f^{m_1}(x) \notin V$  (ya que  $f^{m_1}(x) \in U_1$ ). Análogamente,  $\exists n_2 > m_1$  tal que  $f^{n_2}(x) \in U$ . Sea  $m_2 = \min\{m > n_2 : f^m(x) \notin U\}$ . En general, dado  $n_k > m_{k-1}$  tal que  $f^{n_k}(x) \in U$ , construimos que  $m_k = \min\{m > n_k : f^m(x) \notin U\}$ .

Se verifica que: 
$$\begin{cases} m_k \rightarrow +\infty \\ f^{m_k}(x) \in A^c \\ \overline{\mathcal{O}^+(x)} \text{ es compacto} \end{cases} \implies \omega(x) \cap (U^c \cap V^c) \neq \emptyset, \text{ y esto es un absurdo.}$$
 □

## 1.2. Recurrencia y Ergodicidad

**Definición 1.2.1.** Decimos que una probabilidad  $\mu$ , invariante por  $f$ , es *ergódica* si para todo conjunto de Borel  $A \subset M$  invariante por  $f$  se tiene que  $\mu(A) \in \{0, 1\}$ .

*Ejemplo 1.* Si  $p \in M$  es un punto fijo de  $f$ , entonces la medida de Dirac  $\delta_p$  es ergódica. Mas en general, se  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  es una órbita periódica de  $f$  de período  $n$ , la medida  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=n} \delta_{p_j}$  es ergódica. En otras palabras, el conjunto de las órbitas periódicas de  $f$  se *inyecta* en el conjunto de sus medidas ergódicas.

*Observación 1.2.1.* No es difícil mostrar que todo sistema dinámico continuo en un espacio métrico compacto (incluso aquellos que no presentan ninguna órbita periódica) admite probabilidades ergódicas (vea, por ejemplo, [29, Teorema 4.1.11]).

*Ejemplo 2.* Toda rotación irracional en el círculo es ergódica al respecto de la medida de Lebesgue, vea la Proposición 1.2.2 mas adelante.

*Observación 1.2.2.* Incluso ante la presencia de abundantes órbitas periódicas, suelen existir medidas ergódicas mucho mas interesantes que las medidas atómicas señaladas en el Ejemplo 1. Éste es el caso del ejemplo que vamos a describir en la Sección 1.6.3: las órbitas periódicas son densas en el espacio ambiente (el

toro  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ), y al mismo tiempo la medida de Lebesgue en  $\mathbb{T}^2$  es ergódica. El mismo fenómeno sucede con el *Mapa de Gauss* que discutiremos en el Capítulo 4: las órbitas periódicas también son densas en el espacio ambiente (en este caso, el intervalo  $[0, 1]$ ), pero existe una medida ergódica mucho más interesante, llamada *medida de Gauss*, que es equivalente a la medida de Lebesgue (vea la Sección 4.1).

*Ejemplo 3.* No lo discutiremos aquí, pero puede mostrarse que si  $M$  es una variedad Riemanniana compacta con curvatura seccional *negativa*, entonces su flujo geodésico es ergódico para la medida natural (llamada *medida de Liouville*) en el fibrado tangente unitario de  $M$  (este es un famoso resultado debido a Anosov, vea [29, Sección 5.4.f] para el caso particular en que  $M$  es una superficie, mostrado anteriormente por Hopf).

**Definición 1.2.2.** Sea  $f : M \rightarrow M$  un sistema dinámico. Un punto  $x \in M$  es *no-errante* si  $\forall U$  entorno de  $x$ , se tiene que  $\exists n \geq 1$  tal que  $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ .

Si  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  es un flujo, decimos que  $x \in M$  es *no-errante* si  $\forall U$  entorno de  $x$ ,  $\exists t \geq 1$  tal que  $\varphi_t(U) \cap U \neq \emptyset$ .

Notamos  $\Omega(f) = \{x \in M : x \text{ es no errante}\}$ , y lo llamamos *conjunto no errante*.

*Observación 1.2.3.*

- $\Omega(f)$  es cerrado e invariante.
- Si  $p$  es periódico  $\implies p \in \Omega(f)$ .
- Si  $x \in M \implies \begin{cases} \omega(x) \subset \Omega(f) \\ \alpha(x) \subset \Omega(f) \end{cases}$

Definimos el *soporte* de una medida  $\mu$  como  $\text{supp}(\mu) = \{x \in M : \mu(U) > 0 \text{ para todo abierto } U \ni x\}$ . Note (o demuestre) que  $\text{supp}(\mu)$  es compacto y que  $M \setminus \text{supp}(\mu)$  tiene medida nula. Además, cualquier conjunto de medida total es denso en  $\text{supp}(\mu)$ .

**Proposición 1.2.1.** Sea  $f : M \rightarrow M$  un homeomorfismo y sea  $\mu$  una probabilidad invariante por  $f$ . Entonces  $\text{supp}(\mu) \subset \Omega(f)$ .

*Demostración.* Si  $x \in M$  es errante, existe un abierto  $V \subset M$  que lo contiene tal que  $f^n(V) \cap f^m(V) = \emptyset$  para todo  $n \neq m$ . En particular  $\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} f^n(V)) =$

$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(f^n(V)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(V)$ , por la invariancia. Como  $\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} f^n(V)) \leq \mu(M) = 1$ , se deduce que la serie  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(V)$  es convergente. Luego  $\mu(V) = 0$ , y entonces  $x \notin \text{supp}(\mu)$ .  $\square$

**Definición 1.2.3.** Sea  $f : M \rightarrow M$  un homeomorfismo. Definimos el conjunto límite de  $f$  como

$$L(f) = \overline{\bigcup_{x \in M} (\alpha(x) \cup \omega(x))}.$$

*Observación 1.2.4.*  $\text{Per}(f) \subset L(f) \subset \Omega(f)$ .

**Dinámica de la Rotación:** Consideremos  $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$ . Distinguiamos dos casos:

1. Caso  $\alpha \in \mathbb{Q}$  : sea  $\alpha = \frac{p}{q}$ , con  $(p, q) = 1 \implies R_\alpha^q(x) = x + p \equiv x \pmod{1}$ .

Entonces,  $x$  es periódico (y de período  $q$ ). Luego,  $\Omega(f) = S^1$  y todo punto es periódico con el mismo período.

Como vimos anteriormente, toda rotación (en particular las de ángulo racional) preserva la medida de Lebesgue. Note, sin embargo, que la medida de Lebesgue *no* es ergódica en el caso racional (¿por qué?). Por otro lado, como también ya fue observado, dado cualquier  $x \in S^1$ , la medida atómica

$$\frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} \delta_{R_\alpha^j(x)}$$

sí es ergódica.

2. Caso  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  : primero observemos que  $R_\alpha$  no tiene puntos periódicos: si  $R_\alpha^n(x) = x \implies x + n\alpha \equiv x \pmod{1} \implies n\alpha \equiv 0 \pmod{1} \implies \alpha \in \mathbb{Q}$ . Sea  $x \in S^1 \implies \omega(x) \subset S^1$  compacto e invariante. Supongamos que  $\omega(x) \subsetneq S^1 \implies S^1 \setminus \omega(x) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$ , donde cada  $I_j$  es una componente conexa de  $S^1 \setminus \omega(x)$ . Observemos que como  $R_\alpha$  es un homeo, tenemos que  $R_\alpha(I_n) = I_{n'}$  con  $n \neq n'$ . Más aún:  $R_\alpha^n(I_j) \cap R_\alpha^m(I_j) = \emptyset$ ,  $\forall n, m$  tales que  $n \neq m$  (de lo contrario, existiría un punto periódico). Sin embargo,  $|R_\alpha^n(I_j)| = |R_\alpha^m(I_j)|$ , ya que  $R_\alpha$  es un movimiento rígido.

*Conclusión:*  $\omega(x) = S^1$ ,  $\forall x \in S^1$ . Es decir,  $\Omega(R_\alpha) = S^1$  y toda órbita (futura) es densa. Desde el punto de vista ergódico se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 1.2.2.** *La medida de Lebesgue es la única medida invariante de una rotación irracional, y es ergódica.*

Cuando un sistema dinámico posee apenas una medida invariante, decimos que es *únicamente ergódico* (note que, a partir de la Observación 1.2.1, esa única medida invariante es, automáticamente, ergódica).

Existen muchas maneras de probar directamente la ergodicidad enunciada en la Proposición 1.2.2 (vea [29, Sección 4.2.a] por una prueba basada en aspectos elementales de Análisis de Fourier, similares a los que usaremos en la Proposición 1.4.2 mas adelante). La prueba que daremos aquí utiliza la noción de *punto de densidad de Lebesgue* de un conjunto de medida positiva.

*Demostración de la Proposición 1.2.2.* Sea  $\alpha \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$  y sea  $R_\alpha$  la rotación de ángulo  $\alpha$  en el círculo. El enunciado posee tres afirmaciones: que la medida de Lebesgue  $\lambda$  en el círculo es invariante, ergódica y única. La invariancia vale para cualquier rotación. Para probar la ergodicidad supongamos, por contradicción, que existen dos conjuntos de Borel  $A$  y  $B$  en el círculo que son disjuntos,  $R_\alpha$ -invariantes y ambos con medida de Lebesgue positiva. Sea  $x_0 \in S^1$  un *punto de densidad* de  $A$ , esto es:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\lambda((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A)}{2\varepsilon} \right\} = 1.$$

De la cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} \lambda((R_\alpha^n(x_0) - \varepsilon, R_\alpha^n(x_0) + \varepsilon) \cap A) &= \lambda(R_\alpha^n(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A) \\ &= \lambda(R_\alpha^n((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A)) \\ &= \lambda((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A), \end{aligned}$$

deducimos que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R_\alpha^n(x_0)$  también es un punto de densidad de  $A$ . Análogamente, sea  $y_0 \in S^1$  un punto de densidad de  $B$ . Dado  $\delta \in (3/4, 1)$  sea  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño para tener:

$$\lambda((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A) > 2\varepsilon\delta \quad \text{y} \quad \lambda((y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \cap B) > 2\varepsilon\delta$$

simultáneamente. Siendo que  $\alpha$  es irracional, la órbita  $\{R_\alpha^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es densa en el círculo (y todos sus puntos son de densidad de  $A$ , como ya fue observado). En particular, podemos asumir que  $x_0 \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ .

Recordando que  $A$  y  $B$  son disjuntos se obtiene que:

$$\begin{aligned} 2\varepsilon\delta &< \lambda((y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \cap B) \\ &\leq \lambda((y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \cup (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)) - \lambda((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A) \\ &< 3\varepsilon - 2\varepsilon\delta. \end{aligned}$$

Esto implica que  $\delta < 3/4$ , lo cual es una contradicción. Luego, toda rotación irracional es ergódica al respecto de la medida de Lebesgue. Para la prueba de la unicidad, vea el Ejercicio 12 al final de este capítulo.  $\square$

**Dinámica del Flujo Lineal en  $\mathbb{T}^2$ :** Tenemos el campo en  $\mathbb{R}^2$  dado por  $X_\alpha(x) = (1, \alpha)$ . Luego,  $\varphi_t^\alpha = x + t(1, \alpha)$  es el flujo de  $X_\alpha$  en el plano. Sea  $\tilde{\varphi}_t^\alpha(x) = \pi(\varphi_t^\alpha)$  el flujo lineal en  $\mathbb{T}^2$ .

Observamos que  $\{0\} \times S^1$  es transversal al flujo (i.e., todas las órbitas cortan (transversalmente) a  $\{0\} \times S^1$ ). Si  $x \in \{0\} \times S^1$ , fijémonos en el “primer retorno”, es decir, la primera vez (en el futuro) en que la órbita por  $x$  corta a  $\{0\} \times S^1$ . Vemos que  $\varphi_1(0, x) = (0, x) + (1, \alpha) = (1, x + \alpha)$ . Luego,  $R(x) = (x + \alpha) \pmod{1}$ . Es decir, el retorno es la rotación de ángulo  $\alpha$ .

*Conclusión:*

1. Si  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , entonces todas las órbitas del flujo lineal  $\tilde{\varphi}_t^\alpha$  son periódicas.  $\Omega(\tilde{\varphi}^\alpha) = \mathbb{T}^2$  y  $\omega(x) = \alpha(x) = \mathcal{O}(x)$ .
2. Si  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ , entonces todas las órbitas del flujo lineal  $\tilde{\varphi}_t^\alpha$  son densas.  $\Omega(\tilde{\varphi}^\alpha) = \mathbb{T}^2$  y  $\omega(x) = \alpha(x) = \mathbb{T}^2, \forall x$ .

**Corolario 1.2.1.** *Si  $r$  es una recta de pendiente irracional en  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $\pi(r)$ , su proyección en  $T^2$ , es densa.*

**Definición 1.2.4.**  $x \in M$  se dice *recurrente* en el  $\begin{cases} \text{futuro} \\ \text{pasado} \end{cases}$  si  $\begin{cases} x \in \omega(x) \\ x \in \alpha(x) \end{cases}$ .

Si  $x$  es recurrente en el futuro y en el pasado, decimos que  $x$  es *recurrente*.

**Ejemplos:**

1. Si  $p$  es periódico  $\implies p$  es recurrente.
2. Todo punto es recurrente según la rotación  $R_\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ .
3. Todo punto es recurrente según el flujo lineal  $\tilde{\varphi}^\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

#### 4. Flujo lineal reparametrizado con una única singularidad:

Si tenemos un campo  $X$  en  $M$  y  $a : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función positiva, entonces el flujo determinado por  $Y(x) = a(x)X(x)$  tiene las mismas órbitas que  $X$  (pero recorridas con diferente velocidad). Si  $a : M \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $a(x) \geq 0$  y  $a(x) = 0$  sólo en  $x = x_0$ , tenemos que  $Y(x) = a(x)X(x)$  presenta una singularidad en  $x_0$ . La órbita de  $X$  que pasa por  $x_0$  se divide ahora en

tres órbitas según  $Y$ : 
$$\begin{cases} \{\varphi_t^X(x_0) : t < 0\} \\ x_0 \\ \{\varphi_t^X(x_0) : t > 0\} \end{cases} . \text{ Sean } X = (1, \alpha) \text{ y } p \in \mathbb{T}^2.$$

Sea  $a : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $a(x) \geq 0$  y  $a(x) = 0$  sii  $x = p$  y consideramos  $Y(x) = a(x)(1, \alpha) = a(x)X(x)$ . Denotamos por  $\psi^\alpha$  el flujo de  $Y$  en  $\mathbb{T}^2$  y sea  $\varphi^\alpha$  el flujo lineal en  $\mathbb{T}^2$ . Distinguimos dos casos:

Caso 1:  $\alpha \in \mathbb{Q}$ . Entonces:

- a) Si  $p \notin \mathcal{O}_X(x) \implies \mathcal{O}_Y(x) = \mathcal{O}_X(x)$ , y luego  $x$  tiene órbita periódica según  $Y$ , i.e.,  $\alpha_Y(x) = \omega_Y(x) = \mathcal{O}_Y(x)$ .
- b) Si  $x \in \mathcal{O}_X(p)$  y  $x \neq p \implies \mathcal{O}_Y(x) = \mathcal{O}_X(p) \setminus \{p\}$ . Concluimos que  $\alpha_Y(x) = \omega_Y(x) = \{p\}$ .
- c)  $\mathcal{O}_Y(p) = \{p\}$

*Conclusión 1.2.1.*  $\Omega(\psi^\alpha) = \mathbb{T}^2$  (ya que  $\Omega(\psi^\alpha)$  es cerrado y contiene las órbitas periódicas, que son densas). Sin embargo, hay puntos que no son recurrentes ni en el pasado ni en el futuro.

Caso 2:  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ . Entonces:

- a) Si  $p \notin \mathcal{O}_X(x) \implies \mathcal{O}_Y(x) = \mathcal{O}_X(x) \implies \omega_Y(x) = \alpha_Y(x) = \mathbb{T}^2$ .
- b) Si  $x = \varphi_t^\alpha(p)$  para algún  $t > 0 \implies \mathcal{O}_Y(x) = \{\varphi_t^\alpha(p) : t > 0\}$  y además  $\alpha_Y(x) = \{p\}$  y  $\omega_Y(x) = \mathbb{T}^2$ .
- c)  $x = \varphi_t^\alpha(p)$  para algún  $t < 0 \implies \mathcal{O}_Y(x) = \{\varphi_t^\alpha(p) : t < 0\}$  y además  $\alpha_Y(x) = \mathbb{T}^2$  y  $\omega_Y(x) = \{p\}$ .

*Conclusión 1.2.2.*  $\Omega(\psi^\alpha) = \mathbb{T}^2$ . Hay puntos recurrentes en el futuro que no lo son en el pasado y hay puntos recurrentes en el pasado que no lo son en el futuro.

Puede mejorarse la Proposición 1.2.1 de la siguiente manera:

**Proposición 1.2.3** (Teorema de recurrencia de Poincaré). *Sea  $f : M \rightarrow M$  un homomorfismo y sea  $\mu$  una probabilidad invariante por  $f$ . Entonces  $\mu$  casi todo punto de  $M$  es recurrente para  $f$ .*

Por una prueba vea [41, Sección I.2, Teorema 2.3].

### 1.3. Conjuntos minimales

**Definición 1.3.1.** Consideremos un s.d en  $M$ . Un subconjunto  $G \subset M$  es *minimal* (según el s.d) si:

1.  $G$  es cerrado e invariante
2.  $G$  no contiene ningún subconjunto propio no vacío que sea cerrado e invariante (i.e. si  $A \subset G$ ,  $A \neq \emptyset$ ,  $A$  cerrado e invariante  $\implies A = G$ ).

**Proposición 1.3.1.**  $G \subset M$  es minimal  $\iff \overline{\mathcal{O}(x)} = G, \forall x \in G$ .

*Demostración.*  $(\implies)$   $\overline{\mathcal{O}(x)}$  es cerrado e invariante y  $\overline{\mathcal{O}(x)} \subset G \implies \overline{\mathcal{O}(x)} = G$ .  
 $(\impliedby)$  Sea  $A \subset G$  cerrado e invariante y no vacío. Sea  $x \in A$ . Entonces  $G = \overline{\mathcal{O}(x)} \subset A \subset G \implies A = G$ .

□

**Proposición 1.3.2.** Sea  $G \subset M$  subconjunto compacto. Entonces,  $G$  minimal  $\iff \omega(x) = G, \forall x \in G \iff \alpha(x) = G, \forall x \in G$ .

*Demostración.*  $(\implies)$  Si  $x \in G$  con  $G$  compacto, entonces  $\omega(x) \neq \emptyset \implies \omega(x)$  es cerrado, invariante y  $\omega(x) \subset G$ . Luego,  $\omega(x) = G$ .

$(\impliedby)$  Sea  $A \subset G$  cerrado e invariante y no vacío, y sea  $x \in A$ . Entonces,  $G = \omega(x) \subset A \subset G \implies A = G$ . □

#### Ejemplos:

1. Si  $x$  es periódico  $\implies \mathcal{O}(x)$  es minimal.
2.  $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ , con  $\alpha \in \mathbb{Q}$  y  $G \subset S^1$  minimal  $\implies G = \mathcal{O}(x)$ , órbita periódica.
3.  $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ , con  $\alpha \notin \mathbb{Q} \implies S^1$  es minimal (y es el único).
4. Si  $\varphi_t^\alpha : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  es un flujo lineal con  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , y  $G \subset \mathbb{T}^2$  es minimal  $\implies G = \mathcal{O}(x)$  órbita periódica.

5. Si  $\varphi_t^\alpha : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  es un flujo lineal con  $\alpha \notin \mathbb{Q} \implies \mathbb{T}^2$  es minimal.
6. Si  $\psi_t^\alpha : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  es el flujo lineal reparametrizado con una singularidad en  $p$  y  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ , entonces el único minimal es  $\{p\}$ .

*Observación 1.3.1.* Si  $G$  es minimal no compacto, no es válida la proposición anterior. Si  $\psi_t^\alpha$  es como en 6. y consideramos  $M = \mathbb{T}^2 \setminus \{p\} \implies M$  es minimal (todas las órbitas son densas) pero hay puntos tales que  $\omega(x) = \emptyset$ .

**Corolario 1.3.1.** *Si  $G$  es minimal compacto, entonces toda órbita de  $x \in G$  es recurrente.*

**Proposición 1.3.3.** *Sea  $M$  un espacio topológico compacto y sea  $f : M \rightarrow M$  un s.d. en  $M$ . Entonces, existe algún punto recurrente.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F} = \{F \subset M : F \text{ es cerrado e invariante, } F \neq \emptyset\}$ . Como  $M \in \mathcal{F} \implies \mathcal{F} \neq \emptyset$ . Ordenamos parcialmente a  $\mathcal{F}$  así:  $F_1 \leq F_2 \iff F_1 \supset F_2$ . Sea  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$  una cadena  $\implies \bigcap_{\alpha \in \Gamma} F_\alpha \neq \emptyset$  y es cerrado e invariante. Luego, por el lema de Zorn,  $\exists G$  elemento maximal. Por definición del orden,  $G$  es un conjunto minimal compacto. Luego, toda órbita de  $G$  es recurrente.  $\square$

**Definición 1.3.2.** Un subconjunto  $A \subset \mathbb{Z}$  se dice *relativamente denso* (o *sindético*) si existe  $m > 0$  tal que  $[n, n+m] \cap A \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{Z}$ .

Análogamente, definimos conjunto relativamente denso en  $\mathbb{R}$ .

**Definición 1.3.3.** Sea  $f : M \rightarrow M$  un sistema dinámico discreto y sea  $p \in M$ . Decimos que  $p$  es *fuertemente recurrente* si dado  $U(p)$  entorno de  $p$  se tiene que  $\{n \in \mathbb{Z} : f^n(p) \in U(p)\}$  es relativamente denso. (Análogamente para flujos.)

*Observación 1.3.2.* Si  $p$  es fuertemente recurrente, entonces  $p$  es recurrente.

**Teorema 1.3.1. (Birkhoff)** *Sea  $M$  un espacio topológico (regular). Sea  $p \in M$  tal que  $\overline{\mathcal{O}(p)}$  compacto. Entonces  $p$  es fuertemente recurrente  $\iff \overline{\mathcal{O}(p)}$  es minimal (compacto).*

*Demostración.* ( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $G = \overline{\mathcal{O}(p)}$  es minimal (compacto). Sea  $U(p)$  entorno de  $p$  y sea  $x \in G \implies \exists n(x)$  tal que  $f^{n(x)}(x) \in U(p)$ . Por continuidad,  $\exists V(x)$  tal que si  $y \in V(x) \implies f^{n(x)}(y) \in U(p) \implies G \subset \bigcup_{x \in G} V(x)$ .

Como  $G$  es compacto, entonces  $G \subset \bigcup_1^n V(x_i)$ , para ciertos  $x_1, \dots, x_n$ . Sea  $m =$

$\max\{n(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$ . Luego, si  $x \in G \implies \exists n(x)$ , con  $0 \leq n(x) \leq m$  tal que  $f^{n(x)}(x) \in U(p)$ . Luego,  $\{n : f^n(p) \in U(p)\}$  es relativamente denso.

( $\implies$ ) Sea  $G = \overline{\mathcal{O}(p)}$  y supongamos que  $G$  no es minimal. Sea  $A \subset G$  cerrado, invariante y no vacío tal que  $A \subsetneq G \implies p \notin A$ . Sea  $U(p)$  entorno de  $p$  y  $V$  abierto,  $A \subset V$  tal que  $U(p) \cap V = \emptyset$ . Como  $p$  es fuertemente recurrente  $\implies \exists m$  tal que para cualquier  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $\exists n$  con  $j \leq n \leq j + m$  tal que  $f^n(p) \in U$ . Sea  $V_1 = f^{-m}(V) \cap f^{-(m-1)}(V) \cap \dots \cap V$ . Luego,  $V_1$  es un abierto que contiene a  $A$ . Por otra parte, si  $x \in V_1 \implies x, f(x), \dots, f^m(x) \in V$ . Como  $A \subset \overline{\mathcal{O}(p)}$ ,  $\exists j$  tal que  $f^j(p) \in V_1$ . Luego  $f^j(p), f^{j+1}(p), \dots, f^{j+m}(p) \in V \implies f^j(p), f^{j+1}(p), \dots, f^{j+m}(p) \notin U(p)$ . Absurdo.  $\square$

Como corolario (de la prueba) se tiene el siguiente:

**Corolario 1.3.2.** *Sea  $f : M \rightarrow M$  y  $C$  un minimal compacto. Sea  $U$  un abierto de  $C$ . Entonces existe  $m \geq 0$  tal que si  $x \in C$  existe  $0 \leq n(x) \leq m$  tal que  $f^{n(x)} \in U$ .*

Análogos resultados valen para flujos. En particular, sabemos que el flujo lineal irracional es minimal en el toro  $\mathbb{T}^2$ . Luego, se tiene que:

**Corolario 1.3.3.** *Sea  $U$  un abierto de  $\mathbb{T}^2$  y fijemos una pendiente irracional  $\alpha$ . Luego, existe  $L$  tal que si  $\ell$  es un segmento de recta de pendiente  $\alpha$  y de longitud mayor que  $L$  entonces  $\pi(\ell) \cap U \neq \emptyset$  donde  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  es la proyección canónica.*

**Definición 1.3.4.** Sean  $M$  un espacio métrico y  $f : M \rightarrow M$  un s.d. Un punto  $p \in M$  se llama *casi-periódico* si dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists S \subset \mathbb{Z}$  relativamente denso tal que si  $s \in S \implies d(f^n(p), f^{n+s}(p)) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z}$ .

(Para flujos se define de manera análoga.)

**Definición 1.3.5.** Sean  $M$  un espacio métrico y  $G \subset M$  un subconjunto invariante. Decimos que  $f$  es *estable* (*estable en el futuro*, *estable en el pasado*) según Lyapunov en  $G$  si dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $x, y \in G$ ;  $d(x, y) < \delta \implies d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z}$  ( $\forall n \geq 0, \forall n \leq 0$ ).

*Observación 1.3.3.* No confundir con la estabilidad de Lyapunov para un conjunto: Un subconjunto invariante  $G$  es estable Lyapunov (en el futuro) si dado

un entorno  $U$  de  $G$  existe un entorno  $V$  de  $G$  tal que  $f^n(V) \subset U$  para todo  $n \geq 0$ .

**Proposición 1.3.4.** *Sea  $f : M \rightarrow M$  s.d y  $G$  minimal compacto. Entonces,  $f$  es estable Lyapunov en  $G \iff p$  es casi-periódico,  $\forall p \in G$ .*

*Demostración.* ( $\implies$ ) Sea  $\varepsilon > 0$  y  $\delta = \delta(\varepsilon)$  de la estabilidad. Como  $G$  es minimal compacto  $\implies p$  es fuertemente recurrente. Luego  $S = \{n : f^n(p) \in B(p, \delta)\}$  es relativamente denso. Sea  $s \in S \implies d(f^s(p), p) < \delta \implies d(f^{n+s}(p), f^n(p)) < \varepsilon$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$  (esto último es por la estabilidad). Luego,  $p$  es casi-periódico.

( $\impliedby$ ) Sean  $\varepsilon > 0$  y  $p \in G$  casi periódico. Entonces,  $\exists S \subset \mathbb{Z}$  relativamente denso tal que si  $s \in S \implies d(f^{n+s}(p), f^n(p)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ . Por otra parte,  $p$  es fuertemente recurrente y  $G$  es minimal. Sea  $q \in G \implies \exists n_j \rightarrow +\infty$  tal que  $f^{n_j}(p) \rightarrow q$ . Sean  $n \in \mathbb{Z}$  y  $s \in S$ . Entonces,  $f^{n_j+n+s}(p) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} f^{n+s}(q) \implies f^{n_j+n}(p) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} f^n(q) \implies d(f^{n+s}(q), f^n(q)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,  $\forall s \in S$ .

Como  $S$  es relativamente denso,  $\exists m$  tal que  $[n, n+m] \cap S \neq \emptyset$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ . Sea  $\delta > 0$  tal que si  $d(x, y) < \delta \implies d(f^i(x), f^i(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$  si  $0 \leq i \leq m$ . Ahora, tomemos  $x, y$  tales que  $d(x, y) < \delta$  y  $n \in \mathbb{Z} \implies n = s + k$  para algún  $s \in S$  y  $0 \leq k \leq m \implies d(f^n(x), f^n(y)) = d(f^{s+k}(x), f^{s+k}(y)) \leq d(f^{s+k}(x), f^k) + d(f^k(x), f^k(y)) + d(f^k(y), f^{s+k}(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \implies f$  es estable Lyapunov en  $G$ .  $\square$

## 1.4. Transitividad

**Definición 1.4.1.** Sean  $M$  espacio topológico y  $f : M \rightarrow M$  un s.d. Decimos que  $f$  es *transitivo* si  $\exists x \in M$  tal que  $\overline{\mathcal{O}(x)} = M$ .

*Observación 1.4.1.* Si  $M$  no es discreto, entonces  $f$  es transitivo  $\iff \exists x$  tal que  $\omega(x) = M$  o  $\alpha(x) = M$ .

*Demostración.* ( $\impliedby$ ) Obvio.

( $\implies$ ) Como  $M$  no es discreto y  $\overline{\mathcal{O}(x)} = M$ , concluimos que  $x \in \omega(x)$  o  $x \in \alpha(x)$ . Entonces,  $\mathcal{O}(x) \subset \omega(x)$  o  $\mathcal{O}(x) \subset \alpha(x)$ .  $\square$

**Proposición 1.4.1.** *Sean  $M$  espacio métrico completo (separable) sin puntos aislados y  $f : M \rightarrow M$  un s.d. Son equivalentes:*

1.  $f$  es transitivo
2. dados  $A$  y  $B$  abiertos  $\exists n \geq 0$  tal que  $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$ .
3.  $\exists R_1$  residual tal que  $\omega(x) = M, \forall x \in R_1$ .
4.  $\exists R_2$  residual tal que  $\alpha(x) = M, \forall x \in R_2$ .

*Demostración.* 1)  $\implies$  2) Sea  $x \in M$  tal que  $\overline{\mathcal{O}(x)} = M \implies \omega(x) = M$  o  $\alpha(x) = M$ . Supongamos que  $\alpha(x) = M \implies \exists n_1$  tal que  $f^{n_1}(x) \in B$  y  $\exists n_2$ , con  $n_2 < n_1$  tal que  $f^{n_2}(x) \in A \implies f^{n_1-n_2}(A) \cap B \neq \emptyset$ .

2)  $\implies$  3) Sea  $\{B_n : n \geq 1\}$  una base numerable de la topología. Definimos  $A_n = \{y \in M : f^m(y) \in B_n \text{ para algún } m \geq 0\}$ . Luego,  $A_n$  es abierto y denso (por 2)). Tenemos que  $R_1 = \bigcap_n A_n$  es residual. Sea  $x \in R_1$  y sea  $U$  abierto  $\implies \exists n$  tal que  $B_n \subset U$ . Luego, como  $x \in A_n, \forall n$  tenemos que  $\exists m$  tal que  $f^m(x) \in B_n \subset U \implies \omega(x) = M$ .

3)  $\implies$  1) obvio.

La equivalencia con 4) es 1), 2), 3) con  $g = f^{-1}$ . □

**Corolario 1.4.1.**  $f : M \rightarrow M$  es transitivo  $\iff$  si  $A \subset M$  es abierto, transitivo e invariante entonces  $\overline{A} = M$ .

*Observación 1.4.2.* Si  $f : M \rightarrow M$  es transitivo y  $\varphi : M \rightarrow M$  continua es tal que  $\varphi \circ f = \varphi \implies \varphi = \text{cte}$ .

*Demostración.* Sea  $x_0$  tal que  $\overline{\mathcal{O}(x_0)} = M \implies \varphi(f^n(x_0)) = \varphi(x_0), \forall n \in \mathbb{Z} \implies \varphi$  es constante en un conjunto denso  $\implies \varphi = \text{cte}$ . □

**Proposición 1.4.2.** Sea  $T : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  dada por  $T(x, y) = (x + \alpha, y + \beta) \pmod{\mathbb{Z}^2}$ . Entonces  $T$  es transitivo  $\iff \alpha, \beta, 1$  son racionalmente independientes, i.e.  $\nexists (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  tal que  $k_1\alpha + k_2\beta \in \mathbb{Z}$ .

*Demostración.* ( $\implies$ ) Supongamos que existe  $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  tal que  $k_1\alpha + k_2\beta \in \mathbb{Z}$ . Sea  $\varphi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\varphi(x, y) = \sin(2\pi(k_1x + k_2y))$ . Luego,  $\varphi$  es continua y no constante. Ahora,  $\varphi \circ T(x, y) = \varphi(x + \alpha, y + \beta) = \sin(2\pi(k_1x + k_2y + k_1\alpha + k_2\beta)) = \sin(2\pi(k_1x + k_2y) + 2\pi k) = \sin(2\pi(k_1x + k_2y)) =$

$\varphi(x, y) \implies T$  no es transitivo.

( $\Leftarrow$ ) Sea  $U$  abierto e invariante y desarrollamos la función característica de  $U$  en serie de Fourier:

$$\chi_U(x_1, x_2) = \sum_{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2} \alpha_{k_1 k_2} \exp(2\pi i(k_1 x_1 + k_2 x_2)) \text{ ctp.}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \chi_U(T(x_1, x_2)) &= \sum_{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2} \alpha_{k_1 k_2} \exp(2\pi i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_1 \alpha + k_2 \beta)) \\ &= \sum_{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2} \alpha_{k_1 k_2} \exp(2\pi i(k_1 \alpha + k_2 \beta)) \exp(2\pi i(k_1 x_1 + k_2 x_2)). \end{aligned}$$

Como  $\chi_U \circ T = \chi_U$  por ser  $U$  invariante y por la unicidad de la serie de Fourier concluimos que  $\alpha_{k_1 k_2} \exp(2\pi i(k_1 \alpha + k_2 \beta)) = \alpha_{k_1 k_2}$ ,  $\forall (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ . Como  $k_1 \alpha + k_2 \beta \notin \mathbb{Z}$ ,  $\forall (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , concluimos que  $\alpha_{k_1 k_2} = 0$ ,  $\forall (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Luego  $\chi_U(x_1, x_2) = \alpha_{00}$ , i.e.  $\chi_U = cte$  (ctp)  $\implies \bar{U} = T^2 \implies T$  es transitivo.  $\square$

## 1.5. Equivalencia dinámica

Definimos ahora cuándo dos sistemas dinámicos son “iguales”.

**Definición 1.5.1.** Decimos que dos sistemas dinámicos  $f, g : M \rightarrow M$  son *conjugados* si existe un homeomorfismo  $h : M \rightarrow M$  tal que  $h \circ f = g \circ h$ .

Para el caso de flujos tenemos las siguientes definiciones.

**Definición 1.5.2.** Sean  $\phi_t, \psi_t$  dos flujos en  $M$ . Decimos que son conjugados si existe  $h : M \rightarrow M$  homeomorfismo tal que  $h \circ \phi_t = \psi_t \circ h$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Se dice que los flujos  $\phi_t, \psi_t$  son orbitalmente equivalentes si existe  $h : M \rightarrow M$  tal que  $h(\mathcal{O}_{\phi_t}(x)) = \mathcal{O}_{\psi_t}(h(x))$ .

La conjugación entre sistemas dinámicos preserva todas las propiedades dinámicas que se vieron en este capítulo:

**Teorema 1.5.1.** Sea  $M$  un espacio métrico compacto y sean  $f : M \rightarrow M$  y  $g : M \rightarrow M$  dos homeomorfismos conjugados por un homeomorfismo  $h : M \rightarrow M$ . Entonces:

1.  $p$  es periódico por  $f$  sii  $h(p)$  es periódico por  $g$ .
2.  $p$  es recurrente por  $f$  sii  $h(p)$  es recurrente por  $g$ .
3.  $h(\omega(x, f)) = \omega(h(x), g)$ .
4.  $G$  es minimal por  $f$  sii  $h(G)$  es minimal por  $g$ .
5.  $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$ .
6. La medida  $\mu$  es invariante (ergódica) por  $f$  sii la medida  $\nu$  definida por  $\nu(A) = \mu(h^{-1}(A))$  es invariante (ergódica) por  $g$ .
7.  $f$  es transitivo sii  $g$  es transitivo.
8.  $f$  es topológicamente mixing sii  $g$  es topológicamente mixing.

*Demostración.* Vea el Ejercicio 2. □

## 1.6. Algunos ejemplos caóticos

### 1.6.1. El Shift de Bernoulli

Primeramente, introducimos los siguientes conceptos.

**Definición 1.6.1.** Sea  $M$  un espacio métrico y  $f : M \rightarrow M$  un homeo. Decimos que  $f$  es *expansivo* si  $\exists \alpha > 0$  tal que si  $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha, \forall n \in \mathbb{Z} \implies x = y$  ( $\alpha$  es llamada constante de expansividad).

**Definición 1.6.2.** Sea  $f : M \rightarrow M$  un homeo. Decimos que  $f$  es topológicamente mixing si dados  $U, V$  abiertos cualesquiera, existe  $m > 0$  tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset \forall n \geq m$ .

Veamos un ejemplo que, entre otras propiedades, es expansivo y topológicamente mixing.

Sea  $M = \Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ . En  $\{0, 1\}$  colocamos la topología discreta y dotamos a  $\Sigma$  con la topología producto. Luego,  $\Sigma$  es compacto. Si definimos  $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|x_n - y_n|}{2^{|n|}}$ , obtenemos una métrica en  $\Sigma$  compatible con la topología. Dado  $\{x_n\} \in \Sigma$  y  $N \in \mathbb{N}$ , definimos el  $N$ -entorno de  $\{x_n\}$  como

$$N(\{x_n\}) = \{\{y_n\} \in \Sigma : y_n = x_n \text{ si } |n| \leq N\}.$$

Se verifica que  $N(\{x_n\})$  constituye una base de entornos de  $\{x_n\}$ . Definimos el *shift a la izquierda* o *shift de Bernoulli* (de dos símbolos) al homeomorfismo  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  tal que  $\sigma(\{x_n\}) = \{y_n\}$  donde  $y_n = x_{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

**Teorema 1.6.1.** *Sea  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  el shift de Bernoulli. Entonces:*

1.  $\sigma$  es expansivo
2.  $\overline{Per(\sigma)} = \Sigma$
3.  $\sigma$  es transitivo y topológicamente mixing.
4. Para cualquier  $\{x_n\} \in \Sigma$  su conjunto estable

$$W^s(\{x_n\}) = \{\{y_n\} : d(\sigma^j(\{y_n\}), \sigma^j(\{x_n\})) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0\}$$

e inestable

$$W^u(\{x_n\}) = \{\{y_n\} : d(\sigma^j(\{y_n\}), \sigma^j(\{x_n\})) \xrightarrow{j \rightarrow -\infty} 0\}$$

son ambos densos en  $\Sigma$ .

*Demostración.* 1. Si  $\{x_n\} \neq \{y_n\} \implies \exists m \in \mathbb{Z}$  tal que  $x_m \neq y_m \implies d(\sigma^{-m}(\{x_n\}), \sigma^{-m}(\{y_n\})) \geq 1$ . Luego, cualquier  $\alpha < 1$  es constante de expansividad.

2. Sea  $\{x_n\} \in \Sigma$  cualquiera y fijemos un  $N$  entorno de  $\{x_n\}$ . Definimos  $\{y_n\}$  como  $y_n = x_n$  si  $|n| \leq N$  y de forma periódica, es decir,  $y_{k(2N+1)+j} = y_j$  si  $-N \leq j \leq N$ .

3. Sean  $\{x_n\}$  y  $\{y_n\}$  dos puntos de  $\Sigma$  y fijemos  $U$ , un  $N_1$  entorno de  $\{x_n\}$ , y  $V$ , un entorno  $N_2$  de  $\{y_n\}$ . Tomemos  $m > N_1 + 2N_2 + 1$  y sea  $k \geq m$  cualquiera. Definimos  $\{z_n\}$  tal que:  $z_n = x_n$  si  $|n| \leq N_1$ ,  $z_{k+n} = y_n$  si  $|n| \leq N_2$ . Resulta entonces que  $\sigma^k(U) \cap V \neq \emptyset$ .

4. Basta observar  $W^s(\{x_n\}) = \{\{y_n\} : y_n = x_n, \forall n \geq k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}\}$  y  $W^u(\{x_n\}) = \{\{y_n\} : y_n = x_n, \forall n \leq k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}\}$ .

□

### 1.6.2. La Herradura de Smale

Ahora estamos en condiciones de estudiar la herradura de Smale. Vamos a considerar un difeomorfismo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que la imagen de un cuadrado  $Q = I \times I$  es como se indica en la figura 1.1, conocido como la herradura de Smale ([60]).

Tenemos entonces dos bandas horizontales  $H_0$  y  $H_1$  tal que  $f(Q) \cap Q = f(H_0) \cup f(H_1) = I_0 \cup I_1$  son dos bandas verticales. Supondremos que  $f|_{H_i}, i = 0, 1$  es afín. En particular, las direcciones horizontales y verticales son preservadas bajo  $f|_{H_i}$  y segmentos horizontales son contraídos uniformemente y segmentos verticales son expandidos uniformemente.

Podemos observar que

$$Q \cap f(Q) \cap f^2(Q) = f(f(Q) \cap H_0) \cup f(f(Q) \cap H_1)$$

son cuatro fajas verticales. En general

$$\bigcap_{j=0}^n f^j(Q)$$

son  $2^n$  fajas verticales y se concluye que

$$\bigcap_{j \geq 0} f^j(Q) = K_1 \times I$$

donde  $K_1$  es un conjunto de Cantor en  $I$ , es decir, los puntos de  $Q$  cuya órbita pasada siempre se mantiene en  $Q$  consiste en un conjunto de Cantor de líneas verticales.

De la misma forma se prueba que

$$\bigcap_{j \geq 0} f^{-j}(Q) = I \times K_2$$

donde  $K_2$  es un conjunto de Cantor, es decir, los puntos de  $Q$  cuya órbita futura siempre se mantiene en  $Q$  consiste en un conjunto de Cantor de líneas horizontales.

Así, el conjunto de puntos de  $Q$  cuya órbita siempre se mantiene en  $Q$  es  $\Lambda = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f^j(Q) = K_1 \times K_2$ .

Observemos lo siguiente:

- $\bigcap_{j=-m}^m f^j(Q)$  consiste en  $4^m$  rectángulos cuyos diámetros convergen a cero con  $m$ .

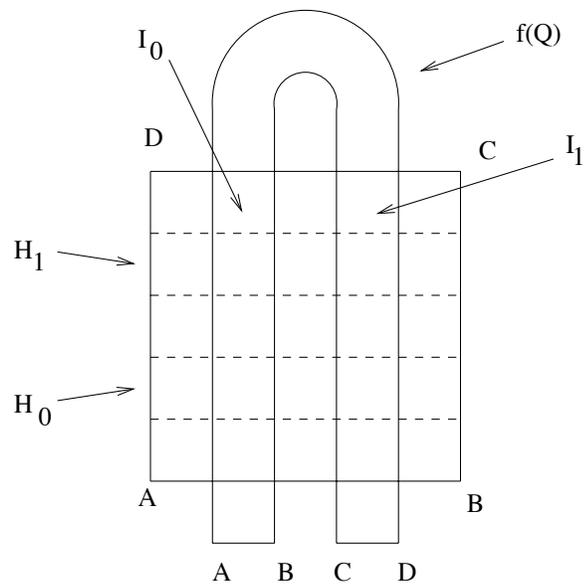


Figura 1.1:

- Sea  $R_m$  cualquiera de estos rectángulos. Entonces para cualquier  $-m+1 \leq j \leq m-1$  se verifica que  $f^j(R_m) \subset I_0$  o  $f^j(R_m) \subset I_1$ .
- Dados dos puntos  $x \neq y$  de  $\Lambda$  existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $f^n(x)$  y  $f^n(y)$  no están a la vez en  $I_0$  o  $I_1$ .

Consideremos  $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  y  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  el shift (a la izquierda) de Bernoulli (ver sección 1.6.1). Consideremos  $h : \Lambda \rightarrow \Sigma$  de la siguiente manera:

$$h(x)(n) = i \text{ si } f^n(x) \in I_i, \quad i = 0, 1.$$

Resulta que  $h$  es un homeomorfismo tal que  $h \circ f = \sigma \circ h$ . En efecto:

h continua: Si  $x, y$  pertenecen a un mismo rectángulo de  $\bigcap_{j=-m-1}^{m+1} f^j(Q)$  entonces  $h(x)(j) = h(y)(j)$ ,  $-m \leq j \leq m$ .

h inyectiva: se deduce de lo observado anteriormente

h sobreyectiva: Sea  $\{x_n\} \in \Sigma$ , entonces

$$R_m = \bigcap_{j=-m}^{j=m} f^{-j}(I_{x_j})$$

es un sucesión encajada de rectángulos cuya intersección consiste en un punto  $x$ . Se deduce que  $h(x) = \{x_n\}$ .

De estas propiedades y el hecho que  $\Lambda$  es compacto concluimos que  $h$  es un homeomorfismo. Además:

$$h(f(x))(n) = i \Leftrightarrow f^{n+1} \in I_i \Leftrightarrow i = h(x)(n+1)$$

es decir,  $h \circ f = \sigma \circ h$ . En conclusión hemos probado el siguiente teorema.

**Teorema 1.6.2.** *Sea  $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(Q)$ . Entonces  $\Lambda$  es un conjunto de Cantor y  $f|_{\Lambda}$  es conjugado al shift  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  donde  $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ . En particular:*

1. Los puntos periódicos son densos en  $\Lambda$ .
2.  $f|_{\Lambda}$  es transitivo y topológicamente mixing.
3.  $W^s(x) \cap \Lambda$  y  $W^u(x) \cap \Lambda$  son densos en  $\Lambda$  para  $x \in \Lambda$ .

### 1.6.3. Sistemas de Anosov lineales: el ejemplo de Thom

Podría pensarse que los ejemplos vistos anteriormente con una dinámica “caótica” son en parte debido a que el espacio es un conjunto de Cantor. Sin embargo esto no es así como veremos a continuación. No estudiaremos el ejemplo en detalle pues no es el objetivo de este curso,

Consideremos la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Observamos que  $A$  tiene entradas

enteras y determinante uno, por lo que  $A^{-1}$  también tiene entradas enteras. En  $\mathbb{R}^2$  consideremos nuevamente la equivalencia  $(x, y) \sim (x', y')$  si  $(x - x', y - y') \in \mathbb{Z}^2$ . Y sea  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . Es inmediato observar que si  $(x, y) \sim (x', y')$  entonces  $A(x, y) \sim A(x', y')$ . Luego  $A$  induce un mapa  $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  por  $\pi \circ A = f_A \circ \pi$ . Por otra parte, haciendo lo mismo con  $A^{-1}$  concluimos que  $f_A$  es un homeomorfismo.

Es fácil ver también que los valores propios de  $A$  son:  $\lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$  y  $\sigma = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$  y los subespacios propios  $E^s = S_\lambda$  y  $E^u = S_\sigma$  tienen pendiente irracional. Observemos que si  $I$  es un segmento de recta con la misma pendiente que  $E^u$  entonces  $A(I)$  también es un segmento con la misma pendiente y de longitud  $|A(I)| = \sigma|I|$  y por lo tanto  $A^n(I)$  es un segmento de recta con la misma pendiente y longitud  $|A^n(I)| = \sigma^n|I|$ .

**Teorema 1.6.3.** *El homeomorfismo  $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  tiene las siguientes propiedades:*

1. *Los puntos periódicos son densos.*
2.  *$f_A$  es topológicamente mixing.*

*Demostración.* Para  $q$  entero positivo consideremos  $C_q = \{(\frac{p}{q}, \frac{r}{q}) : p, r \in \mathbb{Z}\}$  y sea  $\tilde{C}_q = \pi(C_q)$ . Vemos que  $C_q$  es invariante por  $A$  y luego  $\tilde{C}_q$  es invariante por  $f_A$ . Por otra parte  $\tilde{C}_q$  es un conjunto finito, y por lo tanto todos los puntos de  $\tilde{C}_q$  son periódicos para  $f_A$ . Como  $\bigcup_{q \in \mathbb{N}} C_q$  es denso en  $\mathbb{R}^2$  concluimos que  $\bigcup_{q \in \mathbb{N}} \tilde{C}_q$  es denso en  $\mathbb{T}^2$  y entonces  $f_A$  tiene puntos periódicos densos en  $\mathbb{T}^2$ .

Para ver que  $f_A$  es topológicamente mixing, consideremos dos abiertos  $U, V$  de  $\mathbb{T}^2$ . Sea  $x \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\pi(x) \in U$ . Y consideremos también un pequeño segmento de recta  $I$  conteniendo a  $x$  y con la misma pendiente que  $E^u$  y de forma que  $\pi(I) \subset U$ . Ahora, dado  $L$  existe  $n_0$  tal que para todo  $n \geq n_0$  tenemos que la longitud de  $A^n(I)$  es mayor que  $L$ . Por el Corolario 1.3.3 concluimos que

$\pi(A^n(I)) \cap V \neq \emptyset$  para todo  $n \geq n_0$ . En particular  $f_A^n(U) \cap V \neq \emptyset$  para todo  $n \geq n_0$ .  $\square$

*Observación 1.6.1.* Note que  $f_A$  preserva la medida de Lebesgue en el toro  $\mathbb{T}^2$ , pues la matriz  $A$  tiene determinante igual a 1. No lo haremos aquí, pero puede mostrarse que de hecho la medida de Lebesgue es ergódica para  $f_A$ , vea [29, Proposición 4.2.12] o [41, Sección III.2].

## 1.7. El Teorema Ergódico de Birkhoff

Finalizamos este capítulo introductorio con el enunciado de una versión (las hay mas generales) del famoso Teorema Ergódico de Birkhoff:

**Teorema 1.7.1** (Teorema Ergódico de Birkhoff). *Sea  $f : M \rightarrow M$  un sistema dinámico continuo, y sea  $\mu$  una probabilidad de Borel en  $M$  que es invariante para  $f$ . Dada cualquier función  $\mu$ -integrable  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ , el límite  $\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$  existe para  $\mu$  casi todo punto  $x \in M$ , es  $\mu$ -integrable y se tiene que  $\int \tilde{\varphi} d\mu = \int \varphi d\mu$ .*

Si  $\mu$  es ergódica, entonces dada  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$   $\mu$ -integrable tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu \quad \text{para } \mu \text{ casi todo punto } x \in M.$$

En el caso ergódico, podemos parafrasear el Teorema 1.7.1 de la siguiente manera: el promedio de cualquier observable, a lo largo de casi toda órbita, coincide con su promedio en el espacio (en la Teoría de Probabilidad, este principio suele llamarse *Ley fuerte de los grandes números*). Por mas información (en particular la demostración del Teorema 1.7.1) recomendamos [29, Capítulo 4] y [41, Capítulo II].

## 1.8. Práctico 1

1. Describir la dinámica de un flujo en  $S^1$ .

2. \* Sea  $M$  un espacio métrico compacto. Sean  $f : M \rightarrow M$  y  $g : M \rightarrow M$  dos homeomorfismos conjugados por un homeomorfismo  $h : M \rightarrow M$  (esto es,  $h \circ f = g \circ h$ ). Probar que:
- $p$  es periódico por  $f$  sii  $h(p)$  es periódico por  $g$ .
  - $p$  es recurrente (respec. fuertemente recurrente) por  $f$  sii  $h(p)$  es recurrente (respec. fuertemente recurrente) por  $g$ .
  - $G$  es minimal por  $f$  sii  $h(G)$  es minimal por  $g$ .
  - $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$ .
  - La medida  $\mu$  es invariante (ergódica) por  $f$  sii la medida  $\nu$  definida por  $\nu(A) = \mu(h^{-1}(A))$  es invariante (ergódica) por  $g$ .
  - $f$  es unicamente ergódica sii  $g$  es unicamente ergódica.
  - Se define el conjunto estable de un punto  $x$  como  $W^s(x, f) = \{y \in M : \text{dist}(f^n(y), f^n(x)) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0\}$  y el inestable como  $W^u(x, f) = W^s(x, f^{-1})$ . Mostrar que  $h(W^s(x, f)) = W^s(h(x), g)$  y análogamente para el conjunto inestable.
3. Sea  $M$  un espacio métrico compacto. Sean  $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  y  $\psi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  dos flujos. Se dicen que son equivalentes si existe un homeomorfismo  $h : M \rightarrow M$  que lleva órbitas de un flujo en órbitas del otro, esto es  $h(\mathcal{O}(x, \phi)) = \mathcal{O}(h(x), \psi)$ . Si además se cumple que  $h \circ \phi_t = \psi_t \circ h \forall t \in \mathbb{R}$  se dicen que son conjugados. Cuáles de las propiedades del ejercicio anterior se conservan para flujos equivalentes y cuáles para flujos conjugados?
4.
  - Sea  $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  un flujo. Mostrar que  $\Phi_{/\mathbb{Z} \times M}$  es un sistema dinámico discreto ( $f = \Phi_1$  se llama “tiempo 1” del flujo).
  - Demostrar que si  $f : M \rightarrow M$  es el tiempo 1 de un flujo entonces es isotópico a la identidad (dos homeos  $f_0, f_1$  de  $M$  son isotópicos si existe  $F : M \times [0, 1] \rightarrow M$  continua tal que  $F(., 0) = f_0, F(., 1) = f_1$  y  $F(., t) : M \rightarrow M$  es un homeo para cualquier  $t \in [0, 1]$ ).
  - Encontrar un ejemplo de un sistema dinámico discreto que no sea el tiempo 1 de ningún flujo.
5. \* Sea  $M$  un espacio topológico compacto y  $f : M \rightarrow M$  un homeomorfismo. En  $M \times \mathbb{R}$  se considera el flujo  $\Phi : \mathbb{R} \times M \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}$  dado por

$\Phi(t, (x, s)) = (x, t + s)$ . En  $M \times \mathbb{R}$  se considera la siguiente relación:

$$(x, s_1) \sim (y, s_2) \iff s_1 - s_2 \in \mathbb{Z} \text{ y } f^{s_1 - s_2}(x) = y.$$

- a) Mostrar que  $\sim$  es una relación de equivalencia.
  - b) Sea  $\tilde{M} = M \times \mathbb{R} / \sim$  y  $\Pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow \tilde{M}$  la proyección canónica. Se considera  $\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \times \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$  dada por  $\tilde{\Phi}(t, \Pi(x, s)) = \Pi(\Phi(t, (x, s)))$ . Mostrar que  $\tilde{\Phi}$  está bien definida y que es un flujo en  $\tilde{M}$ . (este flujo se llama flujo suspensión de  $f$ .)
  - c) Mostrar que  $\tilde{M}_t = \Pi(M \times \{t\})$  es homeomorfo a  $M$  y que  $\tilde{\Phi}_1$  deja invariante  $\tilde{M}_t$  y es conjugado a  $f : M \rightarrow M$ .
  - d) Si  $M = S^1$  y  $f : M \rightarrow M$  es la rotación de ángulo  $\alpha$ ,  $R_\alpha$ , identificar  $\tilde{M}$  y  $\tilde{\Phi}$ .
  - e) Si  $M = S^1$  y  $f : S^1 \rightarrow S^1$  es  $f(x) = -x \pmod{1}$ , identificar  $\tilde{M}$ .
6. a) Sea  $G$  un subgrupo de  $(\mathbb{R}, +)$ . Probar que  $G$  es discreto ( $G = d\mathbb{Z}$ ) o que  $G$  es denso en  $\mathbb{R}$ . (sug: considerar  $d = \inf\{g \in G : g > 0\}$ )
- b) Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $G_\alpha = \{n\alpha + m; n, m \in \mathbb{Z}\}$ . Probar que  $G_\alpha$  es discreto sii  $\alpha \in \mathbb{Q}$ .
- c) Sea  $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$ . Verificar que la órbita de  $x$  por  $R_\alpha$  es  $\Pi(x + G_\alpha)$  donde  $\Pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  es la proyección canónica. Deducir de aquí la dinámica de  $R_\alpha$ .
7. Encontrar ejemplos de:
- a) Puntos no errantes que no sean recurrentes.
  - b) Puntos recurrentes que no sean fuertemente recurrentes.
8. \* Sea  $M$  espacio métrico compacto y  $f : M \rightarrow M$  homeo. Una  $\epsilon$ -cadena de  $x$  a  $y$  es un conjunto finito  $x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y$  tal que  $\text{dist}(f(x_i), x_{i+1}) < \epsilon$  para  $i = 0, \dots, n - 1$ . Decimos que  $x$  es recurrente por cadenas si para todo  $\epsilon > 0$  existe una  $\epsilon$ -cadena de  $x$  a  $x$ . Denotamos por  $\mathcal{R}(f)$  el conjunto de los puntos recurrentes por cadenas.
- a) Probar que  $\mathcal{R}(f)$  es cerrado e invariante.

- b) Probar que  $\Omega(f) \subset \mathcal{R}(f)$ .
- c) Probar que  $\mathcal{R}(f/\mathcal{R}(f)) = \mathcal{R}(f)$ .
9. Sea  $f : M \rightarrow M$  un sistema dinámico. Definimos los conjuntos  $L^+(f) = \overline{\cup_{x \in M} \omega(x)}$ ,  $L^-(f) = \overline{\cup_{x \in M} \alpha(x)}$  y  $L(f) = L^+(f) \cup L^-(f)$ . Denotamos por  $Per(f)$  es conjunto de los puntos periódicos de  $f$ . Demostrar que  $Per(f) \subset L^+(f) \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset \mathcal{R}(f)$ . Encontrar ejemplos donde estas inclusiones sean estrictas.
10. a) Sea  $M$  un espacio métrico completo y sea  $f : M \rightarrow M$  un homeo. Probar que si  $\mathcal{O}(x)$  es compacto entonces  $x$  es periódico. (sug: si  $x$  no es aislado en  $\mathcal{O}(x)$  entonces  $\mathcal{O}(x)$  es perfecto.)
- b) Probar resultado análogo para flujos (sug: si la órbita por  $x$  no es fija ni periódica encontrar  $q_n, \epsilon_n$  y  $t_n \rightarrow \infty$  tales que  $B(q_{n+1}, \epsilon_{n+1}) \subset B(q_n, \epsilon_n)$  y  $\overline{B(q_n, \epsilon_n)} \cap \{\Phi_t(x) : -t_n \leq t \leq t_n\} = \emptyset$ ).
11. Sea  $M$  un espacio métrico completo y sea  $f : M \rightarrow M$  un homeo. Un punto  $p \in M$  se dice que es uniformemente fuertemente recurrente si dado  $\epsilon > 0$  existe  $L$  tal que el conjunto  $\{m \in \mathbb{Z} : d(f^m(p), p) < \epsilon\}$  es  $L$ -relativamente denso cualquiera sea  $q$  en la órbita de  $p$ .
- a) Probar que si la órbita de un punto  $p$  tiene clausura compacta, entonces  $p$  es fuertemente recurrente sii es uniformemente fuertemente recurrente.
- b) Si  $p$  es uniformemente fuertemente recurrente, entonces la órbita de  $p$  es un conjunto totalmente acotado.
- c) Probar que  $p$  es uniformemente fuertemente recurrente sii la clausura de la órbita de  $p$  es un minimal compacto.
- d) Si  $p$  es casi-periódico entonces  $p$  es uniformemente fuertemente recurrente.
12. \* Considere  $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$  rotación con  $\alpha$  irracional. Dada una función continua  $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ , considere la sucesión de funciones continuas  $\{\varphi_n : S^1 \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$  dada por  $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(R_\alpha^j(x))$  para todo  $x \in S^1$ .

Considere también el número real  $I_\varphi = \int \varphi d\lambda$ , donde  $\lambda$  es la medida de Lebesgue en el círculo (normalizada).

- a) Probar que  $\max_{z \in S^1} |\varphi_n(z)| \leq \max_{z \in S^1} |\varphi(z)|$  y que  $\int \varphi_n d\lambda = I_\varphi$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- b) Probar que  $\{\varphi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a la constante  $I_\varphi$  para un conjunto *denso* de puntos  $x \in S^1$  (sug: recuerde la ergodicidad que demostramos en la Proposición 1.2.2, y aplique el Teorema Ergódico de Birkhoff).
- c) Probar que  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge en *todos* los puntos del círculo a la constante  $I_\varphi$  (sug: como  $R_\alpha$  preserva distancias en el círculo y  $\varphi$  es uniformemente continua, la sucesión  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es *equicontinua*. Aplique ahora el Teorema de Arzelá-Ascoli, combinado con el ítem anterior).
- d) Probar que  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge *uniformemente* en  $S^1$  a la constante  $I_\varphi$ .
- e) Probar que  $R_\alpha$  es únicamente ergódica, o sea, que  $R_\alpha$  admite una única probabilidad invariante (sug: combinando lo anterior con el Teorema Ergódico de Birkhoff, deduzca que si  $\mu$  es una probabilidad  $R_\alpha$ -invariante, entonces  $\int \varphi d\mu = \int \varphi d\lambda$  para toda función continua  $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ . Esto implica que  $\mu = \lambda$ ).

13. \* *El  $C^0$  closing lemma:*

- a) Sea  $\epsilon > 0$ . Probar que si  $y \in \mathbb{R}^n$  satisface  $\|y\| < \epsilon$  entonces existe  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  homeo tal que:

- $h(0) = y$
- $h(x) = x$  si  $\|x\| \geq \epsilon$ .
- $\|h(x) - x\| \leq \epsilon$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

*Sugerencia:* Considerar  $\phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$  dada por  $\phi(t) = 1 - t$  si  $0 \leq t \leq 1$  y  $\phi(t) = 0$  si  $t \geq 1$ , y definir  $h(x) = x + \phi\left(\frac{\|x\|}{\epsilon}\right)y$ .

- b) Sea  $M$  una variedad compacta y sea  $f : M \rightarrow M$  homeo y  $x$  un punto recurrente. Dado  $\epsilon > 0$  probar que existe  $g : M \rightarrow M$  homeo tal que  $\text{dist}(g(z), f(z)) < \epsilon$  para todo  $z \in M$  y tal que  $x$  es periódico para  $g$ . Probar un resultado análogo si  $x \in \Omega(f)$ .

14. Decimos que  $G$  es un *grupo topológico* si es un espacio topológico y a la vez un grupo donde las operaciones del grupo (multiplicación e inverso) son funciones continuas. Sea  $g \in G$  un elemento y considere la multiplicación a izquierda  $L_g : G \rightarrow G$ ,  $L_g(g') = gg'$ .
- Probar que  $L_g$  es transitivo sii  $G$  es minimal por  $L_g$ .
  - Si  $G$  es compacto, probar que todo punto es recurrente.
15. \* Sea  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  dado por  $f(z, w) = (z + \alpha, z + w)$  con  $\alpha$  irracional. Probar que  $\mathbb{T}^2$  es minimal.
16. Sea  $N$  un espacio topológico,  $f : N \rightarrow N$  un homeo,  $K$  un grupo topológico compacto y  $\phi : N \rightarrow K$  una aplicación continua. Definimos un sistema dinámico (llamado “skew product”) en  $M = N \times K$  dado por  $F(y, k) = (f(y), \phi(y)k)$ .
- Si definimos  $R_g : M \rightarrow M$  por  $R_g(y, k) = (y, kg)$  probar que  $R_g \circ F = F \circ R_g$ . Concluir que si  $(y, k) \in \omega(y_0, k_0)$  entonces  $(y, kg) \in \omega(y_0, k_0g)$ .
  - Probar que si  $y_0 \in N$  es recurrente por  $f$  entonces  $(y_0, k)$  es recurrente por  $F$  para todo  $k \in K$ . (Sug: probarlo primero para la identidad).
  - Si  $N$  es minimal para  $f$ , es  $M$  minimal para  $F$ ?
  - Considere  $F : T^2 \rightarrow T^2$  dado por  $F(z, w) = (z + \alpha, w + 2z + \alpha)$ . Mostrar que  $(0, 0)$  es recurrente y concluir que para todo número real  $\alpha$  y  $\epsilon > 0$  hay solución de la ecuación diofantina  $|\alpha n^2 - m| < \epsilon$ .
  - Si  $p(x)$  es un polinomio real con  $p(0) = 0$ , mostrar que para todo  $\epsilon > 0$  hay solución de la ecuación diofantina  $|p(n) - m| < \epsilon$ . (sug: si  $d$  es el grado de  $p$  considerar  $F : T^d \rightarrow T^d$ ,  $F(z_1, \dots, z_d) = (z_1 + \alpha, z_2 + z_1, \dots, z_d + z_{d-1})$  y los polinómios  $p_d = p, p_{i-1}(x) = p_i(x+1) - p_i(x)$ . Quién es  $F^n(p_1(0), \dots, p_d(0))$ ?
17. Sean  $M$  un espacio métrico compacto,  $f : M \rightarrow M$  un homeomorfismo y  $\mu$  una probabilidad ergódica para  $f$ . Probar que  $f|_{\text{supp}(\mu)}$  es transitivo (sug: recuerde la Proposición 1.4.1).
18. Probar, con un ejemplo, que la hipótesis de ergodicidad en el ejercicio anterior es necesaria.

## Capítulo 2

# Homeomorfismos del círculo

Definimos el círculo  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  y  $\pi(x) = x \pmod{1}$  la proyección canónica. Identificamos el círculo con  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  y  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dada por  $\pi(x) = e^{2\pi i x}$ . Trabajaremos con ambas nociones indistintamente.

**Proposición 2.0.1.** Sean  $f : S^1 \rightarrow S^1$  continua,  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $y_0 \in \pi^{-1}(f(\pi(x_0)))$ . Entonces, existe una única  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que:

1.  $F(x_0) = y_0$
2.  $\pi \circ F = f \circ \pi$

**Definición 2.0.1.** Una  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua que verifica  $\pi \circ F = f \circ \pi$  se llama *levantamiento* de  $f$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

*Observación 2.0.1.* Si  $F_1$  y  $F_2$  son dos levantamientos de  $f$ , entonces  $F_1(x) = F_2(x) + k$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Demostración.*  $F_1 - F_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  es continua. □

*Observación 2.0.2.* Sea  $F$  levantamiento de  $f$ . Entonces de  $\pi \circ F = f \circ \pi$  se deduce que  $\exists m \in \mathbb{Z}$  tal que  $F(x+1) = F(x) + m$ . Este  $m$  no depende del levantamiento.

**Definición 2.0.2.** Llamamos  $\text{deg}(f)$  al entero  $m$  tal que  $F(x+1) = F(x) + m$ , donde  $F$  es un levantamiento de  $f$ .

*Observación 2.0.3.* Si  $f : S^1 \rightarrow S^1$  es un homeo que preserva orientación (que denotaremos por  $f \in \text{Hom}_+(S^1)$ ) y  $F$  es un levantamiento de  $f$ . Entonces:

1.  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un homeo creciente
2.  $\text{deg}(f) = 1$
3.  $F - \text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es periódica de período 1.

**Teorema 2.0.1** (Poincaré). Sean  $f \in \text{Hom}_+(S^1)$  y  $F$  un levantamiento. Entonces,  $\forall x \in \mathbb{R}$  existe  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$  y es independiente de  $x$ .

*Demostración.* 1. independencia de  $x$ :

Basta observar que si  $|x - y| \leq k \in \mathbb{Z} \implies |F^n(x) - F^n(y)| \leq k, \forall n \in \mathbb{Z}$ .  
 Luego,  $\left| \frac{F^n(x)}{n} - \frac{F^n(y)}{n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

2. existencia del límite:

Para  $m \in \mathbb{Z}$  afirmamos que  $\forall m \implies \exists p_m \in \mathbb{Z}$  tal que  $p_m \leq F^m(x) - x \leq p_m + 3, \forall x \in \mathbb{R}$ .<sup>1</sup> Como  $F^m - \text{Id}$  es periódica de período 1 basta verificar lo anterior para  $x \in [0, 1]$ . Sea  $k = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq F^m(1)\}$ . Sea  $p_m = k - 3$ . Ahora para  $x \in [0, 1]$  tenemos que

$$F^m(x) - x \leq F^m(1) - 0 \leq p_m + 3 \text{ y } F^m(x) - x \geq F^m(0) - 1 \geq k - 2 - 1 = p_m.$$

Tomamos	$x = 0$	$\longrightarrow$	$p_m \leq F^m(0) \leq p_m + 3$
	$x = F^m(0)$	$\longrightarrow$	$p_m \leq F^{2m}(0) - F^m(0) \leq p_m + 3$
	$\vdots$		$\vdots$
Luego,	$x = F^{(n-1)m}$	$\longrightarrow$	$p_m \leq F^{nm}(0) - F^{(n-1)m}(0) \leq p_m + 3$
sumamos		$\longrightarrow$	$np_m \leq F^{nm}(0) \leq n(p_m + 3)$

Luego,

$$\frac{p_m}{m} \leq \frac{F^{nm}(0)}{nm} \leq \frac{p_m}{m} + \frac{3}{m}.$$

Como además,

$$\frac{p_m}{m} \leq \frac{F^m(0)}{m} \leq \frac{p_m}{m} + \frac{3}{m},$$

---

<sup>1</sup>En realidad existe  $p_m \in \mathbb{Z}$  tal que  $p_m < F^m(x) - x < p_m + 2$  ya que se puede probar que  $(F^m - \text{id})(\mathbb{R}) \cap \mathbb{Z}$  consiste a lo sumo de un solo punto (ejercicio).

entonces

$$\left| \frac{F^{nm}(0)}{nm} - \frac{F^m(0)}{m} \right| \leq \frac{3}{m}.$$

Intercambiando los roles de  $m$  y  $n$ , obtenemos:

$$\left| \frac{F^{mn}(0)}{mn} - \frac{F^n(0)}{n} \right| \leq \frac{3}{n},$$

de donde

$$\left| \frac{F^m(0)}{m} - \frac{F^n(0)}{n} \right| \leq \frac{3}{m} + \frac{3}{n}.$$

Luego,  $\left\{ \frac{F^n(0)}{n} \right\}$  es una sucesión de Cauchy  $\implies \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F^n(0)}{n}$ . □

**Definición 2.0.3.** Sea  $F$  un levantamiento de  $f \in \text{Hom}_+(S^1)$ . Definimos el número de traslación del levantamiento  $F$  como  $\rho(F) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$ .

En otras palabras, para  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, la distancia en la recta real entre un punto inicial y su  $n$ -ésimo iterado por  $F$  es, aproximadamente,  $n\rho(F)$ .

*Observación:*

1. Si  $F_1$  es otro levantamiento de  $f$ , entonces  $F_1(x) = F(x) + k$ , para algún  $k \in \mathbb{Z} \implies \rho(F_1) = \rho(F) + k$ .
2.  $\rho(F^m) = m\rho(F)$ .

**Definición 2.0.4.** Sea  $f \in \text{Hom}_+(S^1)$ . Llamamos número de rotación de  $f$  a  $\rho(f) = \rho(F) \pmod{1}$ , donde  $F$  es un levantamiento de  $f$ .

**Proposición 2.0.2.** El número de rotación es invariante por conjugaciones. Es decir, si  $f, g \in \text{Hom}_+(S^1)$ , donde  $g = h^{-1} \circ f \circ h$ , para cierta  $h \in \text{Hom}(S^1)$ , entonces  $\rho(f) = \rho(g)$ .

*Demostración.* Sea  $F$  levantamiento de  $f$  y  $H$  levantamiento de  $h$ . Luego,  $H^{-1}$  es un levantamiento de  $h^{-1}$  y  $G = H^{-1} \circ F \circ H$  es un levantamiento de  $g$ . Ahora, existe  $M$  tal que  $|H^{-1}(y) - y| < M, \forall y \in \mathbb{R} \implies |G^n(x) - F^n(H(x))| \leq M, \forall n \implies \rho(G) = \lim_n \frac{G^n(x)}{n} = \lim_n \frac{H^{-1}(F^n(H(x))) - F^n(H(x))}{n} + \frac{F^n(H(x))}{n} = \lim_n \frac{F^n(H(x))}{n} = \rho(F) \implies \rho(g) = \rho(f)$ . □

*Observación 2.0.4.*  $\rho(R_\alpha) = \alpha$ .

## 2.1. Número de rotación racional

**Proposición 2.1.1.** *Sea  $f \in \text{Hom}(S^1)$ . Entonces*

$$\rho(f) \in \mathbb{Q}(\text{mod } 1) \iff f \text{ tiene puntos periódicos.}$$

En este caso, si  $\rho(f) = \frac{p}{q}$ , con  $(p, q) = 1$ , todos los puntos periódicos tienen período  $q$ .

*Demostración.* Veamos primero el recíproco. Sea  $F$  levantamiento de  $f$ . Como  $f$  tiene un punto periódico  $\pi(x)$  (digamos de período  $q$ ) entonces existe  $p \in \mathbb{Z}$  tal que  $F^q(x) = x + p$ . Luego,  $F^{nq}(x) = x + np$  y por lo tanto

$$\lim_n \frac{F^{nq}(x)}{nq} = \lim_n \frac{x + np}{nq} = p/q$$

y por lo tanto  $\rho(f) = \frac{p}{q}(\text{mod } 1)$ .

Veamos el directo:

Por propiedad del número de rotación:

$$\rho(f^m) = m\rho(f) \pmod{1}.$$

Si  $\rho(f) = \frac{p}{q} \implies \rho(f^q) = 0$ . Basta demostrar que si  $\rho(f) = 0$ , entonces  $f$  tiene puntos fijos. Sea  $F$  tal que  $\rho(F) = 0$ . Si  $F$  no tiene puntos fijos, como  $F - Id$  es periódica,  $\exists \delta$  tal que  $|F(x) - x| \geq \delta$ . Por otra parte  $F(x) > x, \forall x$  (\*) o  $F(x) < x, \forall x$  (\*\*). Supongamos (\*) (el otro caso es análogo). Entonces  $F(0) > \delta, F^2(0) > F(0) + \delta > 2\delta, \dots, F^n(0) > n\delta$ . Entonces  $\delta < \frac{F^n(0)}{n} \rightarrow 0$ .

Finalmente supongamos que  $\rho(f) = \frac{p}{q}, (p, q) = 1$  y veamos que todos los puntos periódicos tiene período  $q$ . Sea  $F$  un levantamiento de  $f$  tal que  $\rho(F) = \frac{p}{q}$  y sea  $\pi(x)$  periódico por  $f$ . Entonces, existen  $r, s$  tales que  $F^r(x) = x + s$ . Ahora

$$\rho(f) = \frac{p}{q} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{F^{rs}(x)}{rs} = \frac{s}{r},$$

entonces  $s = mp$  y  $r = mq$  para algún  $m$ . Supongamos  $F^q(x) - p > x$ , entonces

$$F^{2q}(x) - 2p = F^q(F^q(x) - p) - p \geq F^q(x) - p > x.$$

Entonces  $x < F^{mq}(x) - mp = F^r(x) - s$ , lo cual es absurdo. Análogamente si  $F^q(x) - p < x$  llegamos a una contradicción. Así,  $\pi(x)$  es periódico por  $f$  si y sólo si  $F^q(x) = x + p$ . Luego todos los puntos periódicos de  $f$  tienen período  $q$ .  $\square$

*Observación 2.1.1.* Veamos otra forma para la demostración anterior. Sea  $\pi(x)$  periódico de  $f$  de período  $q$ . Entonces  $S^1 \setminus \mathcal{O}(\pi(x)) = I_1 \cup \dots \cup I_q$  son  $q$  intervalos disjuntos que son permutados por  $f$ , y  $f^j(I_i) = I_i$  si y sólo si  $j = q$ . Luego  $f^q(I_1) = I_1$  es un homeo del intervalo  $I_1$ . Si  $\pi(y)$  es un punto periódico de  $f$ , tenemos que  $\mathcal{O}(\pi(y)) \cap I_1 \neq \emptyset$ . Supongamos que  $\pi(y) \in I_1$ . Ahora

$$\Omega(f^q|_{I_1}) = \{\text{puntos fijos}\} \implies f^q(\pi(y)) = \pi(y).$$

Luego  $\pi(y)$  es periódico de período  $q$ .

*Observación 2.1.2.* Note, en particular, que un homeomorfismo del círculo con número de rotación racional admite medidas ergódicas que son atómicas (en general varias, de la forma  $\frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} \delta_{f^j(\pi(x))}$ ). Esto contrasta con el caso de la rotación irracional, que preserva apenas una medida, la de Lebesgue (Proposición 1.2.2). Vea también el Ejercicio 6 al final de este capítulo.

**Corolario 2.1.1.** *Sea  $f \in \text{Hom}_+(S^1)$  con  $\rho(f) \in \mathbb{Q}$ . Entonces  $\Omega(f) = \text{Per}(f)$ .*

**Proposición 2.1.2.** *Sea  $f \in \text{Hom}_+(S^1)$  con  $\rho(f) = \frac{p}{q}$  con  $(p, q) = 1$  y sea  $\pi(x)$  un punto periódico de  $f$ . Entonces el orden de  $\{\pi(x), f(\pi(x)), \dots, f^{q-1}(\pi(x))\}$  en  $S^1$  es el mismo que una órbita según  $R_{\frac{p}{q}}$ , i.e., es el mismo que*

$$\left\{ 0, \frac{p}{q}, \frac{2p}{q}, \dots, \frac{(q-1)p}{q} \right\}.$$

*Demostración.* Sea  $F$  un levantamiento de  $f$  tal que  $F^q(x) = x + p$ . Consideremos  $\pi^{-1}(\mathcal{O}(\pi(x))) = A$ . Entonces  $A$  divide a  $[x, x + p]$  en  $p \cdot q$  intervalos. Por otra parte  $x < F(x) < \dots < F^{q-1}(x) < F^q(x) = x + p$ . Tenemos entonces  $q$  intervalos en  $[x, x + p]$ :

$$[x, F(x)], [F(x), F^2(x)], \dots, [F^{q-1}(x), F^q(x)].$$

De ahí que como  $A$  es invariante por  $F$ , tenemos que  $\#A \cap [x, F(x)] = p + 1$ . Sea  $x_1 \in A$  tal que  $[x, x_1] \cap A = \emptyset$ . Entonces existe un único  $k$  con  $0 \leq k < q$  tal que  $F^k(x) - r = x_1$  y  $r \in \mathbb{Z}$ . Sea  $F_1$  definida como  $F_1(z) = F^k(z) - r$ . Entonces  $F_1^p(x) = F(x)$ . Luego

$$f^{kp}(\pi(x)) = f(\pi(x)) \implies kp \equiv 1 \pmod{q}.$$

Entonces  $k$  es el único entero con  $0 < k < q$  que verifica  $kp \equiv 1 \pmod{q}$  y  $f^{kp}(\pi(x))$  es el que le sigue a  $\pi(x)$  en la orientación de  $S^1$ , es decir el orden de

$\{\pi(x), f(\pi(x)), \dots, f^{q-1}(\pi(x))\}$  en  $S^1$  es:

$$\pi(x) < f^k(\pi(x)) < f^{2k}(\pi(x)) < \dots < f^{(q-1)k}(\pi(x)).$$

Vimos que el orden está determinado solamente por  $\rho(f) = \frac{p}{q}$ . Así, es el mismo que  $R_{\frac{p}{q}}$ .  $\square$

## 2.2. Número de rotación irracional

**Teorema 2.2.1.** *Sea  $f \in \text{Hom}_+(S^1)$  con  $\rho(f) \notin \mathbb{Q}(\text{mod } 1)$ . Entonces  $\Omega(f)$  es minimal.*

*Demostración.* Sea  $M \subset \Omega(f)$  compacto invariante,  $M \neq \emptyset$ . Entonces  $S^1 \setminus M$  es abierto. Sea  $I = (a, b)$  una componente conexa de  $S^1 \setminus M$ . Luego  $f^n(I) \cap I = \emptyset$ ,  $\forall n > 0$  (de lo contrario  $f$  tiene puntos periódicos). Entonces  $I \subset S^1 \setminus \Omega(f)$ . De ahí  $\Omega(f) \subset M$ . Entonces  $\Omega(f)$  es minimal.  $\square$

**Corolario 2.2.1.** *Sea  $f \in \text{Hom}_+(S^1)$  con  $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$ . Entonces  $\Omega(f) = S^1$  o  $\Omega(f)$  es perfecto con interior vacío (i.e.,  $\Omega(f)$  es un conjunto de Cantor).*

*Demostración.*  $\Omega(f)$  es perfecto pues  $\Omega(f)$  es minimal. Si  $\Omega(f)$  tiene interior no vacío, tenemos que  $\Omega(f)$  es abierto. Como  $\Omega(f)$  es cerrado,  $\Omega(f) = S^1$ .  $\square$

**Proposición 2.2.1.** *Sea  $f \in \text{Hom}_+(S^1)$  con  $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$ . Sea  $F$  levantamiento tal que  $\rho(F) = \alpha$ . Entonces para todo  $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$  se cumple*

$$(1) \quad n_1\alpha + m_1 < n_2\alpha + m_2 \iff F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2 \quad (2).$$

*Demostración.* Fijemos  $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ . Como  $\rho(F) \notin \mathbb{Q}$ , el signo de  $p(x) = F^{n_1}(x) + m_1 - F^{n_2}(x) + m_2$  no depende de  $x$ . Luego, dados  $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ , si  $F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$  para algún  $x$  tenemos que la misma desigualdad vale para todo  $x$ . Supongamos que (2) se cumple, entonces vale para  $x = 0$ , i.e.  $F^{n_1}(0) - F^{n_2}(0) < m_2 - m_1$ . Haciendo  $y = F^{n_2}(0)$  tenemos  $F^{n_1-n_2}(y) - y < m_2 - m_1$  (3). Luego (3) vale para todo  $y$ , en particular para  $y = 0$ . Entonces  $F^{n_1-n_2}(0) < m_2 - m_1$ , de ahí que  $F^{k(n_1-n_2)}(0) < m_2 - m_1$ , entonces

$$\frac{F^{k(n_1-n_2)}(0)}{k(n_1-n_2)} < \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2},$$

pudiendo suponer que  $n_1 - n_2 > 0$ . Haciendo tender  $k$  a  $+\infty$  obtenemos

$$\alpha \leq \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2}.$$

Como  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ , tenemos

$$\alpha < \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2}.$$

De donde

$$n_1\alpha + m_1 < n_2\alpha + m_2.$$

Análogamente si

$$F^{n_1}(x) + m_1 > F^{n_2}(x) + m_2$$

tenemos

$$n_1\alpha + m_1 > n_2\alpha + m_2,$$

y se concluye la demostración.  $\square$

**Definición 2.2.1.** Dados  $f, g \in \text{Hom}_+(S^1)$  decimos que  $f$  es *semiconjugado* a  $g$  si existe  $h : S^1 \rightarrow S^1$  continua y sobre (de grado 1 y preservando orientación) tal que  $h \circ f = g \circ h$ .

**Teorema 2.2.2.** Sea  $f \in \text{Hom}_+(S^1)$  con  $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$ . Entonces  $f$  es *semiconjugado* a  $R_\alpha$  (por una  $h$  que preserva orientación). Mas aún si  $f$  es transitivo,  $f$  es *conjugado* a  $R_\alpha$  (i.e.  $h$  es un homeo).

*Demostración.* Sea  $F$  un levantamiento de  $f$  y  $x \in \mathbb{R}$ . Consideremos el conjunto  $B = \{F^n(x) + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$ . Definimos una función  $H : B \rightarrow \mathbb{R}$  por  $H(F^n(x) + m) = n\alpha + m$ . Luego  $H$  es monótona y  $\overline{H(B)} = \mathbb{R}$ . Entonces existe una única extensión continua de  $H$  a  $\overline{B}$  y monótona y además  $H(\overline{B}) = \mathbb{R}$ . Entonces hay una única extensión de  $H$  a  $\mathbb{R}$  de forma monótona. Luego tenemos  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua, monótona y sobre. Se verifica  $H \circ F = T_\alpha \circ H$ . Además  $H(x+1) = H(x) + 1$ . Luego definimos  $h : S^1 \rightarrow S^1$  por  $h(\pi(x)) = \pi(H(x))$ .  $h$  es continua, sobre y  $h \circ f = R_\alpha \circ h$ . Por otra parte, si  $f$  es transitivo (i.e.  $\Omega(f) = S^1$ ) tenemos que  $\overline{B} = \mathbb{R}$  y  $H$  es un homeo.  $\square$

### 2.3. Número de rotación y medidas invariantes

Cerramos el Capítulo 2 con una interpretación, en términos estadísticos, del número de rotación. Veremos que el número de rotación de  $f \in \text{Hom}_+(S^1)$  equivale a promediar, con cualquier medida  $f$ -invariante, la distancia entre cada punto del círculo y su iterado (Corolario 2.3.1).

Sea  $f \in \text{Hom}_+(S^1)$  y sea  $F \in \text{Hom}_+(\mathbb{R})$  un levantamiento de  $f$  por la proyección canónica  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dada por  $\pi(x) = e^{2\pi ix}$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

Como observamos al comienzo de este capítulo, el levantamiento  $F$  conmuta con la traslación unitaria, o sea,  $F - \text{Id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es periódica de período 1:

$$(F - \text{Id})(x + 1) = F(x + 1) - x - 1 = F(x) + 1 - x - 1 = (F - \text{Id})(x).$$

Sea  $\varphi_F : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  la (única) función cuyo levantamiento por  $\pi$  es  $F - \text{Id}$ , o sea,  $\varphi_F(\pi(x)) = F(x) - x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{F - \text{Id}} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & \nearrow \varphi_F & \\ S^1 & & \end{array}$$

En otras palabras,  $F(x) = x + \varphi_F(e^{2\pi ix})$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . La función  $\varphi_F$  es llamada *función desplazamiento* del levantamiento  $F$ . Note que si  $f$  es la rotación de ángulo  $\rho$ , entonces  $\varphi_F$  es *constante* igual a  $\rho \pmod{1}$ . En el caso general, se tiene una igualdad para *promedios asintóticos*:

**Lema 2.3.1.** *Si  $f \in \text{Hom}_+(S^1)$  y  $F \in \text{Hom}_+(\mathbb{R})$  es un levantamiento de  $f$ , se tiene que*

$$\widetilde{\varphi}_F = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_F \circ f^j$$

*está definida en todo el círculo y es constante igual a  $\rho(F)$ .*

*Demostración.* Siendo que  $F$  es un homeomorfismo creciente de la recta real, la distancia entre un punto inicial y su  $n$ -ésimo iterado por  $F$  coincide con la suma de las  $n$  distancias intermedias. Mas precisamente, dados  $x \in S^1$  y  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\pi(x_0) = x$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_F(f^j(x)) &= \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_F(\pi(F^j(x_0))) = \sum_{j=0}^{n-1} (F - \text{Id})(F^j(x_0)) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (F^{j+1}(x_0) - F^j(x_0)) = F^n(x_0) - x_0. \end{aligned}$$

Luego  $\widetilde{\varphi}_F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F^n(x_0) - x_0}{n} = \rho(F)$ .  $\square$

Combinando el Lema 2.3.1 con el Teorema Ergódico de Birkhoff (vea la Sección 1.7) obtenemos que:

**Corolario 2.3.1.** *Si  $f \in \text{Hom}_+(S^1)$  y  $\mu$  es una probabilidad de Borel invariante por  $f$ , se tiene que*

$$\rho(f) = \int_{S^1} \varphi_F d\mu \pmod{1},$$

donde  $\varphi_F : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  es la función desplazamiento de cualquier levantamiento  $F \in \text{Hom}_+(\mathbb{R})$  de  $f$ .

La “reformulación” del número de rotación dada por el Corolario 2.3.1 no será utilizada en estas notas. Apenas destacamos que es bastante útil en dimensiones mayores (especialmente para estudiar homeomorfismos del toro  $\mathbb{T}^2$ , vea por ejemplo [48]).

## 2.4. Práctico 2

1. \* Sea  $f \in \text{Hom}_+(S^1)$  tal que  $\rho(f) \in \mathbb{Q}$ . Probar que  $\Omega(f) = \text{Per}(f)$ .
2. Sea  $f : S^1 \rightarrow S^1$  un homeomorfismo del círculo que revierte orientación ( $\text{grado}(f) = -1$ ).
  - a) Mostrar que  $f$  tiene exactamente dos puntos fijos
  - b) Concluir que para cualquier  $x$ ,  $\omega(x)$  es un punto fijo o un punto periódico de período 2.
3. Sean  $f : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $g : S^1 \rightarrow S^1$  dos homeomorfismos preservando orientación que conmutan. Probar que  $\rho(f \circ g) = \rho(f) + \rho(g) \pmod{1}$ . Concluir que  $\rho(f^n) = n \rho(f) \pmod{1}$ .
4. Sean  $f, g \in \text{Hom}_+(S^1)$  que son semiconjugados por  $h$  (es decir,  $h : S^1 \rightarrow S^1$  continua, sobre y de grado 1 tal que  $h \circ f = g \circ h$ ). Probar que  $\rho(f) = \rho(g)$ .

5. Sea  $\rho : \text{Hom}_+(S^1) \rightarrow S^1$  la función que asocia a cada homeomorfismo creciente del círculo su número de rotación. Probar que  $\rho$  es una función continua. Sug: recordar que se cumple que

$$\left| \frac{f^{mn}(0)}{mn} - \frac{f^n(0)}{n} \right| \leq \frac{3}{n}.$$

6. \* Sea  $f : S^1 \rightarrow S^1$  un homeomorfismo conjugado a una rotación irracional.
- Probar que la conjugación es única a menos de una rotación, es decir, si  $h_1, h_2$  son dos conjugaciones, entonces  $h_1 = R_\beta \circ h_2$  para algún  $\beta$ .
  - Probar que  $f$  es únicamente ergódica, y que su única medida invariante viene dada por  $\mu(A) = \lambda(h(A))$  para cualquier conjunto de Borel  $A \subset S^1$ , donde  $h$  es cualquier conjugación con la rotación.
7. Sea  $C$  el conjunto de Cantor usual en  $[0, 1]$  y  $\alpha$  un número irracional,  $0 < \alpha < 1$ . Encontrar  $f \in \text{Hom}_+(S^1)$  tal que  $\rho(f) = \alpha$  y  $\Omega(f) = C$ . Sug: usar la función de Cantor y también usar (¿o demostrar?) que dados dos conjuntos numerables y densos  $A, B$  en  $[0, 1]$  entonces existe  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  homeomorfismo creciente tal que  $h(A) = B$ .

8. \* Sea  $f \in \text{Hom}_+(S^1)$  tal que  $\rho(f)$  es irracional. Probar que  $\mathcal{R}(f) = S^1$ .

9. \* Decimos que  $f : M \rightarrow M$  es expansivo si existe  $\alpha > 0$  tal que

$$\text{si } \text{dist}(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \text{entonces } x = y.$$

Probar que no hay homeomorfismos expansivos en  $S^1$ . (Sug: discutir según número de rotación).

## Capítulo 3

# Difeomorfismos del círculo

Recordemos que, a lo largo de estas notas,  $S^1$  denota el grupo multiplicativo de números complejos de módulo 1, o sea,  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . La medida de Haar de este grupo, que es simplemente la medida de Lebesgue en el círculo unidad normalizada para darle perímetro 1, será denotada por  $\lambda$ . La longitud de un intervalo  $I$  será también denotada por  $|I|$ . Identificaremos  $S^1$  con  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  via el recubrimiento universal  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dado por  $\pi(t) = \exp(2\pi it)$ . Denotaremos por  $\text{Hom}_+(S^1)$  el grupo (bajo composiciones) de homeomorfismos del círculo que preservan orientación, y por  $\text{Diff}_+^r(S^1)$  el subgrupo de los difeomorfismos  $C^r$  para cualquier  $r \geq 1$ . Finalmente,  $\rho : \text{Hom}_+(S^1) \rightarrow [0, 1)$  denota el número de rotación.

Sea  $f$  un homeomorfismo del círculo con número de rotación irracional  $\rho(f) = \theta$ . Esto implica ausencia de órbitas periódicas para  $f$  (Proposición 2.1.1) e implica que su conjunto no errante es minimal (Teorema 2.2.1), siendo un conjunto de Cantor o todo el círculo (Corolario 2.2.1).

Como vimos en el Teorema 2.2.2,  $f$  es *semi-conjugada* a la rotación de ángulo  $\theta$  (que denotamos por  $R_\theta$ ): existe un mapa continuo y sobreyector  $h : S^1 \rightarrow S^1$  tal que  $h \circ f = R_\theta \circ h$ . Recuerde la construcción de  $h$  (en la prueba del Teorema 2.2.2): dado un punto no errante  $x$  en  $S^1$  consideramos su órbita  $\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . El mapa definido por  $h_x(f^n(x)) = \exp(2\pi in\theta)$  identifica el punto  $x$  con el punto 1, y conjugua  $f$  con  $R_\theta$  sobre la órbita de  $x$ .

Un punto crucial es que  $f$  y  $R_\theta$  son *combinatoriamente equivalentes*, en el sentido que para cada  $n \in \mathbb{N}$  los primeros  $n$  elementos de la órbita de  $x$  por  $f$

están ordenados en el círculo de la misma manera que los primeros  $n$  elementos de la órbita del punto 1 bajo la rotación  $R_\theta$  (Proposición 2.2.1). Esto implica que  $h_x$  se extiende de manera continua a la clausura de  $\mathcal{O}_f(x)$ . Esta extensión es sobreyectiva, pues cualquier órbita de  $R_\theta$  es densa en  $S^1$ , y por lo tanto podemos extender  $h_x$  como una función constante en cada componente conexa del complemento de  $\overline{\mathcal{O}_f(x)}$ . Esto nos da una semi-conjugación  $h_x$  entre  $f$  y  $R_\theta$  que identifica al punto  $x$  con el punto 1 (dado cualquier otro punto  $z \in S^1$  tenemos que  $h_z = R_\theta \circ h_x$  con  $\exp(2\pi i \theta) = 1/h_x(z)$ ).

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ h_x \downarrow & & \downarrow h_x \\ S^1 & \xrightarrow{R_\theta} & S^1 \end{array}$$

Para cualquier  $y \in S^1$  se tiene entonces una dicotomía: o bien el conjunto  $h_x^{-1}(\{y\})$  es un intervalo cerrado, o bien es apenas un punto. Si  $f$  es minimal en el círculo, tenemos que  $\overline{\mathcal{O}_f(x)} = S^1$ , y en particular  $h_x$  es un homeomorfismo, o sea,  $f$  es topológicamente conjugado a la rotación  $R_\theta$ .

En cualquier caso,  $f$  es *unicamente ergódico*: existe una única probabilidad de Borel  $\mu$  en  $S^1$  que es invariante por  $f$  (vea la Proposición 1.2.2). La medida  $\mu$  es el *pull-back*, por una semi-conjugación, de la medida de Lebesgue:  $\mu(A) = \lambda(h_x(A))$  para cualquier conjunto de Borel  $A \subset S^1$ . Puesto que la semi-conjugación  $h_x$  es única módulo pos-composición con rotaciones (vea el Ejercicio 6 del práctico anterior), la medida  $\mu$  está bien definida.

En particular, la  $\mu$ -medida del arco entre un punto y su imagen, orientado en el sentido anti-horario, es exactamente el número de rotación de  $f$ :

$$\mu([x, f(x)]) = \lambda([1, h_x(f(x))]) = \lambda([1, R_\theta(1)]) = \lambda([1, \exp(2\pi i \theta)]) = \theta = \rho(f).$$

Recíprocamente, dado cualquier punto  $x \in S^1$  obtenemos la correspondiente semi-conjugación  $h_x$  a partir de la medida  $\mu$  definiendo:

$$h_x(y) = \exp(2\pi i \mu([x, y])) = \exp\left(2\pi i \int_x^y d\mu\right).$$

Como  $\mu$  es  $f$ -invariante y  $f$  no tiene órbitas periódicas,  $\mu$  no tiene átomos (puntos con medida positiva) y esto implica que  $h_x$  es continua y sobreyectiva (claramente  $h_x \circ f = R_\theta \circ h_x$ ). Si  $f$  es minimal, todo intervalo abierto tiene  $\mu$ -medida positiva (siendo el soporte de  $\mu$  un conjunto compacto y  $f$ -invariante,

coincide con todo el circulo). En particular  $h_x$  es un homeomorfismo, y entonces  $f$  es topologicamente conjugada a la rotación  $R_\theta$ .

En resumen: un homeomorfismo  $f$  con número de rotación irracional  $\theta$  es semi-conjugado a la rotación  $R_\theta$  por un mapa continuo y sobreyector  $h$ . Si  $h$  no es una conjugación, existe un punto  $y \in S^1$  tal que  $J = h^{-1}(\{y\})$  es un intervalo cerrado no-degenerado, al cual llamaremos *intervalo errante*:

**Definición 3.0.1.** Sea  $f : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $J \subset S^1$ . Decimos que  $J$  es un *intervalo errante* si

- a)  $J, f(J), f^2(J), \dots$  son disjuntos dos a dos.
- b)  $\omega(J) = \bigcup_{x \in J} \omega(x)$  no es una única órbita periódica.

*Ejemplo 4.* Sea  $f : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$ ,  $\Omega(f) \subsetneq S^1$ . Una componente de  $S^1 \setminus \Omega(f)$  es un intervalo errante.

**Lema 3.0.1** (Distorsión limitada). *Sea  $f : S^1 \rightarrow S^1$  difeo de clase  $C^2$ . Entonces existe  $C$  tal que*

$$\frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} \leq \exp \left( C \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(x) - f^i(y)| \right).$$

*Demostración.* Sea  $m$  tal que  $|f'(x)| \geq m > 0$  y  $M$  tal que  $|f''(x)| \leq M$ . Entonces  $C = \frac{M}{m}$  es constante de Lipschitz de la función  $x \mapsto \log |f'(x)|$ . Luego

$$\begin{aligned} \log \frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} &= \log \frac{\prod_{i=0}^{n-1} |f'(f^i(x))|}{\prod_{i=0}^{n-1} |f'(f^i(y))|} = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \log |f'(f^i(x))| - \log |f'(f^i(y))| \leq \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} C |f^i(x) - f^i(y)| = C \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(x) - f^i(y)|. \end{aligned}$$

□

**Lema 3.0.2.** *Sea  $f : S^1 \rightarrow S^1$  difeo de clase  $C^2$ . Sea  $J \subset S^1$  intervalo tal que  $\sum_{n \geq 0} |f^n(J)| < \infty$ . Entonces existe  $T \supsetneq J$  tal que  $|f^n(T)| \leq 2|f^n(J)|$ ,  $\forall n \geq 0$ .*

*Demostración.* Sea  $K = \sum_{n \geq 0} |f^n(J)|$  y  $C$  del lema de Distorsión limitada. Sea  $\delta > 0$  tal que  $\delta e^{2KC} < 1$ . Consideremos  $T \supseteq J$  tal que  $|T| \leq (1 + \delta)|J|$ . Probemos el teorema por inducción. El caso  $n = 0$  es cierto. Si  $i = 0, \dots, n-1$ , sean  $x, y \in T$ . Entonces,

$$\frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} \leq e^{C \sum_{j=0}^{n-1} |f^j(T)|} \leq e^{2KC}.$$

Luego

$$|f^n(T)| = |f^n(J)| + |f^n(T \setminus J)|$$

y

$$\begin{aligned} |f^n(T \setminus J)| &\leq \max_{\text{para algún } x \in T} |(f^n)'(x)| |T \setminus J| = \\ &= \frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} \frac{|f^n(J)|}{|J|} |T \setminus J| \leq \\ &\leq \frac{|f^n(J)|}{|J|} e^{2KC} |T \setminus J| \leq \\ &\delta e^{2KC} |f^n(J)| < |f^n(J)|. \end{aligned}$$

Entonces

$$|f^n(T)| \leq 2|f^n(J)|.$$

En particular se cumple también  $|f^n(T)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . □

### 3.1. Teorema de Denjoy, primera versión

En un artículo clásico de 1932, Denjoy demostró el siguiente resultado de rigidez topológica: cualquier difeomorfismo de clase  $C^2$  con número de rotación irracional es topológicamente conjugado a una rotación rígida.

Denjoy estaba interesado en la dinámica de flujos suaves en superficies compactas, donde la dinámica unidimensional surge al considerar mapas de retorno de secciones transversales locales (vea también el trabajo de Schwartz [57] de 1963).

El resultado original de Denjoy (vea el Teorema 3.3.1 mas adelante) es para difeomorfismos de clase  $C^1$  tal que  $\log Df$  tiene *variación acotada*: existe una

constante positiva  $V(f) \in \mathbb{R}$  tal que dada cualquier partición finita ordenada  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  del circulo, tenemos que:

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\log Df(x_{i+1}) - \log Df(x_i)| \leq V(f) = \text{var}(\log Df).$$

En este caso decimos que  $f$  es de clase  $C^{1+bv}$ , o que  $f \in \text{Diff}_+^{1+bv}(S^1)$ . Note que si  $\log Df$  es una función Lipschitz de constante  $C > 0$ , entonces  $\log Df$  tiene variación acotada con constante  $V(f) = C$  (un ejemplo clásico de un homeomorfismo de variación acotada que no es Lipschitz viene dado por  $t \mapsto \sqrt{t}$  en  $[0, 1]$ ). Dada  $f \in \text{Diff}_+^2(S^1)$  tenemos que  $f \in \text{Diff}_+^{1+bv}(S^1)$  tomando:

$$V(f) \geq \frac{\max_{x \in S^1} |D^2 f(x)|}{\min_{x \in S^1} |Df(x)|}, \text{ o incluso } V(f) \geq \int_{S^1} \left| \frac{D^2 f(x)}{Df(x)} \right| dx.$$

Vamos a demostrar ahora una primera versión del Teorema de Denjoy, en la cual asumiremos que  $f \in \text{Diff}^2(S^1)$ . En la Sección 3.3 probaremos la versión mas fuerte (Teorema 3.3.1).

**Teorema 3.1.1.** *Sea  $f : S^1 \rightarrow S^1$  difeo de clase  $C^2$ . Entonces  $f$  no tiene intervalos errantes.*

*Demostración.* Supongamos, razonando por contradicción que  $f$  tiene un intervalo errante  $J_0$ . Se deduce que  $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$ . Sea  $J \supset J_0$  intervalo errante maximal. Se deduce que  $J$  es una componente de  $S^1 \setminus \Omega(f)$ . Además  $\sum_{n \geq 0} |f^n(J)| \leq 1$  con los  $f^n(J)$  disjuntos dos a dos. Por el Lema 3.0.2, existe  $T \supseteq J$  tal que  $|f^n(T)| \leq 2|f^n(J)|$  y  $|f^n(T)| \rightarrow 0$  (observar que podemos suponer  $T \neq S^1$ ). Sea  $x \in \partial J$  tal que  $x \in T$ . Como  $x \in \Omega(f)$  existe  $n_i \rightarrow \infty$  tal que  $f^{n_i}(x) \rightarrow x$  (y  $f^{n_i} \in T$ ). Como  $|f^n(J)| \rightarrow 0$  podemos tomar un elemento, llamémosle  $k$ , de la sucesión  $n_i$  con  $i$  suficientemente grande tal que  $\text{dist}(f^k(J), S^1 \setminus T) < \frac{|f^k(J)|}{4}$ . Concluimos de aquí que  $f^k(T) \subset T$  y por lo tanto  $f^k$  tiene un punto periódico. Esto contradice que  $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$ .  $\square$

**Corolario 3.1.1** (Teorema de Denjoy, primera versión). *Sea  $f : S^1 \rightarrow S^1$  difeo de clase  $C^2$ , con  $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$ . Entonces  $f$  es conjugado a  $R_\alpha$ .*

*Demostración.* Por el teorema anterior,  $\Omega(f) = S^1$ .  $\square$

En el mismo trabajo [7], Denjoy probó que alguna condición en la derivada primera debe ser exigida para evitar la presencia de conjuntos de Cantor invariantes. Mas precisamente:

**Teorema 3.1.2** (Denjoy). *Dado  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  existe un difeomorfismo  $f : S^1 \rightarrow S^1$  de clase  $C^1$  con  $\rho(f) = \alpha$  y tal que  $f$  tiene un intervalo errante (i.e.  $f$  no es conjugado a  $R_\alpha$ ).*

*Demostración.* Sea  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  tal que  $\lambda_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n = 1$  y

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \rightarrow 1. \quad \left( \text{Ej: } \lambda_n = \frac{K}{(|n|+1)(|n|+2)} \right).$$

Colocamos en  $S^1$  intervalos  $I_n$ ,  $|I_n| = \lambda_n$  y los ordenamos en  $S^1$  de la misma forma que  $\{x_n = R_\alpha^n(0) : n \in \mathbb{Z}\}$  (por inducción, colocamos  $I_0, I_1$  tal que  $\text{dist}(I_0, I_1) = \sum_{\{k: x_k \in (x_0, x_1)\}} \lambda_k$ , etc.). Vamos a definir  $f : S^1 \rightarrow S^1$  definiendo  $f'$  e integrando (si  $g : S^1 \rightarrow S^1$  es continua y  $\int_{S^1} g = 1$  entonces  $\exists f : S^1 \rightarrow S^1$  tal que  $f' = g$ ). En  $I_n = (a_n, b_n)$  definimos

$$f'(x) = g(x) = 1 + k_n \frac{(a_n - x)(x - b_n)}{\lambda_n^2},$$

$$f'(x) = 1 \text{ si } x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n,$$

donde

$$k_n = \frac{6}{\lambda_n} (\lambda_{n+1} - \lambda_n).$$

Entonces

$$\int_{I_n} g(x) = \int_{a_n}^{b_n} g(x) = \lambda_n + \frac{k_n \lambda_n^3}{\lambda_n^2 \cdot 6} = \lambda_{n+1},$$

entonces

$$\int_{S^1} g(x) = 1.$$

Definimos  $f : S^1 \rightarrow S^1$  por

$$f(x) = \int_{a_0}^x g(x) dx + a_1$$

Verifiquemos que  $f(I_n) = I_{n+1}$ .

$$\begin{aligned} f(a_n) &= \int_{a_0}^{a_n} g(x) dx + a_1 = \sum_{k: I_k \subset (a_0, a_n)} \int_{I_k} g(x) dx + a_1 = \\ &= \sum_{k: x_k \in (x_0, x_n)} |I_{k+1}| + a_1 = \sum_{k: x_k \in (x_1, x_n)} |I_k| + a_1 = a_n. \end{aligned}$$

Verifiquemos que  $\rho(f) = \alpha$ . Sea  $h : \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n \rightarrow S^1$  por  $h(I_n) = R_\alpha^n(0) = x_n$ .  $h$  preserva orientación y tiene dominio y rango denso en  $S^1$ , entonces  $h$  se extiende

continuamente a  $h : S^1 \rightarrow S^1$  continua y sobre. Además  $h \circ f = R_\alpha \circ h$ , es decir  $f$  es semiconjugado a  $R_\alpha$ . Entonces  $\rho(f) = \alpha$  (ver ejercicio 4).  $\square$

*Observación 3.1.1.* Existen contraejemplos incluso cuando la derivada primera es Hölder continua [25]. Vea también [30], [31] y [27].

*Observación 3.1.2.* Determinar cuáles conjuntos de Cantor en el círculo pueden ser invariantes bajo un difeomorfismo  $C^1$  es un problema interesante y difícil, vea por ejemplo [10].

## 3.2. Algunas herramientas

Con el objetivo de probar la versión original del Teorema de Denjoy (vea el Teorema 3.3.1 mas adelante), desarrollamos ahora algunas herramientas clásicas de dinámica en el círculo.

### 3.2.1. Tiempos de retorno

Sea  $f$  un homeomorfismo del círculo que preserva orientación. Si su número de rotación  $\rho(f) = \theta \in [0, 1)$  es irracional, tiene una expansión *infinita* en fracciones continuas, digamos:

$$\theta = [a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{a_n}}}}} .$$

Una referencia clásica de fracciones continuas es la monografía [34] (vea también el Capítulo 4 de estas notas). Definimos recursivamente los *tiempos de retorno* de  $\theta$  por:

$$q_0 = 1, \quad q_1 = a_0 \quad \text{y} \quad q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1} \quad \text{para} \quad n \geq 1.$$

Los números  $q_n$  se obtienen como los denominadores de la expansión truncada de orden  $n$  de  $\theta$ :

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}] = \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{a_{n-1}}}}} .$$

Recordemos también las siguientes estimativas (vea por ejemplo los Teoremas 9 y 13 en [34, Ch. I], o el Teorema 5 en [38, Ch. I]):

$$\frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} < \left| \theta - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Los números racionales  $p_n/q_n$  son llamados *convergentes* del irracional  $\theta$ . Cada  $p_n/q_n$  es la mejor aproximación posible de  $\theta$  por fracciones con denominador máximo  $q_n$  [34, Capítulo II, Teorema 15]:

$$\text{Si } 0 < q < q_n, \text{ entonces } \left| \theta - p_n/q_n \right| < \left| \theta - p/q \right| \text{ para todo } p \in \mathbb{N}.$$

Fijemos ahora un punto  $x \in S^1$ . Las propiedades aritméticas de la expansión en fracciones continuas descritas implican que las iteraciones  $\{R_\theta^{q_n}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  son los retornos más cercanos de la órbita de  $x$  bajo la rotación rígida  $R_\theta$ :

$$d(x, R_\theta^{q_n}(x)) < d(x, R_\theta^j(x)) \quad \text{para todo } j \in \{1, \dots, q_n - 1\},$$

donde  $d$  indica la distancia estándar en  $S^1$ . La sucesión de tiempos de retorno  $\{q_n\}$  crece al menos exponencialmente rápido cuando  $n \rightarrow \infty$ , mientras que la sucesión de distancias de retorno  $\{d(x, R_\theta^{q_n}(x))\}$  decrece a cero al menos exponencialmente rápido cuando  $n \rightarrow \infty$ . Finalmente, note que  $\{R_\theta^{q_n}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  se aproxima al punto  $x$  alternando el orden:

$$R_\theta^{q_1}(x) < R_\theta^{q_3}(x) < \dots < R_\theta^{q_{2k+1}}(x) < \dots < x < \dots < R_\theta^{q_{2k}}(x) < \dots < R_\theta^{q_2}(x) < R_\theta^{q_0}(x)$$

Por el resultado de Poincaré (Proposición 2.2.1), esta información vale, a nivel combinatorio, para cualquier homeomorfismo del círculo  $f$  con número de rotación  $\theta$ : dado  $x \in S^1$  el intervalo  $[x, f^{q_n}(x)]$  no contiene iterados  $f^j(x)$  para  $j \in \{1, \dots, q_n - 1\}$ , y si denotamos por  $\mu$  la única probabilidad de Borel invariante por  $f$ , podemos decir que  $\mu([x, f^{q_n}(x)]) < \mu([x, f^j(x)])$  para todo  $j \in \{1, \dots, q_n - 1\}$ .

### 3.2.2. Distorsión de cross-ratio

Sean  $a < b < c < d$  cuatro puntos de la recta real, y sea  $S_1$  la transformación de Möbius determinada por  $S_1(a) = 0$ ,  $S_1(c) = 1$  y  $S_1(d) = \infty$ . Observe que  $S_1$  tiene coeficientes reales pues preserva la recta real. Definimos  $\text{Cr}_1(a, b, c, d) \in (0, 1)$  como  $\text{Cr}_1(a, b, c, d) = S_1(b)$ , o sea:

$$\text{Cr}_1(a, b, c, d) = \left( \frac{d-c}{c-a} \right) \left( \frac{b-a}{d-b} \right).$$

Si denotamos por  $T = (a, d)$  y por  $M = (b, c)$  tenemos que:

$$\text{Cr}_1(a, b, c, d) = \left( \frac{|L|}{|L| + |M|} \right) \left( \frac{|R|}{|R| + |M|} \right),$$

donde  $L$  y  $R$  son las componentes conexas de  $T \setminus M$ .

La elección de  $S_1$  es bastante arbitraria. Puede considerarse, por ejemplo, la transformación de Möbius  $S_2$  determinada por  $S_2(a) = -1$ ,  $S_2(b) = 0$  y  $S_2(d) = \infty$ , y definir  $\text{Cr}_2(a, b, c, d) \in (0, +\infty)$  como  $\text{Cr}_2(a, b, c, d) = S_2(c)$ , o sea:

$$\text{Cr}_2(a, b, c, d) = \left( \frac{d-a}{b-a} \right) \left( \frac{c-b}{d-c} \right).$$

Nuevamente, escribiendo  $T = (a, d)$  y  $M = (b, c)$  tenemos que:

$$\text{Cr}_2(a, b, c, d) = \frac{|M||T|}{|L||R|}.$$

Pueden encontrarse en la literatura varias definiciones diferentes de cross-ratio, dependiendo de los propósitos de los autores. La primera definición dada aquí es la que se usa en [61], mientras que la segunda definición es la elegida en [42] y en [17]. Por supuesto, ambas definiciones están relacionadas por una transformación de Möbius: considere el difeomorfismo real-analítico (que revierte orientación)  $S : (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$  dado por  $S(x) = \frac{1-x}{x}$ , cuya inversa es dada por  $S^{-1}(x) = \frac{1}{1+x}$ . Tenemos que  $S(\text{Cr}_1(a, b, c, d)) = \text{Cr}_2(a, b, c, d)$  para todo  $a < b < c < d$  en  $\mathbb{R}$ . Finalmente, note que ambos  $\text{Cr}_1(a, b, c, d)$  y  $\text{Cr}_2(a, b, c, d)$  son invariantes bajo transformaciones de Möbius: si  $S$  es cualquier transformación de Möbius y  $a < b < c < d$  en  $\mathbb{R}$ , tenemos que  $\text{Cr}_i(S(a), S(b), S(c), S(d)) = \text{Cr}_i(a, b, c, d)$  para  $i = 1, 2$ .

En estas notas trabajaremos con la segunda definición dada, esto es:

**Definición 3.2.1.** Dados dos intervalos  $M \subsetneq T \subset S^1$  definimos el *cross-ratio* de  $M$  en  $T$  como:

$$\text{Cr}[M, T] = \frac{|M||T|}{|L||R|},$$

donde  $L$  y  $R$  son las componentes conexas de  $T \setminus M$ . Si  $f$  es un homeomorfismo en  $T$ , definimos la *distorsión de cross-ratio* de  $f$  en  $M$  y  $T$  como:

$$\text{Cr}(f, M, T) = \frac{\text{Cr}[f(M), f(T)]}{\text{Cr}[M, T]}.$$

### 3.3. Teorema de Denjoy, versión fuerte

En esta sección vamos a demostrar la *versión fuerte* del Teorema de Denjoy:

**Teorema 3.3.1** (Denjoy, 1932). *Sea  $f$  un difeomorfismo del círculo de clase  $C^1$  tal que  $\log Df$  tiene variación acotada. Si  $f$  tiene número de rotación irracional  $\theta$ , entonces  $f$  es topológicamente conjugado a la rotación rígida de ángulo  $\theta$ .*

Nuestra prueba del Teorema 3.3.1 no será la mas simple (vea por ejemplo [46, Sección I.2]), pero es una prueba que se adapta mejor al caso de mapas con puntos críticos que estudiaremos mas adelante (vea la Sección 6.3).

La prueba del Teorema 3.3.1 surge al combinar los siguientes dos resultados:

**Proposición 3.3.1.** *Sea  $f$  un difeomorfismo de clase  $C^1$  del círculo con número de rotación irracional y tal que  $\log Df$  tiene variación acotada por  $V = V(f) > 0$ . Existe una constante positiva  $\delta = \delta(V) > 0$  tal que dado cualquier intervalo  $J$  y cualquier sucesión  $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de intervalos que contienen  $J$  tales que para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  los primeros  $q_{n+1} - 1$  iterados de  $T_n$  tienen multiplicidad de intersección 2, tenemos que:*

$$\text{Cr}(f^k, J, T_n) \geq \delta \quad \text{para todo } k \in \{0, \dots, q_{n+1}\}.$$

Recordemos que una familia de intervalos tiene *multiplicidad de intersección*  $k \in \mathbb{N}$  si el número máximo de intervalos de la familia con intersección no vacía es precisamente  $k$ .

**Proposición 3.3.2.** *Sea  $f \in \text{Diff}_+^{1+bv}(S^1)$  con número de rotación irracional. Supongamos que  $f$  no es conjugada a la rotación correspondiente, y sea  $J$  un intervalo errante maximal. Entonces existe una sucesión decreciente  $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de intervalos abiertos tales que:*

- $\bar{J} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n$ ,
- La familia  $\{T_n, f(T_n), \dots, f^{q_{n+1}-1}(T_n)\}$  tiene multiplicidad de intersección 2 para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cr}(f^{q_{n+1}}, J, T_n) = 0$ .

La sucesión  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es la sucesión de tiempos de retorno dada por el número de rotación de  $f$  (vea Sección 3.2.1).

*Prueba del Teorema 3.3.1.* Basta combinar las proposiciones 3.3.1 y 3.3.2 enunciadas encima.  $\square$

En el resto de esta sección nos dedicaremos a probar ambas proposiciones.

### 3.3.1. Prueba de la Proposición 3.3.1 y la Proposición 3.3.2

Empezamos con la prueba de la Proposición 3.3.1.

*Prueba de la Proposición 3.3.1.* Fije  $n \in \mathbb{N}$  y  $k \in \{0, \dots, q_{n+1}\}$ , y note que:

$$\text{Cr}(f^k, J, T_n) = \prod_{i=0}^{k-1} \text{Cr}(f, f^i(J), f^i(T_n)).$$

En particular:

$$\left| \log(\text{Cr}(f^k, J, T_n)) \right| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \left| \log(\text{Cr}(f, f^i(J), f^i(T_n))) \right|.$$

Por el teorema del valor medio, para cada  $i \in \{0, \dots, k-1\}$  existen cuatro puntos  $x_i \in f^i(J)$ ,  $y_{i,n} \in f^i(T_n)$ ,  $z_{i,n}, w_{i,n} \in f^i(T_n) \setminus f^i(J)$  tales que:

$$\text{Cr}(f, f^i(J), f^i(T_n)) = \frac{|Df(x_i)||Df(y_{i,n})|}{|Df(z_{i,n})||Df(w_{i,n})|}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \left| \log(\text{Cr}(f^k, J, T_n)) \right| &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \left| \log Df(x_i) + \log Df(y_{i,n}) - \log Df(z_{i,n}) - \log Df(w_{i,n}) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \left| \log Df(x_i) - \log Df(z_{i,n}) \right| + \left| \log Df(w_{i,n}) - \log Df(y_{i,n}) \right| \end{aligned}$$

Considere ahora la partición finita  $\mathcal{P}_k = \{x_i, y_{i,n}, z_{i,n}, w_{i,n}\}_{i=0}^{k-1}$ . Como la familia  $\{T_n, f(T_n), \dots, f^{q_{n+1}-1}(T_n)\}$  tiene multiplicidad de intersección 2, el último término es menor o igual que el doble de la variación total de  $\log Df$  en  $\mathcal{P}_k$ , y entonces basta tomar  $\delta = \exp(-2V)$ .  $\square$

Nos concentramos ahora en la prueba de la Proposición 3.3.2. Para ello, vamos a probar (vea el Corolario 3.3.1 mas adelante) que si  $f \in \text{Diff}_+^{1+bv}(S^1)$ , entonces la sucesión  $\{\log Df^{q_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es acotada. Con esta finalidad demostraremos primero dos resultados técnicos bien conocidos, cuyo interés trasciende la Proposición 3.3.2:

**Lema 3.3.1** (La desigualdad de Denjoy-Koksma). *Sea  $f \in \text{Hom}_+(S^1)$  con  $\rho(f) = \theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , y sea  $\mu$  la única probabilidad de Borel invariante por  $f$ . Sea  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de tiempos de retorno dada por  $\theta$ , el número de rotación de  $f$ . Dada  $\psi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  (no necesariamente continua) con variación acotada por  $\text{var}(\psi)$  tenemos que:*

$$\left| \sum_{j=0}^{q_n-1} \psi(f^j(x)) - q_n \int_{S^1} \psi d\mu \right| \leq \text{var}(\psi) \quad \text{para todo } x \in S^1 \text{ y todo } n \in \mathbb{N}.$$

*Prueba del Lema 3.3.1.* Fije  $x \in S^1$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Por combinatoria existen  $q_n$  intervalos abiertos dos a dos disjuntos  $\{I_0, I_1, \dots, I_{q_n-1}\}$  en el círculo tales que  $R_\theta^j(1) = e^{2\pi i j \theta} \in \overline{I_j}$  y  $\lambda(I_j) = 1/q_n$  para todo  $j \in \{0, 1, \dots, q_n - 1\}$  (podemos tomar, por ejemplo, los intervalos determinados por las  $q_n$ -ésimas raíces de la unidad, y etiquetarlos en orden para tener  $e^{2\pi i j \theta} \in \overline{I_j}$  para todo  $j \in \{0, 1, \dots, q_n - 1\}$ ). Sea  $h = h_x$  la semi-conjugación entre  $f$  y  $R_\theta$  que identifica el punto  $x$  con el punto 1, y para cada  $j \in \{0, 1, \dots, q_n - 1\}$  sea  $J_j = h^{-1}(I_j)$ . Note que  $f^j(x) \in J_j$  y  $\mu(J_j) = 1/q_n$  para todo  $j \in \{0, 1, \dots, q_n - 1\}$ . Además,  $\{\overline{J_j}\}_{j=0}^{q_n-1}$  es una partición del círculo (módulo los extremos de los intervalos, cuya  $\mu$ -medida es cero pues  $\mu$  es  $f$ -invariante y  $f$  no tiene órbitas periódicas). Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^{q_n-1} \psi(f^j(x)) - q_n \int_{S^1} \psi d\mu \right| &= \left| \sum_{j=0}^{q_n-1} \left( \psi(f^j(x)) - q_n \int_{J_j} \psi d\mu \right) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{q_n-1} \left| \psi(f^j(x)) - q_n \int_{J_j} \psi d\mu \right| \\ &= q_n \sum_{j=0}^{q_n-1} \left| \int_{J_j} (\psi(f^j(x)) - \psi) d\mu \right| \\ &\leq q_n \sum_{j=0}^{q_n-1} \int_{J_j} |\psi(f^j(x)) - \psi| d\mu \\ &\leq \sum_{j=0}^{q_n-1} \sup_{y \in J_j} |\psi(f^j(x)) - \psi(y)| \leq \text{var}(\psi). \end{aligned}$$

□

El *exponente de Lyapunov* de un difeomorfismo  $C^1$  con número de rotación irracional siempre es nulo. Mas precisamente:

**Lema 3.3.2.** *Sea  $f \in \text{Diff}_+^1(S^1)$  con número de rotación irracional, y sea  $\mu$  su única probabilidad de Borel invariante. Entonces:*

$$\int_{S^1} \log Df \, d\mu = 0.$$

*Prueba del Lema 3.3.2.* Si  $f \in \text{Diff}_+^1(S^1)$ , la función  $\psi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\psi = \log Df$  es continua. Por la unicidad ergódica de  $f$ , la sucesión

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j$$

converge uniformemente a una constante [41, Capítulo I, Sección 9], y esta constante debe ser  $\int_{S^1} \log Df \, d\mu$ . Por la regla de la cadena, tenemos que:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j = \log(Df^n). \quad (3.1)$$

Por lo tanto, la sucesión de funciones continuas  $\log(Df^n)/n$  converge a la constante  $\int_{S^1} \log Df \, d\mu$  uniformemente en  $S^1$ . Siendo que  $f^n$  es un difeomorfismo para todo  $n \in \mathbb{N}$ , esta constante debe ser cero.  $\square$

Si  $f \in \text{Diff}_+^{1+bv}(S^1)$  podemos combinar los lemas 3.3.1 y 3.3.2 para obtener que la sucesión  $\{\log(Df^{q_n})\}_{n \in \mathbb{N}}$  es acotada en el círculo:

**Corolario 3.3.1.** *Si  $f \in \text{Diff}_+^{1+bv}(S^1)$  tiene número de rotación irracional, entonces  $e^{-V(f)} \leq (Df^{q_n})(x) \leq e^{V(f)}$  para todo  $x \in S^1$  y todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Prueba del Corolario 3.3.1.* Aplique el Lema 3.3.1 con  $\psi = \log Df$ , y use (3.1) y el Lema 3.3.2.  $\square$

Habiendo demostrado el Corolario 3.3.1, estamos prontos para probar la Proposición 3.3.2.

*Prueba de la Proposición 3.3.2.* Sea  $J = (a, b)$  un intervalo errante maximal de  $f$ , y sea  $n \in \mathbb{N}$ . El complemento de la unión de  $\bar{J}$  con  $f^{q_n}(\bar{J})$  consiste en dos intervalos abiertos. Por combinatoria, el intervalo  $f^{q_{n+1}+q_n}(J)$  está contenido en uno de ellos, mientras que el intervalo  $f^{q_{n+1}}(J)$  está contenido en el otro. Siendo  $J$  maximal (como intervalo errante) ambos extremos  $a$  y  $b$  son recurrentes a futuro, y por lo tanto la distancia entre  $\bar{J}$  y  $f^{q_n}(\bar{J})$  converge a cero cuando  $n$  tiende a infinito. Supongamos que, para el entero fijado  $n$ , se tiene que  $f^{q_{n+1}+q_n}(J)$

está contenido en la menor de las componentes (esto depende de si  $n$  es par o impar, el otro caso se trata de la misma manera). Sea  $L_n = (f^{-q_n}(a), a)$ ,  $R_n = (b, f^{q_n}(a))$  y:

$$T_n = L_n \cup \bar{J} \cup R_n = (f^{-q_n}(a), f^{q_n}(a)).$$

Por definición:

$$\text{Cr}(f^{q_{n+1}}, J, T_n) = |L_n| |R_n| |f^{q_{n+1}}(T_n)| \left( \frac{|f^{q_{n+1}}(J)|}{|f^{q_{n+1}}(L_n)|} \right) \left( \frac{1}{|f^{q_{n+1}}(R_n)| |J| |T_n|} \right).$$

La observación combinatoria crucial es que  $J \subset f^{q_{n+1}}(R_n)$ , y entonces  $|f^{q_{n+1}}(R_n)| \geq |J|$ . Como también tenemos  $|T_n| \geq |J|$  y  $|f^{q_{n+1}}(T_n)| \leq 1$  obtenemos que:

$$\text{Cr}(f^{q_{n+1}}, J, T_n) \leq |R_n| |f^{q_{n+1}}(J)| \left( \frac{|L_n|}{|f^{q_{n+1}}(L_n)|} \right) \left( \frac{1}{|J|^3} \right). \quad (3.2)$$

La desigualdad (3.2) vale para cualquier homeomorfismo  $f$  con número de rotación irracional. Vamos aprovechar ahora la regularidad de nuestro caso. Por el Corolario 3.3.1 la sucesión:

$$\frac{|L_n|}{|f^{q_{n+1}}(L_n)|}$$

es acotada por arriba. Como  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f^n(J)| \leq 1$  tenemos que  $|f^{q_{n+1}}(J)| \rightarrow 0$  cuando  $n$  va para infinito, y como  $J$  es maximal tenemos que  $|R_n| \rightarrow 0$  cuando  $n$  va para infinito. Esto prueba que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cr}(f^{q_{n+1}}, J, T_n) = 0.$$

Como  $T_n = (f^{-q_n}(a), f^{q_n}(a))$ , sabemos por combinatoria que la familia:

$$\{T_n, f(T_n), \dots, f^{q_{n+1}-1}(T_n)\}$$

tiene multiplicidad de intersección 2 para todo  $n \in \mathbb{N}$ . □

### 3.4. $\text{Diff}^r(S^1)$ desde el punto de vista genérico

En esta sección estudiaremos  $\text{Diff}^r(S^1)$ , el conjuntos de difeomorfismos del circulo de clase  $C^r$  con la topología  $C^r$ .

Veremos primero que el tener número de rotación irracional es “inestable”.

**Teorema 3.4.1** ( $C^r$ - closing lemma). *Sea  $f : S^1 \rightarrow S^1$  difeo de clase  $C^r$  y  $x \in \Omega(f)$ . Entonces existe  $g$ ,  $C^r$  arbitrariamente cerca de  $f$  tal que  $x \in \text{Per}(g)$ .*

*Demostración.* Vamos a mostrar que  $g_t = R_t \circ f$  para algún  $t$  arbitrariamente pequeño tiene a  $x$  como punto periódico. Es fácil ver que  $g_t$  está  $C^r$  cerca de  $f$  si  $t$  es pequeño. Si  $x$  es periódico de  $f$  no hay nada que probar. Supongamos que no lo es. Entonces  $x \in \omega(x) \implies \exists n_i$  tal que  $f^{n_i}(x) \rightarrow x$ . Sea  $F$  levantamiento de  $f$  y  $\hat{x}$  tal que  $\pi(\hat{x}) = x$ . Entonces  $\exists p_i$  tal que  $F^{n_i}(\hat{x}) - p_i \rightarrow \hat{x}$ . Tomando subsucesión podemos suponer que  $F^{n_i}(\hat{x}) - p_i$  es monótona. Supongamos que es creciente. Sea  $\alpha > 0$  y consideremos  $g_\alpha = R_\alpha \circ f$ .  $G_\alpha = T_\alpha \circ F$  levantamiento de  $g_\alpha$ .

*Afirmación 1.*  $G_\alpha^n(x) \geq F^n(x) + \alpha \forall n \in \mathbb{N}$ .

En efecto, razonando por inducción,  $G_\alpha^n(x) = G_\alpha(G_\alpha^{n-1}(x)) \geq G_\alpha(F^{n-1}(x)) \geq F^n(x) + \alpha$ .

Ahora tomemos  $n_i$  tal que  $\hat{x} - (F^{n_i}(\hat{x}) - p_i) < \alpha$ . Entonces

$$G_0^{n_i}(\hat{x}) - p_i = F^{n_i}(\hat{x}) - p_i < \hat{x}$$

y

$$G_\alpha^{n_i}(\hat{x}) - p_i \geq F^{n_i}(\hat{x}) - p_i + \alpha > \hat{x}.$$

Entonces existe  $t \in [0, \alpha]$  tal que  $G_t^{n_i}(\hat{x}) - p_i = \hat{x}$ . □

**Definición 3.4.1.** Sea  $f : S^1 \rightarrow S^1$  y  $p$  un punto fijo de  $f$ . Decimos que  $p$  es hiperbólico si  $|f'(p)| \neq 1$ . Si  $p$  es periódico,  $f^k(p) = p$ , decimos que  $p$  es un punto periódico hiperbólico si  $|(f^k)'(p)| \neq 1$ , i.e.,  $p$  es un punto fijo hiperbólico de  $f^k$ .

**Teorema 3.4.2.** *Sea  $f : S^1 \rightarrow S^1$  y  $p$  un punto fijo (periódico) hiperbólico de  $f$ . Entonces existe  $U(p)$  entorno de  $p$  y  $\mathcal{U}(f)$  entorno de  $f$  en la topología  $C^r$  tal que si  $g \in \mathcal{U}(f)$  entonces  $g$  tiene un único punto fijo (periódico) hiperbólico en  $U(p)$ .*

*Demostración.* Tenemos que  $|f'(p)| \neq 1$ . Supongamos que  $f'(p) > 1 \implies \exists \varepsilon > 0$  tal que  $f'(x) > \mu > 1$ , si  $|x - p| \leq \varepsilon$ . Luego,  $\begin{cases} f(p + \varepsilon) > (p + \varepsilon) + \mu\varepsilon \\ f(p - \varepsilon) < (p - \varepsilon) - \mu\varepsilon \end{cases}$ . Si  $\|f - g\|_r < \delta$  con  $\delta$  suficientemente chico, entonces  $g(p + \varepsilon) > p + \varepsilon$ ,  $g(p - \varepsilon) < p - \varepsilon$ , y  $g'(x) > 1 \forall x \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$ . Luego,  $\exists ! p_g \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$  tal que  $g(p_g) = p_g$ . Además,  $|g'(p_g)| \neq 1$ .

Otra forma:

Sea  $F : \text{Diff}^r(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F(g, x) = g(x) - x$ . Entonces tenemos que  $F(p, 0) = 0$  y  $\partial_2 F|_{(f,p)} = f'(p) - 1 \neq 0$ . Luego, por el teorema de la Función Implícita, existen  $U(p), \mathcal{U}(f)$  y  $\varphi : \mathcal{U}(f) \rightarrow U(p)$  de clase  $C^r$  tales que  $F(g, \varphi(g)) = 0$ .  $\square$

**Proposición 3.4.1.** *Sea  $g \in \text{Diff}^r(S^1)$  y  $p \in \text{Per}(g)$ . Entonces, existe  $g_1$   $C^r$ -cerca de  $g$  tal que  $p$  es un punto (periódico) hiperbólico de  $g_1$ .*

*Demostración.* Si  $p$  es hiperbólico de  $g$ , no hay nada que probar. Luego, sea  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$  arbitrariamente chico tal que si definimos  $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$  verifica:

1.  $\varphi(x) = 0$  si  $x \notin U(p)$
2.  $\varphi(p) = 0$
3.  $\varphi'(p) = \alpha$
4.  $|\varphi'(p)| \leq \alpha$

Entonces, esta  $\varphi$  está  $C^r$ -cerca de la función nula. Sea  $g_1 = g + \varphi$ . Luego,  $g_1$  está  $C^r$ -cerca de  $g$ , y cumple  $g_1(p) = g(p) + \varphi(p) = p$  y  $g_1'(p) = g'(p) + \alpha \neq 1$ .  $\square$

**Teorema 3.4.3.** *Sea  $g_1 \in \text{Diff}^r(S^1)$  tal que  $g_1$  tiene un punto hiperbólico  $p$ . Entonces, existe  $g_2$   $C^r$ -cerca de  $g_1$  tal que  $g_2$  tiene todos sus puntos periódicos hiperbólicos.*

*Demostración.* Observemos primero que cualquier  $g_2$  cerca de  $g_1$  tiene un punto periódico hiperbólico de período igual al período de  $p$  según  $g_1$  (llamémoslo  $k$ ). Luego, sabemos que todos los puntos periódicos de  $g_2$  tienen período  $k$ .

Sea  $G_1$  levantamiento de  $g_1$  y consideremos la función  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $H(x, t) = [T_t \circ G_1]^k(x) - r$ , donde  $G_1^k(p) = p + r$ . Luego,  $H(p, 0) = 0$  y  $\partial_t H \neq 0$  (ya que  $G' > 0$ ) y entonces  $S = H^{-1}(0)$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^2$ . Consideremos  $\pi_2 : S \rightarrow \mathbb{R}$  la proyección sobre la segunda componente y sea  $t_0$  valor regular (arbitrariamente cerca de 0) de  $\pi_2|_S$ . Tomemos  $G_2(x) = T_{t_0} \circ G_1(x)$ . Afirmamos que si  $G_2^k(x_0) = r + x_0 \implies G_2'(x_0) \neq 1$ . En este caso, tenemos que  $H(x_0, t_0) = 0$ . Como  $\text{Ker}(dH_{(x_0, t_0)}) = T_{(x_0, t_0)}S$  y  $t_0$  es un valor regular, entonces  $\partial_x H(x, t)|_{(x_0, t_0)} \neq 0$  pero  $\partial_x H(x, t)|_{(x_0, t_0)} = (G_2^k)'(x_0) - 1$ . Sea  $g_2 = \pi \circ G_2$ . Luego,  $g_2$  tiene todos sus puntos periódicos hiperbólicos y esta arbitrariamente  $C^r$  cerca de  $g_1$  (tomando  $t_0$  arbitrariamente chico).  $\square$

**Corolario 3.4.1.** *Existe  $\mathcal{D} \subset \text{Diff}^r(S^1)$  (abierto y denso) tal que si  $g \in \mathcal{D}$  entonces:*

1.  $\rho(g) \in \mathbb{Q}$
2. *Todo punto periódico de  $g$  es hiperbólico.*

*Demostración.* abierto:

Sea  $g$  tal que  $\rho(g) \in \mathbb{Q}$  y todo punto periódico de  $g$  es hiperbólico. Entonces  $g$  tiene una cantidad finita de órbitas periódicas  $\mathcal{O}(p_1), \dots, \mathcal{O}(p_k)$  que, por comodidad, supondremos puntos fijos. Para cada  $i$ ,  $\exists U_i(p_i)$  y  $\mathcal{U}_i(g)$  tal que si  $\tilde{g} \in \mathcal{U}_i(g) \implies \tilde{g}$  tiene un (único) punto fijo en  $U_i$  y es hiperbólico. Podemos suponer que  $U_i \cap U_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ . Por otra parte, existe  $d > 0$  tal que si  $x \notin \bigcup_i U_i \implies d(x, g(x)) > d \implies \exists \tilde{\mathcal{U}}(g)$  tal que si  $\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{U}}(g) \implies d(x, \tilde{g}) > \frac{d}{2}$ ,  $\forall x \notin \bigcup_i U_i$ . Sea  $\mathcal{U}(g) \subset \mathcal{U}_1(g) \cap \dots \cap \mathcal{U}_k(g) \cap \tilde{\mathcal{U}}(g)$ . Luego, si  $\tilde{g} \in \mathcal{U}(g) \implies \rho(\tilde{g}) \in \mathbb{Q}$  y todos los puntos fijos (periódicos) de  $\tilde{g}$  son hiperbólicos.

Densidad:

Sea  $f \in \text{Diff}^r(S^1)$ . Entonces, por el  $C^r$ -closing lemma obtenemos una  $g$  tal que  $\rho(g) \in \mathbb{Q} \implies \exists g_1$  tal que  $\rho(g_1) \in \mathbb{Q}$  y  $g_1$  tiene un punto periódico hiperbólico. Por Teorema 3.4.3,  $\exists g_2$  tal que  $\rho(g_2) \in \mathbb{Q}$  y  $g_2$  tiene todos sus puntos periódicos hiperbólicos. En cada paso, la perturbación es arbitrariamente pequeña.  $\square$

**Definición 3.4.2.**  $f \in \text{Diff}^r(S^1)$  es llamado *Morse - Smale* si:

1.  $\Omega(f) = \text{Per}(f)$
2.  $\#\text{Per}(f) < \infty$
3. Todos los puntos periódicos de  $f$  son hiperbólicos.

**Corolario 3.4.2.** *El conjunto de los difeos Morse-Smale en  $\text{Diff}^r(S^1)$  es abierto y denso.*

**Definición 3.4.3.** Decimos que un difeo  $f : S^1 \rightarrow S^1$  de clase  $C^r$  es  $C^r$ -estructuralmente estable si  $\exists \mathcal{U}(f) \subset \text{Diff}^r(S^1)$  tal que toda  $g \in \mathcal{U}(f)$  es conjugada a  $f$ .

**Teorema 3.4.4.** *Si  $f : S^1 \rightarrow S^1$  es un difeo  $C^r$  Morse-Smale, entonces  $f$  es  $C^r$ -estructuralmente estable.*

*Demostración.* Por comodidad supondremos que  $\rho(f) = 0$ , i.e.,  $f$  tiene puntos fijos  $p_1, \dots, p_k$ . Luego,  $\exists \mathcal{U}(f)$  tal que si  $g \in \mathcal{U}(f) \implies g$  tiene puntos fijos  $p_1(g), \dots, p_k(g)$  y  $p_i(g) \xrightarrow{g \rightarrow f} p_i$ . Ahora,  $S^1 \setminus \{p_1, \dots, p_k\} = I_1 \cup \dots \cup I_k$  y  $f(I_i) = I_i$ , y también  $S^1 \setminus \{p_1(g), \dots, p_k(g)\} = I_1(g) \cup \dots \cup I_k(g)$ , con  $g(I_i(g)) = I_i(g)$ . Conjugamos  $f|_{I_1}$  con  $f|_{I_i(g)}$ ,  $i = 1, \dots, k$  y se extiende esta conjugación a  $p_1, \dots, p_k$ , obteniendo una conjugación ente  $f$  y  $g$ .  $\square$

### 3.5. Práctico 3

1. Sea  $\{p_n/q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de truncamientos de la expansión en fracciones continuas de  $\theta \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$  (vea la Sección 3.2.1). Probar que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que:

$$q_n p_{n+1} - q_{n+1} p_n = (-1)^n.$$

2. \* Sea  $f \in \text{Hom}_+(S^1)$  topologicamente conjugado a la rotación de ángulo  $\theta \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ , y sea  $\{p_n/q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de truncamientos de la expansión en fracciones continuas de  $\theta$ . Fijados  $x \in S^1$  y  $n \geq 0$ , sea  $I_n$  el intervalo con extremos  $x$  y  $f^{q_n}(x)$  que contiene  $f^{q_{n+2}}(x)$ . Probar que la colección de intervalos

$$\{f^i(I_n) : 0 \leq i \leq q_{n+1} - 1\} \cup \{f^j(I_{n+1}) : 0 \leq j \leq q_n - 1\}$$

es una *partición* del círculo (módulo los bordes de los intervalos). (Sug: Note primero que podemos suponer que  $f$  es la rotación rigida. Use propiedades aritméticas de fracciones continuas para mostrar que los intervalos de la familia dada son dos a dos disjuntos. Para mostrar que estos intervalos cubren el círculo, sume sus longitudes y use el ejercicio anterior).

3. Sea  $f : S^1 \rightarrow S^1$  difeomorfismo de clase  $C^r$  (es decir, un levantamiento  $F$  es difeomorfismo  $C^r$  de la recta) y sea  $p$  un punto fijo (o periódico de período  $k$ ) de  $f$ .

- a) Probar que si  $|f'(p)| < 1$  (respec. si  $|(f^k)'(p)| < 1$ ) entonces es atractor, es decir, existe un entorno  $U$  de  $p$  tal que si  $x \in U$  entonces  $f^n(x) \in U \forall n \geq 0$  y  $\omega(x) = p$  (respec.  $f^{nk}(x) \in U \forall n \geq 0$  y  $\omega(x) = \mathcal{O}(p)$ .)

- b) Probar que si  $|f'(p)| > 1$  (respec. si  $|(f^k)'(p)| > 1$ ) entonces es repulsor, es decir, existe un entorno  $U$  de  $p$  tal si  $x \in U$  entonces  $f^{-n}(x) \in U \forall n \geq 0$  y  $\alpha(x) = p$  (respec.  $f^{-nk}(x) \in U \forall n \geq 0$  y  $\alpha(x) = \mathcal{O}(p)$ .)

4. Sea  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$F(x) = x + \frac{1}{4\pi} \sin(2\pi x) + \frac{1}{4\pi} \cos(2\pi x).$$

- a) Probar que  $F$  es el levantamiento de un difeomorfismo de  $S^1$ .
- b) hallar  $\rho(F)$
- c) Hallar los puntos periódicos de  $F$ . Clasificarlos, si corresponde, en atractores y/o repulsores.
- d) Croquizar la dinámica correspondiente en  $S^1$ .
5. \* Sea  $f : S^1 \rightarrow S^1$  homeomorfismo con  $\rho(f) = 0$  y sea  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  levantamiento con  $\rho(F) = 0$ . Sea  $R_t : S^1 \rightarrow S^1$  la rotación de ángulo  $t$  y su levantamiento  $T_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $T_t(x) = x + t$ . Consideremos la función  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $h(t) = \rho(T_t \circ F)$ .

- a) Probar que  $h$  es continua, creciente y que  $h([0, 1]) = [0, 1]$ .
- b) Sea  $r \in [0, 1]$  un número irracional. Probar que  $h^{-1}(r)$  es un único punto.
- c) Sea  $t_0 \in [0, 1]$  tal que  $h(t_0) = p/q$ .
- 1) Probar que si existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $(T_{t_0} \circ F)^q(x) < x + p$  entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que si  $t \in [t_0, t_0 + \epsilon)$  se tiene que  $h(t) = p/q$ .
  - 2) Análogamente, si existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $(T_{t_0} \circ F)^q(x) > x + p$  entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que si  $t \in (t_0 - \epsilon, t_0]$  se tiene que  $h(t) = p/q$ .
  - 3) Concluir que si  $(R_{t_0} \circ f)^q \neq Id$  entonces  $h^{-1}(p/q)$  es un intervalo (no trivial).
- d) Una escalera del diablo es una función  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continua, sobre, monótona tal que existe un conjunto denso  $A \subset [0, 1]$  tal que para todo  $a \in A$ ,  $h^{-1}(a)$  es un intervalo. Demostrar que si  $f : S^1 \rightarrow S^1$  homeo del circulo es tal que  $(R_t \circ f)^q \neq Id$  para todo  $q \geq 1$  y

para todo  $0 \leq t \leq 1$  entonces la función  $h$  definida al principio es una escalera del diablo.<sup>1</sup>

6. \* Dada una función creciente  $\phi : I \rightarrow \phi(I)$  de clase  $C^3$  sin puntos críticos en el intervalo  $I$ , definimos la *derivada Schwarziana* de  $\phi$  como:

$$S\phi = \frac{D^3\phi}{D\phi} - \frac{3}{2} \left( \frac{D^2\phi}{D\phi} \right)^2.$$

- a) Probar que todo polinomio de grado 2 tiene derivada Schwarziana negativa.  
 b) Probar la *regla de la cadena* de la derivada Schwarziana:

$$S(\phi \circ f)(x) = Sf(x) + S\phi(f(x))(Df(x))^2.$$

- c) Probar que si  $\phi$  tiene derivada Schwarziana negativa, cualquier iterado de  $\phi$  también tiene derivada Schwarziana negativa.  
 d) Considerar la función  $g$  de clase  $C^2$  definida por  $g = (D\phi)^{-1/2}$ , y probar que  $S\phi = -2 \left( \frac{D^2g}{g} \right)$ .  
 e) Usando la parte anterior, probar que el núcleo de la derivada Schwarziana es el grupo de las transformaciones de Möbius:  $S\phi \equiv 0 \Leftrightarrow \phi$  es una Transformación de Möbius.  
 f) Si  $\phi$  es una Transformación de Möbius y  $f$  es de clase  $C^3$ , probar que  $S(\phi \circ f) = Sf$ .

---

<sup>1</sup>Este es el caso del ejercicio anterior. De hecho, si  $f$  no es una rotación y  $F$  se extiende a una función analítica en  $\mathbb{C}$  siempre vale. Pues de lo contrario, del hecho que  $(T_t \circ F)^q = T_p$  en  $\mathbb{R}$  se concluye que es la traslación en todo  $\mathbb{C}$  y de ahí que  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es un biholomorfismo y entonces  $F(z) = az + b$ . Del hecho que  $F(x+1) = F(x) + 1$  se concluye que  $a = 1$  y entonces  $f$  es una rotación.

## Parte II

# Aspectos ergódicos y geométricos

## Capítulo 4

# Breve paréntesis sobre fracciones continuas

Como vimos en los capítulos anteriores, los difeomorfismos del círculo mas interesantes, desde el punto de vista dinámico, son aquellos con número de rotación irracional. En el Capítulo 5, para enunciar y entender resultados mas finos sobre las órbitas de estos sistemas, vamos a separar los números irracionales en dos clases: los *Diofantinos* y los *Liouville*. Para ello, en este capítulo vamos a recordar algunos aspectos básicos sobre aproximación de números irracionales por *fracciones continuas* (que ya fueron discutidas en la Sección 3.2.1). Nuestro enfoque será de caracter dinámico/probabilístico. Un enfoque clásico puede encontrarse en [34] y en [38].

### 4.1. Fracciones Continuas

Dado un número positivo  $\theta$  denotamos por  $[\theta]$  la *parte entera* de  $\theta$ :

$$[\theta] \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad [\theta] \leq \theta < [\theta] + 1.$$

Definimos el *mapa de Gauss*  $G : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  como:

$$G(\theta) = \frac{1}{\theta} - \left\lfloor \frac{1}{\theta} \right\rfloor \quad \text{para} \quad \theta \neq 0, \quad \text{y} \quad G(0) = 0.$$

Para  $k \geq 1$  consideramos  $I_k = \left( \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right)$ . Note que  $G$  es un difeomorfismo

expansor de  $I_k$  en  $(0, 1)$ , haciendo de la unión  $\bigcup_{k \geq 1} I_k$  una *partición de Markov* para  $G$  (vea [41, Sección III.1]).

Ambos  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  y  $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$  son  $G$ -invariantes. Bajo la acción de  $G$ , todo racional del  $[0, 1]$  aterriza en el origen (un punto fijo de  $G$ ), mientras los irracionales permanecen para siempre en el abierto  $\bigcup_{k \geq 1} I_k$ .

**Definición 4.1.1.** La *expansión en fracciones continuas* de un número irracional en  $[0, 1]$  es la sucesión dada por su itinerario bajo la acción de  $G$  según la partición  $\bigcup_{k \geq 1} I_k$ .

En otras palabras, a todo número irracional  $\theta$  en  $[0, 1]$  le asociamos la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dada por  $G^n(\theta) \in I_{a_n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , o sea:

$$a_n = \left\lfloor \frac{1}{G^n(\theta)} \right\rfloor \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Usaremos la notación clásica  $\theta = [a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots]$ . Los números naturales  $a_n$  son llamados *cocientes parciales* de  $\theta$ .

Como  $G$  es expansora en la partición  $\bigcup_{k \geq 1} I_k$ , el mapa  $h$  de  $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$  en  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  (munido de la topología producto) que le asocia a cada número irracional su itinerario por  $G$  es un homeomorfismo. O sea, la acción de  $G$  en  $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$  es topologicamente conjugada al shift  $\sigma : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  que manda  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\{a_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \setminus \mathbb{Q} & \xrightarrow{G} & [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \end{array}$$

De la misma manera que en la Sección 1.6.1, se muestra que las órbitas periódicas de  $\sigma : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  son densas en  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ . En otras palabras, las órbitas periódicas del mapa de Gauss  $G$  son densas en  $[0, 1]$ . En particular,  $G$  admite infinitas medidas ergódicas.

Un resultado clásico en Teoría Ergódica (vea [41, Capítulo III, Teorema 1.2] y/o [46, Capítulo V, Teorema 2.2]) afirma que  $G$  preserva una única probabilidad de Borel  $\nu$  (llamada *medida de Gauss*) ergódica y *equivalente* a la medida de Lebesgue  $\text{Leb}$  en  $[0, 1]$  (la unicidad de  $\nu$  proviene de la equivalencia con respecto a la medida de Lebesgue). De hecho, no es difícil mostrar que para cualquier conjunto de Borel  $A \subset [0, 1]$  se tiene:

$$\nu(A) = \left( \frac{1}{\log 2} \right) \int_A \left( \frac{1}{1 + \theta} \right) d\text{Leb}.$$

**Definición 4.1.2.** Un número real  $\theta \in [0, 1]$  es de *tipo limitado* si existe una constante  $M > 0$  tal que  $a_n < M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Siendo que las órbitas periódicas de  $\sigma$  son densas en  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  (munido de la topología producto), los números irracionales con expansión en fracciones continuas periódica son densos en  $[0, 1]$ . En particular, los números de tipo limitado son densos en  $[0, 1]$ . Puede mostrarse, además, que el conjunto de los números de tipo limitado en  $[0, 1]$  tiene dimensión de Hausdorff igual a 1. Sin embargo:

**Lema 4.1.1.** *El conjunto de los números de tipo limitado tiene medida de Lebesgue nula en  $[0, 1]$ .*

Por una prueba directa del Lema 4.1.1, sin argumentos dinámicos, vea [34, Capítulo III, Teorema 29].

*Prueba del Lemma 4.1.1.* Considere la sucesión creciente  $\{K_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  de conjuntos de Cantor en  $[0, 1]$  dada por:

$$K_m = \{\theta \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} : \theta = [a_0, a_1, \dots] \text{ con } a_n < m \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Es suficiente probar que  $\text{Leb}(K_m) = 0$  para cada  $m \in \mathbb{N}$ , y como la medida de Gauss es equivalente a la medida de Lebesgue, es suficiente probar que  $\nu(K_m) = 0$  para cada  $m \in \mathbb{N}$ . Esto último sigue inmediatamente de la ergodicidad de  $\nu$  bajo  $G$ , pues cada  $K_m$  es  $G$ -invariante y está contenido en  $(\frac{1}{m}, 1)$ .  $\square$

El Teorema Ergódico de Birkhoff (vea la Sección 1.7) nos ofrece un enunciado mucho mas preciso:

**Teorema 4.1.1.** *Para Lebesgue casi todo  $\theta$  en  $[0, 1]$  se tiene que todo número entero  $k \geq 1$  aparece infinitas veces en la expansión en fracciones continuas de  $\theta = [a_0, a_1, \dots]$ . De hecho, si definimos:*

$$\tau_n(\theta, k) = \left(\frac{1}{n}\right) \#\{0 \leq j < n : a_j = k\},$$

*tenemos que  $\{\tau_n(\theta, k)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge al número positivo:*

$$\left(\frac{1}{\log 2}\right) \log \left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right),$$

*que depende apenas de  $k$ .*

*Prueba del Teorema 4.1.1.* Por definición:

$$\tau_n(\theta, k) = \left(\frac{1}{n}\right) \#\{0 \leq j < n : G^j(\theta) \in I_k\}$$

y por el Teorema Ergódico de Birkhoff:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n(\theta, k) = \nu(I_k) = \left(\frac{1}{\log 2}\right) \log \left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right)$$

para  $\nu$  casi todo  $\theta$  en  $[0, 1]$ . Nuevamente por la equivalencia, esto se satisface para Lebesgue casi todo  $\theta$  en  $[0, 1]$ .  $\square$

Puesto que la frecuencia asintótica dada por el Teorema 4.1.1 es estrictamente decreciente en  $k$ , podemos esperar que números *típicos*, aún teniendo cocientes parciales ilimitados, tengan crecimiento lento. Esto se formaliza con la siguiente observación:

**Lema 4.1.2.** *Sea  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión creciente de números reales positivos tal que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} 1/b_n < \infty$ . Para Lebesgue casi todo  $\theta = [a_0, a_1, \dots]$  en  $[0, 1]$  tenemos que  $a_n < b_n$  para todo  $n$  suficientemente grande.*

*Prueba del Lemma 4.1.2.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$  sean:

$$U_n = \{\theta : a_n > b_n\} \quad \text{y} \quad V_n = \{\theta : a_0 > b_n\}.$$

Queremos probar que:

$$\text{Leb} \left( \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq k} U_n \right) = 0.$$

Como  $G^{-n}(V_n) = U_n$  y  $V_n \subset \left(0, \frac{1}{b_n}\right)$  tenemos que:

$$\nu(U_n) \leq \nu \left(0, \frac{1}{b_n}\right) = \left(\frac{1}{\log 2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{b_n}\right) \leq \left(\frac{1}{\log 2}\right) \left(\frac{1}{b_n}\right)$$

para todo  $n$  suficientemente grande. En particular:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(U_n) < \infty,$$

y entonces el lema sigue combinando el lema de Borel-Cantelli con la equivalencia entre las medidas de Gauss y de Lebesgue.  $\square$

**Corolario 4.1.1.** Para Lebesgue casi todo  $\theta = [a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$  en  $[0, 1]$  tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log a_n = 0 \quad y \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log a_j < \infty.$$

Tenemos también que:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=k+1}^{k+n} \log a_j \leq C(\theta) \left[ 1 - \log \left( \frac{n}{k} \right) \right] \quad \text{para todo } 0 < n \leq k,$$

donde  $C(\theta) > 0$  depende de  $\theta$ .

Como veremos en la Sección 6.4 (Teorema 6.4.1, ítem (2)), el conjunto de números dado por el Corolario 4.1.1 fue introducido por de Faria y de Melo en [17, Sección 4.4], y aparece naturalmente al estudiar la geometría de las órbitas de ciertos homeomorfismos suaves del círculo con puntos críticos. Las dos primeras condiciones del Corolario 4.1.1 siguen del Lema 4.1.2 tomando, por ejemplo,  $b_n = n^{1+\varepsilon}$  para cualquier  $\varepsilon > 0$ . La tercer condición sigue también del Lema 4.1.2, pero con argumentos más complicados [17, Proposición C.2, página 390].

## 4.2. La condición Diofantina

Cerramos este breve paréntesis con las definiciones prometidas de números Diofantinos y Liouville.

**Definición 4.2.1.** Un número irracional en  $[0, 1]$  se dice *Diofantino* si existen dos constantes  $C > 0$  y  $\delta \geq 0$  tales que:

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^{2+\delta}},$$

para naturales  $p$  y  $q \neq 0$  cualesquiera. Los números irracionales que no son Diofantinos son llamados *números de Liouville*.

Un número irracional es de tipo limitado si satisface la condición Diofantina 4.2.1 con  $\delta = 0$ , o sea,  $\theta$  en  $[0, 1]$  es de tipo limitado se existe  $C > 0$  tal que:

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^2},$$

para naturales  $p$  y  $q \neq 0$  cualesquiera (una prueba de la equivalencia entre esta definición y la Definición 4.1.2 puede hallarse en [34, Capítulo II, Teorema

23]). Como vimos en el Lema 4.1.1, el conjunto de los números de tipo limitado tiene medida nula. Sin embargo, con cualquier  $\delta > 0$  en la Definición 4.2.1 conseguimos capturar Lebesgue casi todo número del  $[0, 1]$ :

**Lema 4.2.1.** *Dado cualquier  $\delta > 0$ , el conjunto:*

$$D_\delta = \left\{ \theta \in [0, 1] : \exists C > 0 \text{ tal que } \left| \theta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^{2+\delta}} \quad \forall p, q \in \mathbb{N} \right\}$$

*tiene medida de Lebesgue total en  $[0, 1]$ . En particular el conjunto de los números Diofantinos de  $[0, 1]$  tiene medida de Lebesgue total.*

*Prueba del Lemma 4.2.1.* Fije una sucesión decreciente  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, 1)$  tal que  $C_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ , y considere:

$$U_n = \left\{ \theta \in [0, 1] : \exists p, q \in \mathbb{N} \text{ tal que } \left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{C_n}{q^{2+\delta}} \right\}.$$

Note que  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es estrictamente decreciente y que:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = [0, 1] \setminus D_\delta.$$

Queremos probar entonces que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Leb}(U_n) = 0$ . Con ese objetivo fijamos  $n \in \mathbb{N}$  y consideramos para cada  $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  el conjunto:

$$U_n(q) = \left\{ \theta \in [0, 1] : \exists p \in \{0, 1, \dots, q-1, q\} \text{ tal que } \left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{C_n}{q^{2+\delta}} \right\}.$$

De:

$$U_n = \bigcup_{q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} U_n(q) \quad \text{y} \quad \text{Leb}(U_n(q)) = \frac{2C_n}{q^{1+\delta}},$$

se obtiene que:

$$\text{Leb}(U_n) \leq 2C_n \left( \sum_{q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \frac{1}{q^{1+\delta}} \right),$$

que tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito (aquí estamos utilizando el hecho que  $\delta > 0$ ). □

De la prueba del Lema 4.2.1 surge que  $[0, 1] \setminus D_\delta$  es un conjunto residual, en el sentido de Baire, pues cada  $U_n$  es abierto y denso en  $[0, 1]$ . Concluimos entonces que el conjunto de los números de Liouville es residual en  $[0, 1]$ , y en particular, no enumerable y denso.

## Capítulo 5

# Rigidez geométrica: Arnold-Herman-Yoccoz

Sea  $f$  un homeomorfismo del círculo topologicamente conjugado a la rotación  $R_\theta$  para algún  $\theta$  irracional, y sea  $\mu$  la *única* probabilidad de Borel en  $S^1$  que es invariante por  $f$ . La principal motivación para entender la medida  $\mu$  viene del Teorema Ergódico de Birkhoff: dado cualquier punto  $x \in S^1$  y cualquier intervalo  $A \subset S^1$  tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \#\{j : 0 \leq j < n, f^j(x) \in A\} = \mu(A).$$

En otras palabras, la medida de  $A$  coincide con la *frecuencia asintótica* con la cual una órbita lo visita. Como ya fue discutido,  $\mu(A) = \lambda(h(A))$  para todo boreliano  $A \subset S^1$ , donde  $h$  es cualquier homeomorfismo del círculo que conjugue  $f$  con  $R_\theta$ . En particular  $\mu$  no tiene átomos (puntos de medida positiva) y le asigna medida positiva a cualquier conjunto abierto.

$$\begin{array}{ccc} (S^1, \mu) & \xrightarrow{f} & (S^1, \mu) \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ (S^1, \lambda) & \xrightarrow{R_\theta} & (S^1, \lambda) \end{array}$$

Si  $f$  es de clase  $C^1$ , se tiene entonces la siguiente dicotomía: o bien  $\mu$  es *absolutamente continua* con respecto a Lebesgue, o bien  $\mu$  es *singular* (caso

contrario, tendríamos una descomposición  $\mu = \nu_1 + \nu_2$ , donde  $\nu_1$  es absolutamente continua con respecto a Lebesgue,  $\nu_2$  es singular y ambas son no-nulas. Como estamos suponiendo que  $f$  es  $C^1$ , preserva conjuntos de medida de Lebesgue cero, y entonces ambas  $\nu_1$  y  $\nu_2$  serían  $f$ -invariantes, lo cual contradice la unicidad ergódica de  $f$ ).

En 1961 Arnold construyó difeomorfismos analíticos del círculo, minimales, cuya única medida invariante es singular al respecto de Lebesgue ([1], vea también [46, Sección I.5]). En dichos ejemplos el número de rotación es Liouville (vea la Definición 4.2.1 en el Capítulo 4) y cualquier conjugación con la correspondiente rotación lleva conjuntos de medida de Lebesgue nula en conjuntos de medida de Lebesgue total.

En el mismo trabajo, Arnold probó que un difeomorfismo analítico con número de rotación Diofantino (Definición 4.2.1), que es una pequeña perturbación de una rotación, es conjugado a la correspondiente rotación por un difeomorfismo analítico. También conjeturó que la restricción de estar cerca de una rotación no era necesaria. Esto fue probado por Herman en 1979 [25] para una amplia clase de números Diofantinos, y fue luego extendido por Yoccoz en 1984 [66] para todo número Diofantino: cualquier difeomorfismo  $C^{2+\varepsilon}$  con número de rotación Diofantino es conjugado a la correspondiente rotación por un difeomorfismo (vea [46, Sección I.3] por enunciados precisos, vea también [33]). Mas aún, difeomorfismos  $C^\infty$  con el mismo número de rotación Diofantino son  $C^\infty$ -conjugados, y difeomorfismos analíticos con el mismo número de rotación Diofantino son conjugados por un difeomorfismo analítico (vea [46, Sección I.3]). Las demostraciones de estos teoremas están mas allá del alcance de estas notas.

## Capítulo 6

# Mapas críticos del círculo

En el último capítulo de estas notas discutiremos ciertos sistemas dinámicos, llamados *mapas críticos del círculo*, que pertenecen a la frontera del espacio de los difeomorfismos del círculo. En la Sección 6.3 probaremos una extensión del Teorema de Denjoy a los mapas críticos, debida a J.-C. Yoccoz, mientras que en la Sección 6.4 discutiremos la clasificación geométrica de los mapas críticos del círculo.

### 6.1. Mapas críticos del círculo

Un *mapa crítico del círculo* es un homeomorfismo del círculo, que preserva orientación, de clase  $C^3$ , y que presenta una cantidad finita de puntos críticos  $c_1, c_2, \dots, c_N$  ( $N \geq 1$ ), todos de tipo non-flat. Recordemos que un punto crítico  $c$  es llamado *non-flat* si en un entorno de  $c$  podemos escribir  $f$  como  $f(t) = (\phi(t))^d + f(c)$ , donde  $\phi$  es un difeomorfismo local de clase  $C^3$  tal que  $\phi(c) = 0$ , y  $d \in \mathbb{N}$  con  $d \geq 2$ . La *criticalidad* (o *orden*, o *tipo*, o *exponente*) de  $f$  en  $c$  es  $d$ .

Estos mapas han sido estudiados por varios autores en las últimas tres décadas. Desde un punto de vista estrictamente matemático, estos estudios comenzaron con aspectos topológicos básicos [24], [67], después evolucionaron – en el caso especial de mapas con un *único* punto crítico – a cotas geométricas [26], [61], [12] y [13], y luego a aspectos de rigidez geométrica y teoría de renormalización, vea [2], [14], [15], [17], [18], [21], [22], [23], [32], [35], [61], [62], [63], [64] y [65]. Este breve relato omite importantes estudios numéricos de varios físi-

cos, así como el trabajo conceptual y asistido por computadora de Feigenbaum, Kadanoff, Lanford, Rand, Epstein y otros; vea [15] y las referencias allí listadas.

En la Sección 6.2 discutiremos algunos ejemplos clásicos de mapas críticos del círculo. Como hicimos anteriormente con los difeomorfismos, vamos a concentrarnos en el caso en que el número de rotación de  $f$  es irracional, en cuyo caso  $f$  es únicamente ergódica (Ejercicio 6 del Práctico 2). En la Sección 6.3 probaremos un teorema debido a J.-C. Yoccoz que garantiza que  $f$  es minimal y por lo tanto, topológicamente conjugada a la correspondiente rotación rígida (vea el Corolario 6.3.1). Este resultado es una extensión del Teorema de Denjoy que demostramos en la Sección 3.3.

El Teorema de Yoccoz implica que el soporte de la única probabilidad de Borel invariante de un mapa crítico con número de rotación irracional es todo el círculo. El resultado análogo al Lema 3.3.2 también vale para mapas críticos con número de rotación irracional. Más precisamente:

**Lema 6.1.1.** *Sea  $f : S^1 \rightarrow S^1$  un mapa crítico del círculo de clase  $C^3$ , con número de rotación irracional, y sea  $\mu$  su única probabilidad de Borel invariante. Entonces  $\log Df$  está en  $L^1(\mu)$  y:*

$$\int_{S^1} \log Df \, d\mu = 0.$$

La prueba del Lema 6.1.1 es bastante más difícil que la del Lema 3.3.2, pues en este caso  $\log Df$  no es una función continua (está definida apenas en  $S^1 \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$ , y no es acotada). Por una prueba, referimos al lector a [16, Teorema A]. En la Sección 6.4 finalizamos estas notas con enunciados precisos de *rigidez geométrica* de mapas críticos del círculo.

## 6.2. Ejemplos analíticos

En esta sección discutimos algunos ejemplos de mapas críticos que son analíticos, enfatizando algunas conexiones con dinámica unidimensional compleja (referimos al lector al libro de Milnor [47] para *background* en el área).

### 6.2.1. La familia de Arnold

Considere la familia a dos parametros  $\tilde{f}_{a,b} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de mapas enteros en el plano complejo dada por:

$$\tilde{f}_{a,b}(z) = z + a - \left(\frac{b}{2\pi}\right) \text{sen}(2\pi z) \quad \text{for } a \in [0, 1] \text{ y } b \geq 0.$$

Por conmutar con la traslación unitaria horizontal, cada  $\tilde{f}_{a,b}$  es el levantamiento de un mapa holomorfo  $f_{a,b} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  bajo el cubrimiento  $z \mapsto e^{2\pi iz}$ . Como  $\tilde{f}_{a,b}$  preserva la recta real,  $f_{a,b}$  preserva el círculo unidad  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  y por lo tanto induce una familia a dos parametros de sistemas dinámicos analíticos en el círculo. Esta familia fue introducida por Arnold en [1], y es llamada de *familia de Arnold*.

Para  $b = 0$  la familia  $f_{a,b} : S^1 \rightarrow S^1$  es simplemente la familia de rotaciones rígidas  $z \mapsto e^{2\pi ia} z$ , y para  $b \in (0, 1)$  la familia de Arnold (aún) está contenida en el espacio de los difeomorfismos analíticos del círculo.

Para  $b = 1$  cada  $\tilde{f}_{a,b}$  restringe a un homeomorfismo creciente de la recta real, que proyecta a un homeomorfismo  $f_{a,1}$  del círculo. Cada  $f_{a,1}$  presenta un punto crítico de tipo cúbico en el punto 1, que es la proyección de los enteros bajo el cubrimiento  $z \mapsto e^{2\pi iz}$ .

Denote por  $\rho(a)$  el número de rotación del homeomorfismo  $f_{a,1}$ . Como vimos en el Ejercicio 5 del Capítulo 3,  $a \mapsto \rho(a)$  es continua, no-decreciente y mapea  $[0, 1)$  en el mismo. El intervalo  $\rho^{-1}(\theta) \subset [0, 1)$  degenera a un punto cuando  $\theta \in [0, 1) \setminus \mathbb{Q}$  [25]. Es sabido, además, que el conjunto  $\{a \in [0, 1) : \rho(a) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$  tiene medida de Lebesgue nula [61].

Para  $0 \leq p < q$  enteros coprimos se tiene que  $\rho^{-1}(\{p/q\})$  es un intervalo cerrado no degenerado. En su interior, encontramos mapas críticos con dos órbitas periódicas (de período  $q$ , claro), una atractora y otra repulsora, que colapsan a una órbita parabólica en el borde de este intervalo [11].

Para  $b > 1$  los mapas  $f_{a,b} : S^1 \rightarrow S^1$  no son mas invertibles, pues presentan dos puntos críticos cuadráticos. La dinámica de estos mapas es bastante mas sofisticada que la de un homeomorfismo: en lugar de un *número* de rotación, se tiene ahora un *intervalo* de rotación (vea por ejemplo [4] y [6], y las referencias allí listadas).

Estos ejemplos muestran cómo los mapas críticos surgen como bifurcaciones de difeomorfismos a endomorfismos y, en particular, de entropía topológica nula

a entropía topológica positiva (compare con mapas unimodales infinitamente renormalizables [46, Capítulo VI]). Esta es una de las principales razones por las cuales los mapas críticos atrajeron la atención de físicos y matemáticos interesados en entender la *frontera del caos* ([9], [19], [28], [36], [37], [39] [40], [49], [54], [55], [56], [58]).

### 6.2.2. Productos de Blaschke

Considere el producto de Blaschke  $f_0 : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  de la esfera de Riemann dado por:

$$f_0(z) = z^2 \left( \frac{z-3}{1-3z} \right). \quad (6.1)$$

**Lema 6.2.1.** *La función racional  $f_0$  definida en (6.1) preserva el círculo unidad. Su restricción es un homeomorfismo real-analítico del círculo que presenta un único punto crítico (que es cúbico) y que tiene número de rotación cero.*

*Prueba del Lema 6.2.1.* Note que  $f_0$  conmuta con  $z \mapsto 1/\bar{z}$  en la esfera. A partir de que  $1/\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in S^1$ , obtenemos fácilmente que  $f_0$  preserva el círculo unidad. Para mostrar que  $f_0$  restringida al círculo es un homeomorfismo, vamos a mostrar que el *índice* (o *winding number*) de la curva  $f_0(S^1)$  alrededor del origen es igual a 1. Para ello, note que:

$$\text{índice}(f_0(S^1), 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f_0(S^1)} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{Df_0(z)}{f_0(z)} dz,$$

con el cambio de variable  $w = f_0(z)$ . Por el Principio del Argumento, la última expresión vale 1, pues  $f_0$  tiene dos ceros (ambos en el origen) y un polo (en el punto  $1/3$ ) en el disco unidad. Por lo tanto  $f_0$  tiene grado uno cuando restringida al círculo, esto es,  $f_0 \in \text{Hom}_+^\omega(S^1)$ . Note que  $f_0(1) = 1$ , y así el número de rotación de  $f_0|_{S^1}$  es cero. De hecho, los puntos fijos de  $f_0$  en la esfera de Riemann son  $-1$ ,  $0$ ,  $1$  y  $\infty$ . El punto  $-1$  es repulsor, mientras que  $0$ ,  $1$  y  $\infty$  son superatractores. Ambos  $0$  y  $\infty$  son puntos críticos cuadráticos, mientras que  $1$  es un punto crítico cúbico.  $\square$

Consideramos ahora la familia a un parametro  $f_\gamma : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  de productos de Blaschke en la esfera de Riemann dada por:

$$f_\gamma(z) = e^{2\pi i \gamma} z^2 \left( \frac{z-3}{1-3z} \right) = e^{2\pi i \gamma} f_0(z) \quad \text{para } \gamma \in [0, 1]. \quad (6.2)$$

Por el Lema 6.2.1 tenemos que para todo  $\gamma \in [0, 1)$  podemos restringir  $f_\gamma$  a un homeomorfismo real-analítico del círculo con un único punto crítico en 1, de tipo cúbico, y con valor crítico  $e^{2\pi i\gamma}$ .

Por la *monotonidad* del número de rotación (vea el Ejercicio 5 del Capítulo 3, vea también [25] y [46] por mas información) se tiene que para cada número irracional  $\theta$  en el  $[0, 1)$  existe un único  $\gamma$  en  $[0, 1)$  tal que el número de rotación de  $f_\gamma|_{S^1}$  es  $\theta$ . Como siempre, estamos interesados justamente en el caso irracional. Por un teorema de Yoccoz [67] que discutiremos en la próxima sección de este capítulo (vea el Corolario 6.3.2) la restricción de  $f_\gamma$  al círculo es minimal para estos parametros, y por lo tanto, topologicamente conjugada a la rotación correspondiente.

### Dinámica en $\widehat{\mathbb{C}}$

La lectura de esta sección es opcional, pues en ella asumiremos ciertos resultados de dinámica de funciones holomorfas (que pueden encontrarse en los libros [44] y [47]).

Intentaremos describir la dinámica de  $f_\gamma$  en la esfera de Riemann, cuando  $f_\gamma|_{S^1}$  tiene número de rotación irracional. Comenzamos con puntos en el conjunto de Fatou  $F_\gamma$ , y denotamos por  $\mathcal{B}_0$  y  $\mathcal{B}_\infty$  las cuencas inmediatas de atracción de 0 y  $\infty$  respectivamente (ambas son simplemente conexas, una siendo la imagen de la otra bajo la simetría  $z \mapsto 1/\bar{z}$ ). Existe un conjunto abierto (compactamente contenido en el disco unidad) alrededor de  $1/3$  que es mapeado por  $f_\gamma$  sobre  $\mathcal{B}_\infty$ , mientras que existe un conjunto abierto ( $S^1$ -simétrico del anterior, y compactamente contenido en el complemento del disco unidad) alrededor de 3 que es mapeado por  $f_\gamma$  sobre  $\mathcal{B}_0$  (vea la Figura 6.1). Afirmamos que  $\mathcal{B}_0$  y  $\mathcal{B}_\infty$  son las únicas componentes periódicas del conjunto de Fatou  $F_\gamma$ :

**Lema 6.2.2.** *Sea  $\gamma$  en  $[0, 1)$  tal que el número de rotación de  $f_\gamma|_{S^1}$  es irracional. Entonces:*

$$F_\gamma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (f_\gamma^{-n}(\mathcal{B}_0) \cup f_\gamma^{-n}(\mathcal{B}_\infty)).$$

*En otras palabras, cualquier punto en el conjunto Fatou de  $f_\gamma$  converge al origen o a infinito bajo iterados positivos.*

*Prueba del Lema 6.2.2.* Por el celebrado “Sullivan’s Nonwandering Theorem” [47, Teorema 16.4] es suficiente mostrar que  $\mathcal{B}_0$  y  $\mathcal{B}_\infty$  son las únicas componentes

periódicas de  $F_\gamma$ . Note primero que, exceptuando 0 y  $\infty$ , no existen órbitas periódicas atractoras, superatractoras o parabólicas para  $f_\gamma$ , pues sus cuencas de atracción deberían contener un punto crítico (fuera de 0 y  $\infty$ , el único punto crítico de  $f_\gamma$  es el 1, cuya órbita positiva es densa en el círculo unidad). Si  $f_\gamma$  admite un disco de Siegel, el borde de tal disco debería ser el círculo unidad (pues debe estar contenido en la clausura del conjunto post-crítico [47, Teorema 11.17]) y en ese caso el disco de Siegel sería el disco unidad  $\mathbb{D}$  o  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ , pero ambos dominios contienen superatractores y esto nos lleva a una contradicción. Finalmente,  $f_\gamma$  no admite anillos de Herman puesto que su borde debería estar contenido en la clausura del conjunto post-crítico [47, Lemma 15.7], pero existe apenas una curva cerrada en él, que es justamente el círculo unidad. Por la clasificación de las componentes periódicas del conjunto de Fatou [47, Teorema 16.1] hemos terminado la prueba del Lema 6.2.2.  $\square$

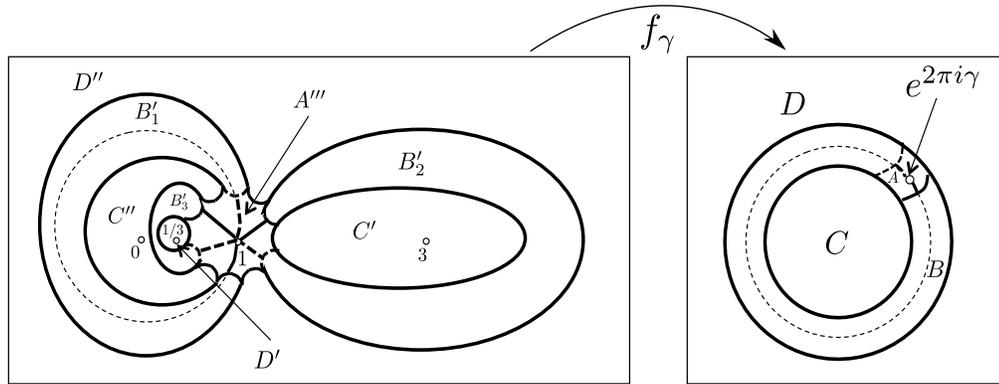


Figura 6.1: Comportamiento topológico del producto de Blaschke  $f_\gamma$  (6.2) alrededor del círculo unidad, para  $\gamma$  aproximadamente igual a  $1/8$ . A la izquierda de la Figura 6.1 vemos la preimagen por  $f_\gamma$  del anillo  $A \cup B$  alrededor del círculo, dibujado a la derecha (en ambos planos, el círculo unidad está dibujado a trazos). El complemento del anillo  $A \cup B$  en el plano complejo de la derecha tiene dos componentes conexas,  $C$  y  $D$ . La preimagen de  $C$  es la unión  $C' \cup C''$ , donde la notación  $C'$  representa que  $f_\gamma : C' \rightarrow C$  tiene grado topológico 1 (o sea,  $f_\gamma : C'' \rightarrow C$  tiene grado topológico 2). Del mismo modo, la preimagen de  $D$  es la unión  $D' \cup D''$ , la preimagen de  $B$  es  $B'_1 \cup B'_2 \cup B'_3$ , y la preimagen de  $A$  es  $A'''$ .

Como suele ser el caso, la dinámica en el conjunto de Julia  $J_\gamma$  es más difícil de describir. Note que para el mapa original  $f_0$  tenemos que  $S^1 \cap J_0 \neq \emptyset$  (contiene al  $-1$ ) y que  $S^1 \cap F_0 \neq \emptyset$  (contiene al  $1$ ), donde  $J_0$  y  $F_0$  denotan los conjuntos de Julia y Fatou respectivamente de  $f_0$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Nos concentramos, nuevamente, en el caso en que el número de rotación de  $f_\gamma|_{S^1}$  es irracional. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la unión finita:

$$L_n(\gamma) = \bigcup_{j=1}^{j=n} f_\gamma^{-j}(S^1)$$

es un conjunto compacto y conexo, invariante a futuro, que es la unión de  $3^n$  curvas de Jordan, una de ellas siendo el círculo unidad y el resto siendo curvas analíticas excepto en un punto (una preimagen por  $f_\gamma$  del punto crítico  $1$ ). La unión creciente:

$$L_\gamma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n(\gamma) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_\gamma^{-n}(S^1)$$

también es conexa, y es *totalmente invariante* por  $f_\gamma$  (o sea, invariante tanto para pasado como para futuro).

**Lema 6.2.3.** *Sea  $\gamma$  en  $[0, 1)$  tal que el número de rotación de  $f_\gamma|_{S^1}$  es irracional. Entonces  $L_\gamma$  está estrictamente contenido en el conjunto de Julia  $J_\gamma$  de  $f_\gamma$ , y es denso en  $J_\gamma$  (en particular  $L_\gamma$  no es compacto).*

En otras palabras, el Lema 6.2.3 dice que  $S^1 \subsetneq L_\gamma \subsetneq \overline{L_\gamma} = J_\gamma$ .

*Prueba del Lema 6.2.3.* Veamos primero que el círculo unidad está contenido en el conjunto de Julia: como  $S^1$  es  $f_\gamma$ -invariante y  $f_\gamma|_{S^1}$  es minimal, o bien tenemos que  $S^1 \subset J_\gamma$  o bien que  $S^1 \cap J_\gamma = \emptyset$ . Supongamos, por contradicción, que  $S^1 \cap J_\gamma = \emptyset$ , y sea  $U$  la componente del conjunto de Fatou de  $f_\gamma$  que contiene  $S^1$ . Como el círculo es invariante,  $U$  también es invariante por  $f_\gamma$ , y por lo tanto debe ser un disco de Siegel o un anillo de Herman (justamente porque  $U$  contiene en su interior una curva cerrada simple e invariante, vea [47, Teorema 16.1]). En tal caso  $f_\gamma : U \rightarrow U$  sería un biholomorfismo, lo cual es imposible pues contiene un punto crítico en su interior. Por lo tanto  $S^1 \subset J_\gamma$ . De la invariancia del conjunto de Julia se obtiene  $L_\gamma \subset J_\gamma$ . La diferencia  $J_\gamma \setminus L_\gamma$  es no vacía pues  $L_\gamma$  no contiene órbitas periódicas, que son densas en  $J_\gamma$  [47, Teorema 14.1]. Finalmente,  $L_\gamma$  es denso en  $J_\gamma$  pues la preórbita de cualquier punto del círculo unidad es densa en  $J_\gamma$  [47, Corollary 4.13].  $\square$

Note que el mapa original  $f_0$  definido en (6.1) es uniformemente hiperbólico (Axioma A) en la esfera de Riemann, pues todo punto crítico es también punto fijo. Por lo tanto, para  $\gamma$  suficientemente cerca de 0, tenemos también que  $f_\gamma$  es uniformemente hiperbólico (y que  $\rho(f_\gamma|_{S^1}) = 0$ ). Esa hiperbolicidad desaparece cuando  $\rho(f_\gamma|_{S^1})$  es irracional, pues por el Lema 6.2.3 sabemos que el conjunto de Julia contiene el punto crítico 1. De hecho, para cualquier  $\gamma$  en  $[0, 1)$  tal que el número de rotación de  $f_\gamma|_{S^1}$  es irracional, el Lema 6.1.1 nos da una probabilidad de Borel  $f_\gamma$ -invariante y ergódica, sin átomos, cuyo soporte está contenido en el conjunto de Julia  $J_\gamma$  (recuerde que  $S^1 \subset J_\gamma$  por el Lema 6.2.3) y con exponente de Lyapunov nulo. De [53] sabemos que  $f_\gamma$  no satisface ninguna de las definiciones estándar de hiperbolicidad no-uniforme para funciones holomorfas en la esfera de Riemann (condición de Collet-Eckmann, condición topológica de Collet-Eckmann, hiperbolicidad uniforme en órbitas periódicas del conjunto de Julia, etc.). Vea [16, Sección 6] para mas detalles.

Aprovechando la familia (6.2), la teoría de rigidez de mapas críticos del círculo ha sido de extrema importancia en el estudio de conectividad local y medida de Lebesgue de conjuntos de Julia asociados a polinómios cuadráticos con discos de Siegel ([51], [43], [62], [52]).

*Observación 6.2.1.* Podemos encajar la familia (6.2) en la familia a dos parámetros  $g_{a,\gamma} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  de productos de Blaschke dada por:

$$g_{a,\gamma}(z) = e^{2\pi i \gamma} z^2 \left( \frac{z-a}{1-az} \right) \quad \text{para } a \geq 3 \text{ y } \gamma \in [0, 1).$$

Note que  $g_{3,\gamma} = f_\gamma$  para todo  $\gamma \in [0, 1)$ , y en particular  $g_{3,0} = f_0$  como fue definido en (6.1). Nuevamente, cada mapa de esta familia conmuta con  $\Phi(z) = 1/\bar{z}$  y por lo tanto preserva el círculo unidad. Su restricción a  $S^1$  es un homeomorfismo real-analítico (como antes, el hecho que cada  $g_{a,\gamma}$  tiene grado topológico 1, cuando restringida al círculo unidad, sigue del Principio del Argumento, pues  $g_{a,\gamma}$  tiene dos ceros y un polo en el disco unidad).

Para  $a > 3$  cada  $g_{a,\gamma}$  tiene cuatro puntos críticos en la esfera de Riemann, todos diferentes y no-degenerados (cuadráticos). En particular, la restricción de  $g_{a,\gamma}$  al círculo es un *difeomorfismo* para todo  $a > 3$ . En efecto, aparte de 0 y  $\infty$ , sus otros dos puntos críticos son:

$$w_a = \frac{a^2 + 3}{4a} + \frac{\sqrt{(a+3)(a+1)(a-1)(a-3)}}{4a} > 1 \quad \text{y} \quad (6.3)$$

$$1/w_a = \frac{a^2 + 3}{4a} - \frac{\sqrt{(a+3)(a+1)(a-1)(a-3)}}{4a} \in (0, 1). \quad (6.4)$$

Fijemos ahora un número Diofantino  $\theta \in (0, 1)$ . Dado  $a \geq 3$  podemos elegir  $\gamma_a$  tal que el número de rotación de la restricción  $g_{a,\gamma_a}|_{S^1}$  es exactamente  $\theta$  (nuevamente por la monotonicidad del número de rotación, vea por ejemplo [25] y [46]).

Por la teoría de Arnold-Herman-Yoccoz mencionada en el Capítulo 5 (vea [46, Capítulo I.3] y las referencias ahí) existe un anillo topológico alrededor del círculo unidad donde  $g_{a,\gamma_a}$  es conjugada a la correspondiente rotación irracional por un biholomorfismo. Por el clásico Teorema de Montel, el círculo está contenido en una componente invariante del conjunto de Fatou de  $g_{a,\gamma_a}$ , que tiene que ser un dominio rotacional. Note que el círculo no puede estar contenido en un disco de Siegel, pues ambos puntos críticos  $0$  y  $\infty$  son puntos fijos de  $g_{a,\gamma_a}$  y, por lo tanto, superatractores. Esto implica que el círculo está contenido en un anillo de Herman de  $g_{a,\gamma_a}$ . Ambos puntos críticos  $w_a > 1$  y  $1/w_a \in (0, 1)$  pertenecen al borde de este anillo de Herman, cada uno en una componente conexa, y sus órbitas futuras son densas en la correspondiente componente (vea [47, Figura 32, página 164], que muestra el conjunto de Julia de  $g_{a,\gamma_a}$  para  $\theta = (\sqrt{5} - 1)/2$  y  $a = 4$ ).

En este capítulo estamos interesados en el caso límite: cuando  $a \rightarrow 3$  ambos puntos críticos  $w_a > 1$  y  $1/w_a \in (0, 1)$  colapsan en un único punto crítico de  $g_{3,\gamma_3} \equiv f_{\gamma_3}$  en  $1$  (como puede constatarse en (6.3) y (6.4)), de tipo cúbico. Desde el punto de vista de dinámica en el círculo, cuando  $a \rightarrow 3$ , la familia  $g_{a,\gamma_a}$  converge a la frontera del espacio de los difeomorfismos analíticos del círculo. Como vimos en el Lema 6.2.2 y en el Lema 6.2.3, el anillo de Herman antes mencionado desaparece cuando  $a = 3$ , y el círculo unidad pertenece ahora al conjunto de Julia.

### 6.3. Una extensión del Teorema de Denjoy

En 1984, J.-C. Yoccoz [67] extendió el Teorema de Denjoy para mapas críticos del círculo:

**Teorema 6.3.1** (Yoccoz, 1984). *Sea  $f$  un homeomorfismo de clase  $C^1$  del círculo con número de rotación irracional  $\theta$  y con  $N$  puntos críticos  $c_1, c_2, \dots, c_N$ . Supongamos que:*

1.  $\log Df$  tiene variación limitada en cualquier intervalo compacto que no contenga puntos críticos.
2. Dado  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$  existen constantes  $\varepsilon_j, A_j, B_j > 0$  y  $s_j \in \mathbb{N}$  tales que:
  - $(Df)^{-1/2}$  es una función convexa en  $(c_j - \varepsilon_j, c_j)$  y en  $(c_j, c_j + \varepsilon_j)$ .
  - Dado  $|t| < \varepsilon_j$  tenemos que  $A_j|t|^{s_j} \leq (Df)(c_j + t) \leq B_j|t|^{s_j}$ .

Entonces  $f$  es topológicamente conjugada a la rotación rígida de ángulo  $\theta$ .

Note que el Teorema 6.3.1 implica el Teorema de Denjoy discutido en la Sección 3.3. Hemos probado el Teorema 3.3.1 de manera independiente por cortesía con el lector. Otras dos consecuencias del Teorema 6.3.1 son:

**Corolario 6.3.1.** *Todo homeomorfismo del círculo de clase  $C^3$  con número de rotación irracional y tal que todos sus puntos críticos (si existen) son non-flat, es topológicamente conjugado a una rotación.*

Antes de leer la prueba del Corolario 6.3.1, recomendamos al lector revisar el Ejercicio 6 del Práctico 3.

*Prueba del Corolario 6.3.1.* Siendo que  $f$  es de clase  $C^3$ , el mapa  $g = (Df)^{-1/2}$  es de clase  $C^2$  lejos de los puntos críticos de  $f$ . Note que  $D^2g = (-1/2)gSf$ , donde  $Sf$  denota la derivada Schwarziana de  $f$ . En particular  $g$  es estrictamente convexa si, y sólo si,  $Sf < 0$ , cosa que siempre sucede en un entorno (pinchado) de un punto crítico non-flat (demostrar!). La Propiedad (2) del Teorema 6.3.1 también se cumple alrededor de un punto crítico non-flat, pues  $f$  es una *power-law* en cartas locales apropiadas.<sup>1</sup>  $\square$

La condición de non-flatness en los puntos críticos es necesaria: en [24] Hall construyó homeomorfismos  $C^\infty$  del círculo sin órbitas periódicas y sin órbitas densas.

**Corolario 6.3.2.** *Todo homeomorfismo real-analítico del círculo con número de rotación irracional es topológicamente conjugado a una rotación.*

El Corolario 6.3.2 es apenas un caso particular del Corolario 6.3.1, pues puntos críticos flat no existen para mapas analíticos (no constantes, claro).

<sup>1</sup>Si  $\phi_j$  es  $C^1$  y  $f(c_j + t) = (\phi_j(c_j + t))^{d_j} + f(c_j)$  para  $t$  cerca de cero, entonces  $\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{Df(c_j + t)}{t^{d_j - 1}} \right\} = d_j (D\phi_j(c_j))^{d_j}$ , que es diferente de cero pues  $\phi_j$  es un difeomorfismo local alrededor de  $c_j$ .

### 6.3.1. Cross-ratio degenerado

Dado un intervalo  $J \subset S^1$  con extremos  $a \neq b$  definimos:

$$M(f, J) = \frac{|f(J)|}{|J|} (Df(a)Df(b))^{-1/2},$$

con la convención de que  $M(f, J) = +\infty$  si  $a$  o  $b$  son puntos críticos de  $f$ .

Sean  $\varepsilon > 0$  y  $J_\varepsilon \supsetneq J$  tales que ambas componentes de  $J_\varepsilon \setminus J$  (que llamaremos de  $L_\varepsilon$  y  $R_\varepsilon$ ) tienen longitud  $\varepsilon$ . Entonces:

$$\text{Cr}(f, J, J_\varepsilon) = \frac{|f(J)||f(J_\varepsilon)|}{|J|(|J| + 2\varepsilon)Df(x_\varepsilon)Df(y_\varepsilon)},$$

donde  $\text{Cr}$  es el cross-ratio definido en la Sección 3.2.2, y  $x_\varepsilon \in L_\varepsilon$  y  $y_\varepsilon \in R_\varepsilon$  vienen dados por el Teorema del Valor Medio. Siendo  $f$  de clase  $C^1$  tenemos que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Cr}(f, J, J_\varepsilon) = (M(f, J))^2$ , y por este motivo llamaremos  $M$  de *cross-ratio degenerado*.

### 6.3.2. La prueba de Yoccoz

Un punto central en la prueba del Teorema 6.3.1 es la siguiente estimación sobre la distorsión del cross-ratio degenerado bajo iterados de  $f$  (compare con la Proposición 3.3.1).

**Lema 6.3.1.** *Sea  $f$  como en el Teorema 6.3.1. Existe una constante positiva  $\delta > 0$  tal que dados  $n \geq 1$ ,  $p \in \{0, \dots, q_{n+1}\}$ ,  $x \in S^1$  y un intervalo  $J = (a, b)$  contenido en el arco  $(f^{-q_n}(x), f^{q_n}(x))$  tenemos que  $M(f^p, J) \geq \delta$ .*

*Prueba del Lema 6.3.1.* Imitando a Yoccoz dividimos la familia

$$\{J, f(J), \dots, f^{p-1}(J)\}$$

en cuatro familias disjuntas  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$  y  $\mathcal{F}_4$  de acuerdo al siguiente criterio:

- $\mathcal{F}_1$  contiene los intervalos  $f^i(J)$  que son disjuntos de los intervalos:

$$\left[ c_j - \frac{\varepsilon_j}{2}, c_j + \frac{\varepsilon_j}{2} \right] \quad \text{para cualquier } j \in \{1, \dots, N\}.$$

- $\mathcal{F}_2$  contiene los intervalos  $f^i(J)$  que contienen algún intervalo de la forma:

$$\left[ c_j - \varepsilon_j, c_j - \frac{\varepsilon_j}{2} \right]$$

o algún intervalo de la forma:

$$\left[ c_j + \frac{\varepsilon_j}{2}, c_j + \varepsilon_j \right].$$

Note que  $f^i(J)$  puede contener el punto crítico  $c_j$ .

- $\mathcal{F}_3$  contiene los intervalos  $f^i(J)$  que están contenidos en un intervalo  $(c_j - \varepsilon_j, c_j + \varepsilon_j)$ , intersectan  $[c_j - \varepsilon_j/2, c_j + \varepsilon_j/2]$  pero no contienen al punto crítico  $c_j$ .
- $\mathcal{F}_4$  contiene los intervalos  $f^i(J)$  que están contenidos en un intervalo  $(c_j - \varepsilon_j, c_j + \varepsilon_j)$  y contienen al punto crítico  $c_j$ .

Note que:

$$M(f^p, J) = \prod_{i=0}^{p-1} M(f, f^i(J)) = \prod_{l=1}^{l=4} \left( \prod_{f^i(J) \in \mathcal{F}_l} M(f, f^i(J)) \right).$$

Note también que  $\#\mathcal{F}_2 \leq 4N$  y  $\#\mathcal{F}_4 \leq 2N$  pues la familia  $\{J, f(J), \dots, f^{q_{n+1}-1}(J)\}$  tiene multiplicidad de intersección 2.

- Con los intervalos de la familia  $\mathcal{F}_1$  trabajamos de la misma manera que en la Proposición 3.3.1: por el Teorema del Valor Medio, para cada  $f^i(J) \in \mathcal{F}_1$  existe un punto  $x_i \in f^i(J)$  tal que:

$$\log M(f, f^i(J)) = \log Df(x_i) - \frac{1}{2} \log Df(f^i(a)) - \frac{1}{2} \log Df(f^i(b)).$$

Sea  $V > 0$  la variación total de  $\log Df$  en el conjunto compacto  $K =$

$$S^1 \setminus \bigcup_{j=1}^{j=N} \left( c_j - \frac{\varepsilon_j}{2}, c_j + \frac{\varepsilon_j}{2} \right). \text{ Entonces:}$$

$$\prod_{f^i(J) \in \mathcal{F}_1} M(f, f^i(J)) \geq \exp(-V).$$

- Sean  $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N\}$ ,  $D = \max_{z \in S^1} \{Df(z)\}$  y  $d = \min_{z \in K} \{Df(z)\} > 0$  con  $K$  como antes. Para todo intervalo  $f^i(J)$  en  $\mathcal{F}_2$  tenemos que  $|f^i(J)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$  y por lo tanto  $|f(f^i(J))| \geq \frac{d\varepsilon}{2}$ . En particular  $M(f, f^i(J)) \geq \left(\frac{d}{D}\right) \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ , y entonces:

$$\prod_{f^i(J) \in \mathcal{F}_2} M(f, f^i(J)) \geq \left(\frac{d}{D}\right)^{4N} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{4N}.$$

- Puesto que  $(Df)^{-1/2}$  está bien definida y es convexa en cualquier miembro de  $\mathcal{F}_3$ , obtenemos facilmente que  $M(f, f^i(J)) \geq 1$  para todo  $f^i(J) \in \mathcal{F}_3$ . En efecto, sea  $g$  el mapa afín que coincide con  $(Df)^{-1/2}$  en los puntos  $f^i(a)$  y  $f^i(b)$ , y note que:

$$M(f, f^i(J)) = \left( \frac{g(f^i(a))g(f^i(b))}{|f^i(J)|} \right) \left( \int_{f^i(a)}^{f^i(b)} Df(t) dt \right).$$

Como  $(Df)^{-1/2}$  es convexa,  $Df \geq 1/g^2$  entre  $f^i(a)$  y  $f^i(b)$  y entonces:

$$M(f, f^i(J)) \geq \left( \frac{g(f^i(a))g(f^i(b))}{f^i(b) - f^i(a)} \right) \left( \int_{f^i(a)}^{f^i(b)} \frac{dt}{g^2(t)} \right) = 1$$

puesto que  $g$  es afín. Entonces:

$$\prod_{f^i(J) \in \mathcal{F}_3} M(f, f^i(J)) \geq 1.$$

- Afirmamos que si  $f^i(J) \in \mathcal{F}_4$ , tenemos que:

$$M(f, f^i(J)) \geq \frac{A_j}{2B_j(s_j + 1)},$$

donde las constantes  $A_j$ ,  $B_j$  y  $s_j$  están asociadas al punto crítico  $c_j$  que pertenece a  $f^i(J)$ . En efecto, supongamos que  $|f^i(a) - c_j| \leq |f^i(b) - c_j|$  y sea  $I = [c_j, f^i(b)]$ . Entonces:

$$\begin{aligned} Df(f^i(a)) Df(f^i(b)) &\leq B_j^2 |f^i(a) - c_j|^{s_j} |f^i(b) - c_j|^{s_j} \\ &\leq B_j^2 |f^i(b) - c_j|^{2s_j} = (B_j |I|^{s_j})^2. \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} |f(I)| &= \int_{c_j}^{f^i(b)} Df(t) dt \geq A_j \int_{c_j}^{f^i(b)} |t - c_j|^{s_j} dt \\ &= A_j \left( \frac{|f^i(b) - c_j|^{s_j+1}}{s_j + 1} \right) = \left( \frac{A_j}{s_j + 1} \right) |I|^{s_j+1}. \end{aligned}$$

Combinando las dos estimaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} M(f, f^i(J)) &= \frac{|f(f^i(J))|}{|f^i(J)|} (Df(f^i(a)) Df(f^i(b)))^{-1/2} \\ &\geq \frac{|f(I)|}{2|I|} (Df(f^i(a)) Df(f^i(b)))^{-1/2} \\ &\geq \frac{A_j}{2B_j(s_j + 1)}, \quad \text{as claimed.} \end{aligned}$$

En particular, definiendo:

$$\alpha = \min_{j \in \{1, \dots, N\}} \left\{ \frac{A_j}{2B_j(s_j + 1)} \right\},$$

obtenemos que:

$$\prod_{f^i(J) \in \mathcal{F}_4} M(f, f^i(J)) \geq \alpha^{2N}.$$

La prueba del Lema 6.3.1 finaliza considerando  $\delta = \exp(-V) \left(\frac{d}{D}\right)^{4N} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{4N} \alpha^{2N}$ .  $\square$

Note que los cálculos realizados en la familia  $\mathcal{F}_4$  son falsos si permitimos la presencia de puntos críticos flat. Con el Lema 6.3.1 disponible estamos listos para probar el Teorema 6.3.1.

*Prueba del Teorema 6.3.1.* Supongamos que existe un intervalo errante  $I \subset S^1$ :  $f^n(I) \cap f^m(I) = \emptyset$  para todo  $n \neq m \in \mathbb{Z}$ .

Fijemos  $n \geq 1$ . Por el Teorema del Valor Medio existen  $a \in f^{-q_n - q_{n+1}}(I)$  y  $b \in f^{-q_{n+1}}(I)$  tales que:

$$Df^{q_{n+1}}(a) = \frac{|f^{-q_n}(I)|}{|f^{-q_n - q_{n+1}}(I)|} \quad \text{y} \quad Df^{q_{n+1}}(b) = \frac{|I|}{|f^{-q_{n+1}}(I)|}.$$

Sea  $J$  el intervalo compacto con extremos  $a$  y  $b$  que contiene  $I$ , y sea  $x \in I$ . Por combinatoria sabemos que los intervalos  $f^{-q_n}(I)$ ,  $f^{-q_n - q_{n+1}}(I)$ ,  $I$ ,  $f^{-q_{n+1}}(I)$  y  $f^{q_n}(I)$  están ordenados de esa manera (o la opuesta, dependiendo si  $n$  es par o impar). En cualquier caso  $J \subset (f^{-q_n}(x), f^{q_n}(x))$ , y entonces el Lema 6.3.1 dice que  $M(f^{q_{n+1}}, J) \geq \delta$ , o sea:

$$\left( \frac{|f^{q_{n+1}}(J)|}{|J|} \right)^2 \frac{|f^{-q_n - q_{n+1}}(I)| |f^{-q_{n+1}}(I)|}{|f^{-q_n}(I)| |I|} \geq \delta^2.$$

Equivalentemente:

$$\frac{|f^{-q_{n+1}}(I)|}{|f^{-q_n}(I)|} \geq \left( \frac{|J|}{|f^{q_{n+1}}(J)|} \right)^2 \left( \frac{|I|}{|f^{-q_n - q_{n+1}}(I)|} \right) \delta^2.$$

Como estamos asumiendo que  $I$  es un intervalo errante, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$  tenemos que:  $|f^{-q_n - q_{n+1}}(I)| \leq |I|^3 \delta^2$ . Usando que  $|f^{q_{n+1}}(J)| \leq 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  obtenemos:

$$\frac{|f^{-q_{n+1}}(I)|}{|f^{-q_n}(I)|} \geq \left( \frac{|J|}{|I|} \right)^2 > 1$$

pues  $I$  está estrictamente contenido en  $J$ . Esto contradice el hecho de que la sucesión  $\{|f^{-qn}(I)|\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito.  $\square$

En 1992, Martens, de Melo y van Strien [42] demostraron que ningún mapa de clase  $C^2$  del círculo (o de un intervalo compacto), que presenta apenas puntos críticos non-flat, admite intervalos errantes. En otras palabras: cualquier intervalo abierto cuyos iterados positivos son dos a dos disjuntos está contenido en la cuenca de atracción de una órbita periódica atractora o semi-atractora (vea también [45] y [46, Capítulo IV]).

## 6.4. Rigidez geométrica de mapas críticos

Dado que un mapa crítico no puede ser suavemente conjugado a una rotación, para estudiar problemas de rigidez geométrica debemos restringirnos a la clase de mapas críticos. Observaciones numéricas ([19], [49], [58]) sugirieron en los años ochenta una fuerte rigidez en la geometría de las órbitas de mapas críticos con un único punto crítico y con número de rotación de tipo limitado (vea la Definición 4.1.2 en el Capítulo 4). Esto fue enunciado como una conjetura en varios trabajos de Lanford ([36], [37]), Rand ([54], [55] y [56], vea también [49]) y Shenker ([58], vea también [19]) entre otros. Los siguientes son los resultados más recientes en el área:

**Teorema 6.4.1.** *Sean  $f$  y  $g$  dos mapas críticos de clase  $C^4$  con el mismo número de rotación irracional y con un único punto crítico de criticalidad impar. Sea  $h$  la conjugación topológica entre  $f$  y  $g$  que identifica el punto crítico de  $f$  con el punto crítico de  $g$ . Entonces:*

1.  $h$  es un difeomorfismo de clase  $C^1$ .
2. Para un conjunto de medida de Lebesgue total de números de rotación,  $h$  es un difeomorfismo  $C^{1+\alpha}$ .

En otras palabras: dentro de cada clase topológica de mapas críticos de clase  $C^4$ , el orden del punto crítico es el único invariante de las clases de conjugación  $C^1$ .

Comparando con lo que fue discutido en el Capítulo 5 vemos que, por un lado, la presencia del punto crítico genera una mayor rigidez que en el caso de difeomorfismos, pues existen conjugaciones diferenciables para cualquier número

irracional, sin ninguna condición Diofantina. Por otro lado, se han construido ejemplos ([2], [17]) que muestran que  $h$  puede no ser  $C^{1+\alpha}$  en general, incluso para dinámicas analíticas (vea el Corolario 4.1.1 en el Capítulo 4 por la definición de los números de rotación mencionados en el ítem (2) del Teorema 6.4.1). En la clase  $C^3$  se conoce que:

**Teorema 6.4.2.** *Dos mapas críticos de clase  $C^3$  con el mismo número de rotación de tipo limitado (vea la Definición 4.1.2 en el Capítulo 4) y con un único punto crítico con la misma criticalidad impar, son conjugados por un difeomorfismo  $C^{1+\alpha}$ , para un  $\alpha > 0$  universal.*

El enunciado del Teorema 6.4.2 es precisamente la *conjetura de rigidez* mencionada anteriormente. El Teorema 6.4.1 fue demostrado en [22], mientras que el Teorema 6.4.2 fue probado en [23] (vea también [21]). Ambos resultados se basan en trabajos anteriores de Herman, Świątek, de Faria, de Melo, Khmelev, Yampolsky, Khanin y Teplinsky entre otros (vea [26], [61], [14], [15], [17], [18], [62], [63], [64], [65], [35] y [32]). Sus pruebas están más allá del alcance de estas notas.

Finalizamos estas notas con el siguiente problema: sean  $f$  y  $g$  dos homeomorfismos del círculo de clase  $C^3$  con el mismo número de rotación irracional, y con  $N \geq 2$  puntos críticos non-flat. Denote por  $S_f = \{c_1, \dots, c_N\}$  el conjunto crítico ordenado de  $f$ , por  $S_g = \{c'_1, \dots, c'_N\}$  el conjunto crítico ordenado de  $g$ , y suponga que la criticalidad de  $c_i$  y  $c'_i$  es la misma para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Finalmente, denote por  $\mu_f$  y  $\mu_g$  las únicas medidas invariantes de  $f$  y  $g$  respectivamente.

Por el resultado de Yoccoz (Teorema 6.3.1) sabemos que  $f$  y  $g$  son topológicamente conjugadas. La condición  $\mu_f([c_i, c_{i+1}]) = \mu_g([c'_i, c'_{i+1}])$  para todo  $i \in \{1, \dots, N-1\}$  es necesaria (y suficiente) para tener una conjugación entre  $f$  y  $g$  que identifica los puntos críticos de  $f$  con los puntos críticos de  $g$ . Bajo este supuesto, resulta que esta conjugación es de hecho un homeomorfismo *quasi-simétrico*. Esto sigue de un trabajo reciente, bastante mas general, de Clark y van Strien [5] (vea también [12] y [13]).

*Problema 1.* Esta conjugación es un difeomorfismo?

Hasta donde sabemos, el Problema (1) permanece en abierto para  $N \geq 2$ .

# Bibliografía

- [1] Arnol'd, V. I., Small denominators I. Mappings of the circle onto itself, *Izv. Akad. Nauk. Math. Series*, **25**, 21-86, (1961) [*Translations of the Amer. Math. Soc. (series 2)*, **46**, 213-284, (1965)].
- [2] Avila, A., On rigidity of critical circle maps, *Bull. Braz. Math. Soc.*, **44**, 611-619, (2013).
- [3] Bonatti, C., Díaz, L., Viana, M., *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity*, Springer-Verlag, 2005.
- [4] Boyland, P., Bifurcations of circle maps: Arnol'd tongues, bistability and rotation intervals, *Commun. Math. Phys.*, **106**, 353-381, (1986).
- [5] Clark, T., van Strien, S., Quasisymmetric rigidity in one-dimensional dynamics, *manuscrito*.
- [6] Crovisier, S., Guarino, P., Palmisano, L., Ergodic properties of bimodal circle maps, aceptado para publicación en *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, disponible en [arXiv:1601.06807](https://arxiv.org/abs/1601.06807).
- [7] Denjoy, A., Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, *J. Math. Pure et Appl.*, **11**, 333-375, (1932).
- [8] Devaney, R., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2nd Edition, Westview Press, 2003.
- [9] Dixon, T. W., Gherghetta, T., Kenny, B.G., Universality in the quasi-periodic route to chaos, *Chaos*, **6**, 32-42, (1996).
- [10] Duff, Dusa Mc,  $C^1$ -minimal subsets of the circle, *Annales de l'institut Fourier*, **31(1)**, 177-193, (1981).

- [11] Epstein, A., Keen, L., Tresser, C., The set of maps  $F_{a,b} : x \mapsto x + a + \frac{b}{2\pi} \sin(2\pi x)$  with any given rotation interval is contractible, *Commun. Math. Phys.*, **173**, 313-333, (1995).
- [12] Estevez, G., de Faria, E., Real bounds and quasisymmetric rigidity of multicritical circle maps, aceptado para publicación en *Trans. Amer. Math. Soc.*, disponible en [arXiv:1511.09056](https://arxiv.org/abs/1511.09056).
- [13] Estevez, G., de Faria, E., Guarino, P., Beau bounds for multicritical circle maps, disponible en [arXiv:1611.00722](https://arxiv.org/abs/1611.00722).
- [14] de Faria, E., *Proof of universality for critical circle mappings*, PhD thesis, CUNY, 1992.
- [15] de Faria, E., Asymptotic rigidity of scaling ratios for critical circle mappings, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **19**, 995-1035, (1999).
- [16] de Faria, E., Guarino, P., Real bounds and Lyapunov exponents, *Disc. and Cont. Dyn. Sys. A*, **36(4)**, 1957-1982, (2016). Disponible en [arXiv:1506.01087](https://arxiv.org/abs/1506.01087).
- [17] de Faria, E., de Melo, W., Rigidity of critical circle mappings I, *J. Eur. Math. Soc.*, **1**, 339-392, (1999).
- [18] de Faria, E., de Melo, W., Rigidity of critical circle mappings II, *J. Amer. Math. Soc.*, **13**, 343-370, (2000).
- [19] Feigenbaum, M., Kadanoff, L., Shenker, S., Quasi-periodicity in dissipative systems. A renormalization group analysis, *Physica*, **5D**, 370-386, (1982).
- [20] Graczyk, J., Świątek, G., Critical circle maps near bifurcation, *Commun. Math. Phys.*, **176**, 227-260, (1996).
- [21] Guarino, P., *Rigidity conjecture for  $C^3$  critical circle maps*, PhD thesis, IMPA, 2012, disponible en [www.preprint.impa.br](http://www.preprint.impa.br).
- [22] Guarino, P., Martens, M., de Melo, W., Rigidity of critical circle maps, disponible en [arXiv:1511.02792](https://arxiv.org/abs/1511.02792).

- [23] Guarino, P., de Melo, W., Rigidity of smooth critical circle maps, *Journal of the European Mathematical Society*, **19(6)**, 1729-1783, (2017). Disponible en [arXiv:1303.3470](https://arxiv.org/abs/1303.3470).
- [24] Hall, G. R., A  $C^\infty$  Denjoy counterexample, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **1**, 261-272, (1981).
- [25] Herman, M., Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, *Publ. Math. IHES*, **49**, 5-234, (1979).
- [26] Herman, M., Conjugaison quasi-symétrique des homéomorphismes du cercle à des rotations (manuscript), (1988).
- [27] Hu, J., Sullivan, D., Topological conjugacy of circle diffeomorphisms, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **17**, 173-186, (1997).
- [28] Kadanoff, L., Shenker, S., Critical behavior of a KAM surface. I. Empirical results, *J. Statist. Phys.*, **27**, 631-656, (1982).
- [29] Katok, A., Hasselblatt, B., *Introduction to the modern theory of Dynamical Systems*, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [30] Katznelson, Y., Ornstein, D., The differentiability of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **9**, 643-680, (1989).
- [31] Katznelson, Y., Ornstein, D., The absolute continuity of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **9**, 681-690, (1989).
- [32] Khanin, K., Teplinsky, A., Robust rigidity for circle diffeomorphisms with singularities, *Invent. Math.*, **169**, 193-218, (2007).
- [33] Khanin, K., Teplinsky, A., Herman's theory revisited, *Invent. Math.*, **178**, 333-344, (2009).
- [34] Khinchin, A. Ya., *Continued fractions*, (reprint of the 1964 translation), Dover Publications, Inc., 1997.
- [35] Khmelev, D., Yampolsky, M., The rigidity problem for analytic critical circle maps, *Mosc. Math. J.*, **6**, 317-351, (2006).

- [36] Lanford, O. E., Renormalization group methods for critical circle mappings with general rotation number, *VIIIth Int. Congress on Mathematical Physics (Marseille, 1986)*, World Scientific, Singapore, 532-536, (1987).
- [37] Lanford, O. E., Renormalization group methods for circle mappings, *Nonlinear Evolution and Chaotic Phenomena (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B: Phys., 176)*, Plenum, New York, 25-36, (1988).
- [38] Lang, S., *Introduction to diophantine approximations*, (new expanded edition), Springer-Verlag, (1995).
- [39] MacKay, R. S., A renormalisation approach to invariant circles in area-preserving maps, *Physica*, **7D**, 283-300, (1983).
- [40] MacKay, R. S., *Renormalisation in Area-Preserving Maps*, World-Scientific, 1993.
- [41] Mañé, R., *Ergodic theory and differentiable dynamics*, Springer-Verlag, 1987.
- [42] Martens, M., de Melo, W., van Strien, S., Julia-Fatou-Sullivan theory for real one-dimensional dynamics, *Acta Math.*, **168**, 273-318, (1992).
- [43] McMullen, C.T., Self-similarity of Siegel disks and Hausdorff dimension of Julia sets, *Acta Math.*, **180**, 247-292, (1998).
- [44] McMullen, C.T., *Complex Dynamics and Renormalization*, Annals of Math. Studies, **135**, Princeton University Press, 1994.
- [45] de Melo, W., van Strien, S., A structure theorem in one-dimensional dynamics, *Annals of Math.*, **129**, 519-546, (1989).
- [46] de Melo, W., van Strien, S., *One-dimensional dynamics*, Springer-Verlag, 1993.
- [47] Milnor, J., *Dynamics in One Complex Variable*, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, **160**, 2006.
- [48] Misiurewicz, M., Ziemian, K., Rotation Sets for Maps of Tori, *Journal of the London Mathematical Society*, **40**, no. 2, 490-506, (1989).

- [49] Ostlund, S., Rand, D., Sethna, J., Siggia, E., Universal properties of the transition from quasi-periodicity to chaos in dissipative systems, *Physica*, **8D**, 303-342, (1983).
- [50] J. Palis, F. Takens, Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations, *Cambridge Univ. Press*, 1993.
- [51] Petersen, C. L., Local connectivity of some Julia sets containing a circle with an irrational rotation, *Acta Math.*, **177**, 163-224, (1996).
- [52] Petersen, C. L., Zakeri, S., On the Julia set of a typical quadratic polynomial with a Siegel disk, *Annals of Math.*, **159**, 1-52, (2004).
- [53] Przytycki, F., Rivera-Letelier, J., Smirnov, S., Equivalence and topological invariance of conditions for non-uniform hyperbolicity in the iteration of rational maps, *Invent. Math.*, **151**, 29-63, (2003).
- [54] Rand, D., Universality and renormalisation in dynamical systems, *New Directions in Dynamical Systems*, Eds. T. Bedford and J.W. Swift. Cambridge University Press, Cambridge, (1987).
- [55] Rand, D., Global phase space universality, smooth conjugacies and renormalisation: I. The  $C^{1+\alpha}$  case, *Nonlinearity*, **1**, 181-202, (1988).
- [56] Rand, D., Existence, non-existence and universal breakdown of dissipative golden invariant tori: I. Golden critical circle maps, *Nonlinearity*, **5**, 639-662, (1992).
- [57] Schwartz, A. J., A generalization of a Poincaré-Bendixson theorem to closed two-dimensional manifolds, *Amer. J. Math.*, **85**, 453-458, (1963).
- [58] Shenker, S., Scaling behavior in a map of a circle onto itself: empirical results, *Physica*, **5D**, 405-411, (1982).
- [59] M. Shub, Global Stability of Dynamical Systems, *Springer-Verlag*, 1987.
- [60] S. Smale, Diffeomorphisms with many periodic points, *Differential and Combinatorial Topology*, Princeton Univ. Press, (1964), 63-80.
- [61] Świątek, G., Rational rotation numbers for maps of the circle, *Commun. Math. Phys.*, **119**, 109-128, (1988).

- [62] Yampolsky, M., Complex bounds for renormalization of critical circle maps, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **19**, 227-257, (1999).
- [63] Yampolsky, M., The attractor of renormalization and rigidity of towers of critical circle maps, *Commun. Math. Phys.*, **218**, 537-568, (2001).
- [64] Yampolsky, M., Hyperbolicity of renormalization of critical circle maps, *Publ. Math. IHES*, **96**, 1-41, (2002).
- [65] Yampolsky, M., Renormalization horseshoe for critical circle maps, *Commun. Math. Phys.*, **240**, 75-96, (2003).
- [66] Yoccoz, J.-C., Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, **17**, 333-359, (1984).
- [67] Yoccoz, J.-C., Il n'y a pas de contre-exemple de Denjoy analytique, *C.R. Acad. Sc. Paris*, **298**, 141-144, (1984).