Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo III
Licenciatura en Matemática
Primer semestre 2017

Práctico 1

Sucesiones y series de funciones

1. Determinar cuáles de las siguientes funciones convergen puntualmente o uniformemente. Estudiar la continuidad de la función límite en cada caso.
   - $f_n(x) = \frac{\sin(x)}{n}$ con $x \in \mathbb{R}$.
   - $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$ con $x \in (0,1)$.
   - $f_n(x) = \frac{x}{nx+1}$ con $x \in (0,1)$.
   - $f_n(x) = \frac{x}{(x+1)^n}$ con $x \in [1,2]$.
   - $f_n(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1/n \\ 1-nx & 0 \leq x \leq 1/n \\ 1+nx & -1/n \leq x \leq 0 \end{cases}$

2. Demostrar que la sucesión de funciones
$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n$$
no converge uniformemente pero sí puntualmente.

3. Consideremos la sucesión de funciones en $\mathbb{R}$
$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$$
   a) Calcular el límite puntual de las sucesiones f_n y f_n' a los que llamamos f y g.
   b) Probar que existe $f'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ pero $f'(0) \neq g(0)$.

4. Sea $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ para $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$.
   Probar que $f_n \to 0$, pero $f_n' \nrightarrow 0$.

5. Sea la sucesión $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+n2^n x^2}$ para $x \in [0,1]$.
   a) Determinar el límite puntual.
   b) Comparar $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ y $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$

6. Probar que la sucesión de funciones $f_n(x) = x/n$ converge uniformemente en cualquier intervalo compacto. ¿ Es uniformemente convergente en $\mathbb{R}$?

7. Sea $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2+(1-nx)^2}$ con $x \in [0,1], n \geq 1$. Probar que $f_n \to 0$ puntualmente pero no existe ninguna subsucesión que converja uniformemente.

8. Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & x \in [0,1/n] \\ -n^2 x + 2n & 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

a) Demostrar que $f_n \to 0$ puntualmente.

b) Probar que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$.

c) Concluir que f_n no converge uniformemente a 0.

9. Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \lim_{k\to\infty} (\cos n!\pi x)^{2k}$$

Probar que existe el límite puntual de f_n pero no es integrable Riemann. (Sugerencia: dividir en dos casos, x racional e irracional).

10. Probar que existen funciones continuas derivables en ningún punto. (Sugerencia: Considerar $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ donde $\varphi(x) = |x|$ si $x \in [-1, 1]$, $\varphi(x) = \varphi(x + 2)$ si no).

11. Probar que si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ es convergente, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ también lo es. ¿Es cierto el recíproco?

12. Probar que si $a_n \geq 0$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ también es convergente.

13. Investigar el comportamiento (convergencia o divergencia) de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ en cada caso:

    a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

    b) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

    c) $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

    d) $a_n = \frac{1}{1+z^n}$

14. Encontrar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias. En cada caso, intentar ver el comportamiento en el borde del intervalo de convergencia.

    a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$

    b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

    c) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

    d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

    e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

    f) $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$

    g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$

    h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$

    i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} x^n$

15. Sea la función real $x \mapsto e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

    a) Probar que es derivable en $\mathbb{R}$ y que $\frac{d}{dx} e^x = e^x$.

    b) Probar que $e^{x+y} = e^x e^y$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

    c) Hallar una primitiva de $x \mapsto e^{x^2}$ que no dependa del símbolo integral.

16. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ Probar que f tiene derivadas de todos los órdenes en 0 y que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \geq 0$. Concluir que f no admite un desarrollo en serie de potencias alrededor de 0.