Tópicos de Conteo

Notas adaptadas por Alejandro Cholaquidis

a partir de las notas del curso de
Matemática Discreta, edición 2025,
para la Licenciatura en Matemática,

Facultad de Ciencias

30 de abril de 2026

Índice general

¿Qué vamos a hacer en estas notas?

Estas notas tienen como objetivo desarrollar algunas herramientas básicas de la Matemática Discreta. El recorrido comienza con el lenguaje de los conjuntos, las funciones y las relaciones, que nos permite describir objetos matemáticos y vínculos entre ellos con precisión. Luego formalizamos la idea de contar: decir que un conjunto tiene n elementos significa compararlo, mediante una biyección, con el conjunto $\{1, \ldots, n\}$.

A partir de esa idea estudiamos principios básicos de conteo, como los principios de la suma y del producto, que permiten contar procesos dividiéndolos en casos o en etapas. Finalmente estudiamos combinaciones y variantes: situaciones donde importa elegir elementos, pero no necesariamente ordenarlos. Así, el hilo conductor será pasar de describir conjuntos a contar sus elementos de manera sistemática.

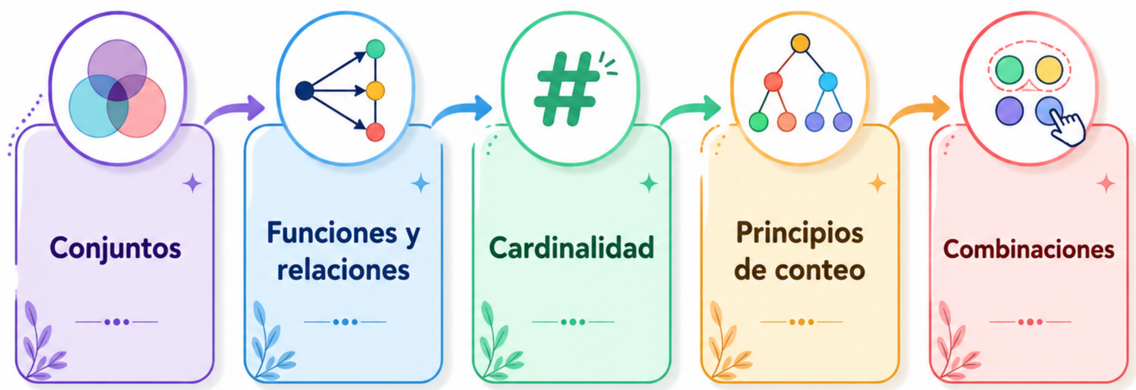


Figura 1: Hilo conductor de las notas: de conjuntos a combinaciones.

1 Conjuntos y funciones

La teoría de conjuntos es una teoría axiomática, es decir que parte de conceptos primitivos (en este caso el de *conjunto* y el de *pertenencia*) que están regidos por una lista de sentencias (axiomas) a partir de las cuales se prueban todos los teoremas. En esta parte del curso trabajaremos de manera un poco informal y no especificaremos los axiomas de la teoría. Así por ejemplo mostraremos construcciones de ciertos conjuntos sin justificar por qué estos están bien definidos dentro de la teoría.

¿Para qué estudiamos conjuntos?

El lenguaje de conjuntos nos permite ser precisos sobre qué objetos estamos considerando. Las funciones permiten describir asignaciones entre conjuntos, y las relaciones permiten expresar vínculos más generales, como equivalencia, orden o pertenencia a una misma clase. Estos conceptos serán la base para definir qué significa contar y para formular problemas de conteo.

1.1 Primeras definiciones

El concepto de **conjunto** representa la idea intuitiva de una colección de objetos. A estos objetos los llamaremos **elementos** del conjunto. Escribiremos $x \in X$ para indicar que el objeto x pertenece al conjunto X o, lo que es lo mismo, que x es un elemento de X.

Un conjunto queda determinado por sus elementos, es decir que si A y B son dos conjuntos, entonces $A = B$ si y solo si A y B tienen los mismos elementos. Esto nos dice que en principio para definir un conjunto debemos decir cuáles son sus elementos. Podemos por ejemplo hacer esto nombrándolos explícitamente o identificarlos mediante una propiedad que los caracterice. En el primer caso decimos que estamos definiendo el conjunto por **extensión** mientras que en el segundo lo estamos definiendo por **comprensión**.

Ejemplo

Definimos el mismo conjunto A por:

- extensión: $A = \{\text{a, e, i, o, u}\}$,
- comprensión: A es el conjunto de todas las vocales del alfabeto latino.

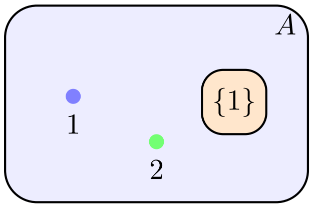
Otro ejemplo es el siguiente:

- $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, o
- $B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par y } n < 10\}$.

Decimos que un conjunto A está **contenido** o **incluido** en otro conjunto B si todos los elementos de A son elementos de B. También podemos decir en este caso que A es un **subconjunto** de B o que B **contiene** a A y lo escribimos $A \subseteq B$. Observar que si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$. Como ejemplo de inclusiones podemos mirar los conjuntos de números:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

También escribiremos $A \nsubseteq B$ para indicar que A no está incluido en B, y $A \subsetneq B$ para indicar que A está incluido en B pero estos conjuntos no son iguales. El **conjunto vacío** se notará por $\emptyset$. Este es el conjunto que no tiene elementos. Observar que si X es cualquier conjunto, entonces $\emptyset \subseteq X$.



$1 \in A$, $\{2\} \notin A$

$\{1\} \in A$

$\{1\} \subseteq A$

$\{\{1\}\} \subseteq A$

Los elementos de A son 1, 2 y $\{1\}$.

Figura 1.1: Diferencia entre pertenecer a un conjunto y estar incluido en él.

1.2 Unión de conjuntos

La **unión** de dos conjuntos A y B es el conjunto

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Observar que A y B son ambos subconjuntos de $A \cup B$. Más aún, $A \cup B$ es el menor conjunto que contiene a ambos, es decir que si otro conjunto C contiene a A y a B, entonces $A \cup B \subseteq C$.

Observación 1.2.1. *La unión de conjuntos es claramente conmutativa (por definición). También es, por definición, asociativa. Es decir que si A, B y C son tres conjuntos, entonces*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Para esto simplemente observamos que $x \in A \cup (B \cup C)$ si y sólo si se da alguna de las siguientes condiciones: (1) $x \in A$, (2) $x \in B$, (3) $x \in C$.
De la misma forma se observa que $x \in (A \cup B) \cup C$ si y sólo si se cumple alguna de las condiciones (1), (2) o (3).

La Observación 1.2.1 permite que tenga sentido notar $A \cup B \cup C$ sin paréntesis, que representa entonces la unión de tres conjuntos.

Consideremos ahora una colección de conjuntos $\mathcal{C}$. Definimos la unión de $\mathcal{C}$ por

$$\bigcup \mathcal{C} := \{x : x \in C \text{ para algún } C \in \mathcal{C}\}.$$

Observar que si $\mathcal{C} = \{A, B\}$, entonces

$$\bigcup \mathcal{C} = A \cup B.$$

Si tomamos $\mathcal{C} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ escribimos

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup \mathcal{C}.$$

Si $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ es una familia de conjuntos, una notación usual para $\bigcup \mathcal{A}$ es

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Es decir,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ para algún } i \in I\}.$$

Ejemplo

Para cada número primo $p \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto $A_p = \{pn : n \in \mathbb{N}\}$. Notamos por $\mathcal{P}$ al conjunto de todos los números primos. Se tiene

$$\bigcup_{p \in \mathcal{P}} A_p = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

(el conjunto que contiene a todos los números naturales excepto el 1).

1.3 Intersección y resta de conjuntos

Si A y B son conjuntos, definimos:

- su **intersección**: $A \cap B := \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$,
- y su **resta**: $A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$.

Diremos que A y B son **disjuntos** si $A \cap B = \emptyset$. Observar que la intersección (al igual que la unión) es conmutativa y asociativa (la resta no es ni una cosa ni otra).

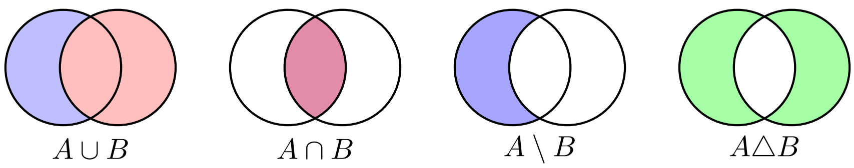


Figura 1.2: Operaciones básicas entre dos conjuntos.

Ejemplo

Consideramos $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{3n : n \in \mathbb{N}\}$. Luego

$$A \cap B = \{6n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad A \setminus B = \{2, 4, 8, 10, 14, 16, \cdots\}$$

(el conjunto de los pares que no son múltiplos de 3)

En general, si $\mathcal{C}$ es una colección de conjuntos, su intersección se define por

$$\bigcap \mathcal{C} := \{x : x \in C \ \forall C \in \mathcal{C}\}.$$

Si $\mathcal{C}$ está indexada ($\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$), entonces también escribimos

$$\bigcap \mathcal{C} = \bigcap_{i \in I} C_i.$$

Por ejemplo si consideramos los conjuntos A_p como en el Ejemplo 1.2, tenemos

$$\bigcap_{p \in \mathcal{P}} A_p = \{0\}.$$

Si $A \subseteq X$, entonces definimos el **complemento** de A en X como el conjunto $A^c = X \setminus A$. Observar que en la notación A^c no se explicita el conjunto X. Cuando se habla de complemento, el conjunto X se piensa como el *universo* en el que están contenidos los conjuntos y se deduce del contexto. Si esto no es así, entonces es mejor mantener la notación $X \setminus A$ que explicita el conjunto X.

Ejercicio

Probar, para A, B subconjuntos de X:

1. $A \setminus B = A \cap B^c$.
2. Si $A \subseteq B$, entonces $B^c \subseteq A^c$ (*el* universo *implícito es* X).

Solución Recordemos que, si A y B son subconjuntos de un conjunto universo X, entonces $A \setminus B = \{x \in X : \ x \in A \text{ y } x \notin B\}$, y $B^c = \{x \in X : \ x \notin B\}$.

1. Queremos probar que $A \setminus B = A \cap B^c$. Para probar una igualdad entre conjuntos, probamos las dos inclusiones.

   Primero veamos que $A \setminus B \subseteq A \cap B^c$. Sea $x \in A \setminus B$. Por definición de diferencia de conjuntos, esto significa que $x \in A$ y $x \notin B$. Como $x \notin B$, por definición de complemento se tiene que $x \in B^c$. Entonces $x \in A$ y $x \in B^c$. Por lo tanto, $x \in A \cap B^c$. Así, $A \setminus B \subseteq A \cap B^c$.

   Ahora probemos la inclusión contraria: $A \cap B^c \subseteq A \setminus B$. Sea $x \in A \cap B^c$. Por definición de intersección, $x \in A$ y $x \in B^c$. Como $x \in B^c$, por definición de complemento, $x \notin B$. Entonces $x \in A$ y $x \notin B$. Por definición de diferencia de conjuntos, $x \in A \setminus B$. Así, $A \cap B^c \subseteq A \setminus B$.

   Como probamos ambas inclusiones, concluimos que $A \setminus B = A \cap B^c$.

2. Supongamos que $A \subseteq B$. Queremos probar que $B^c \subseteq A^c$.

   Sea $x \in B^c$. Por definición de complemento, $x \notin B$. Queremos probar que $x \in A^c$, es decir, queremos probar que $x \notin A$.

   Razonemos por contradicción. Supongamos que $x \in A$. Como $A \subseteq B$, todo elemento de A pertenece también a B. Entonces, de $x \in A$ se deduce que

$x \in B$. Pero esto contradice que $x \notin B$.

Por lo tanto, no puede ocurrir que $x \in A$. Entonces $x \notin A$. Por definición de complemento, $x \in A^c$. Así, todo $x \in B^c$ pertenece a A^c, y por lo tanto $B^c \subseteq A^c$.

Diremos que dos conjuntos son **disjuntos** si su intersección es $\emptyset$.

Ejercicio

¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?
a) $\{1, 2, 3\}$
b) $\{1, 2, 2, 3\}$
c) $\{3, 2, 1\}$
d) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$
e) $\{\{1, 2, 3\}\}$
f) $\{1, \{2, 3\}\}$
g) $\{1, 2, 2, 3\}$
h) $\{3, 2\} \cup \{1, 2\}$
i) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} \cap \{1, 2, 3\}$
Solución Recordemos que en un conjunto no importa el orden ni las repeticiones. Por lo tanto,

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{3, 2\} \cup \{1, 2\}.$$

Luego los conjuntos iguales son los de los ítems a, b, c, g, h. En efecto,

$$\{3, 2\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3\}.$$

Los demás son distintos: en el ítem 4 los elementos son los conjuntos $\{1\}, \{2\}, \{3\}$; en el ítem 5 hay un único elemento, que es $\{1, 2, 3\}$; en el ítem 6 los elementos son 1 y $\{2, 3\}$. Finalmente,

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} \cap \{1, 2, 3\} = \varnothing,$$

pues ningún elemento del primer conjunto coincide con un elemento del segundo.

Ejercicio

Sea $A = \{1, \{1\}, 2\}$. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son válidas.
a) $1 \in A$
b) $\{1\} \in A$
c) $\{1\} \subseteq A$
d) $\{\{1\}\} \subseteq A$
e) $\{2\} \in A$
f) $\{2\} \subseteq A$
g) $\{\{2\}\} \subseteq A$
h) $\{\{2\}\} \subsetneq A$

Solución
Los elementos de $A = \{1, \{1\}, 2\}$ son exactamente $1, \{1\}, 2$. Por tanto:

afirmación	valor	razón
a) $1 \in A$	V	1 es elemento de A
b) $\{1\} \in A$	V	$\{1\}$ es elemento de A
c) $\{1\} \subseteq A$	V	$1 \in A$
d) $\{\{1\}\} \subseteq A$	V	$\{1\} \in A$
e) $\{2\} \in A$	F	$\{2\}$ no es elemento de A
f) $\{2\} \subseteq A$	V	$2 \in A$
g) $\{\{2\}\} \subseteq A$	F	$\{2\} \notin A$
h) $\{\{2\}\} \subsetneq A$	F	$\{\{2\}\} \not\subseteq A$

Luego las válidas son a), b), c), d), f).

Ejercicio

Indique si las siguientes afirmaciones son válidas.
a) $\emptyset \in \emptyset$
b) $\emptyset \subseteq \emptyset$
c) $\emptyset \subsetneq \emptyset$
d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
f) $\emptyset \subsetneq \{\emptyset\}$
Solución Recordemos que $\emptyset$ no tiene elementos, que $\emptyset \subseteq A$ para todo conjunto A, y que $A \subsetneq B$ significa $A \subseteq B$ y $A \neq B$. Entonces:

afirmación	valor	justificación
a) $\emptyset \in \emptyset$	F	$\emptyset$ no tiene elementos
b) $\emptyset \subseteq \emptyset$	V	$\emptyset \subseteq A$ para todo A
c) $\emptyset \subsetneq \emptyset$	F	$\emptyset = \emptyset$
d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$	V	$\{\emptyset\}$ tiene como único elemento a $\emptyset$
e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$	V	$\emptyset \subseteq A$ para todo A
f) $\emptyset \subsetneq \{\emptyset\}$	V	$\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ y $\emptyset \neq \{\emptyset\}$

Por lo tanto, las verdaderas son: b), d), e), f).

Ejercicio

Determine todos los elementos de los siguientes conjuntos.
a) $\{1 + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

b) $\{1 + (1/n) \mid n \in \{1, 2, 3, 5, 7\}\}$

c) $\{n + n^2 \mid n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$
Solución a) $\{1 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\} = \{0, 2\}$, pues si n es par, $1 + (-1)^n = 2$, y si

n es impar, $1 + (-1)^n = 0$.

b) $$\left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \{1, 2, 3, 5, 7\}\right\} = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}\right\}.$$

c) $$\{n + n^2 : n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\} = \{0, 2, 6, 12, 20\}.$$

Ejercicio

Dados A, B conjuntos, llamamos diferencia simétrica entre A y B al conjunto

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Observar que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ y que $A \triangle B = B \triangle A$.
Solución
Sea x un elemento del universo. Entonces

$$x \in A \triangle B \iff x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Por definición de diferencia,

$$x \in A \triangle B \iff x \in A \cup B \text{ y } x \notin A \cap B.$$

Es decir,

$$x \in A \triangle B \iff (x \in A \text{ o } x \in B) \text{ y no ocurre que } (x \in A \text{ y } x \in B).$$

Por lo tanto, x pertenece a exactamente uno de los dos conjuntos A y B. Entonces $x \in A \triangle B \iff (x \in A \text{ y } x \notin B)$ o $(x \in B \text{ y } x \notin A)$. Luego $x \in A \triangle B \iff x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Como esto vale para todo x, se concluye que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
Además, $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ y $B \triangle A = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$. Como la unión es conmutativa, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$, por lo tanto $A \triangle B = B \triangle A$.

1.4 Producto cartesiano de conjuntos

El **producto cartesiano** de dos conjuntos A y B se define como

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\},$$

donde (a, b) es el par ordenado de los elementos a y b. Observar que, al tratarse de pares ordenados, el producto cartesiano no es conmutativo.

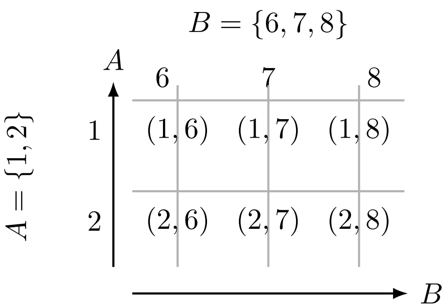


Figura 1.3: El producto cartesiano $A \times B$ como conjunto de pares ordenados.

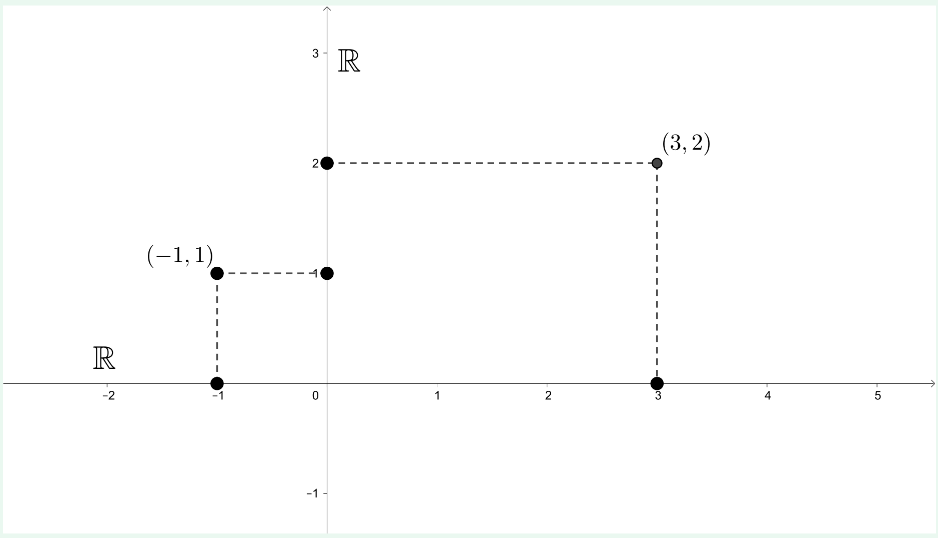
Ejemplo

1. Si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$, entonces $A \times B = \emptyset$.
2. Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{6, 7, 8\}$, entonces

$$A \times B = \{(1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 6), (2, 7), (2, 8)\}.$$

   Determinar $B \times A$.

3. El producto cartesiano de la recta real $\mathbb{R}$ con sí misma es el plano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De esta manera los puntos del plano quedan determinados por sus dos coordenadas reales.



1.5 Conjunto de partes

El **conjunto de partes** o **conjunto potencia** de un conjunto A es

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$$

es decir, el conjunto formado por todos los subconjuntos de A.

Ejemplo

1. El conjunto de partes de $A = \{1, 2\}$ es
$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$
2. El conjunto de partes del conjunto vacío es $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Ejercicio

Sean
a) $A = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 7\}$
b) $B = \{2n : n \in A\}$
c) $C = \{3n : n \in (A \cap B)\}$
d) $D = \{1, 2, 3\}$
Calcular:
a) $A \cup B$
b) $A \cup D$
c) $A \cap C$
d) $A \setminus B$
e) $A \setminus D$
f) $D \setminus A$
g) $C \setminus A$
h) $A \triangle D$
i) $A \triangle (B \cup D)$
j) $A \times D$
k) $\mathcal{P}(D)$
Solución
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$.
Además, $A \cap B = \{2, 4, 6\}$, y por lo tanto $C = \{3n : n \in A \cap B\} = \{6, 12, 18\}$.
Entonces:
a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14\}$.
b) $A \cup D = A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
c) $A \cap C = \{6\}$.
d) $A \setminus B = \{1, 3, 5, 7\}$.
e) $A \setminus D = \{4, 5, 6, 7\}$.
f) $D \setminus A = \emptyset$.
g) $C \setminus A = \{12, 18\}$.
h) $A \triangle D = (A \setminus D) \cup (D \setminus A) = \{4, 5, 6, 7\}$.
i) Como $B \cup D = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$, se tiene $A \triangle (B \cup D) = \{5, 7, 8, 10, 12, 14\}$.
j) $A \times D = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3),$
$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (7, 1), (7, 2), (7, 3)\}$.
k) $\mathcal{P}(D) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Ejercicio

Considerando los siguientes subconjuntos de $\mathbb{Z}$, indique cuáles son iguales entre sí.

$$\begin{array}{lll} A=\{2m+1 \mid m\in\mathbb{Z}\}, & B=\{2n+3 \mid n\in\mathbb{Z}\}, & C=\{2m-3 \mid m\in\mathbb{Z}\}, \\ D=\{3r+1 \mid r\in\mathbb{Z}\}, & E=\{3m+2 \mid m\in\mathbb{Z}\}, & F=\{3m-2 \mid m\in\mathbb{Z}\}. \end{array}$$

Solución
Los conjuntos

$$A=\{2m+1 : m\in\mathbb{Z}\}, \qquad B=\{2n+3 : n\in\mathbb{Z}\}, \qquad C=\{2m-3 : m\in\mathbb{Z}\}$$

son iguales, pues todos describen el conjunto de los enteros impares:

$$A=B=C=\{k\in\mathbb{Z} : k \text{ es impar}\}.$$

En efecto, $2n+3=2(n+1)+1$, $2m-3=2(m-2)+1$. Por otro lado,

$$D=\{3r+1 : r\in\mathbb{Z}\}=\{k\in\mathbb{Z} : k\equiv 1 \pmod 3\}.$$

Además, $F=\{3m-2 : m\in\mathbb{Z}\}=\{3(m-1)+1 : m\in\mathbb{Z}\}$, por lo tanto $D=F$.
En cambio, $E=\{3m+2 : m\in\mathbb{Z}\}=\{k\in\mathbb{Z} : k\equiv 2 \pmod 3\}$, y no coincide con ninguno de los anteriores.
Luego las únicas igualdades entre los conjuntos dados son $A=B=C$, $D=F$.

1.6 Funciones

Hasta ahora describimos conjuntos y operaciones entre ellos. El siguiente paso es estudiar formas de asignar a cada elemento de un conjunto un elemento de otro. Esa idea da lugar al concepto de función.

Dados conjuntos A, B, se llama **relación** de A en B a cualquier subconjunto de $A\times B$.

Una **función** de A en B es una relación $f\subset A\times B$ que cumple:

$$\forall a\in A \text{ existe un único } b\in B \text{ tal que } (a,b)\in f$$

En este caso llamamos **dominio** de f al conjunto A y **codominio** de f al conjunto B.

Escribimos $f : A\to B$ para indicar que f es una función de A en B y $f(a)=b$ para denotar que $(a,b)\in f$.

Además, notaremos B^A al conjunto de todas las funciones de A en B.

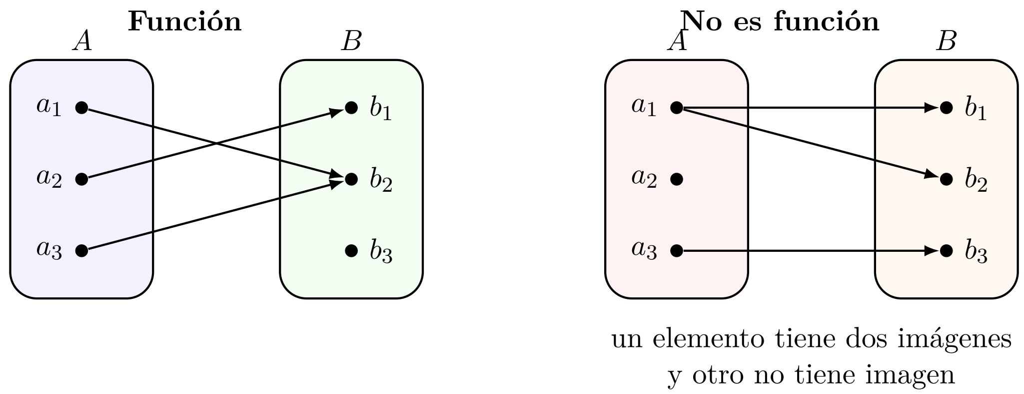


Figura 1.4: Una función asigna a cada elemento del dominio un único elemento del codominio.

Ejemplo

1. La única función posible $f : \emptyset \to B$ es la función vacía.
2. Sea X cualquier conjunto. Definimos la función **identidad** en X por
$$id_X : X \to X,\ id_X(x) = x\ \ \forall x \in X.$$
3. Si $A \subset B$ definimos la función **inclusión** por
$$i : A \to B,\ i(a) = a\ \forall a \in A.$$
(Si $A = B$, entonces $i = id_A$.)
4. Tomemos $b_0 \in B$. La función constante b_0 es $f : A \to B, f(a) = b_0\ \forall a \in A$.
5. Si $f : X \to Y$ es una función y $A \subset X$, llamamos **restricción de** f al subconjunto A, a la función $f_{|A} : A \to Y$ definida por $f_{|A}(x) = f(x)$.

Ejercicio

Averiguar si cada una de las siguientes relaciones de A en B es una función. Si lo es, determinar su imagen.

1. $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R},\ y = x^2 + 7\}$, $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{R}$.
2. $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R},\ y^2 = x\}$, $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{R}$.
3. $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R},\ y = 3x + 1\}$, $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{R}$.
4. $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q},\ x^2 + y^2 = 1\}$, $A = \mathbb{Q}$ y $B = \mathbb{Q}$.

Solución

Recordemos que una relación de A en B es función si para cada $x \in A$ existe un único $y \in B$ tal que (x, y) pertenece a la relación.

1. Sí es función, pues para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único $y = x^2 + 7$. Su imagen es
$$\mathrm{Im}(f) = \{x^2 + 7 : x \in \mathbb{R}\} = [7, +\infty).$$

2. No es función. Por ejemplo, si $x = 1$, entonces $y^2 = 1$ tiene dos soluciones: $y = 1$ e $y = -1$. Además, si $x < 0$, no hay soluciones reales.
3. Sí es función, pues para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único $y = 3x + 1$. Su imagen es $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, ya que dado $y \in \mathbb{R}$, tomando $x = (y-1)/3$ se obtiene $y = 3x + 1$.
4. No es función. Por ejemplo, si $x = 0$, entonces $y^2 = 1$, y por tanto $y = 1$ o $y = -1$. Hay dos valores posibles de $y \in \mathbb{Q}$ para el mismo x.

1.6.1 Imágenes y preimágenes

Tomemos $f : A \to B$ una función. Si $f(a) = b$, decimos que b es la **imagen** de a por f y que a es una **preimagen** de b por f. Además, para $X \subseteq A, Y \subseteq B$, definimos

- $f(X) = \{f(x) : x \in X\} \subset B$.
- $f^{-1}(Y) = \{a \in A : f(a) \in Y\}$.

También diremos que la **imagen** de la función f (o su **recorrido**) es el conjunto $f(A)$.

Ejercicio

Consideremos una función $f : X \to Y$ y dos familias de subconjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ con $A_i \subset X$ y $B_i \subset Y$ para todo $i \in I$, se tiene

1. $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
2. $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. ¿Se da la igualdad en general?
3. $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
4. $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

Ejercicio

La regla de asignación

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2},$$

¿define una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? ¿y una función $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$? En caso de que no, dar un dominio y un codominio donde dicha regla sí defina una función.

Solución

No define una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, porque la regla no está definida en

$$x = \sqrt{2} \quad \text{ni en} \quad x = -\sqrt{2},$$

ya que allí $x^2 - 2 = 0$. Tampoco define una función $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, porque aunque $x^2 - 2 \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{Z}$, los valores no siempre son enteros. Por ejemplo,

$$f(0) = \frac{1}{0^2 - 2} = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}.$$

Una forma correcta de definir la función es

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}.$$

También, restringiendo el dominio a los enteros, se puede definir

$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, \qquad f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}.$$

1.6.2 Inyectividad y sobreyectividad

Decimos que una función $f : X \to Y$ es **inyectiva** si para $x \neq x'$ se tiene $f(x) \neq f(x')$.

Ejemplo

1. La inclusión $i : A \to B$ (si $A \subset B$) es siempre inyectiva. También lo es la identidad.
2. Una función constante $f : A \to B$ no es inyectiva, salvo que A sea un conjunto unitario.
3. La función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$, es inyectiva.
4. La función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(n) = |n|$, no es inyectiva pues $f(-1) = f(1)$.

Decimos que $f : X \to Y$ es **sobreyectiva** si $f(X) = Y$, es decir, si su imagen coincide con su codominio.

Ejemplo

1. La inclusión de A en B no es sobreyectiva salvo que A sea igual a B. En ese caso la función es la identidad.
2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(n) = |n|$, es sobreyectiva.

Ejercicio

Consideremos una función $f : X \to Y$ y dos conjuntos $A \subset X$ y $B \subset Y$. Probar que:

1. $A \subset f^{-1}(f(A))$ y la igualdad se da si y sólo si f es inyectiva.
2. $f(f^{-1}(B)) \subset B$ y la igualdad se da si y sólo si f es sobreyectiva.

Solución
Primero observemos que, tal como está escrito, los "si y sólo si" deben entenderse como: la igualdad vale para todo $A \subset X$ si y sólo si f es inyectiva, y la igualdad vale para todo $B \subset Y$ si y sólo si f es sobreyectiva.

1. Sea $x \in A$. Entonces $f(x) \in f(A)$, luego $x \in f^{-1}(f(A))$. Por lo tanto $A \subset f^{-1}(f(A))$. Además,

   $$x \in f^{-1}(f(A)) \iff f(x) \in f(A) \iff \exists a \in A : \; f(x) = f(a).$$

   Si f es inyectiva, de $f(x) = f(a)$ se deduce $x = a$, y por tanto $x \in A$. Luego $f^{-1}(f(A)) \subset A$, y entonces $f^{-1}(f(A)) = A$. Recíprocamente, supongamos que $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo $A \subset X$. Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$.

Tomando $A = \{x_1\}$, se tiene $f(x_2) \in f(A)$, luego $x_2 \in f^{-1}(f(A)) = A = \{x_1\}$. Así, $x_2 = x_1$. Por lo tanto f es inyectiva.

2. Sea $y \in f(f^{-1}(B))$. Entonces existe $x \in f^{-1}(B)$ tal que $y = f(x)$. Como $x \in f^{-1}(B)$, se tiene $f(x) \in B$. Luego $y \in B$, y por tanto $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Además, $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$. En efecto, si $y \in f(f^{-1}(B))$, entonces $y \in B$ y $y \in f(X)$, luego $y \in B \cap f(X)$. Recíprocamente, si $y \in B \cap f(X)$, entonces existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$, y como $y \in B$, resulta $x \in f^{-1}(B)$. Luego $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$.

   Por lo tanto, $f(f^{-1}(B)) = B$ para todo $B \subset Y$ si y sólo si $B \cap f(X) = B$ para todo $B \subset Y$, lo cual equivale a $B \subset f(X)$ para todo $B \subset Y$. En particular, tomando $B = Y$, esto equivale a $Y \subset f(X)$, es decir, $f(X) = Y$. Por lo tanto, la igualdad vale para todo $B \subset Y$ si y sólo si f es sobreyectiva.

Una función es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

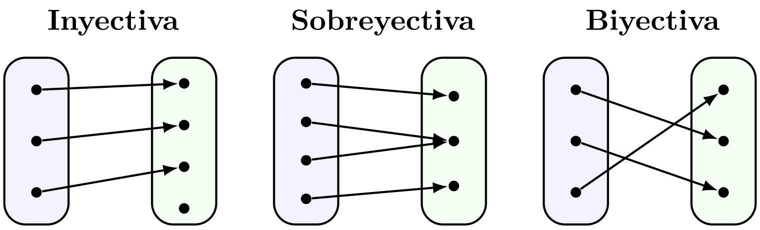


Figura 1.5: Tres tipos importantes de funciones.

Ejercicio

Determinar si la función $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es inyectiva y/o sobreyectiva y hallar su imagen en cada uno de los siguientes casos.

a) $f(x) = x + 7$
b) $f(x) = 2x - 3$
c) $f(x) = -x + 5$
d) $f(x) = x^2$
e) $f(x) = x^2 + x$
f) $f(x) = x^3$

Solución

a) $f(x) = x + 7$. Es inyectiva, pues $x + 7 = y + 7$ implica $x = y$. Es sobreyectiva, pues dado $z \in \mathbb{Z}$, tomando $x = z - 7 \in \mathbb{Z}$ se tiene $f(x) = z$. Por tanto, $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{Z}$.

b) $f(x) = 2x - 3$. Es inyectiva, pues $2x - 3 = 2y - 3$ implica $x = y$. No es sobreyectiva, porque sus valores son siempre impares. Su imagen es

$$\operatorname{Im}(f) = \{2x - 3 : x \in \mathbb{Z}\} = \{z \in \mathbb{Z} : z \text{ es impar}\}.$$

c) $f(x) = -x + 5$. Es inyectiva, pues $-x + 5 = -y + 5$ implica $x = y$. Es sobreyectiva, pues dado $z \in \mathbb{Z}$, tomando $x = 5 - z \in \mathbb{Z}$ se tiene $f(x) = z$. Por tanto, $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{Z}$.

d) $f(x) = x^2$. No es inyectiva, pues $f(1) = f(-1) = 1$. No es sobreyectiva, porque no toma valores negativos. Su imagen es $\operatorname{Im}(f) = \{x^2 : x \in \mathbb{Z}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$.

e) $f(x) = x^2 + x$. No es inyectiva, pues $f(0) = 0 = f(-1)$. No es sobreyectiva, porque sus valores son siempre no negativos y, además, no todo entero no negativo aparece. Su imagen es $\operatorname{Im}(f) = \{x^2+x : x \in \mathbb{Z}\} = \{x(x+1) : x \in \mathbb{Z}\}$.

f) $f(x) = x^3$. Es inyectiva, pues $x^3 = y^3$ implica $x = y$. No es sobreyectiva, porque por ejemplo 2 no es el cubo de ningún entero. Su imagen es

$$\operatorname{Im}(f) = \{x^3 : x \in \mathbb{Z}\}.$$

1.6.3 Composición y función inversa

Consideremos dos funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, su **composición** es la función $g \circ f : X \to Z$, definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \ \forall x \in X.$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Figura 1.6: La composición $g \circ f$ como aplicación sucesiva de dos funciones.

Proposición 1.6.1. *1. La composición de funciones es asociativa.*

2. La composición de funciones no es conmutativa.

3. Dada $f : A \to B$, se tiene $f \circ id_A = f$ y $id_B \circ f = f$.

Demostración. Se hizo en clase, queda como ejercicio revisarla. □

En el caso $X = Z$ decimos que g es **inversa** de f si $g \circ f = id_X : X \to X$ y $f \circ g = id_Y : Y \to Y$. Si f tiene una inversa diremos que es **invertible**.

Proposición 1.6.2. *Si una función f tiene inversa, entonces esta es única y se nota f^{-1}.*

Demostración. Supongamos que g y h son dos inversas de f, queremos ver que para todo $y \in Y$, $g(y) = h(y)$. Como f es biyectiva podemos tomar x tal $f(x) = y$, luego $g(y) = g(f(x)) = x = h(f(x)) = h(y)$. □

Lo que sigue lleva a probar que las funciones que admiten inversa son exactamente las biyectivas.

Lema 1.6.3. *Sean $f : A \to B, g : B \to C$ funciones.*

1. *Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.*
2. *Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.*

Demostración. 1. Supongamos que a, a' son elementos de A tales que $f(a) = f(a')$. Queremos ver que $a = a'$.
Aplicando g a la igualdad de arriba, se tiene $g(f(a)) = g(f(a'))$, que equivale a $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$. hora bien, como $g \circ f$ es inyectiva, se deduce $a = a'$.

2. Sea $c \in C$, buscamos $b \in B$ tal que $g(b) = a$. Como $g \circ f : A \to C$ es sobreyectiva, existe $a \in A$ tal que $(g \circ f)(a) = c$. Entonces $g(f(a)) = c$ y obtenemos que $f(a)$ es un elemento como el b que buscábamos.

□

Proposición 1.6.4. *Una función es invertible si y sólo si es biyectiva.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que g es una inversa de f. Veamos primero que f es inyectiva. Como $g \circ f = id_A$ y id_A es inyectiva, se deduce de la primera parte del Lema anterior, que f es inyectiva.
Por otra parte, como $f \circ g = id_B$ y id_B es sobreyectiva, se deduce de la segunda parte del Lema anterior, que f es sobreyectiva.
($\Leftarrow$) Ahora supongamos que f es biyectiva y definamos su inversa g de la siguiente manera: para $y \in Y$ sabemos que existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Ponemos entonces $g(y) = x$. Es directo ver que g es la inversa de f. □

Al conjunto de todas las funciones de un conjunto A en un conjunto B lo notamos B^A.

Ejercicio

Sean A y B conjuntos, con $A \neq \emptyset$, y sea $f : A \to B$. Decimos que f es *invertible a izquierda* si existe $g : B \to A$ tal que

$$g \circ f = \mathrm{id}_A\,.$$

Decimos que f es *invertible a derecha* si existe $g : B \to A$ tal que

$$f \circ g = \mathrm{id}_B\,.$$

1. Dar ejemplos de funciones invertibles de un solo lado, verificando que la "inversa de un lado" no lo sea del otro. Verificar además, en cada ejemplo, que no necesariamente hay una única inversa de un lado.
2. Probar que una función
   a) es invertible a izquierda si y sólo si es inyectiva;
   b) es invertible a derecha si y sólo si es sobreyectiva.

Solución

1. Ejemplo invertible a izquierda pero no a derecha. Sea

$$A = \{0, 1\}, \qquad B = \{0, 1, 2\}, \qquad f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

Definimos $g : B \to A$ por $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, $g(2) = 0$. Entonces $g \circ f = \mathrm{id}_A$, pero $(f \circ g)(2) = f(0) = 0 \neq 2$, por lo que g no es inversa a derecha. Además, la inversa a izquierda no es única, pues también sirve $\widetilde{g}(0) = 0$, $\widetilde{g}(1) = 1$, $\widetilde{g}(2) = 1$. Ejemplo invertible a derecha pero no a izquierda. Sea

$$A = \{0, 1, 2\}, \qquad B = \{0, 1\}, \qquad f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = 1.$$

Definimos $g : B \to A$ por $g(0) = 0, \qquad g(1) = 1$. Entonces $f \circ g = \mathrm{id}_B$, pero $(g \circ f)(2) = g(1) = 1 \neq 2$, por lo que g no es inversa a izquierda. Además, la inversa a derecha no es única, pues también sirve $\widetilde{g}(0) = 0$, $\widetilde{g}(1) = 2$.

2. *a*) Supongamos que f es invertible a izquierda. Entonces existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Si $f(x) = f(y)$, aplicando g obtenemos $g(f(x)) = g(f(y))$, y por tanto $x = y$. Luego f es inyectiva.

   Recíprocamente, supongamos que f es inyectiva. Como $A \neq \emptyset$, fijamos $a_0 \in A$ y definimos $g : B \to A$ por

$$g(y) = \begin{cases} x, & \text{si } y = f(x) \text{ para algún } x \in A, \\ a_0, & \text{si } y \notin f(A). \end{cases}$$

   Está bien definida porque f es inyectiva. Entonces, para todo $x \in A$, $g(f(x)) = x$, luego $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Por lo tanto, f es invertible a izquierda.

   b) Supongamos que f es invertible a derecha. Entonces existe $g : B \to A$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Si $y \in B$, entonces $y = \mathrm{id}_B(y) = f(g(y))$, por lo que $y \in f(A)$. Luego $f(A) = B$, y f es sobreyectiva.

   Recíprocamente, supongamos que f es sobreyectiva. Para cada $y \in B$, elegimos un elemento $x_y \in A$ tal que $f(x_y) = y$. Definimos $g : B \to A$ por $g(y) = x_y$. Entonces, para todo $y \in B$,

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x_y) = y.$$

   Por lo tanto, $f \circ g = \mathrm{id}_B$, y f es invertible a derecha.

Ejercicio

Sea A un conjunto con al menos dos elementos. Probar que si $f : A \to B$ es tal que tiene una única inversa a izquierda o una única inversa a derecha, entonces f es invertible.

Solución

Supongamos primero que f tiene una única inversa a izquierda. Entonces existe una única $g : B \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$. En particular, f es inyectiva. Probemos que también es sobreyectiva. Si no lo fuera, existiría $b_0 \in B \setminus f(A)$. Como A tiene al menos dos elementos, tomamos $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$. Definimos dos funciones $g_1, g_2 : B \to A$ que coinciden en $f(A)$ por

$$g_i(f(a)) = a, \qquad a \in A,$$

lo cual está bien definido porque f es inyectiva, y ponemos

$$g_1(b_0) = a_1, \qquad g_2(b_0) = a_2.$$

En los demás puntos de $B \setminus f(A)$ las definimos igual, de cualquier forma. Entonces

$$g_1 \circ f = \mathrm{id}_A, \qquad g_2 \circ f = \mathrm{id}_A,$$

pero $g_1 \neq g_2$, contradiciendo la unicidad. Luego f es sobreyectiva. Por tanto f es inyectiva y sobreyectiva, es decir, invertible.
Supongamos ahora que f tiene una única inversa a derecha. Entonces existe una única $g : B \to A$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_B$. En particular, f es sobreyectiva. Probemos que también es inyectiva. Si no lo fuera, existirían $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, tales que $f(a_1) = f(a_2) = b$. Sea $g : B \to A$ una inversa a derecha. Definimos $h : B \to A$ por $h(y) = g(y)$ si $y \neq b$, y elegimos

$$h(b) = \begin{cases} a_2, & \text{si } g(b) = a_1, \\ a_1, & \text{si } g(b) \neq a_1. \end{cases}$$

Entonces $h \neq g$ y, además,

$$f(h(b)) = b, \qquad f(h(y)) = f(g(y)) = y \quad (y \neq b).$$

Luego $f \circ h = \mathrm{id}_B$, lo cual contradice la unicidad de la inversa a derecha. Por lo tanto f es inyectiva. Como ya era sobreyectiva, f es invertible.

1.7 Ejercicio de respuesta Verdadero/Falso

Ejercicio

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.
a) Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup C \subseteq B \cup C$.
b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
c) $A \triangle B = \emptyset$ si y sólo si $A = B$.
d) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.
e) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
f) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
g) Si $A \times C = B \times C$ y $C \neq \emptyset$, entonces $A = B$.
h) Si $A \times C \subseteq B \times C$, entonces $A \subseteq B$.
Respuesta

a) V, b) V, c) V, d) V, e) V, f) F, g) V, h) F.

Ejercicio

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.
a) Para todo conjunto A, se tiene $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.
b) Para todo conjunto A, se tiene $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(A)$.
c) Si A tiene n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.
d) Si $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$, entonces $A = B$.
e) Si $A \subsetneq B$, entonces $\mathcal{P}(A) \subsetneq \mathcal{P}(B)$.
f) Si $A \in \mathcal{P}(B)$, entonces $A \subseteq B$.
g) Si $A \subseteq \mathcal{P}(B)$, entonces $A \subseteq B$.
h) Si $A \in B$, entonces $A \subseteq B$.
Respuesta

a) V, b) V, c) V, d) V, e) V, f) V, g) F, h) F.

Ejercicio

Sea $f : X \to Y$ una función. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.
a) Para todo $A \subseteq X$, se tiene $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
b) Para todo $A \subseteq X$, se tiene $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$.
c) Si f es inyectiva, entonces $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo $A \subseteq X$.
d) Para todo $B \subseteq Y$, se tiene $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.
e) Para todo $B \subseteq Y$, se tiene $B \subseteq f(f^{-1}(B))$.
f) Si f es sobreyectiva, entonces $f(f^{-1}(B)) = B$ para todo $B \subseteq Y$.
g) Si $f(A_1) = f(A_2)$, entonces $A_1 = A_2$.
h) Si $f^{-1}(B_1) = f^{-1}(B_2)$, entonces $B_1 = B_2$.
Respuesta

a) V, b) F, c) V, d) V, e) F, f) V, g) F, h) F.

Ejercicio

Sea $f : X \to Y$ una función y sean $\{A_i\}_{i\in I}$ subconjuntos de X y $\{B_i\}_{i\in I}$ subconjuntos de Y. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.
a) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
b) $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.
c) $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.
d) Si f es inyectiva, entonces $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.
e) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
f) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
g) Si $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, entonces $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = \emptyset$.
h) Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, entonces $f(A_1) \cap f(A_2) = \emptyset$.
Respuesta

a) V, b) F, c) V, d) V, e) V, f) V, g) V, h) F.

Ejercicio

Indique si las siguientes afirmaciones sobre funciones son verdaderas o falsas. Justifique.
a) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.
b) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces g es inyectiva.
c) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.
d) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces f es sobreyectiva.
e) Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
f) Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
g) Si $g \circ f$ es biyectiva, entonces f es inyectiva y g es sobreyectiva.
h) Si $g \circ f$ es biyectiva, entonces f y g son biyectivas.
Respuesta

a) V, b) F, c) V, d) F, e) V, f) V, g) V, h) F.

Ejercicio

Indique si las siguientes afirmaciones sobre inversas son verdaderas o falsas. Justifique.
a) Si f tiene inversa a izquierda, entonces f es inyectiva.
b) Si f tiene inversa a derecha, entonces f es sobreyectiva.
c) Si f es inyectiva, entonces tiene inversa a izquierda.
d) Si f es sobreyectiva, entonces tiene inversa a derecha.
e) Si f tiene inversa a izquierda, entonces esa inversa es única.
f) Si f tiene inversa a derecha, entonces esa inversa es única.
g) Si f es biyectiva, entonces tiene una única inversa.
h) Si f tiene una única inversa a izquierda y el dominio tiene al menos dos elementos, entonces f es biyectiva.
Respuesta

a) V, b) V, c) V, d) V, e) F, f) F, g) V, h) V.

1.8 Ejercicio de opción múltiple

En cada pregunta, marque la única opción verdadera.

1. Sean A, B, C conjuntos. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
   a) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
   b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
   c) Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup C \subseteq B \cup C$.
   d) Si $A \times C = B \times C$, entonces $A = B$, sin importar si C es vacío o no.
   e) Si $A \subseteq \mathcal{P}(B)$, entonces $A \subseteq B$.
2. Sean A y B conjuntos. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
   a) Para todo conjunto A, se tiene $\emptyset \in A$.

b) Si $A \in \mathcal{P}(B)$, entonces $B \subseteq A$.
c) Si $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$, entonces $A = B$.
d) Si $A \in B$, entonces $A \subseteq B$.
e) Si $A \subseteq \mathcal{P}(B)$, entonces $A \subseteq B$.

3. Sea $f : X \to Y$ una función, sean $A, A_i \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera para toda función f?

   a) $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$.
   b) $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$.
   c) $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.
   d) $B \subseteq f(f^{-1}(B))$.
   e) Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, entonces $f(A_1) \cap f(A_2) = \emptyset$.

4. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

   a) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces g es inyectiva.
   b) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces f es sobreyectiva.
   c) Si $g \circ f$ es biyectiva, entonces f y g son biyectivas.
   d) Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
   e) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces f es inyectiva.

5. Sea $f : X \to Y$ una función. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

   a) Si f tiene inversa a izquierda, entonces f es inyectiva.
   b) Si f tiene inversa a derecha, entonces f es inyectiva.
   c) Si f tiene inversa a izquierda, entonces esa inversa es única.
   d) Si f tiene inversa a derecha, entonces esa inversa es única.
   e) Si f es sobreyectiva, entonces tiene inversa a izquierda.

6. Sean A, B, C conjuntos. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

   a) Si $A \setminus B = A \setminus C$, entonces $B = C$.
   b) Si $A \cup B = A \cup C$, entonces $B = C$.
   c) Si $A \cap B = A \cap C$, entonces $B = C$.
   d) Si $A \setminus B = \emptyset$, entonces $A \subseteq B$.
   e) Si $A \triangle B = A \triangle C$, entonces $B \cap C = \emptyset$.

7. Sea $f : X \to Y$ una función. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

   a) Si $f(A_1) \subseteq f(A_2)$, entonces $A_1 \subseteq A_2$.
   b) Si $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$, entonces $B_1 \subseteq B_2$.
   c) Si f es inyectiva y $f(A_1) \subseteq f(A_2)$, entonces $A_1 \subseteq A_2$.
   d) Si f es sobreyectiva y $f(A_1) \subseteq f(A_2)$, entonces $A_1 \subseteq A_2$.
   e) Para todo $A \subseteq X$, se tiene $f^{-1}(f(A)) = \emptyset$.

8. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

   a) Si $g \circ f$ es inyectiva y f es sobreyectiva, entonces g es inyectiva.

   b) Si $g \circ f$ es sobreyectiva y g es inyectiva, entonces f es sobreyectiva.

   c) Si $g \circ f$ es inyectiva y g es sobreyectiva, entonces f es sobreyectiva.

   d) Si $g \circ f$ es sobreyectiva y f es inyectiva, entonces g es inyectiva.

   e) Si $g \circ f$ es biyectiva, entonces f y g son biyectivas.

Clave:

1) c, 2) c, 3) c, 4) d, 5) a, 6) d, 7) c, 8) a.

2 Cardinalidad de conjuntos finitos

Nos enfocamos ahora en estas preguntas:

- ¿Qué es contar?
- ¿Qué significa que un conjunto tenga n elementos?

Para ilustrar esto, antes de verlo formalmente, consideremos el conjunto $\{a, b, c, d, e\}$. Lo que se hace es señalar cada elemento y decir en orden los números naturales a partir del 1, como se muestra en la siguiente figura:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \{a, \arrow[d] & b, \arrow[d] & c, \arrow[d] & d, \arrow[d] & e\} \arrow[d] \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{tikzcd}$$

¿Para qué estudiamos cardinalidad?

Contar un conjunto no significa solamente enumerar sus elementos: significa compararlo con un conjunto modelo, como $\{1, \ldots, n\}$, mediante una biyección. Esta idea permite definir con precisión cuándo un conjunto tiene n elementos, cuándo dos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos y cuándo un conjunto es infinito.
Cuando ya no quedan elementos que señalar, se toma el último natural n usado y se declara: "El conjunto tiene n elementos".

El conjunto de la figura tiene entonces 5 elementos. Podemos observar que allí se establece una función entre el conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ y el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Vemos además que esta función es biyectiva.

Podría pasar que dado un conjunto X no fuera posible llevar a cabo este proceso de manera de agotar todos sus elementos. En ese caso estamos en presencia de lo que llamamos un conjunto infinito. En este capítulo formalizaremos estas ideas.

Diremos que un conjunto X es **finito** si es vacío o bien existe una función biyectiva

$$f : \{1, \ldots, n\} \to X$$

para algún número natural $n \in \mathbb{N}^*$. Si X no es finito, diremos que es **infinito**.

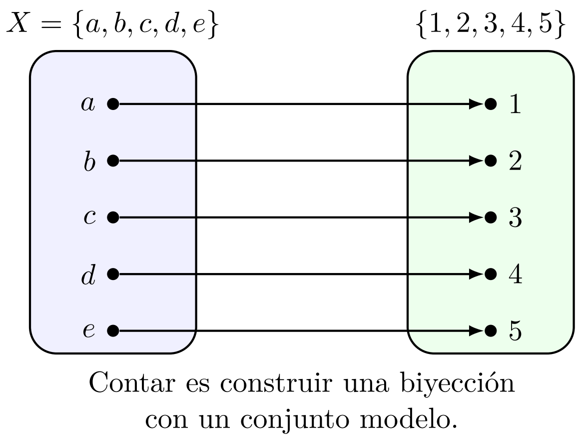


Figura 2.1: El conjunto X tiene 5 elementos porque $X \simeq \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

El siguiente es un resultado clásico, a la vez simple y poderoso, entre otras cosas para poder definir la cantidad de elementos de un conjunto.

Teorema 2.0.1 (Principio del Palomar)**.** *Sea n un natural no nulo. No existe una función de $\{1, \ldots, n+1\}$ en $\{1, \ldots, n\}$ que sea inyectiva.*

Demostración. Probamos por inducción en $n \geq 1$. Para $n = 1$, la única función $f : \{1, 2\} \to \{1\}$ verifica $f(1) = f(2) = 1$, luego no es inyectiva.

Supongamos ahora que no existe una función inyectiva

$$\{1, \ldots, n+1\} \to \{1, \ldots, n\}.$$

Veamos que no existe una función inyectiva

$$f : \{1, \ldots, n+2\} \to \{1, \ldots, n+1\}.$$

Supongamos, por contradicción, que tal f existe. Sea

$$A = f(\{1, \ldots, n+1\}) \subseteq \{1, \ldots, n+1\}.$$

Construiremos una función inyectiva $g : \{1, \ldots, n+1\} \to \{1, \ldots, n\}$, contradiciendo la hipótesis inductiva.

Si $n+1 \notin A$, definimos $g(x) = f(x)$, $x \in \{1, \ldots, n+1\}$. Entonces g toma valores en $\{1, \ldots, n\}$ y es inyectiva.

Si $n+1 \in A$, existe $a \in \{1, \ldots, n+1\}$ tal que $f(a) = n+1$. Sea $b = f(n+2)$. Como f es inyectiva y $a \neq n+2$, se tiene $b = f(n+2) \neq f(a) = n+1$, por lo tanto $b \in \{1, \ldots, n\}$. Definimos

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ b, & x = a. \end{cases}$$

Entonces g toma valores en $\{1, \ldots, n\}$. Además, g es inyectiva: si $x, y \neq a$, se deduce de la inyectividad de f; si $x = a$ e $y \neq a$, entonces

$$g(x) = b = f(n+2) \neq f(y) = g(y),$$

porque $y \neq n+2$ y f es inyectiva. El caso $y = a$, $x \neq a$ es igual.

En ambos casos construimos una función inyectiva

$$g : \{1, \dots, n+1\} \to \{1, \dots, n\},$$

contradicción. Por lo tanto no existe una función inyectiva

$$\{1, \dots, n+2\} \to \{1, \dots, n+1\}.$$

Por inducción, no existe una función inyectiva $\{1, \dots, n+1\} \to \{1, \dots, n\}$. $\square$

El nombre *Principio del Palomar* se debe a su formulación más popular: no pueden meterse $n+1$ palomas en n jaulas sin que dos palomas compartan una jaula.

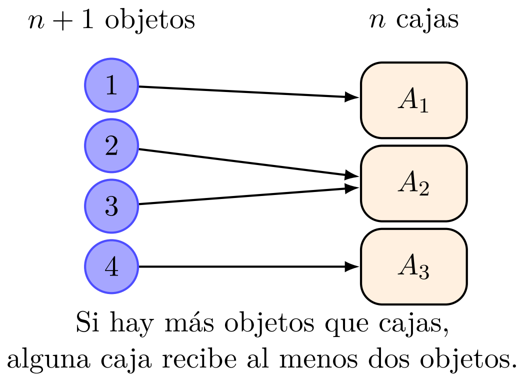


Figura 2.2: Idea visual del Principio del Palomar.

Ejercicio

Probar que cualquier subconjunto de seis elementos del conjunto $S = \{1, 2, \dots, 9\}$ debe contener dos elementos cuya suma sea 10.

Solución

Agrupamos los elementos de S según las parejas que suman 10:

$$\{1, 9\}, \quad \{2, 8\}, \quad \{3, 7\}, \quad \{4, 6\}, \quad \{5\}.$$

Estos cinco conjuntos forman una partición de S.

Sea $A \subseteq S$ tal que A tiene seis elementos. Como los seis elementos de A deben ubicarse en los cinco bloques anteriores, por el principio del palomar hay al menos un bloque que contiene dos elementos de A.

El bloque $\{5\}$ tiene un solo elemento, por lo que ese bloque no puede ser el que contiene dos elementos. Por lo tanto, alguno de los bloques

$$\{1, 9\}, \quad \{2, 8\}, \quad \{3, 7\}, \quad \{4, 6\}$$

contiene dos elementos de A.

Pero en cada uno de esos bloques los dos elementos suman 10. Luego A contiene dos elementos cuya suma es 10.

$\{1,9\}$ $\{2,8\}$ $\{3,7\}$ $\{4,6\}$ $\{5\}$

Los 9 elementos quedan divididos en 5 bloques.
Si elegimos 6 elementos, dos caen en un mismo bloque.

Figura 2.3: Partición de $\{1,\ldots,9\}$ en bloques asociados a sumas iguales a 10.

Ejercicio

Demuestre que entre 50,000 personas hay al menos dos que nacieron exactamente el mismo día del año.
Solución Hay a lo sumo 366 fechas posibles de cumpleaños.
Distribuimos las 50,000 personas en 366 grupos, según su fecha de nacimiento. Si en cada grupo hubiera a lo sumo una persona, habría a lo sumo 366 personas en total, lo cual contradice que hay 50,000 personas.
Por el principio del palomar, al menos un grupo contiene dos personas. Es decir, existen al menos dos personas que nacieron el mismo día del año.

Corolario 2.0.2. *1. Consideremos números naturales n, m tales que $n < m$. Luego no existe ninguna función de $\{1,\ldots,m\}$ en $\{1,\ldots,n\}$ que sea inyectiva.*

2. $\mathbb{N}$ es infinito.

Demostración. 1. Si $f : \{1,\ldots,m\} \to \{1,\ldots,n\}$ fuera inyectiva y $m > n$, entonces la restricción $f_{|\{1,\ldots,n+1\}} : \{1,\ldots,n+1\} \to \{1,\ldots,n\}$ también sería inyectiva, contradiciendo el Principio del Palomar.

2. Si $\mathbb{N}$ fuera finito, existiría una biyección $f : \{1,\ldots,n\} \to \mathbb{N}$ para algún $n \in \mathbb{N}^*$. Entonces $f^{-1} : \mathbb{N} \to \{1,\ldots,n\}$ sería inyectiva. Restringiendo a $\{1,\ldots,n+1\} \subset \mathbb{N}$, obtenemos una función inyectiva

$$f^{-1}_{|\{1,\ldots,n+1\}} : \{1,\ldots,n+1\} \to \{1,\ldots,n\},$$

lo cual contradice el Principio del Palomar. Por lo tanto, $\mathbb{N}$ es infinito.

□

Proposición 2.0.3. *Sea $f : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,m\}$ una función.*

- *Si f es inyectiva, entonces $n \leq m$.*
- *Si f es sobreyectiva, entonces $n \geq m$.*
- *Si f es biyectiva, entonces $n = m$.*

Demostración. La primera parte es el contrarrecíproco del Corolario a). Por otra parte, si f es sobreyectiva, por un ejercicio del práctico, sabemos que tiene una inversa a izquierda, y que esta es inyectiva de $\{1,2,\cdots,m\}$ en $\{1,2,\cdots,n\}$. Deducimos de lo anterior que $m \leq n$.
Finalmente, si f es biyectiva, su inversa es inyectiva, y por tanto se tiene $n \leq m \leq n$, de donde $n = m$.

□

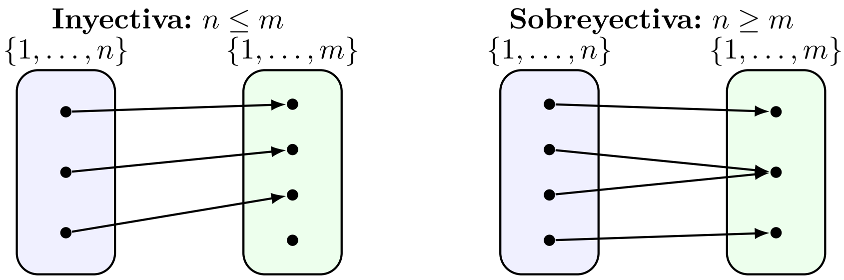


Figura 2.4: Restricciones de cardinalidad impuestas por inyectividad y sobreyectividad.

El corolario anterior y el hecho de que la composición de funciones biyectivas es biyectiva habilitan la siguiente definición:

Definición 2.0.4. *Sea X un conjunto finito. Si es vacío, decimos que* 0 *es el* **cardinal** *de X. En caso contrario, decimos que n es el* **cardinal** *de X si existe una función biyectiva $f : \{1, \ldots, n\} \to X$. Escribimos $\#X = n$.*

Decimos que dos conjuntos X e Y son **equipotentes** si existe una función biyectiva $f : X \to Y$. Notaremos en este caso $X \simeq Y$. A partir de esto uno puede decir que X tiene cardinal n si $X \simeq \{1, \ldots, n\}$.

Ejercicio

Probar, por inducción en n, que todo subconjunto de $\{1, 2, \cdots, n\}$ es finito.
Solución
Probamos por inducción en n la afirmación:

$$P(n) : \quad \text{todo subconjunto de } \{1, 2, \ldots, n\} \text{ es finito.}$$

Para $n = 1$, los subconjuntos de $\{1\}$ son $\emptyset$, $\{1\}$, y ambos son finitos. Luego $P(1)$ es verdadera.
Supongamos ahora que $P(n)$ es verdadera, es decir, que todo subconjunto de $\{1, 2, \ldots, n\}$ es finito. Probemos $P(n+1)$. Sea $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n, n+1\}$. Hay dos casos. Si $n+1 \notin A$, entonces $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Por hipótesis inductiva, A es finito. Si $n + 1 \in A$, consideramos $A' = A \setminus \{n + 1\}$. Entonces $A' \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Por hipótesis inductiva, A' es finito. Como $A = A' \cup \{n+1\}$, y agregar un elemento a un conjunto finito da nuevamente un conjunto finito, se concluye que A es finito. En ambos casos, A es finito. Por lo tanto, todo subconjunto de

$$\{1, 2, \ldots, n + 1\}$$

es finito. Esto prueba $P(n + 1)$.
Por inducción, para todo $n \in \mathbb{N}$, todo subconjunto de $\{1, 2, \ldots, n\}$ es finito.

Ejercicio

Sea $\mathcal{X}$ una colección de conjuntos. Probar que la equipotencia define una relación de equivalencia en $\mathcal{X}$. Describir su cociente en el caso de que los elementos de $\mathcal{X}$ sean todos conjuntos finitos.

Solución
Definimos, para $A, B \in \mathcal{X}$,

$$A \sim B \iff A \text{ y } B \text{ son equipotentes} \iff \exists f : A \to B \text{ biyectiva.}$$

Probamos que $\sim$ es relación de equivalencia.
Reflexividad. Para todo $A \in \mathcal{X}$, la identidad $\mathrm{id}_A : A \to A$ es biyectiva. Luego $A \sim A$.
Simetría. Si $A \sim B$, existe una biyección $f : A \to B$. Como f es biyectiva, existe su inversa $f^{-1} : B \to A$, que también es biyectiva. Luego $B \sim A$.
Transitividad. Si $A \sim B$ y $B \sim C$, existen biyecciones $f : A \to B, \quad g : B \to C$. Entonces $g \circ f : A \to C$ es biyectiva. Luego $A \sim C$.
Por lo tanto, la equipotencia es una relación de equivalencia en $\mathcal{X}$.
Si todos los elementos de $\mathcal{X}$ son conjuntos finitos, entonces dos conjuntos son equipotentes si y sólo si tienen la misma cantidad de elementos. Por tanto, las clases de equivalencia son

$$[A] = \{B \in \mathcal{X} : |B| = |A|\}.$$

Así, el cociente queda descrito por los posibles cardinales finitos que aparecen en $\mathcal{X}$:

$$\mathcal{X}/\sim = \Big\{\{A \in \mathcal{X} : |A| = k\} : k \in \mathbb{N}_0,\ \exists A \in \mathcal{X} \text{ con } |A| = k\Big\}.$$

Ejercicio

Probar las siguientes igualdades por inducción en $\#A$:

1. $\#(A \cup B) = \#A + \#B$ si A y B son disjuntos,
2. $\#(A \times B) = \#A \times \#B$,
3. $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$.

Ejercicio

Probar las siguientes igualdades por inducción en $\#A$:

1. $\#(A \cup B) = \#A + \#B$ si A y B son disjuntos,
2. $\#(A \times B) = \#A \times \#B$,
3. $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$.

Solución
Probamos por inducción en $n = \#A$.

1. Supongamos $A \cap B = \emptyset$. Si $\#A = 0$, entonces $A = \emptyset$ y

$$\#(A \cup B) = \#B = 0 + \#B = \#A + \#B.$$

Supongamos válida la fórmula para todo conjunto con n elementos y sea

$\#A = n + 1$. Tomamos $a \in A$ y escribimos

$$A = A' \cup \{a\}, \qquad a \notin A', \qquad \#A' = n.$$

Como $A \cap B = \emptyset$, también $A' \cap B = \emptyset$ y $a \notin B$. Entonces

$$A \cup B = (A' \cup B) \cup \{a\},$$

con $a \notin A' \cup B$. Por hipótesis inductiva,

$$\#(A \cup B) = \#(A' \cup B) + 1 = (\#A' + \#B) + 1 = \#A + \#B.$$

2. Si $\#A = 0$, entonces $A = \emptyset$ y $A \times B = \emptyset$, luego

$$\#(A \times B) = 0 = 0 \cdot \#B = \#A \cdot \#B.$$

Supongamos la fórmula válida para $\#A = n$ y sea $\#A = n + 1$. Escribimos $A = A' \cup \{a\}$, $a \notin A'$, $\#A' = n$. Entonces

$$A \times B = (A' \times B) \cup (\{a\} \times B),$$

y esta unión es disjunta. Por la parte anterior y por hipótesis inductiva,

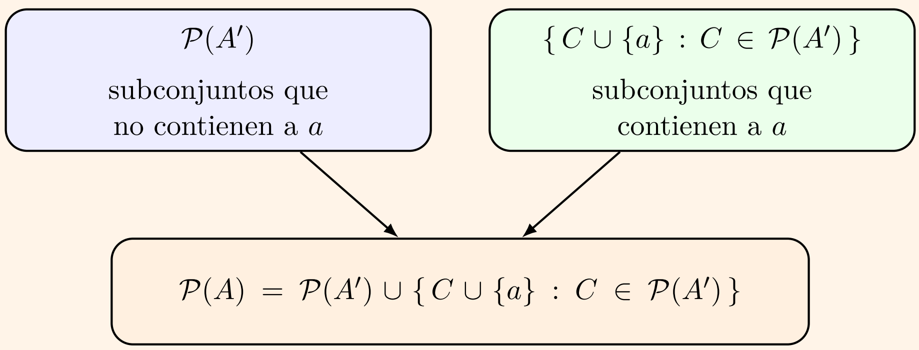
$$\#(A\times B) = \#(A'\times B)+\#(\{a\}\times B) = \#A'\#B+\#B = (\#A'+1)\#B = \#A\#B.$$

3. Si $\#A = 0$, entonces $A = \emptyset$ y $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$, por lo que $\#\mathcal{P}(A) = 1 = 2^0 = 2^{\#A}$. Supongamos válida la fórmula para $\#A = n$ y sea $\#A = n + 1$. Escribimos $A = A' \cup \{a\}$, $a \notin A'$, $\#A' = n$. Todo subconjunto de A o bien no contiene a a, o bien contiene a a. Luego

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A') \cup \{C \cup \{a\} : C \in \mathcal{P}(A')\},$$

y esta unión es disjunta. Además, ambos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos. Por tanto, usando la hipótesis inductiva,

$$\#\mathcal{P}(A) = \#\mathcal{P}(A') + \#\mathcal{P}(A') = 2\#\mathcal{P}(A') = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} = 2^{\#A}.$$



Al agregar un elemento nuevo a, cada subconjunto de A' genera exactamente dos subconjuntos de A: uno que no contiene a a y otro que sí lo contiene.

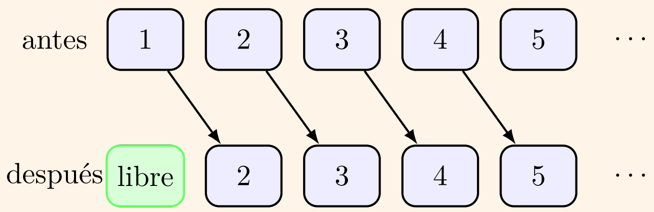
Figura 2.5: Descomposición de $\mathcal{P}(A)$ al agregar un nuevo elemento a.

Ejercicio

El hotel de Hilbert[a]**:** *Un viajero llega a un hotel de infinitas habitaciones numeradas por* $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$. *El hotel está lleno. Entonces el viajero propone reubicar a cada huésped de la habitación* n *en la habitación* $n + 1$. *Así queda libre la habitación* 1.

(a) Reinterpretar este ejemplo en términos de conjuntos infinitos y equipotencia.

(b) Usar la parte anterior para dar una definición alternativa de conjunto infinito.



Cada huésped de la habitación n pasa a la habitación $n + 1$.

Figura 2.6: Reubicación en el hotel de Hilbert: la función $s(n) = n + 1$.

Solución

(a) El conjunto de habitaciones es $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$. La reubicación corresponde a $s : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $s(n) = n + 1$. Es inyectiva, pues

$$s(n) = s(m) \Rightarrow n + 1 = m + 1 \Rightarrow n = m.$$

Es sobreyectiva, pues si $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, entonces $k \geq 2$ y $k = s(k-1)$. Luego $\mathbb{N}^* \simeq \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Así, un conjunto infinito puede ser equipotente a un subconjunto propio.

(b) Esto motiva la siguiente definición alternativa: un conjunto X es infinito si existe $Y \subsetneq X$ tal que $X \simeq Y$. Es decir, si existe una biyección $f : X \to Y$ con $Y \subsetneq X$.

[a] Este ejemplo se le atribuye al matemático prusiano David Hilbert, quien casualmente nació en Königsberg, la ciudad de los puentes.

2.1 Ejercicio de respuesta Verdadero/Falso

Ejercicio

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

a) Todo subconjunto de un conjunto finito es finito.
b) Si X es finito y existe una función inyectiva $X \to Y$, entonces Y es finito.
c) Si X es finito y existe una función sobreyectiva $X \to Y$, entonces Y es finito.
d) Si X es finito, $X \neq \emptyset$, y existe una función sobreyectiva $Y \to X$, entonces Y es finito.

e) Si $X \simeq Y$ y X es finito, entonces Y es finito y $\#X = \#Y$.
f) Si X es finito, no existe $Y \subsetneq X$ tal que $X \simeq Y$.

Respuesta

a) V, b) F, c) V, d) F, e) V, f) V.

Ejercicio

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.
a) No existe una función inyectiva $\{1, \dots, n+1\} \to \{1, \dots, n\}$.
b) Existe una función sobreyectiva $\{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n+1\}$.
c) Si $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ es inyectiva, entonces $n \leq m$.
d) Si $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ es sobreyectiva, entonces $n \leq m$.
e) Si $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ es biyectiva, entonces $n = m$.
f) Si $n < m$, entonces toda función $\{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$ identifica al menos dos elementos.

Respuesta

a) V, b) F, c) V, d) F, e) V, f) V.

Ejercicio

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.
a) Si A y B son finitos disjuntos, entonces $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.
b) Si A y B son finitos, entonces $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.
c) Si A y B son finitos, entonces $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.
d) Si $A \subseteq B$ y B es finito, entonces $\#A \leq \#B$.
e) Si $A \subsetneq B$ y B es finito, entonces $\#A < \#B$.
f) Si $\#A = \#B$, entonces $A = B$.
g) Si $A \simeq B$, entonces $\#A = \#B$, siempre que A y B sean finitos.

Respuesta

a) V, b) F, c) V, d) V, e) V, f) F, g) V.

Ejercicio

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.
a) Si A y B son finitos, entonces $\#(A \times B) = \#A\#B$.
b) Si $A \times B = \emptyset$, entonces $A = \emptyset$ y $B = \emptyset$.
c) Si A y B son finitos no vacíos y $A \times B \simeq A$, entonces $\#B = 1$.
d) Si $A \times B \simeq B \times A$, entonces necesariamente $A = B$.
e) Si $\#A = 2$ y $\#B = 3$, entonces $\#(A \times B) = 6$.
f) Si $\#(A \times B) = 0$, entonces $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.

Respuesta

a) V, b) F, c) V, d) F, e) V, f) V.

Ejercicio

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

a) Si A es finito, entonces $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$.
b) Si $\#A = n$, entonces $\#\mathcal{P}(A) = n^2$.
c) Si $A \subsetneq B$ y B es finito, entonces $\#\mathcal{P}(A) < \#\mathcal{P}(B)$.
d) Si $\mathcal{P}(A) \simeq \mathcal{P}(B)$ y A, B son finitos, entonces $A \simeq B$.
e) Si $\#A = n$, entonces la cantidad de subconjuntos propios de A es $2^n - 1$.
f) Si $\#A = n$, entonces la cantidad de subconjuntos no vacíos de A es $2^n - 1$.
g) Si $\#A = n$, entonces la cantidad de subconjuntos de A con un solo elemento es n.

Respuesta

a) V, b) F, c) V, d) V, e) V, f) V, g) V.

Ejercicio

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

a) La equipotencia es una relación de equivalencia en cualquier colección de conjuntos.
b) Si $A \simeq B$ y $B \simeq C$, entonces $A \simeq C$.
c) Si $A \simeq B$, entonces necesariamente $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.
d) Si A y B son finitos, entonces $A \simeq B$ si y sólo si $\#A = \#B$.
e) Si A es finito y $B \subsetneq A$, entonces $A \not\simeq B$.
f) Si A es infinito, entonces necesariamente $A \simeq \mathbb{N}$.
g) Si $A \simeq \mathbb{N}$, entonces A es infinito.

Respuesta

a) V, b) V, c) F, d) V, e) V, f) F, g) V.

Ejercicio

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

a) $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
b) La función $s : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ dada por $s(n) = n + 1$ es biyectiva.
c) Si un conjunto es equipotente a un subconjunto propio de sí mismo, entonces es finito.
d) Ningún conjunto finito es equipotente a un subconjunto propio de sí mismo.
e) El hotel de Hilbert muestra que un conjunto infinito puede ser equipotente a una parte propia.
f) Si X es infinito, entonces para todo $x_0 \in X$ se tiene $X \simeq X \setminus \{x_0\}$.

Respuesta

a) V, b) V, c) F, d) V, e) V, f) F.

Ejercicio

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique usando, cuando corresponda, el principio del palomar.

a) En cualquier subconjunto de 6 elementos de $\{1, \ldots, 9\}$ hay dos elementos que suman 10.

b) En cualquier subconjunto de 5 elementos de $\{1, \ldots, 9\}$ hay dos elementos que suman 10.

c) En cualquier subconjunto de 6 elementos de $\{1, \ldots, 11\}$ hay dos elementos que suman 12.

d) En cualquier subconjunto de 7 elementos de $\{1, \ldots, 11\}$ hay dos elementos que suman 12.

e) Entre 367 personas hay dos con el mismo día de cumpleaños.

f) Entre 366 personas hay necesariamente dos con el mismo día de cumpleaños.

g) Entre 13 enteros hay dos con el mismo resto al dividir entre 12.

h) Entre 12 enteros hay necesariamente dos con el mismo resto al dividir entre 12.

Respuesta

a) V, b) F, c) F, d) V, e) V, f) F, g) V, h) F.

Ejercicio

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

a) Si A tiene n elementos y B tiene m elementos, entonces la cantidad de funciones $A \to B$ es m^n.

b) Si A tiene n elementos, entonces la cantidad de funciones $A \to \{0,1\}$ es 2^n.

c) Si A tiene n elementos, entonces $\mathcal{P}(A) \simeq \{0,1\}^A$.

d) Si A tiene n elementos y B tiene $m < n$ elementos, entonces toda función $A \to B$ falla ser inyectiva.

e) Si A tiene n elementos y B tiene $m > n$ elementos, entonces toda función $A \to B$ falla ser sobreyectiva.

f) Si A y B son finitos y existe una biyección $A \to B$, entonces existe una biyección $\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$.

g) Si existe una biyección $\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ y A, B son finitos, entonces existe una biyección $A \to B$.

Respuesta

a) V, b) V, c) V, d) V, e) V, f) V, g) V.

Ejercicio

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

a) Si A y B son finitos disjuntos, entonces $A \cup B \simeq \{1, \ldots, \#A + \#B\}$.

b) Si A y B son finitos, entonces $A \times B$ es finito.

c) Si $\mathcal{P}(A)$ es finito, entonces A es finito.

d) Si A es infinito y B es finito, entonces $A \cup B$ es infinito.

e) Si A es infinito y $B \subseteq A$, entonces B es infinito.
f) Si A es infinito y $A \subseteq B$, entonces B es infinito.
g) Si A es finito y B es finito, entonces $A \cup B$ es finito.
Respuesta

a) V, b) V, c) V, d) V, e) F, f) V, g) V.

2.2 Ejercicio de opción múltiple

En cada pregunta, marque la única opción verdadera.

1. Sean X e Y conjuntos. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
   a) Si X es finito y existe una función inyectiva $X \to Y$, entonces Y es finito.
   b) Si X es finito, $X \neq \emptyset$, y existe una función sobreyectiva $Y \to X$, entonces Y es finito.
   c) Si $X \simeq Y$ y X es finito, entonces Y es finito y $\#X = \#Y$.
   d) Si X es infinito y $Y \subseteq X$, entonces Y es infinito.
   e) Si $\mathcal{P}(X)$ es finito, entonces X es infinito.
2. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
   a) Existe una función inyectiva $\{1, \dots, n+1\} \to \{1, \dots, n\}$.
   b) Existe una función sobreyectiva $\{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n+1\}$.
   c) Si $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ es inyectiva, entonces $n \leq m$.
   d) Si $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ es sobreyectiva, entonces $n \leq m$.
   e) Si $n < m$, entonces toda función $\{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ es sobreyectiva.
3. Sean A y B conjuntos finitos. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
   a) Siempre se cumple $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.
   b) Siempre se cumple $\#(A \cap B) = \#A + \#B$.
   c) Si $A \subsetneq B$, entonces $\#A = \#B$.
   d) Si $A \subseteq B$, entonces $\#A \leq \#B$.
   e) Si $\#A = \#B$, entonces $A = B$.
4. Sean A y B conjuntos finitos. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
   a) Si $A \times B = \emptyset$, entonces $A = \emptyset$ y $B = \emptyset$.
   b) Si A y B son finitos, entonces $\#(A \times B) = \#A \, \#B$.
   c) Si $A \times B \simeq B \times A$, entonces necesariamente $A = B$.
   d) Si $\#A = 2$ y $\#B = 3$, entonces $\#(A \times B) = 5$.
   e) Si $\#(A \times B) = 0$, entonces $A = \emptyset$ y $B = \emptyset$.
5. Sea A un conjunto finito con $\#A = n$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) $\#\mathcal{P}(A) = n^2$.

b) La cantidad de subconjuntos propios de A es 2^n.

c) La cantidad de subconjuntos no vacíos de A es $2^n - 1$.

d) La cantidad de subconjuntos de A con un solo elemento es 2^n.

e) Si $A \subsetneq B$, entonces $\#\mathcal{P}(A) = \#\mathcal{P}(B)$.

6. Sean A, B, C conjuntos. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) Si $A \simeq B$, entonces necesariamente $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.

b) Si $A \simeq B$ y $B \simeq C$, entonces $A \simeq C$.

c) Si A es infinito, entonces necesariamente $A \simeq \mathbb{N}$.

d) Si A es finito y $B \subsetneq A$, entonces $A \simeq B$.

e) Si $A \simeq \mathbb{N}$, entonces A es finito.

7. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre conjuntos infinitos es verdadera?

a) Ningún conjunto infinito puede ser equipotente a una parte propia.

b) Si un conjunto es equipotente a un subconjunto propio de sí mismo, entonces es finito.

c) $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

d) Todo conjunto infinito es equipotente a $\mathbb{N}$.

e) Si X es infinito, entonces para todo $x_0 \in X$ se tiene $X \simeq X \setminus \{x_0\}$.

8. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) En cualquier subconjunto de 5 elementos de $\{1, \ldots, 9\}$ hay dos elementos que suman 10.

b) En cualquier subconjunto de 6 elementos de $\{1, \ldots, 11\}$ hay dos elementos que suman 12.

c) Entre 366 personas hay necesariamente dos con el mismo día de cumpleaños.

d) Entre 13 enteros hay dos con el mismo resto al dividir entre 12.

e) Entre 12 enteros hay necesariamente dos con el mismo resto al dividir entre 12.

Clave:

1) *c*, 2) *c*, 3) *d*, 4) *b*, 5) *c*, 6) *b*, 7) *c*, 8) *d*.

3 Principios básicos de conteo

Dedicamos esta sección a presentar las herramientas fundamentales para resolver problemas que implican contar elementos en conjuntos finitos.

¿Para qué sirven los principios de conteo?

Una vez que sabemos qué significa que un conjunto tenga cierta cantidad de elementos, necesitamos métodos para calcular esa cantidad sin listar todos los elementos. Los principios de la suma y del producto permiten contar procesos separándolos en casos excluyentes o en etapas sucesivas.

3.1 Principio de la Suma

El **Principio de la Suma** establece que si un proceso puede realizarse de dos maneras mutuamente excluyentes, entonces el número total de formas de realizar el proceso es la suma de las formas de cada manera.

Supongamos que un estudiante debe elegir una (única) materia entre 3 asignaturas de matemáticas y 4 asignaturas de física. El número total de opciones es $3 + 4 = 7$.

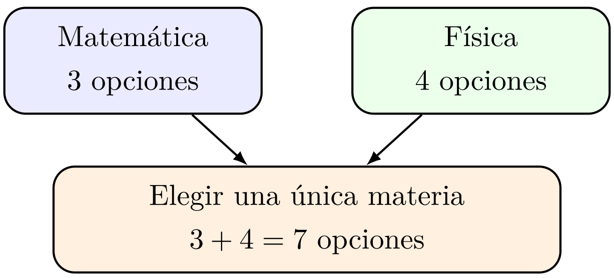
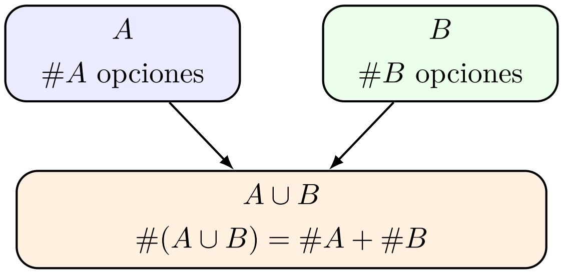


Figura 3.1: Aplicación del principio de la suma: elegir una materia entre dos grupos disjuntos.

La formulación matemática de este principio es que si A y B son disjuntos, $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.



Cuando las opciones vienen de casos mutuamente excluyentes, se suman.

Figura 3.2: Principio de la suma para conjuntos disjuntos.

Ejercicio

En una biblioteca hay tres colecciones disjuntas de libros disponibles para préstamo: 18 libros de matemática, 24 libros de física y 15 libros de informática. Un estudiante debe elegir exactamente un libro.

1. ¿Cuántas opciones tiene?
2. Si además 5 de los libros de informática están reservados y no pueden prestarse, ¿cuántas opciones tiene ahora?

Solución
Sea M el conjunto de libros de matemática, F el de física e I el de informática. Como las colecciones son disjuntas,

$$\#(M \cup F \cup I) = \#M + \#F + \#I = 18 + 24 + 15 = 57.$$

Luego el estudiante tiene 57 opciones.
Si 5 libros de informática no están disponibles, quedan $15 - 5 = 10$ libros de informática disponibles. Entonces el número total de opciones es $18+24+10 = 52$.

Ejercicio

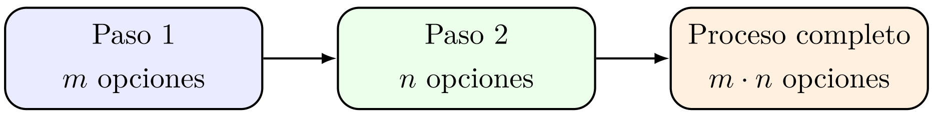
Una clave de acceso debe elegirse de una de las siguientes formas, mutuamente excluyentes:

1. una letra mayúscula seguida de un número par de dos cifras;
2. un número impar de tres cifras seguido de una vocal;
3. uno de los símbolos $\{!, ?, \#, \$\}$ seguido de una letra minúscula.

¿Cuántas claves distintas pueden formarse?
Solución
Por el principio de la suma, como los tres tipos de clave son disjuntos, el total es $26 \cdot 45 + 450 \cdot 5 + 4 \cdot 26$. En efecto, hay 26 letras mayúsculas y 45 números pares de dos cifras; hay 450 números impares de tres cifras y 5 vocales; y hay 4 símbolos y 26 letras minúsculas. Por tanto, $26 \cdot 45 + 450 \cdot 5 + 4 \cdot 26 = 3524$. Luego pueden formarse 3524 claves distintas.

3.2 Principio del Producto

El **Principio del Producto** establece que si un proceso consta de dos pasos independientes, y cada paso puede realizarse de un número fijo de maneras, entonces el número total de formas de realizar el proceso completo es el producto del número de maneras de cada paso.
Supongamos que un estudiante debe elegir una asignatura de matemáticas (3 opciones) y una de física (4 opciones). El número total de elecciones es $3 \times 4 = 12$.
La formulación matemática de este principio es que si A y B son conjuntos, $\#(A \times B) = \#A \times \#B$.



Cuando un proceso se realiza en etapas sucesivas e independientes, se multiplican las opciones.

Figura 3.3: Principio del producto: contar procesos por etapas.

Cantidad de funciones A partir del principio del producto, se puede probar que $\#(B^A) = \#B^{\#}A$, puesto que dar una función de A en B es asignar a cada elemento de A un elemento de B. Como son $\#A$ pasos (asignaciones) y en cada paso hay $\#B$ opciones, se tiene $\#B \times \#B \times \ldots \times \#B$ ($\#A$ veces), esto es $\#B^{\#}A$.

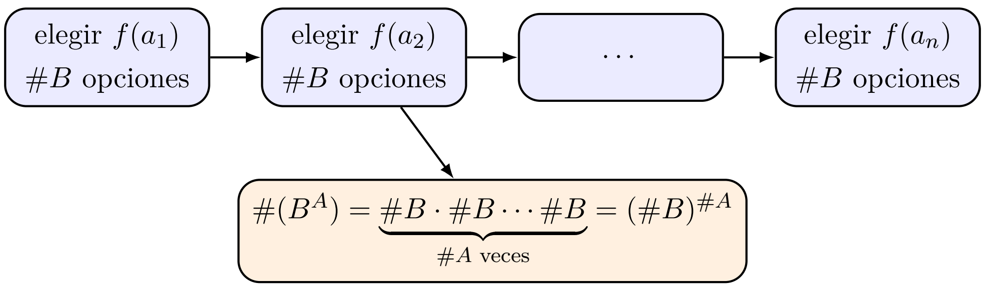


Figura 3.4: Para definir una función $f : A \to B$, se elige una imagen en B para cada elemento de A.

Ejercicio

Una clave se forma eligiendo una letra mayúscula, luego un dígito y finalmente una letra minúscula. ¿Cuántas claves distintas pueden formarse?
Solución
El proceso tiene tres pasos independientes: 26 opciones para la letra mayúscula, 10 para el dígito y 26 para la letra minúscula. Por el principio del producto, $26 \cdot 10 \cdot 26 = 6760$. Luego pueden formarse 6760 claves distintas.

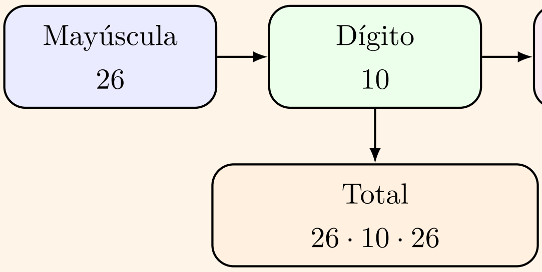


Figura 3.5: Una clave formada en tres etapas se cuenta con el principio del producto.

Ejercicio

Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{0, 1, 2\}$. ¿Cuántas funciones $f : A \to B$ verifican que $f(1) \neq f(2)$ y $f(3) = f(4)$?

Solución

Para definir f debemos elegir los valores $f(1), f(2), f(3), f(4)$ en B. Primero elegimos $f(1)$: hay 3 opciones. Luego $f(2)$ debe ser distinto de $f(1)$, así que hay 2 opciones. Finalmente elegimos $f(3)$: hay 3 opciones, y como debe cumplirse $f(3) = f(4)$, el valor de $f(4)$ queda determinado. Por el principio del producto, $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$. Luego hay 18 funciones $f : A \to B$ que cumplen las condiciones.

Ejercicio

1. ¿De cuántas formas se pueden pintar tres casas con cuatro colores?
2. ¿Y si los colores de las casas contiguas deben ser distintos?

Solución

1. Cada casa puede pintarse de 4 formas. Como son 3 casas, $4^3 = 64$.
2. Para la primera casa hay 4 opciones. Para la segunda, como debe ser distinta de la primera, hay 3 opciones. Para la tercera, como debe ser distinta de la segunda, hay nuevamente 3 opciones. Luego $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.

3.3 Permutaciones

Consideremos el siguiente problema:

¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras A,B,C,D,E y F?.

Observemos que para elegir la letra que va en el primer lugar tenemos 6 posibilidades. Luego de esta elección, nos quedan 5 posibilidades para elegir la letra que va en el siguiente lugar. Entonces por el Principio del Producto, tenemos $6 \cdot 5 = 30$ posibilidades para elegir las letras que van en los primeros dos lugares. Siguiendo de este modo, podemos concluir que la cantidad de formas de ordenar estas letras es $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 6!$.

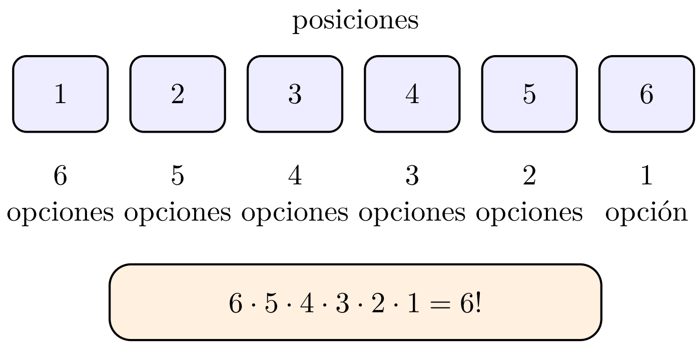


Figura 3.6: Ordenar 6 símbolos distintos produce 6! permutaciones.

Para generalizar y abstraer este problema, observemos que el problema de contar las formas de ordenar n símbolos diferentes es equivalente al problema de contar reordenaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$.

Además, una reordenación de $\{1, \ldots, n\}$ no es otra cosa que una función biyectiva, pues escribir la secuencia $3, 2, 4, 1, 5$ es equivalente a definir una función

$$f : \{1, \ldots, 5\} \to \{1, \ldots, 5\}$$

de forma tal que $f(1) = 3$ (el 3 ocupa el primer lugar), $f(2) = 2$, $f(3) = 4$, $f(4) = 1$ y $f(5) = 5$. Definimos entonces el conjunto

$$\mathcal{S}_n = \{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} : f \text{ es biyectiva}\},$$

y notamos $P_n = \#\mathcal{S}_n$.
A cada elemento de $\mathcal{S}_n$ lo llamamos una permutación de n y a P_n **número de permutaciones de** n. En el primer ejemplo, vimos que $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$. Esto nos da una idea de lo que debe ser P_n para cualquier n. En general tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.3.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $P_n = n! = n.(n-1)\ldots 2$, con $0! = 1$.*

Demostración. Probamos por inducción en $n \in \mathbb{N}$.
Para $n = 0$, se tiene $\mathcal{S}_0 = \{f : \emptyset \to \emptyset : \ f \text{ es biyectiva}\}$. Hay una única función $\emptyset \to \emptyset$, la función vacía, y es biyectiva. Por lo tanto $P_0 = \#\mathcal{S}_0 = 1 = 0!$. Supongamos ahora que $P_n = n!$. Para ordenar el conjunto $\{1, \ldots, n+1\}$ procedemos en dos pasos: primero elegimos qué elemento ocupa el lugar $n+1$, para lo cual hay $n+1$ opciones; luego ordenamos los n elementos restantes en los primeros n lugares, para lo cual hay $P_n = n!$ opciones. Por el Principio del Producto, $P_{n+1} = (n+1)P_n = (n+1)n! = (n+1)!$. Por inducción, $P_n = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Ejercicio

Un grupo de n personas se sienta alrededor de una mesa circular para jugar a un juego de cartas. La silla ocupada por cada persona no tiene ninguna injerencia en el juego, sin embargo la persona que cada jugador tenga a la derecha o a la izquierda sí la tiene.

1. ¿Cuántas configuraciones posibles hay? Llamaremos a esta cantidad **número**

de permutaciones circulares de n y lo notaremos PC_n.

2. Expresar PC_n como el cardinal de un cierto conjunto cociente de $\mathcal{S}_n$.

Solución

1. Una forma de contar es fijar una persona, por ejemplo la persona 1, y ordenar las restantes $n-1$ alrededor de ella. Como importan los vecinos de derecha e izquierda, pero no la silla exacta, identificamos configuraciones que difieren sólo por rotación. Por tanto,

$$PC_n = (n-1)!.$$

2. Identificamos una permutación $\sigma \in S_n$ con la lista circular

$$(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)).$$

Definimos en $\mathcal{S}_n$ la relación

$$\sigma \sim \tau \iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ tal que } \tau(i) = \sigma(i+k),$$

donde los índices se toman módulo n. Es decir, $\sigma \sim \tau$ si una lista se obtiene de la otra por una rotación circular. Cada clase tiene exactamente n elementos, luego

$$PC_n = \#(\mathcal{S}_n/\sim) = \frac{\#\mathcal{S}_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!.$$

3.4 Arreglos

Consideremos ahora, para dos números fijos $k \leq n$, el siguiente conjunto:

$$\mathcal{A}(n,k) = \{f : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, n\} : f \text{ es inyectiva}\}.$$

Luego escribimos $A_k^n = \#\mathcal{A}(n,k)$. Este número, llamado **arreglos de n tomados de a k**, puede interpretarse como la cantidad de posibilidades de formar palabras de largo k usando n símbolos diferentes sin repetirlos. Hacemos aquí, al igual que en el caso de las permutaciones, la identificación

$$f \mapsto f(1)f(2)\dots f(k).$$

Es claro que $A_n^n = P_n$.

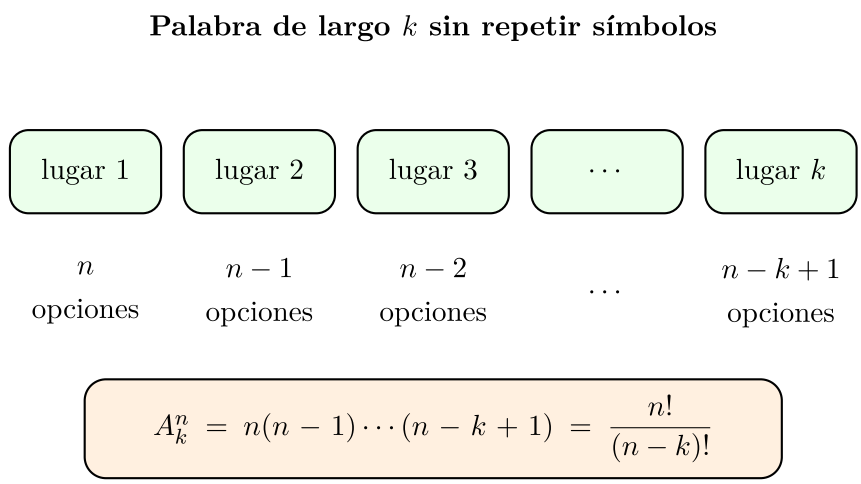


Figura 3.7: Arreglos de n símbolos tomados de a k: importa el orden y no se repite.

Para $n \geq k$, observemos que para definir $f \in \mathcal{A}(n,k)$ se puede hacer lo siguiente:

1. Elegir $f(1)$, para lo cual se tienen n posibilidades.

2. Completar definiendo las imágenes de $2,\dots,k$, para lo cual se tienen A_{k-1}^{n-1} posibilidades.

Del Principio del Producto obtenemos, para $0 \leq k \leq n$,

$$A_k^n = n.A_{k-1}^{n-1} = n.(n-1).A_{k-2}^{n-2} = \cdots = n.(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Por otro lado, si $k > n$, por el Principio del Palomar se tiene $\mathcal{A}(n,k) = \emptyset$, o sea $A_k^n = 0$.

Ejercicio

¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener al arrojar 3 dados distintos?
Solución
Si los dados son distintos, importa el orden. Cada dado tiene 6 resultados posibles, luego $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$.

3.4.1 Arreglos con repetición

Supongamos ahora que permitimos repeticiones. Esto es, consideramos palabras de largo k escritas a partir de un alfabeto de n letras. La cantidad de formas de hacerlo se denotará por AR_k^n, estos son los **arreglos con repetición de n tomados de a k**. Observar que este número es el cardinal del conjunto

$$\{1,\dots,n\}^{\{1,\dots,k\}}$$

es decir $AR_k^n = n^k$.

Palabra de largo k permitiendo repeticiones

lugar 1	lugar 2	lugar 3	$\cdots$	lugar k
n opciones	n opciones	n opciones	$\cdots$	n opciones

$$AR_k^n = \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k \text{ veces}} = n^k$$

Figura 3.8: Arreglos con repetición: en cada lugar vuelven a estar disponibles los n símbolos.

Sin repetición	**Con repetición**
las opciones disminuyen	las opciones se mantienen
$A_k^n = n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$AR_k^n = n^k$

La diferencia central es si, después de elegir un símbolo, este queda disponible nuevamente o no.

Figura 3.9: Comparación entre arreglos sin repetición y arreglos con repetición.

3.5 Ejercicios de respuesta Verdadero/Falso

Ejercicio

Dificultad media. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Una clave formada por una letra mayúscula seguida de tres dígitos puede elegirse de $26 \cdot 10^3$ formas.

b) Una clave formada por dos letras minúsculas, permitiendo repetición, seguida de un símbolo de $\{!, ?, \#, \$\}$ puede elegirse de $26 \cdot 25 \cdot 4$ formas.

c) Una clave formada por un dígito distinto de 0, una vocal y una letra mayúscula puede elegirse de $9 \cdot 5 \cdot 26$ formas.

d) Si los tres tipos de claves anteriores son excluyentes, y en el segundo tipo se permite repetir letras, el número total de claves es

$$26 \cdot 10^3 + 26^2 \cdot 4 + 9 \cdot 5 \cdot 26.$$

e) Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$, entonces hay 4^5 funciones $f : A \to B$.

f) La cantidad de funciones $f : A \to B$ tales que $f(1) = f(2)$ y $f(3) \neq f(4)$ es $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$.

Respuesta

a) V, b) F, c) V, d) V, e) V, f) V.

Ejercicio

Dificultad media. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Con las letras A, B, C, D, E, F, G pueden formarse 7^5 palabras de largo 5 si se permiten repeticiones.
b) Con las letras A, B, C, D, E, F, G pueden formarse $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ palabras de largo 5 sin repetir letras.
c) Con las letras A, B, C, D, E, F, G pueden formarse $7!$ palabras de largo 5 sin repetir letras.
d) Usando los dígitos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, sin repetir, pueden formarse $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ números de cuatro cifras.
e) Usando los dígitos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, sin repetir, pueden formarse $7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ números de cuatro cifras.
f) Usando los dígitos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, permitiendo repeticiones, pueden formarse $7 \cdot 8^3$ números de cuatro cifras.

Respuesta

a) V, b) V, c) F, d) F, e) V, f) V.

Ejercicio

Dificultad alta. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) La cantidad de funciones inyectivas $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, \ldots, 9\}$ es $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$.
b) La cantidad de funciones inyectivas $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, \ldots, 9\}$ tales que $f(1)$ es par y $f(2)$ es impar es $4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 6$.
c) La cantidad de funciones inyectivas $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, \ldots, 9\}$ tales que $f(1)$ y $f(2)$ son pares es $4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6$.
d) La cantidad de palabras de largo 6 con letras de A, B, C, D, E, F, G, H, sin repetir, con primera letra vocal y última consonante, es $2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$.
e) La cantidad de palabras de largo 6 con letras de A, B, C, D, E, F, G, H, sin repetir, con primera letra vocal y última consonante, es $2 \cdot 6 \cdot 6!$.
f) La cantidad de funciones $f : \{1, \ldots, 6\} \to \{0, 1, 2, 3\}$ tales que $f(1) = f(2)$, $f(3) \neq f(4)$ y $f(5) \in \{0, 1\}$ es $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4$.

Respuesta

a) V, b) V, c) V, d) V, e) F, f) V.

3.6 Ejercicio de opción múltiple

En cada pregunta, marque la única opción verdadera.

1. Una clave está formada por una letra mayúscula seguida de tres dígitos. ¿Cuántas claves distintas pueden formarse?

   a) $26 + 10^3$.
   b) $26 \cdot 10^3$.
   c) $26^3 \cdot 10$.
   d) $26 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$.
   e) 10^3.

2. Una clave está formada por dos letras minúsculas, permitiendo repetición, seguida de un símbolo de $\{!, ?, \#, \$\}$. ¿Cuántas claves distintas pueden formarse?
   a) $26 \cdot 25 \cdot 4$.
   b) $26^2 \cdot 4$.
   c) $26 \cdot 4^2$.
   d) $26 + 26 + 4$.
   e) $25^2 \cdot 4$.

3. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuántas funciones $f : A \to B$ existen?
   a) 5^4.
   b) 4^5.
   c) $5 \cdot 4$.
   d) $4!$.
   e) $5!$.

4. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuántas funciones $f : A \to B$ cumplen $f(1) = f(2)$ y $f(3) \neq f(4)$?
   a) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.
   b) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$.
   c) $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$.
   d) $4^5 - 4$.
   e) $4 \cdot 3^4$.

5. Con las letras A, B, C, D, E, F, G, ¿cuántas palabras de largo 5 pueden formarse si se permiten repeticiones?
   a) 7^5.
   b) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$.
   c) $7!$.
   d) 5^7.
   e) $7 + 5$.

6. Usando los dígitos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, sin repetir, ¿cuántos números de cuatro cifras pueden formarse?
   a) $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.
   b) $7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.

c) 7^4.

d) 8^4.

e) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

7. ¿Cuántas funciones inyectivas $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, \ldots, 9\}$ existen?

a) 9^4.

b) 4^9.

c) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$.

d) $9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3$.

e) $9!$.

8. ¿Cuántas funciones inyectivas $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, \ldots, 9\}$ cumplen que $f(1)$ es par y $f(2)$ es impar?

a) $4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 6$.

b) $5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6$.

c) $4 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6$.

d) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$.

e) $4 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 8$.

Clave:

1) b, 2) b, 3) b, 4) c, 5) a, 6) b, 7) c, 8) a.

4 Combinaciones

Nos interesa ahora estudiar algunos problemas que consisten en elegir subconjuntos (y no palabras, en las que importa el orden) de un conjunto dado. Miremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Una persona entra a una heladería y quiere elegir 3 sabores de helado. Cuando llega al mostrador se encuentra con que hay 20 sabores disponibles. ¿Qué posibilidades tiene de armar su helado?

En general notaremos por $\binom{n}{k}$ al número de formas de tomar k elementos de un conjunto de cardinal n y lo llamamos **combinaciones de n tomadas de a k** (puede encontrarse también en la literatura la notación $\tbinom{n}{k}$ para indicar esta cantidad). De esta forma el problema planteado en el ejemplo anterior consiste en calcular $\binom{20}{3}$. Dicho de otra forma, $\binom{n}{k}$ es el número de subconjuntos de cardinal k de un conjunto de cardinal n. Para ser más precisos podemos escribirlo como el cardinal de

$$\binom{n}{k} = \{A \subset \{1, \ldots, n\} : \#A = k\}.$$

Observación 4.0.1. *1. Hay algunos números combinatorios (así le llamaremos a los números $\binom{n}{k}$) que son muy fáciles de determinar. Por ejemplo es claro que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. También puede verse que $\binom{n}{1} = n$.*

2. Observar que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-1}$ y que $\binom{n}{k} = 0$ si $n < k$.

¿Por qué pasamos de arreglos a combinaciones?

En los arreglos y permutaciones importa el orden. Sin embargo, muchos problemas consisten en elegir elementos sin importar el orden: formar un comité, elegir sabores o seleccionar un subconjunto. Las combinaciones aparecen para contar este tipo de elecciones.

Arreglos	**Combinaciones**
importa el orden	no importa el orden
$ABC \neq BAC$	$\{A, B, C\} = \{B, A, C\}$

Las combinaciones cuentan elecciones de subconjuntos; los arreglos cuentan listas ordenadas.

Figura 4.1: Diferencia entre arreglos y combinaciones.

Teorema 4.0.2. *(Fórmula de Stiefel) Para $1 \leq k \leq n$ se tiene*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Demostración. Contamos los subconjuntos $X \subseteq \{1, \ldots, n, n+1\}$ con $|X| = k$. Hay dos casos excluyentes. Si $n+1 \notin X$, entonces $X \subseteq \{1, \ldots, n\}$ y hay $\binom{n}{k}$ posibilidades. Si $n+1 \in X$, resta elegir los otros $k-1$ elementos de $\{1, \ldots, n\}$, y hay $\binom{n}{k-1}$ posibilidades. Por el Principio de la Suma,

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

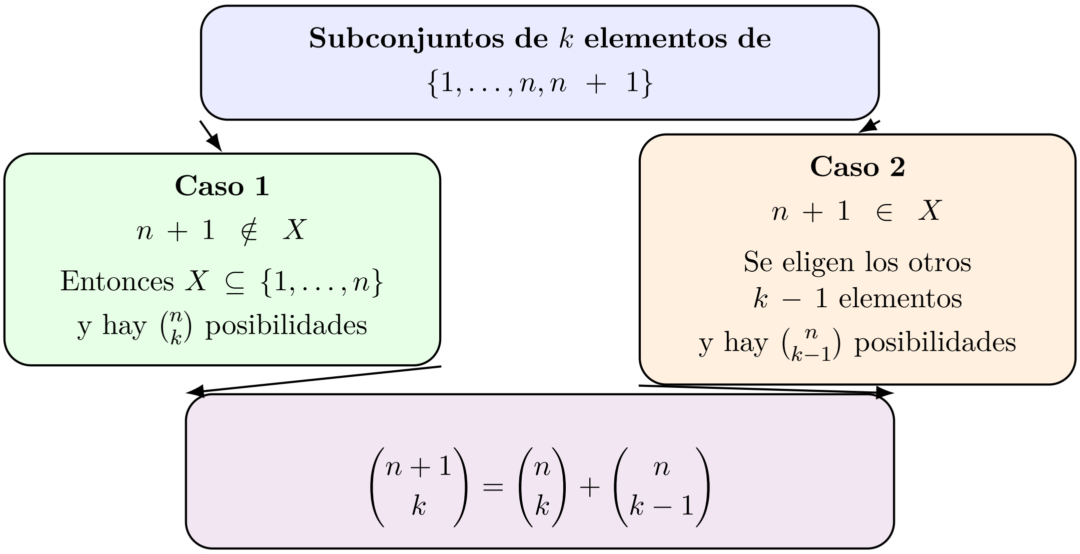


Figura 4.2: Descomposición de los subconjuntos de k elementos según contengan o no al elemento $n+1$.

□

La siguiente proposición relaciona las combinaciones con los arreglos y las permutaciones.

Proposición 4.0.3. *Para n, k naturales, con $k \leq n$, se tiene*

$$A_k^n = \binom{n}{k} P_k. \tag{4.1}$$

Demostración. Contamos las funciones inyectivas $f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\}$. Primero se elige su imagen X, con $|X| = k$, lo que da $\binom{n}{k}$ posibilidades. Luego se ordenan los elementos de X, o equivalentemente se elige una biyección entre $\{1, \ldots, k\}$ y X, lo que da P_k posibilidades. Por el Principio del Producto,

$$A_k^n = \binom{n}{k} P_k.$$

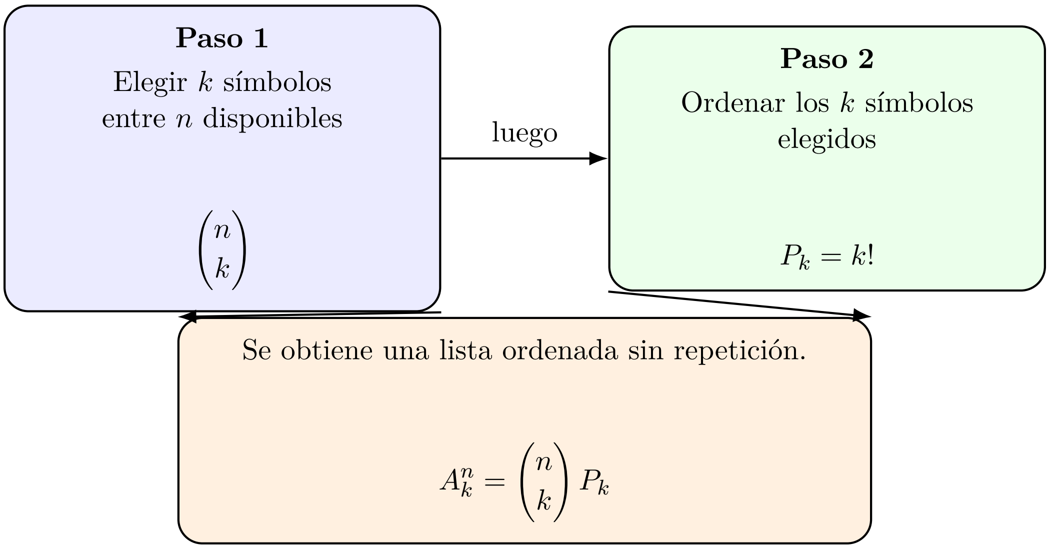


Figura 4.3: Un arreglo se obtiene eligiendo los elementos y luego ordenándolos.

$\square$

Corolario 4.0.4.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} \tag{4.2}$$

Demostración. Se deduce de (4.1) y de las fórmulas para arreglos y permutaciones. $\square$

De esta forma podemos terminar el Ejemplo 4 concluyendo que el cliente tiene

$$\binom{20}{3} = \frac{20!}{3!17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2} = 1140.$$

posibilidades de armar su helado.

Ejemplo

Volviendo a los helados, veamos la solución.
Como sólo importa qué sabores elige y no el orden en que los menciona, debemos contar subconjuntos de 3 elementos dentro de un conjunto de 20 sabores. Por lo tanto, la cantidad de posibilidades es

$$\binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140.$$

Luego puede armar su helado de 1140 formas distintas.

Ejercicio

Una heladería tiene 20 sabores disponibles, de los cuales 6 son de chocolate, 5 son frutales y los restantes son de otros tipos. Una persona quiere elegir 4 sabores distintos, con la condición de que elija al menos 2 sabores de chocolate. ¿De cuántas formas puede armar su helado?

Solución
Hay 6 sabores de chocolate y $20-6=14$ sabores que no son de chocolate. Contamos por casos según la cantidad de sabores de chocolate elegidos.
Puede elegir exactamente 2, exactamente 3 o exactamente 4 sabores de chocolate. Entonces:

$$\binom{6}{2}\binom{14}{2}+\binom{6}{3}\binom{14}{1}+\binom{6}{4}.$$

Calculando,

$$\binom{6}{2}\binom{14}{2}+\binom{6}{3}\binom{14}{1}+\binom{6}{4}=15\cdot 91+20\cdot 14+15=1365+280+15=1660.$$

Luego puede armar su helado de 1660 formas distintas.

Ejercicio

Un comité de 6 personas será elegido entre 4 personas uruguayas y 4 extranjeras. ¿De cuántas formas se puede hacer una selección si:

1. No hay restricciones.
2. Queremos que sean 3 uruguayos y 3 extranjeros.
3. Queremos que haya un número par de extranjeros.
4. Queremos que sean más extranjeros que uruguayos.
5. Queremos que sean al menos 3 uruguayos.

Solución
Como se elige un comité, el orden no importa. Usamos combinaciones.
a) $\binom{8}{6}=28$.
b) $\binom{4}{3}\binom{4}{3}=4\cdot 4=16$.
c) $\binom{4}{2}\binom{4}{4}+\binom{4}{4}\binom{4}{2}=6\cdot 1+1\cdot 6=12$.
d) $\binom{4}{4}\binom{4}{2}=1\cdot 6=6$. Como el comité tiene 6 personas, para que haya más extranjeros que uruguayos debe haber 4 extranjeros y 2 uruguayos.
e) $\binom{4}{3}\binom{4}{3}+\binom{4}{4}\binom{4}{2}=16+6=22$. Puede haber 3 uruguayos y 3 extranjeros, o 4 uruguayos y 2 extranjeros.

Ejercicio

Si se convoca para armar un equipo de football a 3 arqueros, 7 defensores, 7 mediocampistas y 6 delanteros, ¿de cuántos modos es posible formar el equipo con un arquero, 4 defensores, 4 mediocampistas y 2 delanteros?
Solución
Como no importa el orden dentro del equipo, usamos combinaciones:

$$\binom{3}{1}\binom{7}{4}\binom{7}{4}\binom{6}{2}=3\cdot 35\cdot 35\cdot 15=55125.$$

Luego se puede formar el equipo de 55125 formas.

Ejercicio

¿Cuál es la probabilidad de ganar el 5 de Oro?
Solución
Para ganar el pozo principal hay que acertar los 5 números elegidos entre 48. La cantidad de jugadas posibles es

$$\binom{48}{5} = \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1712304.$$

Por lo tanto, la probabilidad de ganar es

$$\frac{1}{\binom{48}{5}} = \frac{1}{1712304}.$$

4.1 Teorema del binomio

Nos enfocamos ahora en el problema de calcular la n-ésima potencia de un binomio $x + y$. Veamos los primeros ejemplos:

- $(x + y)^0 = 1$
- $(x + y)^1 = x + y$
- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

Observamos que en los primeros ejemplos los coeficientes de los monomios corresponden a las primeras filas del triángulo de Pascal. Los números combinatorios no sólo cuentan subconjuntos: también aparecen como coeficientes algebraicos. El Teorema del Binomio muestra esta conexión entre conteo y álgebra.

Esto inspira el siguiente resultado:

Teorema 4.1.1 (Teorema del Binomio)**.**

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k. \tag{4.3}$$

Primera prueba del Teorema del binomio. Lo probaremos por inducción en $n \geq 1$. Como vimos en los ejemplos, el caso para $n = 1$ ya está probado. Supongamos entonces que la fórmula (4.3) se cumple para cierto n. Luego

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y).\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k}(x+y)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^{k}+\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^{k}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^{n+1-k}y^{k}\\ &= \binom{n}{0}x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)x^{n+1-k}y^{k}+\binom{n}{n}y^{n+1}\end{aligned}$$

Usando la fórmula de Stiefel en el sumando del medio y las igualdades $\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}=\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}=1$ en los otros, obtenemos

$$(x+y)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^{k}.$$

□

Ejercicio

Hacer una prueba combinatoria del resultado anterior.

Observación 4.1.2. *En el producto $(x+y)^n=(x+y)(x+y)\cdots(x+y)$, cada monomio se obtiene eligiendo, en cada uno de los n factores, o bien x o bien y. Para obtener el término $x^{n-k}y^k$ debemos elegir y en exactamente k de los n factores, y x en los restantes. Esto puede hacerse de*

$$\binom{n}{k}$$

formas. Por eso el coeficiente de $x^{n-k}y^k$ es $\binom{n}{k}$.

En cada factor se elige x o y

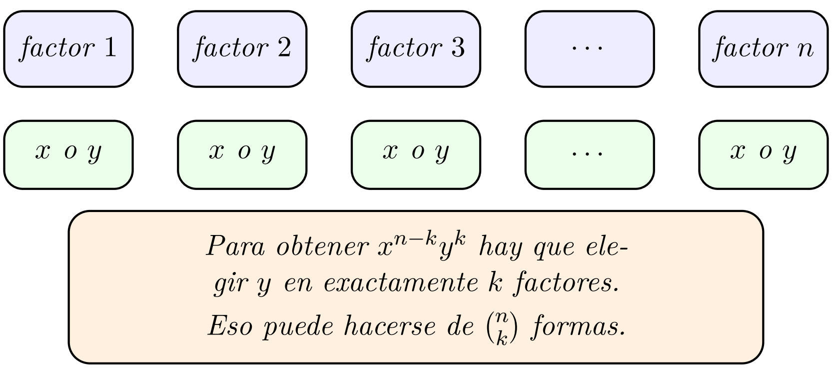


Figura 4.4: Interpretación combinatoria del coeficiente de $x^{n-k}y^k$ en $(x+y)^n$.

Ejercicio

Usando el Teorema del Binomio, probar que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Interpretar esta identidad en términos de la cantidad de subconjuntos de un conjunto con n elementos.

Solución

Por el Teorema del Binomio,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Tomando $x = 1$ e $y = 1$,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

La interpretación combinatoria es la siguiente. Si A es un conjunto con $\#A = n$, entonces la cantidad total de subconjuntos de A es

$$\#\mathcal{P}(A) = 2^n.$$

Por otro lado, podemos contar esos subconjuntos según su cantidad de elementos. Para cada $k = 0, \ldots, n$, hay $\binom{n}{k}$ subconjuntos de A con exactamente k elementos. Como todo subconjunto tiene una única cantidad de elementos, sumando por casos obtenemos

$$\#\mathcal{P}(A) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Clasificamos los subconjuntos por su tamaño

0 elementos	1 elemento	2 elementos	$\cdots$	n elementos
$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$		$\binom{n}{n}$

Sumando todos los casos se cuentan todos los subconjuntos:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Figura 4.5: La suma de los números combinatorios cuenta todos los subconjuntos de un conjunto de n elementos.

4.2 Cantidad de funciones sobreyectivas

Nos preguntamos ahora cuántas funciones sobreyectivas pueden definirse de un conjunto de n elementos en un conjunto de k elementos, es decir, cuál es el cardinal de

$$\{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\} : f \text{ sobreyectiva}\},$$

al que notamos por $Sob(n, k)$.
Sabemos que $Sob(n, k) = 0$ si $n < k$. Para obtener una fórmula para el caso $n \geq k$, usaremos el Principio de Inclusión-Exclusión. Consideramos entonces $Z = \{1, \ldots, k\}^{\{1,\ldots,n\}}$ el conjunto de todas las funciones de $\{1, \ldots, n\}$ en $\{1, \ldots, k\}$, que tiene cardinal k^n, y los subconjuntos

$$A_i = \{f \in Z : i \notin f(\{1, \ldots, n\})\}.$$

Es claro que el conjunto de funciones sobreyectivas es $\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)^c$. Observamos que $\#(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_\ell}) = (k-\ell)^n$ y que hay $\binom{k}{\ell}$ intersecciones de esta forma. Luego tenemos

$$\begin{aligned} Sob(n, k) &= k^n - \binom{k}{1}(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}1^n \\ &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{k}{i}(k-i)^n. \end{aligned}$$

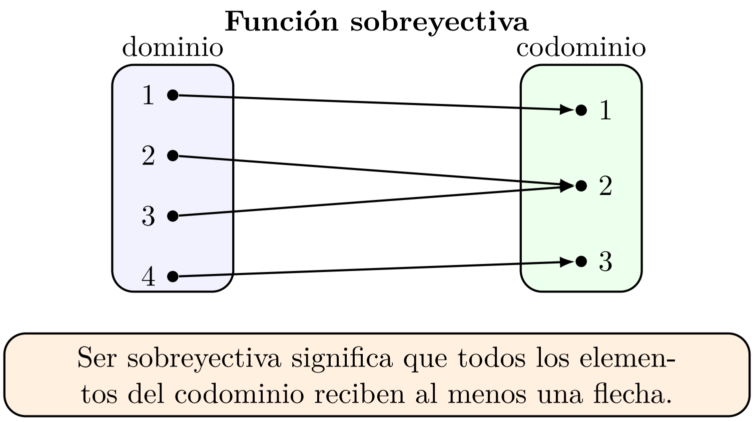


Figura 4.6: Una función sobreyectiva no deja elementos del codominio sin preimagen.

Ejercicio

Se quieren repartir 7 libros distintos entre 3 estudiantes, de modo que cada estudiante reciba al menos un libro. ¿De cuántas formas puede hacerse?
Solución
Dar un reparto equivale a definir una función $f : \{1, \ldots, 7\} \to \{1, 2, 3\}$, donde $f(i)$ indica a qué estudiante se le da el libro i. La condición de que todos reciban

al menos un libro equivale a que f sea sobreyectiva. Entonces

$$Sob(7,3) = 3^7 - \binom{3}{1}2^7 + \binom{3}{2}1^7 = 2187 - 384 + 3 = 1806.$$

Luego hay 1806 repartos posibles.

Ejercicio

Desórdenes
Dada una palabra formada por n símbolos diferentes, la cantidad de palabras que se pueden formar reordenando las letras de forma tal que ninguna quede en su lugar original, se llama **desórdenes de n elementos** y se nota D_n.

4.3 Otras cantidades interesantes

4.3.1 Combinaciones con repetición

Ejemplo

Supongamos ahora que 10 personas están en un bar y cada una encarga una bebida entre las siguientes posibles: Agua, Cerveza, Limonada, Vino. ¿Cuántas pedidos son posibles?

Observar que los pedidos posibles pueden pensarse como las posibles formas de elegir 10 letras entre A, C, L y V. Aquí listamos algunas posibilidades:
AAAAACCLVV, AAAAAAAAAA, ACCVVVVVVV, CCCCLLVVVV

Observemos que se trata de utilizar 10 letras entre A,C,L,V, sin que importe el orden (y, claro está, con la posibilidad de repetir). Es natural entonces llamar a este número "combinaciones con repetición de 4 tomados de a 10 y notarlo CR^4_{10}.

En general, notamos CR^n_k, y llamamos **combinaciones con repetición de n tomadas de a k** a la cantidad de formas de tomar k elementos de un conjunto de n, con posibles repeticiones, y sin que importe el orden.

Podemos interpretar los ejemplos de arriba, en términos de los símbolos $-$ y $/$, como sigue:

$$\begin{array}{ll} AAAAACCLVV & -----/--/-/-- \\ AAAAAAAAAA & ----------/// \\ ACCVVVVVVV & -/--//------- \\ CCCCLLVVVV & /----/--/---- \end{array}$$

Esto es, son las posibles formas de elegir 10 lugares (los ocupados con el símbolo $-$ en una lista de $10 + (4 - 1)$ lugares (todos los ocupados). Esto es

$$CR_{10}^{4} = \binom{10+4-1}{10}.$$

En general, se tiene el siguiente resultado.

$$CR_k^n = \binom{k+n-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

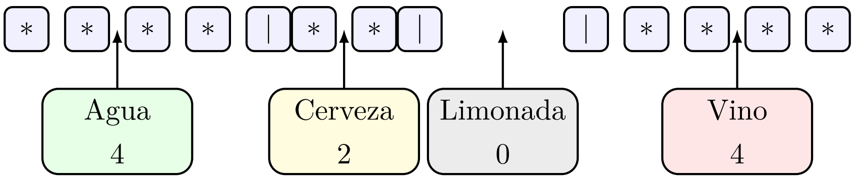
Notemos además que CR_k^n puede interpretarse como la cantidad de posibles soluciones de la ecuación $x_1 + \ldots + x_n = k$, con variables $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$. Aquí x_i corresponde al número de veces que se elije el elemento i. Luego podemos escribir

$$CR_k^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n : x_1 + \cdots + x_n = k\}.$$

Observemos además que CR_k^n también puede verse como la cantidad de formas de meter k pelotas iguales en n cajas distintas.
Resumiendo, el número CR_k^n puede verse como la cantidad de:

- formas de elegir k elementos de un conjunto de n permitiendo repeticiones y sin que importe el orden.
- soluciones de la ecuación $x_1 + \cdots + x_n = k$ con $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$.
- maneras de distribuir k objetos iguales en n recipientes distintos.

Barras y estrellas para 10 bebidas y 4 tipos



Hay 10 estrellas y 3 barras. Cada distribución corresponde a ubicar esas 3 barras entre los 13 lugares.

$$CR_{10}^{4} = \binom{10+4-1}{10} = \binom{13}{10}.$$

Figura 4.7: Representación de combinaciones con repetición mediante barras y estrellas.

4.3.2 Combinaciones multinomiales

Pensemos en cuántas palabras pueden formarse con las letras de la palabra IBIRAPITA

Reordenar letras con repeticiones

I I I A A B R P T

En IBIRAPITA hay 9 letras: I aparece 3 veces y A aparece 2 veces.

$$\frac{9!}{3!\,2!}$$

Figura 4.8: Las repeticiones de letras obligan a dividir por los ordenamientos internos indistinguibles.

Podemos imaginarnos una gran familia de ejemplos que consisten, en esencia, en este mismo problema: contar las formas de ordenar n símbolos sabiendo que estos se repiten con frecuencias $n_1, \ldots, n_k$ (suponemos aquí que $n_1 + \cdots + n_k = n$). La cantidad descrita es llamada **permutaciones de n con repeticiones de frecuencias** $n_1, \ldots, n_k$, y se denota por $C^n_{n_1,n_2,\cdots,n_k}$ porque generaliza a los números combinatorios.
Este número se puede entender como la cantidad de formas de partir un conjunto de n elementos en una k-upla ordenada de conjuntos de cardinales respectivos $n_1, n_2, \cdots, n_k$, es decir el cardinal del conjunto

$$\mathcal{S}_{n;n_1,\ldots,n_k} = \Big\{ f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\} : \# f^{-1}(i) = n_i \text{ para todo } i = 1, \ldots, k \Big\}.$$

Generaliza a los números combinatorios en el sentido de que $\binom{n}{k} = C^n_{k,n-k}$. En efecto, el número de la izquierda cuenta la cantidad de subconjuntos de cardinal k de $\{1, 2, \cdots, n\}$, el de la derecha cuenta la cantidad de formas de partir el conjunto $\{1, 2, \cdots, k\}$ en pares ordenados de subconjuntos de cardinales respectivos k y $n - k$.

Proposición 4.3.1. *Para $n_1 + n_2 + \cdots n_k = n$, se tiene*

$$C^n_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

Demostración. Haremos la prueba por inducción en $k \geq 1$. Para $k = 1$ se tiene $n_1 = n$ y los dos términos valen 1 y por tanto coinciden.
Supongamos que está probado para k y que $n_1 + n_2 \cdots n_k + n_{k+1} = n$. Luego el Principio del Producto nos da la igualdad

$$C^n_{n_1,\ldots,n_k,n_{k+1}} = \binom{n}{n_1} \cdot C^{n-n_1}_{n_2,\ldots,n_k,n_{k+1}} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2! \cdots n_{k+1}!}$$

donde en la última igualdad se utilizó la fórmula de las combinaciones y la hipótesis de recurrencia. Simplificando, se obtiene el resultado buscado. □

Usando esta fórmula podemos rápidamente resolver el problema planteado al principio. Observar que las repeticiones correspondientes a las letras I, B, R, A, P y T son $n_1 = 3$, $n_2 = 1$, $n_3 = 1$, $n_4 = 2$, $n_5 = 1$ y $n_6 = 1$, luego la cantidad buscada es

$$C^9_{1,1,3,2,1,1} = \frac{9!}{1!,1!,3!,2!,1!,1!} = 9 \times 8 \times 7 \times 5 \times 4 \times 3.$$

Usemos ahora las permutaciones con repeticiones para generalizar el teorema del binomio (Teorema 4.1.1).

Teorema 4.3.2 (Teorema Multinomial)**.** *El coeficiente del monomio* $x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$ *en el desarrollo* $(x_1 + \dots + x_k)^n$ *es*

$$C^n_{n_1,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}.$$

Demostración. Siguiendo la idea de la prueba combinatoria del Teorema 4.1.1 puede verse que el coeficiente de $x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$ en el desarrollo es $C^n_{n_1,\dots,n_k}$. □

Para ilustrar la demostración anterior supongamos que $n = 5$, $k = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$ y $n_3 = 1$ y que queremos formar $x_1^2 x_2 x_3^2$. Una manera de obtener este monomio es haciendo la siguiente elección (marcada en negrita):

$$(x_1+x_2+x_3)^5 = (x_1+x_2+\mathbf{x_3}).(x_1+\mathbf{x_2}+x_3).(\mathbf{x_1}+x_2+x_3).(\mathbf{x_1}+x_2+x_3).(x_1+x_2+\mathbf{x_3}).$$

Esto se identifica con la palabra $x_3x_2x_1x_1x_3$. Luego las formas de obtener dicho monomio en el desarrollo están en biyección con el conjunto de las palabras de largo cinco que se pueden formar con tres letras repitiendo dos veces x_1 y x_3. Esta cantidad es, como ya vimos, $C^5_{2,2,1}$.

4.4 Ejercicios de respuesta Verdadero/Falso

Ejercicio

Dificultad media. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Elegir 3 sabores entre 20 disponibles puede hacerse de $\binom{20}{3}$ formas.

b) $\binom{20}{3} = \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140.$

c) Si importa el orden de elección, la cantidad sigue siendo $\binom{20}{3}$.

d) Para todo $0 \le k \le n$, se tiene $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

e) Si $k > n$, entonces $\binom{n}{k} = 0$.

f) Para $k \le n$, se tiene $A^n_k = \binom{n}{k} P_k$.

Respuesta:

a) V, b) V, c) F, d) V, e) V, f) V.

Ejercicio

Dificultad media. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$

b) $\binom{n}{1} = n.$

c) La fórmula de Stiefel dice que $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

d) La fórmula de Stiefel dice que $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.

e) En el triángulo de Pascal, cada entrada interior es suma de las dos entradas superiores.

f) La suma de los elementos de la fila n del triángulo de Pascal es 2^n.

Respuesta:

a) V, b) V, c) V, d) F, e) V, f) V.

Ejercicio

Dificultad media. Un comité de 6 personas se elige entre 4 uruguayas y 4 extranjeras. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Sin restricciones, hay $\binom{8}{6}$ comités posibles.

b) Con 3 uruguayos y 3 extranjeros hay $\binom{4}{3}\binom{4}{3}$ comités.

c) Con número par de extranjeros hay $\binom{4}{2}\binom{4}{4} + \binom{4}{4}\binom{4}{2}$ comités.

d) Si hay más extranjeros que uruguayos, necesariamente hay 4 extranjeros y 2 uruguayos.

e) Con al menos 3 uruguayos hay $\binom{4}{3}\binom{4}{3} + \binom{4}{4}\binom{4}{2}$ comités.

f) Con al menos 3 uruguayos hay solamente $\binom{4}{3}\binom{4}{3}$ comités.

Respuesta:

a) V, b) V, c) V, d) V, e) V, f) F.

Ejercicio

Dificultad media. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) El coeficiente de $x^{n-k}y^k$ en $(x+y)^n$ es $\binom{n}{k}$.

b) El coeficiente de x^7y^3 en $(x+y)^{10}$ es $\binom{10}{3}$.

c) El coeficiente de x^7y^3 en $(x+y)^{10}$ es 120.

d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

e) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$ para todo $n \geq 1$.

f) El coeficiente de x^2y^3 en $(x+y)^4$ es $\binom{4}{3}$.

Respuesta:

a) V, b) V, c) V, d) V, e) V, f) F.

Ejercicio

Dificultad alta. Una heladería tiene 20 sabores, de los cuales 6 son de chocolate, 5 frutales y 9 de otros tipos. Se eligen 4 sabores distintos. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Con al menos 2 sabores de chocolate hay $\binom{6}{2}\binom{14}{2} + \binom{6}{3}\binom{14}{1} + \binom{6}{4}$ elecciones.

b) Con exactamente 2 sabores de chocolate hay $\binom{6}{2}\binom{14}{2}$ elecciones.

c) Con ningún sabor de chocolate hay $\binom{14}{4}$ elecciones.

d) Con al menos un sabor de chocolate hay $\binom{20}{4} - \binom{14}{4}$ elecciones.

e) Con exactamente un sabor frutal y al menos dos de chocolate hay $\binom{5}{1}(\binom{6}{2}\binom{9}{1} + \binom{6}{3})$ elecciones.

f) Con exactamente dos sabores frutales hay $\binom{5}{2}\binom{15}{2}$ elecciones.
Respuesta:

a) V, b) V, c) V, d) V, e) V, f) V.

Ejercicio

Dificultad alta. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
a) $CR^n_k = \binom{n+k-1}{k}$.
b) $CR^4_{10} = \binom{13}{10}$.
c) La cantidad de soluciones de $x_1 + \cdots + x_n = k$ con $x_i \in \mathbb{N}_0$ es $\binom{n+k-1}{k}$.
d) La cantidad de soluciones de $x_1 + \cdots + x_n = k$ con $x_i \in \mathbb{N}$ y $k \geq n$ es $\binom{k-1}{n-1}$.
e) Elegir 10 bebidas entre 4 tipos, permitiendo repetición y sin importar el orden, puede hacerse de 4^{10} formas.
f) Distribuir k objetos iguales en n cajas distintas puede hacerse de CR^n_k formas.
Respuesta:

a) V, b) V, c) V, d) V, e) F, f) V.

Ejercicio

Dificultad alta. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
a) La cantidad de palabras distintas que se forman reordenando las letras de IBIRAPITA es $\dfrac{9!}{3!\,2!}$.
b) $\binom{n}{n_1,\ldots,n_k} = \dfrac{n!}{n_1!\cdots n_k!}$ si $n_1 + \cdots + n_k = n$.
c) $\binom{n}{k} = \binom{n}{k,n-k}$.
d) El coeficiente de $x_1^2x_2x_3^2$ en $(x_1+x_2+x_3)^5$ es $\dfrac{5!}{2!\,1!\,2!}$.
e) La suma de todos los coeficientes de $(x_1 + \cdots + x_k)^n$ es k^n.
f) El coeficiente de $x_1^2x_2^3x_3$ en $(x_1+x_2+x_3)^5$ es $\dfrac{5!}{2!\,3!\,1!}$.
Respuesta:

a) V, b) V, c) V, d) V, e) V, f) F.

Ejercicio

Dificultad alta. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
a) $Sob(n,k) = 0$ si $n < k$.
b) $Sob(n,n) = n!$.
c) $Sob(5,3) = 3^5 - \binom{3}{1}2^5 + \binom{3}{2}1^5$.
d) $Sob(7,3) = 3^7 - 3\cdot 2^7 + 3$.
e) La cantidad de formas de repartir 7 libros distintos entre 3 estudiantes, de modo que todos reciban al menos uno, es $Sob(7,3)$.
f) En general, $Sob(n,k) = k^n - (k-1)^n$.

Respuesta:

a) V, b) V, c) V, d) V, e) V, f) F.

Ejercicio

Dificultad alta. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
a) Un desorden de n elementos es una permutación sin puntos fijos.
b) $D_1 = 0$.
c) $D_2 = 1$.
d) $D_3 = 2$.
e) $D_4 = 9$.
f) $D_n = Sob(n, n)$.
Respuesta:

a) V, b) V, c) V, d) V, e) V, f) F.

4.5 Ejercicio de opción múltiple

En cada pregunta, marque la única opción verdadera.

1. Elegir 3 sabores entre 20 disponibles, sin importar el orden, puede hacerse de:
   a) 20^3 formas.
   b) $20 \cdot 19 \cdot 18$ formas.
   c) $\binom{20}{3}$ formas.
   d) $\binom{3}{20}$ formas.
   e) $20 + 19 + 18$ formas.

2. ¿Cuál de las siguientes identidades es verdadera para $0 \leq k \leq n$?
   a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1}$.
   b) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.
   c) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1}$.
   d) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = n$.
   e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = n^2$.

3. Un comité de 6 personas se elige entre 4 uruguayas y 4 extranjeras. ¿Cuántos comités pueden formarse con exactamente 3 uruguayos y 3 extranjeros?
   a) $\binom{8}{6}$.
   b) $\binom{4}{3}\binom{4}{3}$.
   c) $\binom{4}{2}\binom{4}{4}$.
   d) $\binom{4}{3} + \binom{4}{3}$.

   e) $\binom{8}{3}\binom{8}{3}$.

4. ¿Cuál es el coeficiente de x^7y^3 en $(x+y)^{10}$?
   a) $\binom{10}{7}+\binom{10}{3}$.
   b) $\binom{10}{3}$.
   c) 10^3.
   d) $7!\,3!$.
   e) $\binom{7}{3}$.

5. Una heladería tiene 20 sabores, de los cuales 6 son de chocolate y 14 no son de chocolate. Se eligen 4 sabores distintos. ¿Cuántas elecciones tienen al menos un sabor de chocolate?
   a) $\binom{20}{4}-\binom{14}{4}$.
   b) $\binom{6}{1}\binom{14}{3}$.
   c) $\binom{6}{4}$.
   d) $\binom{14}{4}$.
   e) $\binom{20}{4}+\binom{14}{4}$.

6. ¿Cuántas soluciones tiene
$$x_1+\cdots+x_n=k$$
   con $x_i\in\mathbb{N}_0$?
   a) $\binom{n}{k}$.
   b) $\binom{k}{n}$.
   c) $\binom{n+k-1}{k}$.
   d) n^k.
   e) k^n.

7. ¿Cuál es el coeficiente de $x_1^2x_2x_3^2$ en $(x_1+x_2+x_3)^5$?
   a) $\dfrac{5!}{2!\,1!\,2!}$.
   b) $\binom{5}{2}$.
   c) 5^3.
   d) $\dfrac{3!}{2!\,1!\,2!}$.
   e) $\dfrac{5!}{2!\,2!}$.

8. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
   a) $Sob(n,k)=k^n-(k-1)^n$ para todo n,k.
   b) $Sob(n,n)=n!$.

c) $Sob(n,k) = 0$ si $n > k$.

d) Un desorden de n elementos es una permutación con todos sus puntos fijos.

e) $D_n = Sob(n,n)$.

Clave:

1) c, 2) b, 3) b, 4) b, 5) a, 6) c, 7) a, 8) b.