Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Grupos y Teoría de Galois
Primer semestre 2018

Práctico 1

1. Dado un número primo p, sean $R_p = \{a/b \in \mathbb{Q}$ tales que b y p son primos entre sí$\}$ y $R^p = \{a/b \in \mathbb{Q} : \ b = p^n, \ n \geq 0\}$. Probar que R^p y R_p son grupos abelianos con la suma habitual.

2. Sea $\mathbb{R}^*$ el conjunto de los números reales no nulos. Se define $* : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ por $a * b = |a|b$. Probar que $*$ es asociativa, que existe un neutro a izquierda $e \in \mathbb{R}^*$ (es decir, tal que $e * b = b$ para todo $b \in \mathbb{R}^*$) y que todo elemento de $\mathbb{R}^*$ tiene un inverso a derecha para e. ¿Es $(\mathbb{R}^*, *)$ un grupo?

3. Probar que si $g^2 = e$, para todo elemento g de un grupo G, entonces G es abeliano.

4. Sea G un grupo finito de orden par. Probar que existe $r \in G$, $r \neq e$, tal que $r^2 = e$.

5. Probar que un grupo no puede ser unión de dos subgrupos propios.

6.
   a) Sea G el grupo multiplicativo de la matrices invertibles 2×2 con coeficientes racionales, y sean $a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Probar que a tiene orden 4, b tiene orden 3, y ab tiene orden infinito.

   b) Hallar elementos a y b de orden infinito en $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$ tales que $a + b$ tiene orden finito.

7. Probar que si un grupo abeliano tiene elementos de orden n y m, tiene un elemento cuyo orden es el mínimo común múltiplo de n y m.

8. Sea $G \neq \{e\}$ un grupo que no tiene subgrupos no triviales. Probar que G es cíclico, finito y de orden primo.

9. Mostrar que $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ con el producto $\big((r, s) \cdot (u, v)\big) = (ru, rv + s)$ es un un grupo, y que $\phi : (\mathbb{R}, +) \to \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tal que $t \mapsto (\exp(at), 0)$ es un homomorfismo de grupos, para todo $a \in \mathbb{R}$.

10. El *grupo diedral* D_n es el grupo de simetrías de un polígono regular de n lados. Si el polígono tiene vértices $V_0, \ldots, V_{n-1}$, donde $V_k = e^{2k\pi i/n}$, sean S la simetría con respecto al eje Ox y R la rotación alrededor del origen de un ángulo de $2\pi/n$.

    a) Probar que T y S generan D_n y hallar el orden de D_n.

    b) Escribir la tabla de multiplicación de D_4.

11. El *grupo de los cuaterniones* Q es el subgrupo del grupo multiplicativo de las matrices invertibles en $M_2(\mathbb{C})$ generado por las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

    Construir la tabla del producto en Q.

12. Sea G un grupo. Se dice que $r \in G$ es un *elemento no generador* de G si para todo conjunto no vacío X, $G = \langle X \cup \{r\} \rangle$ implica que $G = \langle X \rangle$.

   a) Probar que el conjunto $\Phi(G)$ de los elementos no generadores de G es un subgrupo de G. $\Phi(G)$ es el *subgrupo de Frattini* de G.

   b) Probar que $\Phi(G)$ coincide con la intersección de todos los subgrupos maximales de G si G tiene subgrupos maximales, y que $\Phi(G) = G$) en caso contrario.

   c) Hallar $\Phi(\mathbb{Z})$, $\Phi(\mathbb{Q})$, y $\Phi(\mathbb{Z}_{p^n})$.

Nota. El curso se gana obteniendo por lo menos 20 puntos sobre 50 en cada uno de los parciales y por lo menos 60 puntos sobre 100 en total. En los períodos de julio y agosto, a aquellos estudiantes que hayan obtenido un puntaje total $P \geq 75$ en los parciales y un puntaje E sobre 100 en el examen práctico, se les asignará $\text{Máx}\{E, \frac{P+2E}{3}\}$ como nota del examen práctico. Los parciales tendrán lugar los días 10 de mayo y 28 de junio durante las clases de teórico. Por lo menos la mitad del puntaje en cada parcial corresponderá a problemas o partes de problemas extraídos de las hojas de práctico. No se podrá consultar ningún material durante los parciales. Durante el examen práctico se podrá consultar una hoja de cuaderno con un resumen.