



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY



Tesis para el título de

Doctor en Matemática

Contribuciones al estudio de dinámicas de atractores globales.

Autor:

Gonzalo COUSILLAS COSTA

Directores:

Dr. Jorge GROISMAN
Dr. Armengol GASULL

Jorge IGLESIAS :	Universidad de la República	- Árbitro
Victor MAÑOSA :	UPC - Barcelona	- Árbitro
Pablo MONZÓN :	Universidad de la República	- Examinador
Luis PIÑEYRÚA :	Universidad de la República	- Examinador
José VIEITEZ :	Universidad de la República	- Examinador

*...La verdad si es verdad,
no es de nadie y no es su dueño
quien la diga y al perder libertad
es en boca del tirano una mentira.*

Manifiesto de la media verdad.

Tabaré Cardozo

Yamandú Cardozo.

Agredadecimientos

El desarrollo de esta tesis doctoral ha sido un largo y arduo camino, en el que tuve el privilegio de contar con la guía, el apoyo y la confianza de muchas personas e instituciones a las que deseo expresar mi más sincero agradecimiento.

En primer lugar, quiero expresar mi profunda gratitud a mis directores de tesis, Armengol Gasull y Jorge Groisman, por su constante orientación, paciencia y generosidad intelectual. A Armengol, por aceptarme como su estudiante, su entusiasmo al presentarme el problema de Markus-Yamabe, sus innumerables sugerencias, observaciones y discusiones que enriquecieron de manera esencial este trabajo, y por transmitirme una forma rigurosa y a la vez creativa de hacer matemática. A Jorge, por su cercanía, su apoyo permanente y su compromiso en cada etapa del proceso, por mostrarme una forma de hacer matemática desde la libertad, sin prejuicios. Su dedicación y su confianza en mis capacidades fueron fundamentales para que este proyecto llegara a buen puerto.

Deseo agradecer también a los miembros del tribunal de tesis por la lectura atenta, las valiosas observaciones y el tiempo dedicado a evaluar este trabajo. Sus comentarios y sugerencias contribuyeron significativamente a mejorar la claridad y la solidez de los resultados presentados.

Extiendo mi agradecimiento a todos los profesores que, a lo largo de

mi formación, despertaron y consolidaron mi interés por la matemática. A quienes me enseñaron no solo los contenidos, sino también el valor de la curiosidad, la perseverancia y el pensamiento crítico. En particular, a aquellos que desde mis primeros años de estudio alentaron mi vocación científica y me mostraron que la investigación es, ante todo, una forma de diálogo continuo con las ideas y con las personas. A todos los profesores que tuve en el Instituto de Profesores “Artigas”, en particular a Fede De Olivera. A Marcelo Lanzilotta que allá por el año 2005 me mostró una forma de dar clases diferente, comprometida y entusiasta. A todos mis compañeros del IMERL con los que compartí cursos, de ellos aprendí mucho. En particular a Jorge Iglesias, Paola Bermolen y Nancy Guelman

Agradezco a la Universidad de la República, a la Comisión Académica de Posgrado y al PEDECIBA-Matemática por brindarme el marco institucional, los recursos y las oportunidades necesarias para desarrollar esta investigación. El apoyo recibido a través de sus programas de formación y financiamiento fue decisivo para la culminación de esta tesis. También quiero reconocer a los compañeros y colegas del Grupo de Sistemas Dinámicos, con quienes compartí seminarios, discusiones y momentos de aprendizaje que enriquecieron enormemente mi experiencia académica.

Durante los años de trabajo que demandó este proyecto, muchas personas me acompañaron con su amistad, su comprensión y su entusiasmo. A todos ellos, mi sincero agradecimiento. El intercambio cotidiano, las conversaciones informales y el apoyo emocional fueron tan importantes como los avances técnicos o los resultados obtenidos. Finalmente, deseo expresar mi gratitud más profunda a mis padres, por haber sido desde siempre mi mayor fuente de inspiración y apoyo. Gracias por inculcarme el valor del estudio, el esfuerzo y el trabajo. Por motivarme a seguir aprendiendo

y por acompañarme en cada paso con cariño incondicional. Este logro les pertenece tanto como a mí, porque sin su ejemplo y su aliento constante, este recorrido no habría sido posible.

A todos quienes, de una u otra forma, formaron parte de este proceso, les agradezco sinceramente. Esta tesis es el resultado de una suma de influencias, gestos y presencias que me ayudaron a crecer, tanto como investigador como persona.

Porque siempre es presente.

Índice general

1. Introducción	9
2. Topología de atractores globales para homeomorfismos con sombreado topológico en \mathbb{R}^m.	21
2.1. Preliminares	23
2.2. Resultado Principal	34
2.3. Prueba del Teorema Principal.	45
2.4. Variantes del problema y caminos a seguir.	46
3. Condiciones suficientes de atracción global para mapas en \mathbb{R}^m.	49
3.1. Antecedentes: Problema de LaSalle.	50
3.2. Resultados Principales.	59
3.2.1. Enfoque topológico.	59
3.2.2. Nuevos ejemplos del problema de LaSalle.	72
3.2.3. Conjetura de Rus, condición Fuerte de LaSalle.	77
3.3. Caminos a seguir	82
Apéndice A. Propiedad del sombreado para mapas lineales hiperbólicos.	85
A.1. Sombreado topológico a futuro para mapas en espacios localmente compactos.	89

A.2. Sombreado topológico para homotecias.	90
A.3. Lineal con valores propios 2 y $1/2$	96
Apéndice B. Anosov topológicos en espacios no compactos.	99
B.1. Órbitas que no acumulan a futuro o a pasado.	101
B.2. La cuenca de atracción en el plano es no acotada.	109
B.3. Descomposición Espectral	110

Capítulo 1

Introducción

En el área de los sistemas dinámicos, la comprensión de los fenómenos de atracción global es clave para el análisis y la predicción del comportamiento a largo plazo de un sistema. Desde la década del 60', el estudio de sistemas dinámicos discretos ha ganado una atención considerable debido a su capacidad para modelar una amplia gama de fenómenos complejos en diversas áreas del conocimiento [41].

La noción de atractor global en sistemas dinámicos hace referencia a la existencia de un conjunto compacto invariante que atrae a todas las trayectorias a futuro del sistema [6]. A lo largo de las décadas, se han desarrollado diversas técnicas y herramientas para analizar y caracterizar la existencia de un atractor global de un sistema dinámico, lo que ha llevado a importantes avances teóricos y aplicaciones en numerosos campos [4, 29, 33].

En esta tesis doctoral, nos enfocaremos en explorar y analizar principalmente dos aspectos relacionados con la dinámica de atracción global en sistemas dinámicos discretos.

Por una parte en el Capítulo 2 consideraremos un homeomorfismo de

\mathbb{R}^m con la propiedad del sombreado topológico y con un atractor global. A lo largo del capítulo veremos cómo interactúa la propiedad del sombreado con el atractor. Obtendremos como resultado principal de este capítulo el siguiente

Teorema 1.1. *Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, un homeomorfismo con la propiedad del sombreado topológico tal que $K \subset \mathbb{R}^m$ es atractor global. Entonces K se reduce a un punto.*

En el caso $m = 1$ bajo las hipótesis del teorema anterior no se puede concluir que el atractor sea trivial. Esto lo desarrollaremos al principio del Capítulo 2.

¿Por qué nos interesa el sombreado? La propiedad del sombreado de pseudo órbitas es introducida en los trabajos de Anosov y Bowen [3,7] y resulta ser un concepto fundamental en el estudio de los sistemas dinámicos. La idea es que si un sistema dinámico tiene esta propiedad, entonces hay una correspondencia entre trayectorias exactas y trayectorias aproximadas o perturbadas. Si un sistema tiene esta propiedad entonces la órbita aproximada (o pseudo órbita) puede ser “sombreada” por una órbita verdadera del sistema. Esto garantiza la robustez de las propiedades dinámicas frente a pequeñas perturbaciones. Sea X un espacio métrico, consideremos el sistema dinámico discreto generado por $f : X \rightarrow X$. Dado un punto $x \in X$, una órbita es una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que $x_{n+1} = f(x_n)$. En muchas ocasiones es muy complicado determinar con precisión $f(x)$ y lo que se hace es aproximar su valor. Considerar esta “órbita” aproximada, controlando el margen de error en cada etapa es lo que recibe el nombre de pseudo órbita.

¿Qué dinámicas tienen la propiedad del sombreado? Por ejemplo, el Lema del sombreado [31] logra describir el comportamiento de las pseudo órbitas cerca de un conjunto hiperbólico. A grandes rasgos, si Λ es un con-

junto hiperbólico de un difeomorfismo f , en un entorno suficientemente pequeño de Λ , todas las pseudo órbitas son sombreadas por una órbita que está en Λ . Los conjuntos hiperbólicos son caracterizados por la expansión y contracción en direcciones transversales en el espacio de fases. Un ejemplo paradigmático de un sistema hiperbólico es un Anosov lineal en el toro, como por ejemplo el mapa $f(x, y) = (2x+y, x+y) \pmod{\mathbb{Z}^2}$ donde el conjunto hiperbólico es todo \mathbb{T}^2 , con lo que este tiene sombreado.

Además en \mathbb{R}^m , los sistemas lineales con valores propios de módulo diferente de 1 tienen sombreado, invitamos al lector a ver el Apéndice A para profundizar en esto. Resulta de interés determinar qué condiciones son suficientes para que un sistema tenga sombreado; de ese modo, la simulación numérica del sistema tendrá un correlato fiel con el comportamiento teórico del mismo.

En términos generales se puede considerar que en cada iteración se comete un error entre lo que se mide u observa y la trayectoria real. A medida que el sistema evoluciona en el tiempo puede suceder que la acumulación de los errores de cada iterado haga que el comportamiento “teórico” y el comportamiento “numérico” sean totalmente distintos. Si tenemos cierto control del error que se puede cometer, por ejemplo, estar a menos de un número $\delta > 0$, entonces la órbita numérica se llamará δ -pseudo órbita. La idea es que el sistema tendrá la propiedad del sombreado de pseudo órbitas si, independientemente de la acumulación de errores que se tenga en cada etapa, (estos errores son infinitos) el comportamiento numérico es “cercano” al comportamiento teórico. Veamos en concreto las definiciones de estos conceptos. Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ un mapa. Dado $\delta > 0$, una δ -pseudo órbita es una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ que verifica $d(f(x_n), x_{n+1}) < \delta$. Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset X$, es ϵ -

sombreada por una órbita $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ si $d(y_n, x_n) < \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Se dice que f tiene la *propiedad del sombreado métrico* si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que cualquier δ -pseudo órbita es ϵ -sombreada por una órbita. En este caso el error cometido en la medición al considerar una pseudo órbita es como máximo un número fijo $\delta > 0$ y el grado de cercanía entre órbita y pseudo órbita es también un número fijo $\epsilon > 0$. Por otro lado, si consideramos que el error cometido por una pseudo-órbita puede cambiar dependiendo de la ubicación del punto en el espacio, podemos pensar en este error como una función continua que depende del punto. Denotemos $C^+(X) = \{\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}^+, \alpha \text{ es continua}\}$. Sea $\delta \in C^+(X)$, una δ -pseudo órbita se puede plantear como una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ que verifica que $d(f(x_n), x_{n+1}) < \delta(f(x_n))$. Asimismo, se puede considerar que el grado de cercanía entre una pseudo órbita y una órbita también depende de la posición, con lo que si $\epsilon \in C^+(X)$, una pseudo órbita $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ será ϵ -sombreada si existe una órbita $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ que cumple $d(x_n, y_n) < \epsilon(x_n)$. Un homeomorfismo tiene la *propiedad del sombreado topológico* si para cualquier función ϵ existe una función δ tal que toda δ -pseudo órbita es ϵ sombreada. En el caso en que el espacio métrico X es compacto, ambas definiciones son equivalentes. En el contexto de espacios no compactos no son equivalentes; desarrollaremos este tema en el Apéndice A.2. Como comentario a considerar y de manera informal, en terminos físicos podemos pensar que el δ -error cometido al considerar pseudo órbitas cuando δ es constante está asociado al *error absoluto* en la medición mientras que si δ es una función que depende del punto, a medida que se consideran puntos cada vez más lejanos, la función δ puede tomar valores más cercanos a cero, en este sentido esto puede tener un vínculo con el *error relativo* de la medición.

La propiedad del sombreado topológico entonces generaliza la propiedad del sombreado métrico de un espacio compacto a un espacio no compacto. Como antecedentes de lo que vamos a desarrollar en el Capítulo 2 existen varios trabajos donde se estudia la propiedad del sombreado topológico junto con la expansividad topológica para el caso de homeomorfismos [17, 18, 20, 35]. En el Apéndice B desarrollaremos algunos de estos resultados con el fin de que el lector tenga un panorama de las técnicas y formas de pensar que se han utilizado hasta el momento. En el contexto de la presente tesis donde estudiaremos dinámicas de atracción global prescindiremos de la hipótesis de expansividad y nos focalizaremos en estudiar de qué manera interactúa el sombreado con el atractor.

En el inicio del Capítulo 2 definiremos el concepto de atractor global y a mostraremos que la existencia de un atractor global estable para el caso de un homeomorfismo $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $m \geq 2$, implica que este es conexo con borde conexo. En lo que resta del capítulo desarrollaremos todo lo necesario para probar el Teorema 1.1.

El Capítulo 3 trata sobre condiciones suficientes para garantizar dinámicas de atracción global. Haremos un racconto histórico del problema comenzando en el contexto de ecuaciones diferenciales con lo que inicialmente fue una conjetura planteada por Markus y Yamabe [37].

El problema de Markus-Yamabe surge en el contexto de la estabilidad global de sistemas dinámicos no lineales. Propuesto inicialmente en 1960, el problema plantea condiciones bajo las cuales el único punto de equilibrio de una ecuación diferencial autónoma $x' = F(x)$ en \mathbb{R}^m es globalmente asintóticamente estable. Supongamos que x_0 es un punto de equilibrio. Si $D_F(x_0)$ tiene todos sus valores propios con parte real negativa, entonces x_0 es un atractor local debido al Teorema de Hartman-Grobman, es decir

existe un entorno de x_0 tal que toda solución $\phi(t, x)$ con condición inicial $\phi(0, x) = x$ está definida y $\phi(t, x) \rightarrow x_0$ si $t \rightarrow +\infty$. A partir de esto Markus y Yamabe se preguntan qué condiciones hay que pedir a F para asegurar la atracción global del punto de equilibrio. Específicamente, ¿es suficiente que la matriz Jacobiana $D_F(x)$ tenga todos los valores propios con parte real negativa para que el punto de equilibrio sea globalmente asintóticamente estable?

En dimensión $m = 1$, la pregunta tiene respuesta afirmativa y la prueba es una simple aplicación del retrato de fases. En dimensión $m = 2$ pasaron más de 30 años hasta lograr llegar a una respuesta. De forma independiente C. Gutierrez [27] y R. Fessler [22] en 1993 probaron que la pregunta tiene respuesta afirmativa. Para ello, se muestra que la condición está relacionada con la inyectividad del mapa.

Teorema: *Sea $\rho \in [0, +\infty)$ y $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un mapa de clase C^1 tal que para todo $q \in \mathbb{R}^2$ el determinante de $D_X(q)$ es positivo y además para todo $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $|p| \geq \rho$, todos los valores propios de $D_X(p)$ tiene parte real negativa o cero. Entonces X es inyectivo.*

En [38] Olech muestra que en el plano, la inyectividad del campo es equivalente a probar que el origen es atractor global del sistema, por lo que con esto se logra dar respuesta a la pregunta.

En dimensión $m \geq 4$, J. Bernat y J. Llibre [5] muestran que hay un sistema cumpliendo la hipótesis del problema con una órbita periódica. En [26] se modifica este ejemplo para que toda órbita esté acotada y por tanto las soluciones quedan definidas para todo $t > 0$. Analizaremos en detalle este ejemplo en la Sección 3.2.3. En dimensión $m = 3$, Cima et al. muestran un ejemplo polinomial de un campo que cumple la hipótesis del problema con órbitas que escapan a infinito. Como resumen, el problema

de Markus-Yamabe tiene respuesta afirmativa en dimensión 1 y 2 y tiene respuesta negativa en dimensión mayor o igual a 3.

La contraparte en el contexto de dinámica discreta se presenta como el problema de LaSalle [34], donde se plantea la pregunta de si un mapa de clase C^1 cuyo diferencial tiene valores propios con módulo menor que 1 en todo punto cumple que tiene una dinámica de atracción global. En los Preliminares del Capítulo 3 daremos un estado del arte del problema. Veremos que hay ciertas familias de ejemplos que tienen respuesta afirmativa al problema.

- Las familias de mapas $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que son el tiempo 1 de flujos.
- Las familias de mapas triangulares en \mathbb{R}^m , esto es, mapas de la forma

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = (f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots, f(x_1, x_2, \dots, x_m))$$

- La familia de mapas polinomiales del plano.

Por otro lado, recordaremos un contraejemplo en el plano propuesto por Szlenk [11], donde existe una órbita periódica y además hay órbitas que escapan a infinito. Esto implica que el comportamiento del problema de LaSalle sobre atracción global en dimensión 2, al estilo de la condición de Markus-Yamabe es distinto. El problema de LaSalle solo tiene respuesta afirmativa en dimensión 1. De todas maneras puede ser de interés buscar nuevas familias de ejemplos con respuesta afirmativa al problema. Otra estrategia es agregar condiciones al mapa en cuestión para así garantizar una dinámica de atracción global. Para comodidad del lector, varios de los conceptos antes mencionados serán desarrollados en la Sección 3.1.

En el Capítulo 3 entonces presentaremos condiciones suficientes para que un mapa en \mathbb{R}^m tenga un punto atractor global. No trabajaremos a

partir del problema de LaSalle, sino que partiremos de ciertos mapas que tienen atracción global y determinaremos una manera de perturbarlos para que los mapas cercanos sigan teniendo dinámica de atracción global. Los resultados principales del Capítulo 3 son los siguientes:

Teorema 1.2. *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un mapa con sombreado métrico y con un punto p_f atractor global. Para todo $\alpha > 0$, existe $\delta > 0$ tal que todo mapa g que satisfice:*

- *Existe $q_g \in \mathbb{R}^m$ atractor local de g ,*
- *$p_f \in B(q_g, 2\alpha) \subset B_{q_g}$, donde B_{q_g} es la cuenca de atracción de q_g respecto a g .*
- *$\|g - f\| < \delta$.*

Entonces q_g es atractor global para g .

Si se quita la hipótesis de que el mapa tenga la propiedad del sombreado métrico se obtiene un resultado similar pero ahora el grado de cercanía entre ambos mapas queda en función de la posición del punto en el espacio.

Teorema 1.3. *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un mapa con un punto p_f atractor global. Para todo $\alpha > 0$, existe $\delta \in C^+(\mathbb{R}^m)$ tal que todo mapa g que satisfice:*

- *Existe $q_g \in \mathbb{R}^m$ atractor local de g .*
- *$p_f \in B(q, 2\alpha) \subset B_q^g$, donde B_q^g es la cuenca de atracción de q respecto a g .*
- *$d(g(x), f(x)) < \delta(f(x))$.*

Entonces q es atractor global para g .

Un paso importante para la prueba de este resultado es el Teorema 3.12 donde se prueba que si un mapa tiene un punto fijo atractor global estable, entonces tiene sombreado topológico. En el caso de un homeomorfismo con un punto fijo atractor global estable, por [30, 32] es conjugado a una homotecia. En [15] se muestra que una homotecia tiene expansividad y sombreado topológico. Por tanto el Teorema 3.12 es una generalización de este resultado.

En la Sección 3.2.2 mostraremos cómo se pueden obtener nuevos ejemplos de mapas que tienen respuesta afirmativa al problema de LaSalle a partir del Teorema 1.2, específicamente en el Ejemplo 3.15 estudiaremos condiciones suficientes que debe cumplir un mapa del plano de la forma $H(x, y) = A(x, y) + G(x, y)$ donde A es un lineal y $G(x, y) = (g_1(y), g_2(x))$ fuera de una bola del origen para garantizar una dinámica de atracción global.

Por otro lado, mostraremos que la hipótesis del problema de LaSalle, es decir, pedir que $\rho(J_f(x)) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$, está lejos de ser necesaria para que se presente una dinámica de atracción global, pues en el ejemplo 3.16 daremos a conocer un mapa con dinámica de atracción global donde el radio espectral no está acotado.

Siguiendo la línea de la búsqueda de condiciones suficientes para garantizar dinámicas de atracción global, Rus en [40] plantea una condición más fuerte del problema de LaSalle. Este pide que $\rho(J_{f^n}(x)) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Esto se fundamenta en que por un lado, la familia de ejemplos que tienen respuesta afirmativa al problema cumplen esta condición y por otro, algunos contraejemplos conocidos (como el de Szlenk) no la cumplen.

En la Sección 3.2.3 daremos una respuesta a la Conjetura de Rus para dimensión $m \geq 4$. Para ello, tomaremos el campo presentado por Cas-

tañeda en [26], que es una modificación del campo propuesto por Bernat y Llibre y consideraremos su flujo a tiempo 1. Veremos cómo el tiempo 1 del flujo es un contraejemplo de esta conjetura. En dimensión 2 si además pedimos que el infinito sea repulsor veremos que la hipótesis de Rus implica la no existencia de puntos periódicos.

En el Cuadro 1.1 mostramos una tabla de los distintos problemas y lo que se sabe de ellos, cabe observar que si se tiene un contraejemplo para una dimensión determinada, se tiene un contraejemplo para cualquier dimensión mayor que esta. La idea es la siguiente, supongamos que $f : \mathbb{R}^{m_0} \rightarrow \mathbb{R}^{m_0}$ es un contraejemplo en cierta dimensión m_0 . Si tomamos $m > m_0$ entonces en las primeras m_0 coordenadas tomamos f y en las restantes coordenadas tomamos un múltiplo de la identidad que se encuentre en las condiciones del problema, es decir, podemos considerar $\hat{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\hat{f} = f \times \lambda \text{Id}$ donde: $\lambda < 0$ en el caso del problema de Markus-Yamabe o $|\lambda| < 1$ en el caso del problema de LaSalle. De esta forma como las primeras m_0 coordenadas son invariantes, en ambos contextos tenemos una órbita que no tiende al punto fijo.

Dim/ Problema	M-Y (SDC)	LS (SDD)	Rus(SDD)
$m = 2$	V (Gutierrez-Fessler)	F (Szlenk)	¿?
$m = 3$	F (Cima et al.)	F	¿?
$m \geq 4$	F (Bernat-Llibre)	F	F (esta tesis)

Cuadro 1.1: Respuestas a los diferentes problemas sobre atracción global con condiciones del estilo Markus-Yamabe.

En esta figura **SDC** significa sistema dinámico continuo, **SDD** significa sistema dinámico discreto, **V** significa verdadero y **F** significa falso.

Esta memoria tiene preparado en estado de preprint el artículo [16] correspondiente al Capítulo 2. Este capítulo se basa en trabajos previos del autor en colaboración con Groisman y Xavier [17, 18]. Además se encuentra en preparación otro artículo titulado *A sufficient condition for dynamics of global attraction and some consequences on the LaSalle problem* basado en el capítulo 3 de esta memoria.

En resumen, el hilo conductor de los dos capítulos principales es el estudio de dinámicas con un atractor global. Esta tesis representa un esfuerzo por profundizar en la comprensión de la atracción global de sistemas dinámicos discretos en \mathbb{R}^m desde dos abordajes distintos, por un lado se determina la topología de un atractor global de un homeomorfismo con sombreado topológico. Por otro se plantean ciertos criterios para que un mapa tenga un punto fijo atractor global estable. Esperamos que el trabajo contribuya al avance de este campo y sirva como punto de partida para futuras investigaciones y aplicaciones en esta área.

Capítulo 2

Topología de atractores globales para homeomorfismos con sombreado topológico en \mathbb{R}^m .

El resultado principal de este capítulo ya lo mencionamos en la Introducción pero lo recordamos nuevamente aquí.

Teorema 1.1 *Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, un homeomorfismo con la propiedad del sombreado topológico tal que $K \subset \mathbb{R}^m$ es atractor global. Entonces K es trivial.*

En el caso unidimensional curiosamente el resultado no es cierto. El Lema 2.9 nos dirá que si $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo y $K \subset \mathbb{R}^m$ es un atractor global, entonces K es conexo. En el caso de \mathbb{R} , los conexos son los intervalos por lo que K es un intervalo. Si K no es trivial, es decir, si no se reduce a un punto, se tiene que ∂K no es conexo y aquí se encontrará la diferencia respecto a dimensiones más altas. En [39] se da una caracterización de los homeomorfismos con sombreado en el intervalo. Recordar que en \mathbb{R} los homeomorfismos son o bien funciones con-

tinuas monótonas crecientes o bien funciones continuas monótonas decrecientes. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continua, monótona creciente, se define el conjunto \mathcal{F} como el conjunto de puntos fijos de f interiores al $[0, 1]$. Además se define el conjunto $\mathcal{C} = \{x \in \mathcal{F} : \text{para todo } \epsilon > 0, \text{ existen } y, z \in (x - \epsilon, x + \epsilon) \text{ tales que } f(z) > z \text{ y } f(y) < y\}$. Enunciamos aquí el teorema para comodidad del lector.

Teorema 2.1 ([39]). *Sea f una función continua, creciente en el intervalo $[0, 1]$. Se cumple que f tiene la propiedad del sombreado si y sólo si $\mathcal{F} = \mathcal{C}$.*

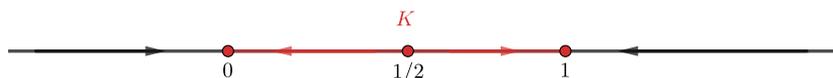


Figura 2.1: En rojo se muestra un atractor global no trivial para un homeomorfismo en \mathbb{R} . En el intervalo $[1, +\infty)$ f es invariante y el 1 atrae a todos los puntos en $(1, +\infty)$. Se tiene un comportamiento análogo en el intervalo $(-\infty, 0]$ donde 0 es atractor de todos los puntos en $(-\infty, 0)$.

En nuestro caso como K es atractor global, podemos considerar que los puntos del borde son atractores locales. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{Fix}(f) = \{0, 1/2, 1\}$, tanto 0 como 1 son atractores y 1/2 es repulsor (ver Figura 2.1). Además en $(-\infty, 0]$ f es una homotecia de razón 1/2 y centro 0 y en $[1, +\infty)$ f es una homotecia de razón 1/2 y centro 1. En $K = [0, 1]$ el punto 1/2 es repulsor y K tiene sombreado por el Teorema 2.1, además es atractor global y no es trivial (ver Figura 2.1). En $(-\infty, 0]$ y en $[1, +\infty)$ f es una homotecia y por tanto tiene sombreado topológico (ver la Proposición A.9 del Apéndice A). Esto implica que f tiene sombreado en \mathbb{R} , K es atractor global y no es trivial.

Es muy interesante ver cómo interactúa la propiedad del sombreado con la topología del atractor cuando éste es global. Aquí desarrollaremos y profundizaremos en esta línea. Un resultado clave en el camino para probar que el atractor global es trivial será el Lema 2.19 donde mostraremos la existencia de una función $\epsilon : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^+$ de forma que ciertas órbitas de f son ϵ separadas a pasado.

En lo que viene a continuación presentaremos ciertos resultados referidos a los conceptos que aparecen en el enunciado del teorema principal de este capítulo. Dejaremos el Apéndice A para presentar el sombreado métrico y topológico para mapas lineales hiperbólicos. Por último en el Apéndice B mostraremos algunos resultados sobre homeomorfismos con sombreado y expansividad topológica. Invitamos al lector a visitar estos apéndices si surge el interés de profundizar en estos conceptos.

2.1. Preliminares

En esta sección desarrollaremos los conceptos necesarios que utilizaremos a lo largo del capítulo.

Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ un mapa continuo, se considera el sistema dinámico generado al iterar f , es decir $x_{n+1} = f(x_n)$. Se define la órbita futura de un punto x como el conjunto $\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x)\}_{n \geq 0}$. Se dice que un punto $x \in X$ es *no errante* si para todo entorno U de x , existe $n > 0$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Se denota $\Omega(f)$ al conjunto de los puntos no errantes de f . Se define el conjunto ω -límite de x como

$$\omega(x) = \{y \in X : \text{existe } n_i \rightarrow +\infty \text{ tal que } f^{n_i}(x) \rightarrow y\}.$$

Si f es un homeomorfismo, se puede considerar la órbita de un punto como el conjunto $\mathcal{O}(x) = \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. En este caso se define el conjunto α -

límite de x como

$$\alpha(x) = \{y \in X : \text{existe } n_i \rightarrow +\infty \text{ tal que } f^{-n_i}(x) \rightarrow y\}.$$

Notar que es de interés estudiar la dinámica de los puntos no errantes, estos son los puntos que generan en cierta medida una dinámica rica. En el caso de una dinámica de atracción global, la idea intuitiva es que existe un conjunto compacto K que atrae de cierta manera los puntos del complemento de K (ver Definición 2.6). Por lo que estos puntos serán errantes; para cada $x \in K^c$ existe un entorno U_x tal que $f^n(U_x) \cap U_x = \emptyset$ para todo $n > 0$. Los puntos que tienen posibilidad de ser no errantes son los del atractor.

Sean $f, g : X \rightarrow X$ mapas continuos. Definimos la distancia C^0 entre f y g como

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} \{d(f(x), g(x))\},$$

siempre que este supremo exista. Si consideramos $X = \mathbb{R}^m$ como espacio vectorial normado, este tiene una métrica inducida por la norma que se define como $d(x, y) = \|x - y\|$. Sea $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$ y $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, donde $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ denota el espacio de matrices reales de tamaño $m \times m$, se define la norma matricial inducida por la norma de \mathbb{R}^m como $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \{\|Ax\|\}$. Se define además el radio espectral de la matriz A como

$$\rho(A) := \text{máx}\{|\lambda_i| : \lambda_i \text{ es un valor propio de } A\}.$$

Sea $\delta \in C^+(X)$, una δ -pseudo órbita de f es una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ que cumple $d(f(x_n), x_{n+1}) < \delta(f(x_n))$, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Esto significa que el δ -error cometido depende continuamente de la posición de $f(x_n)$. Sea $\epsilon \in C^+(X)$, una δ -pseudo órbita $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es ϵ -sombreada si existe una órbita $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que $d(y_n, x_n) < \epsilon(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

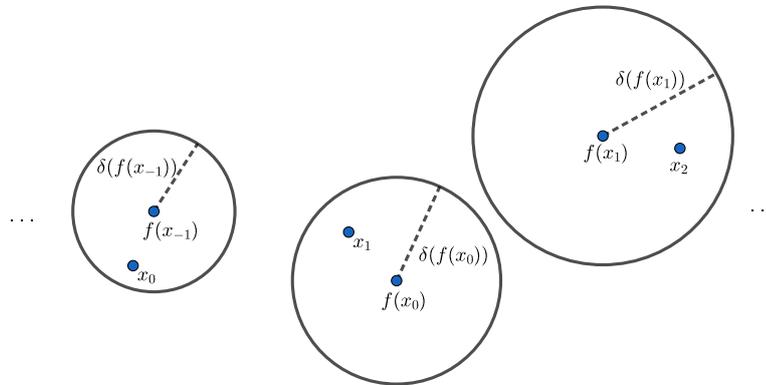


Figura 2.2: $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una δ -pseudo órbita donde δ depende de la posición de $f(x_n)$.

Definición 2.2 (Sombreado topológico). *Un mapa $f : X \rightarrow X$ tiene la propiedad del sombreado topológico si dado $\epsilon \in C^+(X)$, existe $\delta \in C^+(X)$ tal que toda δ -pseudo órbita es ϵ -sombreada.*

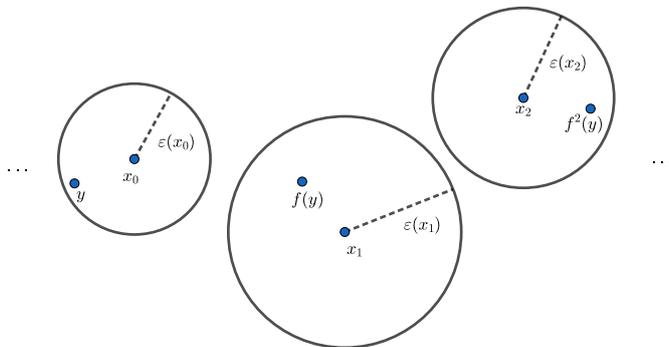


Figura 2.3: $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es ϵ -sombreada por $\{f^n(y)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

La definición topológica de sombreado tiene la ventaja de que en espacios no compactos es invariante por conjugaciones, mientras que la definición métrica no lo es. Para probar esto necesitamos unos resultados previos.

Sea X un espacio topológico, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es *semi-continua inferiormente* [respectivamente *semi-continua superiormente*] en $x \in X$ si para cualquier $\epsilon > 0$, existe U entorno de x tal que para cualquier $y \in U$, se cumple que $f(y) > f(x) - \epsilon$ [respectivamente $f(y) < f(x) + \epsilon$]. Se dice que f es semi-continua inferiormente [respectivamente semi-continua superiormente] si lo es para todo $x \in X$.

Lema 2.3 (Dowker). *Sea X un espacio topológico paracompacto. Sean $\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$ semi-continua inferiormente y $\gamma : X \rightarrow \mathbb{R}$ semi-continua superiormente tales que $\alpha(x) > \gamma(x)$ para todo $x \in X$. Entonces existe $\beta : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\alpha(x) > \beta(x) > \gamma(x)$ para todo $x \in X$.*

Para una prueba de este resultado se sugiere ver [28]. El siguiente resultado da una caracterización de la continuidad de una función en términos de ϵ y δ como funciones continuas en $C^+(Y)$ y $C^+(X)$ respectivamente, es decir, a grandes rasgos es de esperar que si al variar $y \in Y$, el ϵ_y asociado varía poco, entonces el δ_x correspondiente también va a variar poco.

Lema 2.4. [35] *Sean (X, d) y (Y, d') dos espacios métricos. Una función $f : X \rightarrow Y$ es continua si y sólo si para cualquier $\epsilon \in C^+(Y)$, existe $\delta \in C^+(X)$ tal que si $d(x, y) < \delta(x)$ ($x, y \in X$), entonces $d'(f(x), f(y)) < \epsilon(f(x))$.*

Demostración. Dado $\epsilon \in C^+(X)$, definimos un mapa $\beta : X \rightarrow (0, \infty)$ como

$$\beta(x) = \sup\{r > 0 : f(B(x, r)) \subset B(f(x), \lambda) \text{ para algún } 0 < \lambda < \epsilon(f(x))\}.$$

Afirmamos que β es semi-continua inferiormente. Si esto no fuera cierto, existiría $x_0 \in X$ y $\epsilon_0 > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que

$d(x, x_n) < 1/n$ pero $\beta(x_n) \leq \beta(x_0) - \epsilon_0$. Tomemos $n_0 > 0$ tal que $d(x_n, x_0) < \epsilon_0/3$ para todo $n > n_0$. Con esto si $d(x_n, y) < \beta(x_n) + \epsilon_0/3$, entonces $d(y, x_0) < \beta(x_0) - \epsilon_0/3$. En efecto,

$$d(y, x_0) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x_0) < \beta(x_n) + \epsilon_0/3 + \epsilon_0/3 \leq \beta(x_0) - \epsilon_0/3.$$

Sea $0 < \lambda < \epsilon(f(x_0))$ tal que $f(B(x_0, \beta(x_0) - \epsilon_0/3)) \subset B(f(x_0), \lambda)$. Sea $\alpha = \epsilon(f(x_0)) - \lambda$. Como f y ϵ son continuas, existe $m > n_0$ tal que

$$d'(f(x_0), f(x_m)) < \alpha/2 \quad \text{y} \quad |\epsilon(f(x_0)) - \epsilon(f(x_m))| < \alpha/2.$$

Sea $y \in B(x_m, \beta(x_m) + \epsilon_0/3)$, entonces $y \in B(x_0, \beta(x_0) - \epsilon_0/3)$. Por tanto, se tiene que $d'(f(y), f(x_0)) < \lambda$. Además

$$d'(f(y), f(x_m)) \leq d'(f(y), f(x_0)) + d'(f(x_0), f(x_m)) < \epsilon(f(x_0)) - \alpha/2.$$

Notar que $\lambda < \epsilon(f(x_0)) - \alpha/2 < \epsilon(f(x_m))$. Al aplicar la definición de β en x_m encontramos entonces que $\beta(x_m)$ no es el supremo de los $r > 0$ que cumplen la condición. Absurdo. Esto muestra que β es semi-continua inferiormente. Por el Lema 2.3, existe $\delta \in C^+(X)$ tal que $0 < \delta(x) < \beta(x)$ para todo $x \in X$. Entonces si $d(x, y) < \delta(x)$, se tiene que $d(f(x), f(y)) < \epsilon(f(x))$.

Recíprocamente, para cualquier $x_0 \in X$ y $\epsilon_0 > 0$, existe $\delta \in C^+(X)$ correspondiente a $\epsilon(y) = \epsilon_0$ para todo $y \in Y$. Por tanto si $d(x_0, y) < \delta(x_0)$, se cumple que $d'(f(x_0), f(y)) < \epsilon(f(x_0)) = \epsilon_0$. Como x_0 es arbitrario, f es continua. ■

Esto nos permite mostrar que la propiedad del sombreado topológico es invariante por conjugaciones.

Proposición 2.5. [35] Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos, $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$ homeomorfismos conjugados por $h : X \rightarrow Y$, es decir $g = h \circ f \circ h^{-1}$. Se cumple que f tiene la propiedad del sombreado topológico si y sólo si g tiene la propiedad del sombreado topológico.

Demostración. Vamos a probar el directo. Notar que $g^n = h \circ f^n \circ h^{-1}$. Para cada $\epsilon' \in C^+(Y)$, tomamos $\epsilon \in C^+(X)$ tal que si $d(x, y) < \epsilon(x)$, entonces $d'(h(x), h(y)) < \epsilon'(h(x))$. Sea $\delta \in C^+(X)$ correspondiente a ϵ del sombreado topológico para f , y sea $\delta' \in C^+(Y)$ tal que si $d'(x, y) < \delta'(x)$ entonces $d(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) < \delta(h^{-1}(x))$. Tomemos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una δ' -pseudo órbita de g . Entonces $\{h^{-1}(x_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una δ -pseudo órbita de f . En efecto, $d'(g(x_n), x_{n+1}) < \delta'(f(x_n))$ implica que

$$d(h^{-1}(g(x_n)), h^{-1}(x_{n+1})) = d(f(h^{-1}(x_n)), h^{-1}(x_{n+1})) < \delta(f(h^{-1}(x_n)))$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$. Por el sombreado de f , existe $x \in X$ tal que

$$d(f^n(x), h^{-1}(x_n)) < \epsilon(f^n(x))$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$. Obtenemos entonces que

$$d'(h \circ f^n(x), h \circ h^{-1}(x_n)) = d(g^n(h(x)), x_n) < \underbrace{\epsilon(g^n(h(x)))}_{=\epsilon(hf^n(x))}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$. Por tanto g tiene la propiedad del sombreado topológico. ■

Presentemos ahora el concepto de atractor que usaremos a lo largo de este trabajo. El objetivo de esta parte es mostrar que si un homeomorfismo en \mathbb{R}^m tiene un atractor global, entonces este es conexo, además si $m \geq 2$ el borde también lo es.

Sea $A \subset \mathbb{R}^m$, se denota \overline{A} a la clausura de A . Sea $K \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto, se dice que K es f -invariante, o simplemente invariante si $f(K) \subset K$.

Definición 2.6. Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un homeomorfismo y $K \subset \mathbb{R}^m$ compacto no vacío. Decimos que K es atractor si existe U entorno abierto y acotado de K tal que $K \subset U$; $\overline{f(U)} \subset U$ y $K = \bigcap_{n>0} f^n(U)$.

Se define la cuenca de atracción de K como el conjunto $B = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(U)$. Se dice que K es atractor global estable si es atractor estable y además se cumple que la cuenca de atracción es \mathbb{R}^m .

Si K es atractor global y existe p tal que $K = \{p\}$, entonces se dice que el atractor global es trivial.

Notar que si K es atractor, entonces K es invariante pues si $x \in K$, se tiene que $x \in f^n(U)$ para todo $n \geq 0$, por lo que $f(x) \in f^{n+1}(U)$ para todo $n \geq 1$, como $\overline{f(U)} \subset U$ entonces $f(x) \in K$. Además ∂K es compacto pues K lo es.

Si K es atractor global para un homeomorfismo $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, por la Definición 2.6 existe U abierto tal que $\overline{f(U)} \subset U$, entonces se tiene que $\overline{f^{n+1}(U)} \subset f^n(U)$ para todo $n > 0$, por lo que $\{f^n(U)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos. Llamamos $A_0 = \overline{U} \setminus K$ y $A_n = \overline{f^{-n}(U)} \setminus f^{-n+1}(U)$ para $n \geq 1$. De esta forma logramos escribir \mathbb{R}^m como $\mathbb{R}^m = \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \cup K$ y esta unión es disjunta.

A partir de la definición de atractor para K , tomando el abierto U , dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $f^{n_0}(U) \subset B(K, \epsilon)$, donde $B(K, \epsilon) = \bigcup_{x \in K} B(x, \epsilon)$. En efecto, como U es acotado se tiene que \overline{U} es compacto. Para cada $x \in \overline{U}$ existe n_x tal que $f^{n_x}(x) \in B(K, \epsilon)$. Tomamos n_x el primer natural que cumple esto. Esta propiedad es abierta por la continuidad de f , es decir, existe V_x entorno de x tal que $f^{n_x}(y) \in B(K, \epsilon)$ para todo $y \in V_x$. Notar que $\{V_x\}$ es un cubrimiento abierto de \overline{U} , tomamos $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_r}\}$ subcubrimiento finito. Sea $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_r\}$, entonces $B(K, \epsilon) \supset f^{n_0}(\bigcup_{i=1}^r V_{x_i}) \supset f^{n_0}(U)$ y obtenemos el resultado.

Se dice que K atrae a un conjunto acotado C si dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $f^n(C) \subset B(K, \epsilon)$ para todo $n \geq n_0$. A partir de lo anterior si K es atractor global, entonces K atrae cualquier conjunto acotado $C \subset \mathbb{R}^m$. En efecto, to-

mando U de la definición de atractor global, como C es acotado y $\{f^{-n}(U)\}$ es una sucesión creciente de conjuntos cuya unión es \mathbb{R}^m , existe m_0 tal que $C \subset f^{-m_0}(U)$. Es claro que $f^{m_0}(C) \subset U$. Por la observación anterior, dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $f^{n_0}(U) \subset B(K, \epsilon)$, entonces $f^n(C) \subset B(K, \epsilon)$ para todo $n \geq n_0 + m_0$. Con esto obtenemos el siguiente resultado

Lema 2.7. *Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un homeomorfismo y K atractor global, entonces:*

1. $\omega(x) \subset K$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$.
2. $\alpha(x) = \emptyset$ para todo $x \in \mathbb{R}^m \setminus K$.

Demostración. 1. Sea $x \in \mathbb{R}^m \setminus K$, consideramos $\overline{\mathcal{O}^+(x)}$. Notar que el conjunto $\overline{\mathcal{O}(x)}$ está acotado y $\omega(x) \subset \overline{\mathcal{O}(x)}$. Por tanto K atrae a $\omega(x)$, es decir, dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $f^n(\omega(x)) \subset B(K, \epsilon)$ para $n \geq n_0$. Por último como $f(\omega(x)) = \omega(x)$, tenemos que $\omega(x) \subset B(K, \epsilon)$. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, $\omega(x) \subset K$.

2. Sea $x \in \mathbb{R}^m \setminus K$. Supongamos que $\alpha(x) \neq \emptyset$. Sea $y \in \alpha(x)$, como $\mathbb{R}^m = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \cup K$ o bien $y \in K$, o bien $y \in A_{n_0}$ para algún n_0 . Notar que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-n}(x) \notin U$ para todo $n \geq n_1$, por tanto $y \notin U$ con lo que $y \notin K$ y $\alpha(x) \cap K = \emptyset$. Como $\alpha(x)$ es cerrado e invariante, si $y \in \alpha(x)$ entonces $\omega(y) \subset \alpha(x)$ y por tanto $\omega(y) \cap K = \emptyset$. Esto contradice la parte anterior.

■

A partir de la definición de atractor para K según f , podemos deducir que también K es atractor para cualquier potencia positiva de f . Veamos esto

Lema 2.8. *Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ homeomorfismo tal que K es atractor global para f , entonces K es atractor global para f^i para todo $i > 0$.*

Demostración. Fijamos $i > 0$, sea U abierto acotado de la definición de que K es atractor global de f . Como $\overline{f(U)} \subset U$, tenemos que $\{f^n(U)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos, además se tiene que $\overline{f^i(U)} \subset U$, con lo que $K = \bigcap_{j>0} f^{ij}(U)$. Por otro lado $\{f^{-i}(U)\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de conjuntos cuya unión es \mathbb{R}^m . Esto implica que $\bigcup_{j=0}^{+\infty} f^{-ji}(U) = \mathbb{R}^m$ y obtenemos la tesis. ■

Decimos que $C \subset \mathbb{R}^m$ es convexo si para cualquier $x, y \in C$ el conjunto $\{(1-t)x + ty : t \in [0, 1]\}$ está contenido en C . Dado $A \subset \mathbb{R}^m$, se define la componente convexa de A como el menor conjunto convexo que contiene a A . Se denota como $co(A)$.

Lema 2.9. *Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ homeomorfismo tal que $K \subset \mathbb{R}^m$ es atractor global. Entonces K es conexo.*

Demostración. Consideremos $\overline{co(K)}$ la clausura de la componente convexa de K , entonces $\overline{co(K)}$ es compacto, conexo y K atrae a $\overline{co(K)}$. Si K no es conexo, existen V_1, V_2 abiertos tales que $V_1 \cap K \neq \emptyset$, $V_2 \cap K \neq \emptyset$, $K \subset V_1 \cup V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Como f es continua, $f^n(\overline{co(K)})$ es conexo para todo $n \geq 0$. Como $K \subset f^n(\overline{co(K)})$ para todo $n \geq 0$, se tiene que $U \cap f^n(\overline{co(K)}) \neq \emptyset$, $V \cap f^n(\overline{co(K)}) \neq \emptyset$ para todo $n \geq 0$. Como K atrae a $\overline{co(K)}$ entonces existe n_0 tal que $f^n(\overline{co(K)}) \subset V_1 \cup V_2$ para todo $n > n_0$. Esto implica que o bien $f^n(\overline{co(K)}) \subset V_1$ y $V_2 = \emptyset$ o bien $f^n(\overline{co(K)}) \subset V_2$ y $V_1 = \emptyset$. Esto implica que K es conexo. ■

Observación 2.10. *Notar que usando el Lema 2.7 y el Lema 2.9 se tiene que K no separa, es decir $\mathbb{R}^m \setminus K$ no tiene componentes conexas acotadas. En efecto, si tuviera componentes conexas acotadas, consideraríamos $C = \bigcup C_\lambda$ la unión de estas componentes acotadas de $\mathbb{R}^m \setminus K$, entonces como f es un homeomorfismo*

si tomamos $y \in \bigcup C_\lambda$, la órbita pasada de y está contenida en C . Como $\mathcal{O}^-(y)$ está acotado, se tiene que $\alpha(y) \neq \emptyset$ lo cual contradice el Lema 2.7.

Veamos ahora que si $m \geq 2$, entonces ∂K es conexo. Para ello usaremos el siguiente teorema.

Teorema 2.11. *Sea (M, d) un espacio métrico compacto y sea $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de compactos conexos. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión que converge a un punto x tal que $x_n \in E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $E = \bigcap_{j=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{n=j}^{+\infty} E_n \right)$ es compacto, conexo y contiene a x .*

Proposición 2.12. *Sea $\{A_i\}_{i \geq 0}$ una sucesión decreciente de conjuntos de \mathbb{R}^m . Se considera*

$$K = \bigcap_{i \geq 0} A_i.$$

Entonces

$$\partial K = \bigcap_{j \geq 0} \overline{\bigcup_{i \geq j} \partial A_i}.$$

Demostración. Veamos primeramente que $\partial K \subset \bigcap_{j \geq 0} \overline{\bigcup_{i \geq j} \partial A_i}$: Sea $x \in \partial K$. Fijemos $j \geq 0$. Tenemos que ver que todo entorno de x , que llamaremos V_x , interseca a $\bigcup_{i \geq j} \partial A_i$. Supongamos que existe V_x entorno de x que cumple $V_x \cap \partial A_i = \emptyset$ para todo $i \geq j$. Podemos pensar que V_x es conexo. Como $V_x \cap \partial A_i = \emptyset$, entonces o bien $V_x \subset A_i$ o bien $V_x \subset A_i^c$.

- Si existe $i_0 \geq j$ tal que $V_x \subset A_{i_0}^c$, entonces $V_x \cap K = \emptyset$. Esto implica que $x \notin \partial K$. Absurdo.
- Por tanto $V_x \subset A_i$ para todo $i \geq j$. Entonces $V_x \subset \bigcap_{i \geq j} A_i = K$. Esto implica que $x \notin \partial K$. Absurdo.

Como j es arbitrario, tenemos que $V_x \cap \bigcup_{i \geq j} \partial A_i \neq \emptyset$, con lo que $x \in \overline{\bigcup_{i \geq j} \partial A_i}$ para todo $j \geq 0$. Por tanto $x \in \bigcap_{j \geq 0} \overline{\bigcup_{i \geq j} \partial A_j}$.

Probemos ahora la otra inclusión: Sea $x \in \bigcap_{j \geq 0} \overline{\bigcup_{i \geq j} \partial A_j}$. Veamos que todo entorno V_x de x interseca a K y a K^c . Como $x \in \overline{\bigcup_{i \geq j} \partial A_j}$ para todo $j \geq 0$, tomemos una sucesión real $\{r_n\}$ tal que $r_n \rightarrow 0$ y para cada n tomemos $z_n \in B(x, r_n) \cap \bigcup_{i \geq n} \partial A_i$. Se tiene que $z_n \rightarrow x$ y para cada n existe $i_n \geq n$ tal que $z_n \in \partial A_{i_n}$. Podemos considerar V_x conexo. Como $z_n \rightarrow x$, para n_0 suficientemente grande se tiene que $z_n \in V_x$ para todo $n \geq n_0$. Para estos n se tiene que $z_n \in \partial A_{i_n} \subset \overline{A_{i_n}}$. Entonces $V_x \cap A_{i_n} \neq \emptyset$. Como $i_n \rightarrow +\infty$ y $A_i \subset A_m$ si $i > m$ se tiene que $V_x \cap A_m \neq \emptyset$ para todo m . Esto implica que

$$V_x \cap \bigcap_{m \geq 0} A_m = V_x \cap K \neq \emptyset.$$

Por otro lado, como $z_n \in \partial A_{i_n} \cap V_x$ para infinitos n y cada ∂A_{i_n} es tal que

$$\partial A_{i_n} \subset \overline{\mathbb{R}^m \setminus A_{i_n}} \subset \overline{\mathbb{R}^m \setminus K},$$

se tiene que $V_x \cap (\mathbb{R}^m \setminus K) \neq \emptyset$. ■

Lema 2.13. Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ homeomorfismo, con $m \geq 2$, $K \subset \mathbb{R}^m$ atractor global, entonces ∂K es conexo.

Demostración. Como K es atractor global y $m \geq 2$, entonces K es conexo y $\mathbb{R}^m \setminus K$ no tiene componentes acotadas. Tomemos U de la definición de atractor global para K . Llamemos E_0 a la componente conexa no acotada de $\mathbb{R}^m \setminus U$ y consideramos ∂E_0 . Por la proposición anterior se tiene que

$$\partial K = \bigcap_{j=1}^{+\infty} \left(\overline{\bigcup_{n=j}^{+\infty} f^n(\partial E_0)} \right).$$

Como $\overline{f(U)} \subset U$ entonces cada $f^n(\partial E_0)$ está contenido en el compacto \overline{U} , es compacto y conexo. Aplicando el Teorema 2.11 obtenemos la tesis. ■

2.2. Resultado Principal

En el camino hacia probar que el atractor global es trivial, lo primero que obtendremos es la estabilidad Lyapunov de los puntos del borde del atractor. Para ello vamos a generalizar el Lema B.3. En ese lema la función $\epsilon \in C^+(X)$ que cumple que dos pares de puntos en algún momento se separan depende del punto x con $\alpha(x) = \emptyset$. Para probar la estabilidad Lyapunov de los puntos del borde del atractor necesitaremos una función que separe puntos a pasado que sirva para todos los puntos del complemento del atractor.

Decimos que x es Lyapunov estable si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $d(f^n(y), f^n(x)) < \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Los puntos Lyapunov estables son puntos tales que existe un entorno que se mantiene cerca a futuro.

Teorema 2.14. *Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un homeomorfismo con la propiedad del sombreado topológico y K atractor global. Entonces todo $z \in \partial K$ es Lyapunov estable.*

Para determinar una función ϵ que separe puntos de la cuenca a pasado vamos a utilizar dos estrategias distintas. Una específica para el caso del plano ($m = 2$), donde vamos a construir una conjugación de una potencia de f en $\mathbb{R}^2 \setminus K$ con una traslación. Para el caso $m > 2$ no tenemos un argumento similar y por tanto construiremos una función que separe puntos a pasado de forma más artesanal.

Aunque el caso general sirve también para el caso del plano parece de interés mostrar esta estrategia pues se utilizan argumentos elegantes. La idea es mostrar que si se tiene una dinámica de atracción global, en el complemento de una bola hay una conjugación de una potencia de f

con una traslación en un cilindro. Para ello usaremos una adaptación del Teorema de Schoenflies que nos permitirá extender un homeomorfismo entre dos anillos.

Teorema 2.15 (Schönflies). Sean γ_1 y γ_2 dos curvas cerradas simples del plano. Entonces cualquier homeomorfismo $h : \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$ se extiende a un homeomorfismo $\hat{h} : \gamma_1 \cup \text{int}(\gamma_1) \rightarrow \gamma_2 \cup \text{int}(\gamma_2)$.

Proposición 2.16. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ homeomorfismo tal que K es atractor global. Existe una bola $B(p, r_0)$ y $n_0 > 0$ tal que $\hat{f} : \mathbb{R}^2 \setminus B(p, r_0) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus B(p, r_0)$ definida como $\hat{f}(x) = f^{-n_0}(x)$ es conjugado a $T : \mathbb{S}^1 \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{S}^1 \times [0, +\infty)$ dada por $T(\theta, t) = (\theta, t + 1)$.

Demostración. Supongamos primeramente que f preserva orientación. Tomemos U de la definición de atractor global para K . Sea $p \in K$, existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U \subset B(p, r_0)$. Como $\{f^{-n}(U)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de conjuntos cuya unión es \mathbb{R}^2 , existe n_0 tal que $B(p, r_0) \subset f^{-n_0}(U)$. Notar entonces que $f^{-n_0}(U) \subset f^{-n_0}(B(p, r_0))$. Definimos $\hat{f} : \mathbb{R}^2 \setminus B(p, r_0) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus B(p, r_0)$ continua tal que $\hat{f}(x) = f^{-n_0}(x)$.

Sea $\mathbb{S}^1 \times [0, +\infty)$ con la métrica $d'((\theta_1, t_1), (\theta_2, t_2)) = |\theta_1 - \theta_2| + |t_1 - t_2|$. Definimos $T : \mathbb{S}^1 \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{S}^1 \times [0, +\infty)$ dada por $T(\theta, t) = (\theta, t + 1)$. Es claro que T es una isometría con d' . Veamos cómo construir un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \setminus B(p, r_0) \rightarrow \mathbb{S}^1 \times [0, +\infty)$ que conjugue \hat{f} con T . Ver la Figura 2.4 para fijar ideas.

Tomemos $h_1 : \partial B(p, r_0) \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ un homeomorfismo cualquiera y definamos $h|_{\partial B(p, r_0)} = h_1$. A partir de esto definimos h en $\hat{f}^n(\partial B(p, r_0))$ como $h_n(x) = T^n \circ h_1 \circ \hat{f}^{-n}(x)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $h|_{\hat{f}^n(\partial B(p, r_0))} = h_n$. Notar que esto implica que $h(\hat{f}^n(\partial B(p, r_0))) = \mathbb{S}^1 \times \{n\}$.

Sean $x \neq y \in \partial B(p, r_0)$, entonces $\hat{f}(x) \neq \hat{f}(y) \in \hat{f}(\partial B(p, r_0))$. Tomamos γ_1 curva simple con extremos $x, \hat{f}(x)$ contenida en $\overline{\hat{f}(B(p, r_0)) \setminus B(p, r_0)}$, y

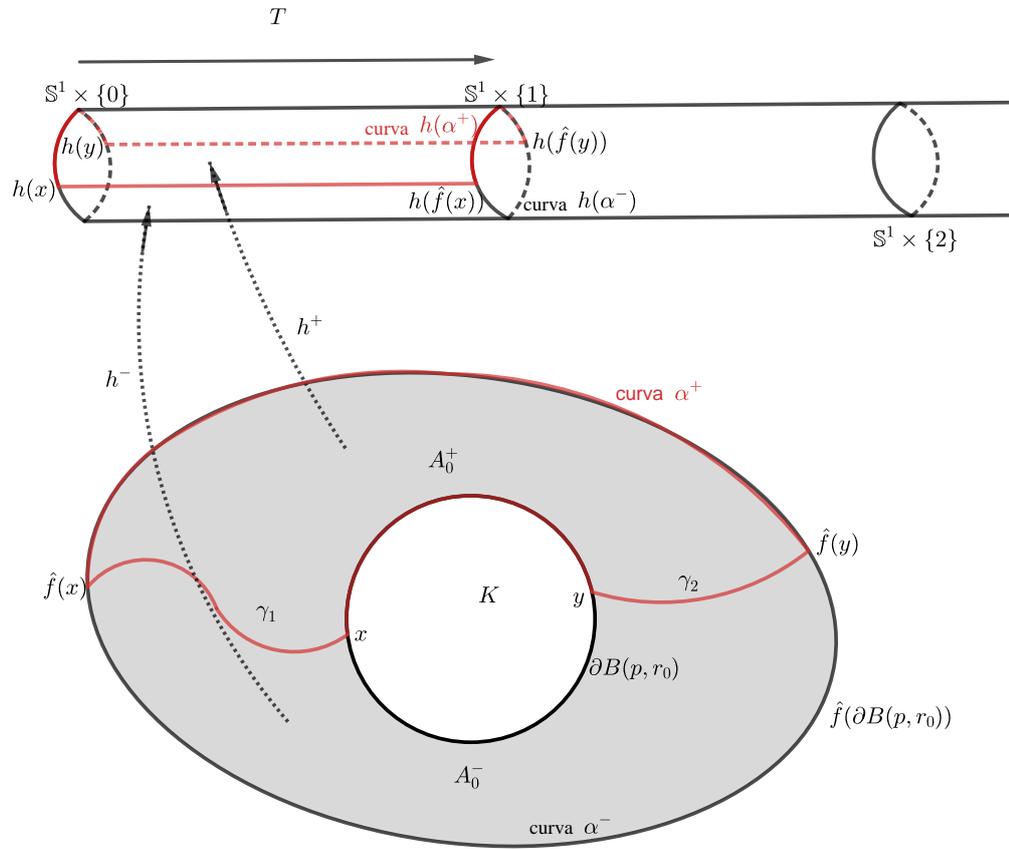


Figura 2.4: Construcción de la conjugación h entre \hat{f} y T en el dominio fundamental $A_0 = \overline{\hat{f}(B(p, r_0))} \setminus B(p, r_0)$.

γ_2 curva simple con extremos $y, \hat{f}(y)$ contenida en $\overline{\hat{f}(B(p, r_0))} \setminus B(p, r_0)$ de forma que $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$. Por otro lado consideramos los segmentos $\{\theta_1\} \times [0, 1], \{\theta_2\} \times [0, 1]$ de extremos $h(x), h(\hat{f}(x))$ y $h(y), h(\hat{f}(y))$ respectivamente. Tomamos $\varphi_1 : \gamma_1 \rightarrow \{\theta_1\} \times [0, 1]$ y $\varphi_2 : \gamma_2 \rightarrow \{\theta_2\} \times [0, 1]$ homeomorfismos. Definimos $h|_{\gamma_1} = \varphi_1$ y $h|_{\gamma_2} = \varphi_2$.

La unión de las curvas γ_1 y γ_2 separan el anillo $A_0 = \overline{\hat{f}(B(p, r_0))} \setminus B(p, r_0)$ en dos regiones A_0^+ y A_0^- y sus imágenes separan la sección cilíndrica $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ también en dos regiones.

Llamemos α^+ a la curva que delimita la región A_0^+ y α^- a la curva que

delimita la región A_0^- , estas curvas se intersectan en $\gamma_1 \cup \gamma_2$.

Tenemos entonces dos homeomorfismos definidos entre dos curvas simples, $h^+ : \alpha^+ \rightarrow h(\alpha^+)$ y $h^- : \alpha^- \rightarrow h(\alpha^-)$. (En la Figura 2.4 se representa α^+ y $h(\alpha^+)$ en color rojo).

Aplicando el Teorema 2.15 a estas curvas se tiene que el homeomorfismo h^+ definido en α^+ se extiende a A_0^+ y el homeomorfismo h^- definido en α^- se extiende a A_0^- . Ambos coinciden en $\gamma_1 \cup \gamma_2$, con lo que podemos considerar h definido en A_0 que vale h^+ en A_0^+ y vale h^- en A_0^- .

Luego extendemos h de la siguiente forma: Sea $x \in \text{int}(A_i)$, donde $A_i = \overline{\hat{f}^{i+1}(B(p, r_0)) \setminus \hat{f}^i B(p, r_0)}$, entonces $h(x) := T^i \circ h|_{A_0} \circ \hat{f}^{-i}(x)$. De esta forma obtenemos $h \circ \hat{f} = T \circ h$.

Si \hat{f} no preserva orientación, tomamos \hat{f}^2 y procedemos como hicimos con el caso anterior. Esto concluye la prueba. \blacksquare

Estamos en condiciones de encontrar una función $\epsilon \in C^+(\mathbb{R}^2)$ que separe la dinámica de f en $\mathbb{R}^2 \setminus K$ a pasado.

Proposición 2.17. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ homeomorfismo, K atractor global. Existe $\epsilon \in C^+(\mathbb{R}^2)$ tal que para cualquier $x \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ se cumple que si $y \neq x$ entonces existe n tal que $d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) > \epsilon(f^{-n}(x))$.*

Demostración. Sea $h : \mathbb{R}^2 \setminus B(p, r_0) \rightarrow \mathbb{S}^1 \times [0, +\infty)$ de la Proposición 2.16 tal que $\hat{f} = f^{-n_0}$ es conjugado a T , es decir, que $h \circ \hat{f} = T \circ h$ donde $T(\theta, t) = (\theta, t + 1)$.

Tomemos $\alpha \in C^+(\mathbb{S}^1 \times [0, +\infty))$ de forma que $\alpha(\theta, t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow +\infty$. Afirmamos que T α -separa puntos a futuro. En efecto, tomamos $(\theta_1, t_1) \neq (\theta_2, t_2) \in \mathbb{S}^1 \times [0, +\infty)$, por un lado se tiene que

$$d'((\theta_1, t_1), (\theta_2, t_2)) = d'(T^n(\theta_1, t_1), T^n(\theta_2, t_2)) = d'((\theta_1, t_1 + n), (\theta_2, t_2 + n)).$$

Por otro lado, como $\alpha(\theta_1, t_1 + n) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$, existe n_1 tal que

$$d'(T^n(\theta_1, t_1), T^n(\theta_2, t_2)) > \alpha(T^n(\theta_1, t_1)) \text{ para todo } n \geq n_1.$$

Aplicamos el Lema 2.4 a h . Por tanto para este α , existe $\epsilon' \in C^+(\mathbb{R}^m \setminus B(p, r_0))$ tal que si $d(x, y) < \epsilon'(x)$, entonces $d(h(x), h(y)) < \alpha(h(x))$.

Veamos que ϵ' separa puntos a futuro para \hat{f} . En efecto, si esto no es cierto, existen $y \neq x$ tales que $d(\hat{f}^n(x), \hat{f}^n(y)) < \epsilon'(\hat{f}^n(x))$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$d'(h(\hat{f}^n(x)), h(\hat{f}^n(y))) < \alpha(h(\hat{f}^n(x)))$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $d'(T^n(h(x)), T^n(h(y))) < \alpha(T^n(h(x)))$ para todo $n \in \mathbb{N}$, absurdo. Por tanto para cualquier par de puntos $x \neq y \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ existe n tal que $d(\hat{f}^n(x), \hat{f}^n(y)) > \epsilon'(\hat{f}^n(x))$. Es claro que ϵ' separa puntos a pasado para f pues $\hat{f} = f^{-n_0}$.

Por último vamos a determinar $\epsilon \in C^+(\mathbb{R}^2)$ que cumpla lo requerido. Tomamos ϵ_0 arbitrario, definimos $\epsilon(x) = \epsilon_0$ para $x \in B(p, r_0)$, $\epsilon(x) = \epsilon'(x)$ para $x \in \mathbb{R}^m \setminus B(p, r_0 + 1)$. En $B(p, r_0 + 1) \setminus B(p, r_0)$ definimos ϵ de manera que sea continua en \mathbb{R}^2 .

Esta función ϵ separa puntos a pasado para f : Para cualquier $x \in \mathbb{R}^m \setminus K$, existe un n_0 tal que $f^{-n}(x) \in \mathbb{R}^m \setminus B(p, r_0 + 1)$ para todo $n \geq n_0$, con lo que a partir de allí, $\epsilon(f^{-n}(x)) = \epsilon'(f^{-n}(x))$. ■

Observación 2.18. *En la prueba de la proposición anterior encontramos una conjugación entre T y \hat{f} . Como hay una función α que separa la dinámica de T , entonces hay una función ϵ' que separa la dinámica de \hat{f} . Por tanto hay una función ϵ que separa la dinámica de f . Para el caso general $m > 2$ vamos a prescindir de la conjugación con una traslación.*

Lema 2.19. Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ homeomorfismo, $K \subset \mathbb{R}^m$ atractor global. Existe $\epsilon \in C^+(\mathbb{R}^m)$ que verifica: si $x \in \mathbb{R}^m \setminus K$, para cualquier $y \neq x$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^{-n_0}(x), f^{-n_0}(y)) > \epsilon(f^{-n_0}(x))$.

Demostración. Tomemos U de la definición de atractor global para K y consideremos $A_n = \overline{f^{-n}(U) \setminus f^{-n+1}(U)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Cada A_n es compacto. Para A_0 tomamos $\epsilon_0 > 0$. Para cada $x \in A_0$, tomamos $\epsilon_1^x > 0$ de forma que $f(B(f^{-1}(x), \epsilon_1^x)) \subset B(x, \frac{\epsilon_0}{2})$. Por la compacidad de A_1 se tiene que $\epsilon_1 = \min \epsilon_1^x > 0$. De esta forma para cualquier $x \in A_0$ se cumple que $f(B(f^{-1}(x), \epsilon_1)) \subset B(x, \frac{\epsilon_0}{2})$. Tenemos entonces definido ϵ_1 en A_1 .

Procedemos ahora de forma inductiva. Fijado $n \in \mathbb{N}$, supongamos que tenemos definido $\epsilon_i > 0$ para todo $i \leq n$ tal que $f^i(B(x, \epsilon_n)) \subset B(f^i(x), \frac{\epsilon_{n-i}}{2^i})$ para todo $x \in A_n$. Veamos cómo definir ϵ_{n+1} en A_{n+1} : Sea $x \in A_n$, definimos $\epsilon_{n+1}^x > 0$ para $f^{-1}(x) \in A_{n+1}$ tal que $f^i(B(f^{-1}(x), \epsilon_{n+1}^x)) \subset B(f^{i-1}(x), \frac{\epsilon_{n+1-i}}{2^i})$ para $i \leq n+1$. Por la compacidad de A_{n+1} se tiene que $\epsilon_{n+1} = \min \{\epsilon_{n+1}^x\} > 0$.

De esta forma sea $x \in A_0$, $y \in B(x, \epsilon_0)$. Existe n_0 tal que $y \notin B(x, \frac{\epsilon_0}{2^{n_0}})$, entonces $d(f^{-n_0}(x), f^{-n_0}(y)) > \epsilon_{n_0}$.

Consideramos por último $\epsilon : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\epsilon|_U(x) = \epsilon_0$ y $\epsilon|_{A_i}(x) < \epsilon_i$ para todo $x \in A_i$, con $i \geq 2$. En A_1 elegimos ϵ para que sea continua en \mathbb{R}^m .

■

Corolario 2.20. Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ homeomorfismo con sombreado topológico y K atractor global. Existe $\epsilon \in C^+(\mathbb{R}^m)$ tal que para el correspondiente δ del sombreado, toda δ -pseudo órbita que a pasado sea la órbita de un punto $x \in \mathbb{R}^m \setminus K$ es ϵ -sombreada por la órbita del propio x .

Demostración. Tomemos $\epsilon \in C^+(\mathbb{R}^m)$ del Lema 2.19, sea $\delta \in C^+(\mathbb{R}^m)$ correspondiente al ϵ de la propiedad del sombreado topológico. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una δ -pseudo órbita dada por $x_n = f^n(x)$ si $n < 0$ y $x \in \mathbb{R}^m \setminus K$. Por cómo está

definido ϵ , si $d(f^n(y), x_n) < \epsilon(x_n)$ para todo $n < 0$, entonces $y = x$. Esto implica que la órbita de x tiene que ϵ sombrear la δ -pseudo órbita a futuro. ■

Estamos en condiciones de probar la estabilidad de los puntos del borde del atractor.

Prueba del Teorema 2.14. Sea $z \in \partial K$. Sea U de la definición de atractor estable para K . Dado $\epsilon > 0$, tomamos $\tilde{\epsilon} \in C^+(\mathbb{R}^m)$ del Lema 2.19 tal que $\tilde{\epsilon}(x) = \epsilon/2$ para $x \in U$. Tomamos $\tilde{\delta} \in C^+(\mathbb{R}^m)$ del sombreado topológico correspondiente a $\tilde{\epsilon}$.

Para $f^{-1}(z) \in \partial K$, tomamos $x \in \mathbb{R}^m \setminus K$ suficientemente cercano a $f^{-1}(z)$ para que $f^{-1}(z) \in B(x, \tilde{\delta}(x))$. Esto es posible pues $\tilde{\delta}$ es continua y positiva en un entorno compacto de K .

Consideremos las siguientes $\tilde{\delta}$ -pseudo órbitas: $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que

$$x_n = \begin{cases} f^n(x) & n < 0 \\ f^{n-1}(z) & n \geq 0 \end{cases},$$

$\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que

$$y_n = \begin{cases} f^n(x) & n \leq -1 \\ f^{-1}(z) & n = 0 \\ f^{n-1}(y) & n \geq 1 \end{cases}$$

donde $y \in B(z, \tilde{\delta}(z))$ (Ver Figura 2.5). Estas dos $\tilde{\delta}$ -pseudo órbitas son $\tilde{\epsilon}$ -sombreadas por $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ debido al Corolario 2.20. Por tanto

$$\begin{aligned} d(f^n(z), f^n(y)) &\leq d(f^n(z), f^{n+1}(x)) + d(f^{n+1}(x), f^n(y)) \\ &\leq \tilde{\epsilon}(f^n(z)) + \tilde{\epsilon}(f^n(y)) \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

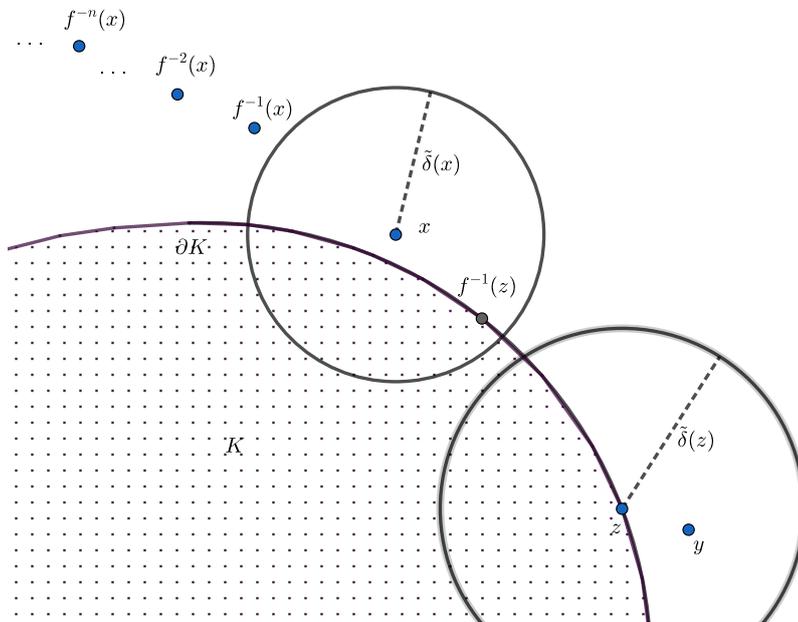


Figura 2.5: Construcción de las pseudo-orbitas para que z sea estable Lyapunov.

para todo $n > 0$. Sea $\delta = \tilde{\delta}(z)$, si $y \in B(z, \delta)$ entonces $d(f^n(z), f^n(y)) < \epsilon$ y z es Lyapunov estable. ■

A continuación enunciamos y demostraremos, para comodidad del lector, un resultado que vincula la estabilidad Lyapunov de todo punto de ∂K con la existencia de una métrica equivalente en ∂K tal que $f|_{\partial K}$ es una contracción débil.

Lema 2.21. [1, Teorema 2.1] Sea (X, d) espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ un mapa continuo. Son equivalentes:

1. Todo $x \in X$ es estable Lyapunov.
2. La métrica $d_f(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} d(f^n(x), f^n(y))$ es equivalente a d y f es una contracción débil respecto a d_f .

Demostración. 1. \Rightarrow 2. La propia definición de d_f implica que d_f es una contracción débil. Tenemos que ver que d es equivalente a d_f , para ello veamos que generan los mismos abiertos. Por un lado notar que para cualquier $\epsilon > 0$ se tiene que $B_{d_f}(x, \epsilon) \subset B_d(x, \epsilon)$. Por otro lado, para este $\epsilon > 0$ tomamos δ de la estabilidad Lyapunov de x correspondiente a $\epsilon/2$. Entonces $B_d(x, \delta) \subset B_{d_f}(x, \epsilon)$.

2. \Rightarrow 1. Como d es equivalente a d_f , existe $\alpha > 0$ tal que $d_f(x, y) \leq \alpha d(x, y)$. Dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta < \frac{\epsilon}{\alpha}$, entonces si $d(x, y) < \delta$, se tiene que $\epsilon > \alpha\delta > \alpha d(x, y) \geq d_f(x, y) \geq d(f^n(x), f^n(y))$ para todo $n \geq 0$, con lo que x es Lyapunov estable. ■

Los resultados que veremos a continuación tienen la intención de mostrar cómo interactúa la dinámica de los puntos de la cuenca del atractor global K con la dinámica de los puntos del borde del atractor. Primero mostraremos que dos puntos de ∂K pueden ser en cierta forma alcanzados por pseudo-orbitas que al pasado comparten la órbita de un punto de la cuenca. Luego mostraremos cómo a partir de esto se puede concluir que cualquier par de puntos $a, b \in \partial K$ son asintóticos.

Lema 2.22. *Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un homeomorfismo con sombreado topológico, $K \subset \mathbb{R}^m$ atractor global. Existe $\delta_0 > 0$ tal que para cada $a, b \in \partial K$ hay una δ_0 -pseudo órbita $\{\tilde{x}_n\}$ tal que $\|\tilde{x}_n\| \rightarrow +\infty$ si $n \rightarrow -\infty$ y además pasa por a y $f^n(b)$ para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Por el Lema 2.21, existe una métrica d_f que es equivalente a d en ∂K tal que $f|_{\partial K}$ es una contracción débil. Sea $\delta \in C^+(\mathbb{R}^m)$ del Corolario 2.20, tomamos $\delta_0 = \min\{\delta(x) : x \in \partial K\}$. Por el Lema 2.13 ∂K es conexo. Sean $a, b \in \partial K$, consideramos el conjunto $\{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\} \subset \partial K$ para algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $d_f(x_i, x_{i+1}) < \delta_0$ y $0 \leq i \leq n-1$.

Sea $x \in \mathbb{R}^m \setminus K$ tal que $d(x, a) < \delta_0$. Tomemos $\{\tilde{x}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ tal que

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} f^i(x) & \text{si } i < 0 \\ f^i(x_i) & \text{si } 0 \leq i < n \\ f^i(b) & \text{si } i \geq n \end{cases}$$

Veamos que $\{\tilde{x}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ es una δ_0 -pseudo órbita según la métrica d .

Tanto para $i < 0$ como para $i \geq n$ esto es inmediato; veamos que sucede para $0 \leq i < n$:

$$d(f(\tilde{x}_i), \tilde{x}_{i+1}) \leq d_f(f(\tilde{x}_i), \tilde{x}_{i+1}) = d_f(f^{i+1}(x_i), f^{i+1}(x_{i+1})) \leq d_f(x_i, x_{i+1}) < \delta_0.$$

Con esto obtenemos el resultado. ■

Lema 2.23. *Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un homeomorfismo con la propiedad del sombreado topológico, $K \subset \mathbb{R}^m$ atractor global. Entonces todo par de puntos de ∂K son asintóticos, es decir, dados $a, b \in \partial K$ y $\epsilon > 0$; existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^k(a), f^k(b)) < \epsilon$ para todo $k \geq n_0$.*

Demostración. Sea d_f del Lema 2.21. Dados $a, b \in \partial K$ y $\epsilon > 0$, tomemos $\tilde{\epsilon} \in C^+(\mathbb{R}^m)$ del Lema 2.19 tal que $\tilde{\epsilon}(x) = \epsilon/2$ para todo $x \in \overline{U}$, donde U es el abierto acotado de la definición de atractor global para K . Sea $\tilde{\delta} \in C^+(\mathbb{R}^m)$ del sombreado topológico correspondiente a $\tilde{\epsilon}$. Tomemos $0 < \delta < \min\{\delta_0\} \cup \{\tilde{\delta}(x) : x \in \overline{U}\}$, donde $\delta_0 > 0$ es el encontrado mediante el Lema 2.22.

Para δ anteriormente definido consideramos $\{a = x_0, x_1, \dots, x_{n_0} = b\} \subset \partial K$ tal que $d_f(x_i, x_{i+1}) < \delta$. Por el Teorema 2.14 todo punto de ∂K es Lyapunov estable. Tomamos $\alpha > 0$ de la estabilidad correspondiente a $\delta > 0$ para el punto a y $x \in \mathbb{R}^m \setminus K$ tal que $d(x, a) < \alpha$. Notar entonces que $d_f(x, a) < \delta$. Luego consideramos las siguientes δ -pseudo órbitas $\{\tilde{x}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y $\{\tilde{y}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de

forma que $\{\tilde{x}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ verifica el Lema 2.22:

$$\tilde{x}_k = \begin{cases} f^k(x) & \text{si } k < 0 \\ f^k(x_k) & \text{si } 0 \leq k < n_0, \\ f^k(b) & \text{si } k \geq n_0 \end{cases}$$

$$\tilde{y}_k = \begin{cases} f^k(x) & \text{si } k < 0 \\ f^k(a) & \text{si } k \geq 0 \end{cases}.$$

Notar que estas δ -pseudo órbitas son $\tilde{\delta}$ -pseudo órbitas. Por el Corolario 2.20, ambas $\tilde{\delta}$ -pseudo órbitas son $\tilde{\epsilon}$ -sombreadas por la órbita de x . Entonces

$$d(f^k(a), f^k(b)) \leq d(f^k(a), f^k(x)) + d(f^k(x), f^k(b)) < \epsilon$$

para $k \geq n_0$. ■

Estamos en condiciones de mostrar que ∂K es trivial. Ya sabemos que todo par de puntos de ∂K son asintóticos. Vamos a suponer que el diámetro de K es positivo. Tomaremos específicamente dos puntos que realizan el diámetro de K , luego usando argumentos de compacidad encontraremos dos puntos que no son asintóticos.

Teorema 2.24. *Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un homeomorfismo con la propiedad del sombreado topológico. Si $K \subset \mathbb{R}^m$ es atractor global, entonces ∂K es trivial.*

Demostración. Tomemos d_f tal que $f|_{\partial K}$ es una contracción débil. Supongamos que ∂K es no trivial. Entonces $diam(\partial K) > 0$. Como ∂K es compacto, existen $x, y \in \partial K$ tales que $diam(\partial K) = d_f(x, y)$. Observar que $d_f(f^{-k}(x), f^{-k}(y)) = d_f(x, y)$, para todo $k > 0$. Sea $\tilde{x} \in \alpha(x)$, entonces existe $k_i \rightarrow +\infty$ tal que $\{f^{-k_i}(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge a \tilde{x} . Supongamos que $\{f^{-k_i}(y)\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge a $\tilde{y} \in$

$\alpha(y)$. Se tiene entonces que $d_f(\tilde{x}, \tilde{y}) = d_f(x, y)$. Veamos que \tilde{x} y \tilde{y} no son asintóticos: sea $\epsilon < d_f(x, y)$. Para cada $n > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} d_f(f^n(\tilde{x}), f^n(\tilde{y})) &= d_f(f^n(\lim_{k_i \rightarrow +\infty} f^{-k_i}(x)), f^n(\lim_{k_i \rightarrow +\infty} f^{-k_i}(y))) \\ &= \lim_{k_i \rightarrow +\infty} d_f(f^{n-k_i}(x), f^{n-k_i}(y)) \\ &= d_f(x, y) \\ &> \epsilon \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba. ■

2.3. Prueba del Teorema Principal.

Prueba del Teorema 1.1. Por el Teorema 2.24, tenemos que ∂K es trivial, llamemos $\{p\} = \partial K$. Supongamos que $K \neq \partial K$, entonces $\text{int}K \neq \emptyset$. Tomemos U entorno abierto de p , además tomemos $q, r \in U$ de forma que $q \in \text{int}(K)$, $r \in \text{int}(K^c)$. Ahora consideremos dos arcos diferentes γ y γ' que comparten solamente los extremos q y r , es decir $\gamma \cap \gamma' = \{q, r\}$. Entonces $\gamma \cap \partial K \neq \emptyset$ y $\gamma' \cap \partial K \neq \emptyset$, además por cómo elegimos los arcos se tiene que $\gamma \cap \gamma' \cap \partial K = \emptyset$. Esto implica que ∂K no es trivial. Absurdo. ■

Corolario 2.25. *Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ homeomorfismo con sombreado topológico con un atractor global. Entonces f es expansivo topológico.*

Demostración. Por el Teorema 1.1 el atractor es trivial. Por la Proposición 2.17, existe $\epsilon \in C^+(\mathbb{R}^m)$ tal que si $x \neq y$, $d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) > \epsilon(f^{-n}(x))$ y se concluye la prueba. ■

Aplicando los teoremas de Kerékjártó obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 2.26. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo con sombreado topológico y con un atractor global. Entonces f es conjugado a $z \mapsto z/2$ o $z \mapsto \bar{z}/2$ dependiendo de si f preserva o revierte orientación.

Corolario 2.27. Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un homeomorfismo con sombreado topológico que preserva orientación con un atractor global compacto. Entonces f es conjugado a $z \mapsto z/2$ para $m \neq 4, 5$.

Demostración. Por el Teorema 1.1 el atractor es trivial. Por el Teorema de Husch en [30], f es conjugado a una homotecia de razón $1/2$ para $n \neq 4, 5$.

■

2.4. Variantes del problema y caminos a seguir.

Plantaremos algunas variantes del problema que pueden ser de interés para futuras investigaciones

- Una posibilidad es considerar en vez de \mathbb{R}^m , variedades no compactas y estudiar la topología de atractores globales en este contexto. Un paso clave fué la construcción de una función ϵ expansiva en la cuenca de atracción. ¿Hay alguna obstrucción para realizar esta construcción en variedades no compactas?
- Otra posibilidad es estudiar homeomorfismos con sombreado en el plano donde el atractor no sea global, pero que tenga cuenca no acotada. Nuevamente para probar que los puntos del borde del atractor eran Lyapunov estables necesitamos de una función ϵ expansiva en la cuenca. Si el atractor no es global, la cuenca tiene borde no trivial, por tanto esta función no puede tender a cero en el borde de la

cuenca. Podría pasar que no se pueda extender de forma continua y positiva a todo el plano. Aquí hay un camino a desarrollar.

- Se puede realizar el estudio para el caso de un mapa en vez de un homeomorfismo.

Capítulo 3

Condiciones suficientes de atracción global para mapas en \mathbb{R}^m .

En este capítulo obtendremos algunos resultados que garantizan una dinámica de atracción global en el caso de mapas en \mathbb{R}^m con un punto fijo. Esta búsqueda de condiciones suficientes que determinen la atracción global de un sistema dinámico es un tema de interés desde la década de los 60 para el caso de ecuaciones diferenciales y un poco más adelante para el caso de dinámicas discretas. En su libro [34], LaSalle plantea el problema de determinar condiciones suficientes para la atracción global de un mapa $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ de clase C^1 que están relacionadas con el diferencial del mapa en cuestión. A partir de esto, han habido varios resultados intentando desarrollar esta línea de trabajo. Plantearemos primeramente ciertos preliminares de este problema en la Sección 3.1 y el estado del arte.

En la Subsección 3.2.1 presentaremos un abordaje de dinámica topológica. La estrategia a desarrollar para garantizar condiciones suficientes de

atracción global será la siguiente: tomaremos ciertos mapas que tienen dinámicas de atracción global y construiremos una perturbación específica en cada caso para que este comportamiento se mantenga. Usaremos este resultado para encontrar una nueva familia de ejemplos que tienen respuesta afirmativa al Problema de LaSalle.

Por último abordaremos una conjetura planteada por Rus en [40], donde se considera una condición más fuerte que la planteada por LaSalle. Mostraremos que la conjetura es falsa para dimensión $m \geq 4$ y desarrollaremos algunos resultados parciales para el caso $m = 2$.

3.1. Antecedentes: Problema de LaSalle.

En el Libro [34] “The Stability of Dynamical Systems”, LaSalle plantea ciertas condiciones suficientes para que un sistema dinámico discreto definido en \mathbb{R} tenga al origen como atractor global. Además en este libro se propone estudiar si estas condiciones se pueden generalizar a \mathbb{R}^m . Presentaremos aquí una de estas condiciones. Mostraremos que ciertas familias que cumplen esta condición tienen al origen como atractor global así como algunos contraejemplos del problema. Esto junto con lo desarrollado en el Apéndice A servirá como preámbulo de la Subsección 3.2.1, donde buscaremos otras condiciones suficientes para garantizar la atracción global de un mapa en \mathbb{R}^m y presentaremos una nueva familia de ejemplos que verifican el problema de LaSalle.

Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un mapa de clase C^1 . Recordar que $J_f(x)$ denota la matriz Jacobiana de f en el punto x y

$$\rho(J_f(x)) = \max\{|\lambda_i| : \lambda_i \text{ es valor propio de } J_f(x)\}$$

el radio espectral de J_f en el punto x .

Problema 3.1 (LaSalle). Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ mapa de clase C^1 . Supongamos que p es un punto fijo de f y $\rho(J_f(x)) < 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$. ¿Es p atractor globalmente asintóticamente estable?

Este problema tiene un vínculo estrecho con el problema de Markus-Yamabe [37] donde se plantea la siguiente pregunta.

Problema 3.2 (Markus-Yamabe). Dada una ecuación diferencial $x' = F(x)$ definida en \mathbb{R}^m , con F de clase C^1 y tal que $J_F(x)$ tiene todos sus valores propios con parte real negativa y p un punto crítico. ¿Es p atractor global estable?

Ambos problemas propuestos en los años 60 y 70 fueron resueltos a lo largo de las décadas venideras como mencionamos en la Introducción. En [11] se plantea de forma explícita el vínculo entre el problema de LaSalle y el de Markus-Yamabe. Consideremos la ecuación diferencial que verifica las condiciones del Problema 3.2 y sea $\varphi(t, x)$ la solución con condición inicial $\varphi(0, x) = x$. Supongamos que $\varphi(t, x)$ está definido para todo $t > 0$ y todo $x \in \mathbb{R}^m$. Entonces podemos considerar el sistema dinámico discreto dado por el flujo a tiempo T , $\varphi(T, \cdot)$. Un campo vectorial que cumple que el flujo asociado está definido para todo tiempo recibe el nombre de *campo vectorial completo*. En [9] se da una clasificación de los campos polinomiales completos en \mathbb{C}^2 , en general es un problema de interés la caracterización de dichos campos.

Lema 3.3. [11, Lema 4.1] Sea $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un mapa de clase C^1 y sea $\varphi(t, x)$ la solución de la ecuación diferencial $x' = F(x)$ con $\varphi(0, x) = x$. Entonces se cumple lo siguiente:

1. Si para todo $x \in \mathbb{R}^m$, $J_F(x)$ tiene todos los valores propios con parte real negativa, entonces dado U entorno abierto y acotado de \mathbb{R}^m , existe $T > 0$

tal que para todo $t \in (0, T)$ el Jacobiano de $\varphi(t, \cdot) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ tiene todos sus valores propios con módulo menor que 1 en todo punto de U .

2. Supongamos que existe $t_x > 0$ tal que $\frac{d}{dx}\varphi(t, x)$ tiene todos sus valores propios con módulo menor que 1 para $t \in (0, t_x]$. Entonces $J_F(x)$ tiene todos los valores propios con parte real no positiva.

Demostración. Veamos cómo probar la primera parte. Como $\varphi(t, x)$ es la solución de $x' = F(x)$ con condición inicial $\varphi(0, x) = x$, se tiene que $\frac{d}{dt}\varphi(t, x) = F(\varphi(t, x))$. Por el Teorema de Schwarz, tomando derivadas respecto a x y evaluando en $t = 0$ se tiene que $\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dx}(\varphi(t, x))\right)|_{t=0} = J_F(x)$. Esta última igualdad se puede reescribir como

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(\varphi(t, x)) - \text{Id}}{t} = J_F(x), \quad (3.1)$$

donde Id es la matriz identidad (esto es porque $\varphi(0, x) = x$ y entonces $\frac{d}{dx}\varphi(0, x) = \text{Id}$). Sea U un entorno abierto de \mathbb{R}^m , de esta relación se tiene que para cada $x \in \overline{U}$, existe U_x entorno de x y un real positivo T_x tal que para cada $z \in U_x$ la matriz $\frac{d}{dx}\varphi(t, x)(z)$ tiene todos los valores propios con parte real menor que 1 (respectivamente mayor que 1) para cada $t \in (0, T_x)$ (respectivamente $t \in (-T_x, 0)$). Como φ es continua y $\varphi(0, x) = x$, existe W_x entorno de x y $\alpha_x > 0$ tal que $\alpha_x < T_x$ que cumple que $\varphi(t, z) \in U_x$ para todo $z \in W_x$ y para todo $t \in (-\alpha_x, \alpha_x)$. Sea $z \in W_x$ y $t \in (0, \alpha_x)$. Como $\varphi(-t, \varphi(t, x)) = x$, por la regla de la cadena se tiene

$$\frac{d}{dx}\varphi(-t, x)(\varphi(t, x)) \frac{d}{dx}\varphi(t, x)(x) = \text{Id}.$$

Sea $\lambda = a + bi$ un valor propio de $\frac{d}{dx}\varphi(t, x)(z)$. Entonces $\lambda^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$ es un valor propio de $\frac{d}{dx}\varphi(-t, x)(\varphi(t, z))$. Como $z, \varphi(t, z) \in U_x$ y $t \in (0, T_x)$, se tiene que $\Re \lambda < 1$ y $\Re \lambda^{-1} > 1$. Esto implica que $|\lambda| = a^2 + b^2 < 1$.

En resumen mostramos que para cada $x \in \overline{U}$, existe W_x entorno de x y un número positivo α_x tal que $\frac{d}{dx}\varphi(t, x)(z)$ tiene todos sus valores propios con módulo menor que 1 para cada $z \in W_x$ y para cada $t \in (0, \alpha_x)$. Por un argumento de compacidad en \overline{U} obtenemos el $T > 0$ buscado.

Para la segunda parte se considera la igualdad (3.1). ■

Observación 3.4 (Condición de LaSalle para Flujos). *Notar que si la ecuación $x' = F(x)$ cumple que el campo F es completo, entonces podemos considerar el flujo a “tiempo 1” generado por la ecuación diferencial, es decir, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $f(x) = \varphi(1, x)$. Se tiene por un lado que la órbita de un punto x se calcula como $f^n(x) = \varphi(n, x)$ y entonces el Jacobiano de f^n en el punto x es $J_{f^n}(x) = J_{\varphi(n, \cdot)}(x)$. Concluimos que $\rho(J_{f^n}(x)) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$ y todo $n \in \mathbb{N}$.*

Como comentamos antes el Problema de Markus-Yamabe en el plano tiene respuesta afirmativa. Esto implica el campo vectorial es completo pues toda solución o bien es el origen o bien tiende al origen. Considerando $f = \varphi(1, \cdot) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se tiene entonces por el Lema 3.3 que $\rho(J_{\varphi(1, \cdot)}(x)) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$ y f tiene dinámica de atracción global. Recíprocamente si f es el tiempo 1 de un flujo del plano que cumple la condición de LaSalle, entonces en cierto sentido es un buen candidato a tener dinámica de atracción global pues al aplicar el item 2 del Lema 3.3 se tiene que los valores propios de $J_F(x)$ tienen parte real no positiva.

Otra familia de ejemplos es la siguiente: Sea $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ y $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un mapa de clase C^1 , se dice que f es triangular si

$$f(x) = (f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_m)).$$

Decimos que f es linealmente triangularizable si existe un cambio de va-

riable lineal que hace a f triangular. Por completitud presentamos la prueba del siguiente resultado la cual hemos extraído de [10].

Teorema 3.5 (Teorema A, [11]). *Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un mapa triangular de clase C^1 tal que 0 es un punto fijo de f y $\rho(J_f(x)) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Entonces 0 es atractor global de f .*

Demostración. Probaremos por inducción en la dimensión m la siguiente afirmación: Si $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un mapa triangular de clase C^1 tal que $f(0) = 0$ y

$$\left| \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right| < 1, \left| \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right| < 1, \dots, \left| \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \right| < 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^m.$$

Fijemos $x^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ y consideremos $x^{(k+1)} = F(x^{(k)})$. Entonces existen k_0 suficientemente grande, $M > 0$ y $C \in (0, 1)$ tales que

$$|x_i^{(k+k_0)}| \leq MC^k \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, m.$$

Notar que esta afirmación implica que la órbita de cualquier punto converge a 0 . Si $m = 1$, el resultado es inmediato por el Teorema del valor medio. Supongamos que la afirmación es cierta para todo $m < s$ y veamos que es cierta para $m = s$. Fijemos $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{s-1}$. Si aplicamos la hipótesis de inducción obtenemos que existen $k_0 \in \mathbb{N}$, $M > 0$ y $C \in (0, 1)$ tales que $|x_i^{(k+k_0)}| \leq MC^k$ para cada $i = 1, \dots, s-1$ y todo $k \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad podemos cambiar $x^{(0)}$ por $x^{(k_0)}$ y entonces obtenemos que $|x_i^{(k)}| \leq MC^k$ para cada $i = 1, \dots, s-1$ y todo $k \in \mathbb{N}$.

Consideremos la s -ésima coordenada del k iterado de x , es decir $x_s^{(k)}$.

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
x_s^{(k)} &= f_s(x^{(k-1)}) = f_s(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_s^{(k-1)}) = \\
&= \int_0^{x_s^{(k-1)}} \frac{\partial f_s}{\partial x_s}(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_{s-1}^{(k-1)}, t) dt + \\
&\quad + \int_0^{x_{s-1}^{(k-1)}} \frac{\partial f_s}{\partial x_{s-1}}(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_{s-2}^{(k-1)}, t, 0) dt + \dots \\
&\quad + \int_0^{x_1^{(k-1)}} \frac{\partial f_s}{\partial x_1}(t, 0, \dots, 0) dt.
\end{aligned}$$

Por la hipótesis de inducción se tiene que para todo $k \in \mathbb{N}$, para todo $i < s$ y todo $t \in [0, x_i^{(k)}]$ los vectores $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, t, 0, \dots, 0)$ se encuentran en un compacto L . Para cada $i < s$, sea M_i el máximo valor que toma $\frac{\partial f_s}{\partial x_i}$ en L y denotemos $\hat{M} = \max\{M_1, M_2, \dots, M_{s-1}\}$. Usando que si $a < b$, entonces $|\int_a^b \alpha(t) dt| \leq \int_a^b |\alpha(t)| dt$ podemos escribir

$$|x_s^{(k)}| \leq |x_s^{(k-1)}| + \hat{M}(|x_{s-1}^{(k-1)}| + |x_{s-2}^{(k-1)}| + \dots + |x_1^{(k-1)}|). \quad (3.2)$$

A partir de esto obtenemos que

$$|x_s^{(k)}| \leq |x_s^{(k-1)}| + (s-1)M\hat{M}C^{k-1}. \quad (3.3)$$

Nombrando $\hat{C} = (s-1)M\hat{M}$ y acotando inductivamente cada $|x_s^{(i)}|$ obtenemos que

$$|x_s^{(k)}| \dots |x_s^{(0)}| + \hat{C}(C^{s-1} + C^{s-2} + \dots + 1) \leq |x_s^{(0)}| + \frac{\hat{C}}{1-C}.$$

Por tanto $x_s^{(k)}$ es una sucesión acotada. Lo mismo es cierto para $x_i^{(k)}$ para $i = 1, 2, \dots, s-1$ y entonces existe $R > 0$ tal que $|x_i^{(k)}| \leq R$ para todo $i = 1, \dots, s$. Definimos entonces $D = \max\left\{\left|\frac{\partial f_s}{\partial x_i}\right| : |y_i| \leq R, i = 1, 2, \dots, s\right\}$, notar que por hipótesis $D < 1$. Entonces la desigualdad (3.2) puede sustituirse por

$$|x_s^{(k)}| \leq D|x_s^{(k-1)}| + \hat{M}(|x_{s-1}^{(k-1)}| + |x_{s-2}^{(k-1)}| + \dots + |x_1^{(k-1)}|).$$

y la desigualdad (3.3) por

$$|x_s^{(k)}| \leq D|x_s^{(k-1)}| + \hat{C}C^{k-1}. \quad (3.4)$$

Desarrollando esta desigualdad por recurrencia obtenemos que

$$\begin{aligned} |x_s^{(k)}| &\leq D(D|x_s^{(k-2)}| + C^{k-2}\hat{C}) + C^{k-1}\hat{C} \leq \\ &\vdots \\ &\leq D^k|x_s^{(0)}| + \hat{C}(C^{k-1} + DC^{k-2} + \dots + D^{k-1}) \leq \\ &\leq D^k|x_s^{(0)}| + k\hat{C}(\max\{C, D\})^k - 1 \leq \\ &\leq \max\{C, D\}^k \left(|x_s^{(0)}| + \frac{k\hat{C}}{\max\{C, D\}} \right) \leq \\ &\leq \tilde{M}(k)\tilde{C}^k \end{aligned}$$

donde $\tilde{C} = \max\{C, D\}$ y cumple $0 < \tilde{C} < 1$ y $\tilde{M}(k) = |x_s^{(0)}| + \frac{k\hat{C}}{\max\{C, D\}}$.

Sea \bar{C} tal que $0 < \hat{C} < \bar{C} < 1$, tenemos que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{\hat{C}}{\bar{C}}\right)^k \tilde{M}(k) = 0$ y por tanto existe un momento a partir del cual $\left(\frac{\hat{C}}{\bar{C}}\right)^k \tilde{M}(k) < \hat{M}$. Hemos probado que

$$|x_s^{(k)}| \leq \tilde{M}(k)\tilde{C}^k = \left(\frac{\hat{C}}{\bar{C}}\right)^k \tilde{M}(k)\tilde{C}^k \leq \hat{M}\tilde{M}(k).$$

Esto finaliza la inducción.

Por tanto para todo $i = 1, \dots, m$, se tiene que $\lim_{k \rightarrow +\infty} |x_i^{(k)}| = 0$ y el origen es atractor global. ■

Si un mapa polinomial f del plano cumple que $\rho(J_f(x)) < 1$, este se puede reducir a un mapa triangular mediante un cambio de variables lineal, por lo que también se obtiene lo siguiente

Teorema 3.6 (Teorema B, [11]). *Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mapa polinomial tal que $\rho(J_f(x)) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Entonces f tiene un único punto fijo que es atractor global.*

Recordar que si p es un punto fijo, la condición $\rho(J_f(p)) < 1$ implica que p es atractor local estable. Veamos esto.

Lema 3.7. *Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un mapa, p un punto fijo tal que f es de clase C^1 en p y $\rho(J_f(p)) < 1$. Entonces p es atractor local, es decir, existe U homeomorfo a una bola que contiene a p tal que $f(\overline{U}) \subset U$ y $\{p\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(U)$.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $p = 0$. Como $\rho(J_f(0)) < 1$, por el Lema A.5 existe una norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que la norma matricial inducida cumple que $\|J_f(0)\| = k < 1$. Como f es diferenciable en 0, escribimos

$$f(x) = f(0) + J_f(0)x + r(x)$$

donde $\frac{r(x)}{\|x\|} \rightarrow 0$ si $\|x\| \rightarrow 0$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $k' = k + \epsilon < 1$. Para este $\epsilon > 0$, tomamos $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que $\frac{r(x)}{\|x\|} < \epsilon$ si $\|x\| < \delta$. Sea x tal que $\|x\| < \delta$, entonces

$$\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq \frac{\|J_f(0)(x)\|}{\|x\|} + \frac{\|r(x)\|}{\|x\|} = \left\| J_f(0) \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| + \frac{\|r(x)\|}{\|x\|} \leq k + \epsilon = k'$$

Por tanto se cumple que $\|f(x)\| \leq k'\|x\|$ si $\|x\| < \delta$. Tomando $U = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \delta\}$ obtenemos el resultado. ■

Algo similar sucede si p es un punto periódico de período r para f , es decir si $f^r(p) = p$, entonces $\rho(J_{f^r}(p)) < 1$, y se tiene que p es atractor local para f^r , lo que implica que puntos cercanos a la órbita de p van a tender a la órbita de p . Ahora, ¿qué sucede en puntos que no son periódicos? De manera intuitiva pedir que $\rho(J_f(x)) < 1$ para todo x podría dar una noción de cierta estabilidad asintótica a lo largo de la órbita del punto. Sin embargo que el radio espectral sea menor que 1 no se mantiene necesariamente para los iterados de f , es decir, puede suceder que $\rho(J_{f^n}(x_0)) \geq 1$ para algún n y algún x_0 . El siguiente es un contraejemplo al problema de LaSalle en

dimensión $m = 2$ y además muestra entre otras cosa que la condición de radio espectral menor que 1 no se mantiene para f^2 .

Ejemplo 3.8 (Szlenk [11]). Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $F(x, y) = \left(\frac{-ky^3}{1+x^2+y^2}, \frac{kx^3}{1+x^2+y^2} \right)$ con $k \in (1, 2/\sqrt{3})$. Se tiene que 0 es punto fijo, $\rho(J_F(x, y)) < 1$ y sin embargo 0 no es atractor global.

Calculando $\det J_F(x, y)$ y $\text{tr}(J_F(x, y))$ obtenemos que

$$\det J_F(x, y) = \frac{3k^2 x^2 y^2 (x^2 + y^2 + 3)}{(1 + x^2 + y^2)^3} \quad \text{y} \quad \text{tr}(J_F(x, y)) = \frac{-2kxy(x^2 - y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

Usando coordenadas polares vemos que

$$\det J_F(r, \theta) = \frac{3k^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) r^4 (r^2 + 3)}{(1 + r^2)^3} < \frac{3k^2}{4}.$$

El discriminante $\Delta(x, y)$ del polinomio característico de $J_F(x, y)$ es

$$\begin{aligned} \Delta(x, y) &= \text{tr}^2 J_F(x, y) - 4 \det J_F(x, y) \\ &= -4kx^2 y^2 \frac{2x^4 + 8x^2 y^2 + 2y^4 + 12x^2 + 12y^2 + 9}{(1 + x^2 + y^2)^4} \leq 0 \end{aligned}$$

Si $xy = 0$, entonces $\lambda = 0$. En caso contrario $\Delta(x, y) < 0$ y calculando el módulo de los valores propios obtenemos que $|\lambda| = \sqrt{\det J_F(x, y)}$. Por la elección de $k \in (1, 2/\sqrt{3})$, tenemos que $|\lambda| < 1$ y entonces $\rho(J_F(x, y)) < 1$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tomando $q = (\frac{1}{\sqrt{k-1}}, 0)$, obtenemos que q es un punto periódico de período 4, por lo que 0 no es atractor global. Además en este caso $J_{F^2}(q) = J_F(F(q)) \cdot J_F(q)$ cumple que $\rho(J_{F^2}(q)) = (3 - 2/k)^2 > 1$ para k en el intervalo elegido.

Por último hay puntos cuya órbita tiende a infinito. Por ejemplo, si tomamos un punto de la forma $(x, 0)$ tal que $x > \frac{1}{\sqrt{k-1}}$ entonces $\|F^n(x, 0)\| \rightarrow \infty$ si $n \rightarrow \infty$.

A partir de lo anterior, sabiendo que el problema de LaSalle tiene respuesta negativa para dimensión $m \geq 2$, se sigue en la búsqueda de criterios

suficientes para garantizar la atracción global. Un camino posible es agregar condiciones adicionales al problema para intentar probar la atracción global del punto fijo. Por ejemplo se puede pedir que el infinito sea repulsor para tener dinámica acotada. De todas maneras bajo esta hipótesis, se sigue sin obtener al origen como atractor global (en [2] se muestra un ejemplo de esto).

Otra condición es la siguiente: si consideramos una matriz real A , entonces definimos $|A|$ como $|A| = (|a_{ij}|)_{1 \leq i,j,m}$. Se tiene que $\rho(A) \leq \rho(|A|)$ (se sugiere al lector ver la referencia [23]), por lo que si pedimos $\rho(|J_f(x)|) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$, esta condición es más fuerte que la condición original. En este contexto en [13] se obtiene que para un sistema dinámico de la forma $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $F(x_1, \dots, x_m) = (x_2, \dots, x_m, f(x_1, \dots, x_m))$ con $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , es equivalente pedir $\rho(|D_F(x)|) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$ con pedir que $\sum_{i=1}^m |D_i(f)(x)| < 1$. Además bajo estas condiciones, si F tiene un punto fijo entonces es atractor global estable.

3.2. Resultados Principales.

3.2.1. Enfoque topológico.

A continuación presentamos el primer teorema de este capítulo. Tomaremos como punto de partida por un lado un mapa f que tiene sombreado métrico y con un punto q atractor global estable y por otro un mapa g con un punto fijo p cercano a q que es atractor local, de aquí vamos a determinar qué tan cerca tiene que estar el mapa g del mapa f para garantizar que la dinámica de g copie de alguna forma la del mapa inicial. Recordar que considerando una norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ si $f, g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ son funciones, se define la norma inducida como $\|f - g\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \{\|f(x) - g(x)\|\}$

siempre que este supremo exista. Enunciemos nuevamente el teorema que presentamos en la Introducción.

Teorema 1.2. *Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un mapa con sombreado métrico y con un punto p_f atractor global. Para todo $\alpha > 0$, existe $\delta > 0$ tal que todo mapa g que satisface:*

- *Existe $q_g \in \mathbb{R}^m$ atractor local de g ,*
- *$p_f \in B(q_g, 2\alpha) \subset U$, donde U es la cuenca de atracción de q_g respecto a g .*
- *$\|g - f\| < \delta$.*

Entonces q_g es atractor global para g .

Demostración. Dado $\alpha > 0$, tomemos $\delta > 0$ del sombreado métrico de f correspondiente a α . Tomemos g que satisface las hipótesis del teorema. Como $\|f - g\| < \delta$, se verifica que $\{g^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una δ -pseudo órbita de f para cada x : En efecto

$$\|g^{n+1}(x) - f(g^n(x))\| = \|g(g^n(x)) - f(g^n(x))\| < \delta.$$

Por tanto esta δ -pseudo órbita es α -sombreada por la órbita futura según f de algún punto y . Por otro lado como f tiene dinámica de atracción global, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f^n(y) - p_f\| < \alpha$ si $n \geq n_0$. Por lo que

$$\|g^n(x) - p_f\| \leq \underbrace{\|g^n(x) - f^n(y)\|}_{< \alpha} + \underbrace{\|f^n(y) - p_f\|}_{< \alpha} < 2\alpha$$

para $n \geq n_0$. Se tiene entonces que $g^n(x) \in B(p_f, 2\alpha) \subset U$ para $n \geq n_0$ y entonces $g^n(x) \rightarrow q_g$ si $n \rightarrow +\infty$. Esto concluye la prueba. ■

A continuación presentamos un caso particular del Teorema 1.2. Lo valioso de este resultado es que se puede determinar de manera explícita un entorno C^0 del mapa base para que se mantenga la atracción global.

Corolario 3.9. *Sea $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un mapa lineal tal que $\rho(A) < 1$. Dado $\alpha > 0$, todo mapa $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ que satisface:*

- *Existe $q_g \in \mathbb{R}^m$ atractor local de g ,*
- *$0 \in B(q_g, 2\alpha) \subset U$, donde U es la cuenca de atracción de q_g respecto a g .*
- *$\|g - A\| < (1 - k)\alpha$, donde $0 < k < 1$ y $\|\cdot\| : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ quedan determinados por A .*

Entonces q_g es atrator global para g .

Demostración. Como $\rho(A) < 1$, por el Lema A.5 existe una norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que la norma matricial inducida cumple $\|A\| = k < 1$ y por tanto A es una contracción con esa norma. Por el Lema A.7, el mapa lineal A tiene sombreado métrico. Dado $\alpha > 0$, sea g en las hipótesis del teorema, tomamos $\delta = (1 - k)\alpha$ del Lema A.7. Aplicando el teorema anterior se obtiene el resultado. ■

Observación 3.10. *La cota sobre el grado de cercanía entre g y A del corolario anterior no es necesariamente óptima, es decir, se pueden construir ejemplos donde g se encuentre a más de $(1 - k\alpha)$ de A y seguir teniendo dinámica de atracción global. Tomemos por ejemplo $m = 1$, $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $A(x) = \frac{1}{2}x$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = A(x)$ si $|x| < 2$, $|g(x)| < |x|$ si $|x| \leq 2$. Notar que 0 es atractor global para g y sin embargo no tiene que estar a menos de $1/2$ de A .*

Siguiendo la idea de la prueba del Teorema 1.2, ¿podemos debilitar algunas de las hipótesis y obtener un resultado similar? En la prueba de este

teorema un paso clave fue garantizar que la dinámica de atracción global sea “copiada” por el mapa cercano, al menos hasta llegar a un entorno del atractor. La propiedad que nos permite lograr esto es el sombreado métrico. Cabe preguntarse entonces lo siguiente: ¿Si el mapa base tiene atracción global, tiene sombreado métrico? Si ese fuera el caso bastaría con pedir solamente la atracción global. A partir del siguiente ejemplo mostraremos que esto no sucede.

Además este ejemplo muestra lo siguiente: Si f es un mapa con dinámica de atracción global y tomamos un entorno C^0 arbitrario de f , existe un mapa g en este entorno con un atractor local que no es global.

Ejemplo 3.11. Sea $f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$. Entonces f no tiene sombreado métrico.

Esta función verifica las siguientes propiedades:

- 0 es el único punto fijo.
- $0 < f(x) < x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, por lo que $f^n(x) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
- $x - f(x) \rightarrow 0$, si $x \rightarrow +\infty$.

Es fácil ver que se cumple la primera propiedad. La segunda propiedad implica que $f^n(x) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$ y por tanto 0 es atractor global, además es estable pues la derivada lateral en 0 es 0. La tercera propiedad implica que para cualquier $\delta > 0$, existe x_δ suficientemente grande tal que $x_\delta - f(x_\delta) < \delta$.

Veamos que f no tiene sombreado métrico: Tomemos $\epsilon > 0$ fijo, sea $\delta > 0$, tomamos x_δ suficientemente grande para que $x_\delta - f(x_\delta) < \delta$ y además $x_\delta > \epsilon$. Notar que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n = x_\delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$ es

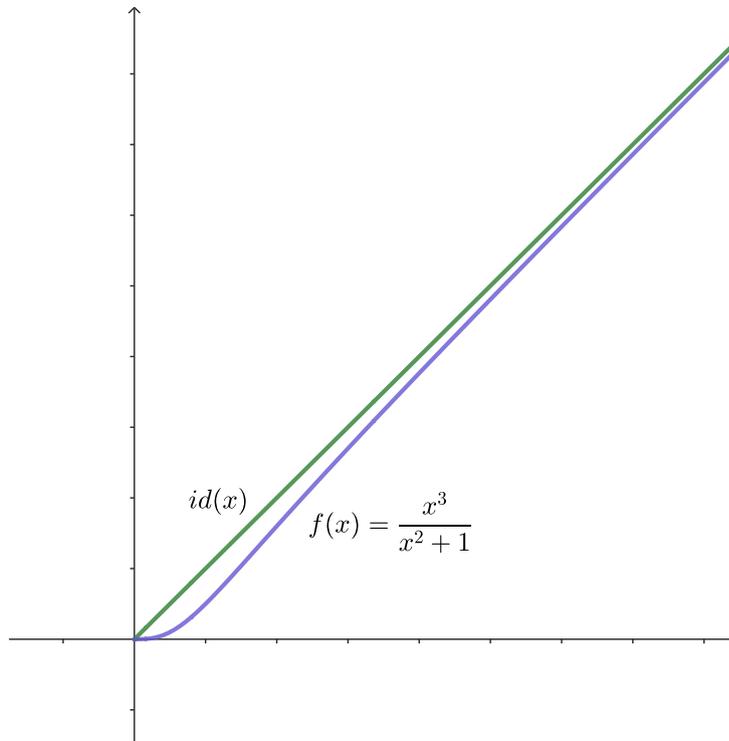


Figura 3.1: Mapa con dinámica de atracción global que no tiene sombreado métrico.

una δ -pseudo órbita. Esta δ -pseudo órbita no es ϵ -sombreada dado que $f^n(x) \rightarrow 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}^+$.

Este comportamiento se puede extender a \mathbb{R}^2 como sigue: consideramos \mathbb{R}^2 en coordenadas polares. Si $(r, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi)$, entonces $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$. Recordar que con la norma euclidea se tiene que $\|(x, y)\| = r$. Tomamos $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que en coordenadas polares es $F(r, \theta) = (f(r), \theta)$, donde f es el definido mas arriba. De esta forma $\|F(x, y)\| = f(r)$, por lo que $\|F(x, y)\| < \|(x, y)\|$ si $(x, y) \neq (0, 0)$. Esto implica que F tiene al origen como atractor global. Que F no tiene sombreado métrico es análogo a lo visto para f : Fijado $\epsilon > 0$, dado cualquier $\delta > 0$, tomemos $(x, y)_\delta$ tal que $\|(x, y)_\delta - F(x, y)_\delta\| < \delta$ entonces podemos considerar

una δ -pseudo órbita constante. Esta no es ϵ -sombreada pues la órbita de todo punto tiende a 0.

Nos gustaría obtener entonces un resultado donde la hipótesis del mapa base sea simplemente la atracción global. Por lo anterior, una dinámica de atracción global no tiene por qué tener sombreado métrico y por tanto sin esta herramienta no podemos garantizar que las órbitas de mapas cercanos se comporten parecido a las órbitas del mapa con atracción global. En [15] se muestra que todo homeomorfismo con un punto atractor global estable tiene sombreado topológico (ver el Apéndice A). Aquí obtendremos una generalización de este resultado para el caso de mapas en \mathbb{R}^m .

Teorema 3.12. *Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un mapa tal que p es atractor global estable. Entonces f tiene la propiedad del sombreado topológico.*

Para mostrar esto vamos a probar el sombreado topológico a futuro. Denotemos $A_1 = \overline{B(p, 1)}$, $A_{i+1} = \overline{B(p, i+1) \setminus B(p, i)}$ para cada $i > 0$ y $A_i^n = f^n(A_i)$ para cada $n > 0$. Como cada corona A_i es compacta para todo $i \in \mathbb{N}$ y p es atractor global estable, existe $r_i > 0$ tal que $A_i^n \subset B(p, i - 1)$ para todo $n > r_i$. Debido a esto, si queremos sombrear una pseudo órbita que pasa por cierta corona, solo debemos sombrearla por un número finito de índices pues a partir de cierto momento la órbita se encontrará en un entorno del atractor (Ver figura 3.2).

Plantaremos una idea de la prueba. Se espera que esto facilite la comprensión del lector.

Dada una función ϵ continua y positiva, vamos a asociar un $\delta_i > 0$ a cada corona compacta A_i de manera que los δ_i sean decrecientes en cada corona, y que además sean más pequeños que los valores que puede to-

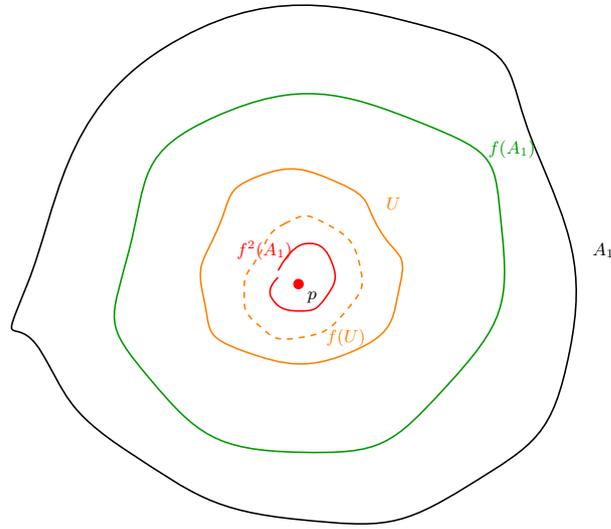


Figura 3.2: En este caso en dos iterados de A_1 llegamos muy cerca de p , $f^2(A_1) \subset \overline{f(U)}$. En esta figura en particular $f(A_1) \subset A_1$, sin embargo esto no tiene por qué pasar, lo que sí pasa es que para algún tiempo n_0 , un iterado de A_1 entra en $f(U)$. Cabe destacar además que como f es un mapa, la imagen de una corona no tiene por qué ser homeomorfa a una corona.

mar la función ϵ a lo largo de los iterados de A_i , esto se puede hacer dado que la unión de los iterados de A_i se encuentran en un compacto. Mostraremos que una δ_i -pseudo órbita que comienza en una corona A_i va a ser δ_{i-1} -sombreada hasta entrar en la bola anterior. Luego repetimos este procedimiento hasta finalmente entrar en el entorno de la definición de atractor para p .

Por último, vamos a considerar una función δ que esté por debajo de cada δ_i en cada corona y con esto concluiremos que se cumple la propiedad del sombreado. Lo técnico es la elección de estos δ_i .

Lema 3.13. *Para toda corona A_i existe $\delta_i > 0$ que satisface: Si $y \in A_i$, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una δ_i -pseudo órbita tal que $d(y, x_0) < \delta_i$, entonces $d(f^r(y), x_r) < \delta_{i-1}$ para*

cada $r \leq r_i$, donde $r_i > 0$ es el primer natural que verifica que $A_i^n \subset B(p, i - 1)$ para todo $n \geq r_i$.

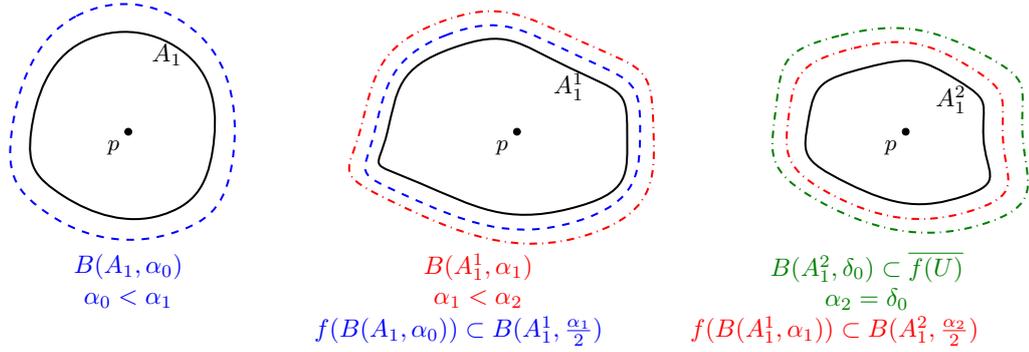


Figura 3.3: Esquema de elección de los α_0, α_1 y α_2 . Primero tomamos $\alpha_2 = \delta_0$, luego α_1 y luego α_0 . Por último tomamos δ_1 para determinar el entorno de A_1 .

Para dar una idea esquemática de la prueba nos vamos a apoyar en la Figura 3.3. Supongamos que $A_1^2 \subset \overline{f(U)}$. Queremos definir $\delta_1 > 0$ en A_1 de manera que si una δ_1 -pseudo órbita pasa cerca de A_1 , entonces en 2 iterados también entra en $\overline{f(U)}$, es decir $r_1 = 2$. Consideramos entonces los conjuntos A_1, A_1^1 y A_1^2 . Nos tomamos $\delta_0 > 0$ tal que $B(A_1^2, \delta_0) \subset \overline{f(U)}$. Esto nos determina un entorno de A_1^1 , y este último nos determina un entorno de A_1 . Tenemos que elegir estos entornos lo suficientemente pequeños para que, al considerar las δ_1 -pseudo órbitas, es decir, el salto de tamaño δ_1 que puedo realizar, los puntos de la pseudo órbita se mantengan en los entornos encontrados.

Demostración. Veamos como definir $\delta_1 > 0$ en $A_1 = \overline{B(p, 1)}$. Sea U un entorno de p de la definición de atractor estable. Sea $r_1 \geq 0$ el primer número natural que satisface $A_1^n \subsetneq \overline{f(U)}$ para todo $n \geq r_1$. Sea $\delta_0 > 0$ que cumple que $B(A_1^{r_1}, \delta_0) \subset \overline{f(U)} \subset U$. Llamamos $\alpha_{r_1} = \delta_0$ y tomamos $\alpha_{r_1-1} < \alpha_{r_1}$ de

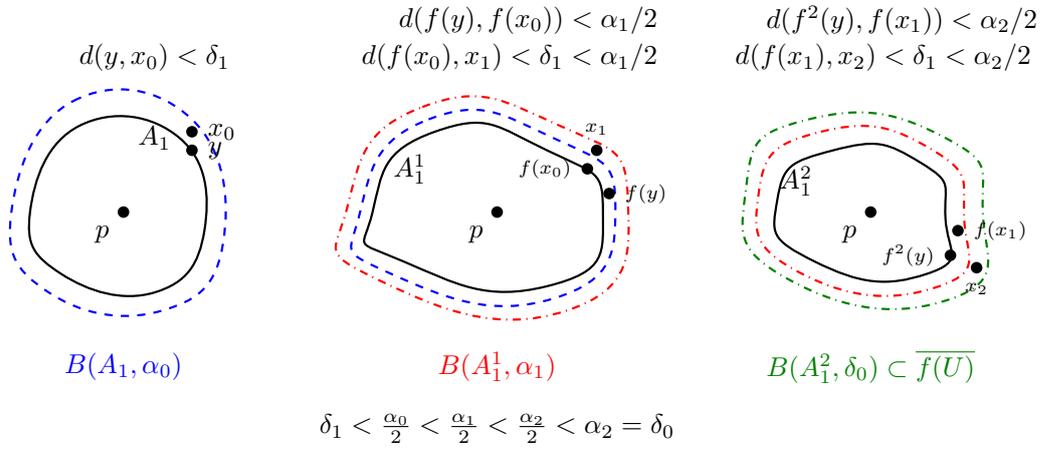


Figura 3.4: En esta figura la elección de α_2, α_1 y α_0 hacen que la δ_1 -pseudo órbita sea δ_0 sombreada hasta llegar a $\overline{f(U)}$.

la continuidad uniforme de $f|_{A_1^{r_1-1}}$ de forma que si $d(x, y) < \alpha_{r_1-1}$, entonces $d(f(x), f(y)) < \frac{\alpha_{r_1}}{2}$ para todo $x, y \in A_1^{r_1-1}$. Con esto se tiene además que $\overline{f(B(A_1^{r_1-1}, \alpha_{r_1-1}))} \subset B(A_1^{r_1}, \frac{\alpha_{r_1}}{2})$.

Luego tomamos $\alpha_{r_1-2} < \alpha_{r_1-1}$ de la continuidad uniforme de $f|_{A_1^{r_1-2}}$ de forma que si $d(x, y) < \alpha_{r_1-2}$, entonces $d(f(x), f(y)) < \frac{\alpha_{r_1-1}}{2}$ para todo $x, y \in A_1^{r_1-2}$ tal que

$$\overline{f(B(A_1^{r_1-2}, \alpha_{r_1-2}))} \subset B(A_1^{r_1-1}, \frac{\alpha_{r_1-1}}{2}).$$

Repetimos este procedimiento r_1 veces hasta obtener finalmente $\alpha_0 < \alpha_1$ tal que

$$\overline{f(B(A_1, \alpha_0))} \subset B(A_1^1, \frac{\alpha_1}{2}).$$

De esta manera si $x, y \in \overline{B(A_1^r, \alpha_r)}$ y $d(x, y) < \alpha_r$, entonces $d(f(x), f(y)) < \frac{\alpha_{r+1}}{2}$ para $0 \leq r < r_1$. Definimos $\delta_1 > 0$ tal que $\delta_1 < \frac{\alpha_0}{2}$. Con esto se tiene que $\delta_1 < \frac{\alpha_r}{2}$ para todo $r < r_1$.

Ahora tomamos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una δ_1 -pseudo órbita y escojemos $y \in A_1$ de forma que $d(y, x_0) < \delta_1$, notar que esto implica que $d(y, x_0) < \alpha_0$. Por conti-

nidad se cumple que

$$d(f(y), x_1) \leq \underbrace{d(f(y), f(x_0))}_{< \frac{\alpha_1}{2}} + \underbrace{d(f(x_0), x_1)}_{< \delta_1 < \frac{\alpha_1}{2}} < \alpha_1 < \delta_0.$$

Supongamos ahora que $d(f^{r-1}(y), x_{r-1}) < \alpha_{r-1}$ para algún $r \in \{3, \dots, r_1 - 1\}$, entonces

$$d(f^r(y), x_r) \leq \underbrace{d(f(f^{r-1}(y)), f(x_{r-1}))}_{< \frac{\alpha_r}{2}} + \underbrace{d(f(x_{r-1}), x_r)}_{< \delta_1 < \frac{\alpha_r}{2}} < \alpha_r < \delta_0.$$

Hemos encontrado $\delta_1 > 0$, de forma que una δ_1 -pseudo órbita que comienza en A_1 es δ_0 -sombreada hasta entrar a $f(\overline{U})$.

A continuación consideramos A_2 y $r_2 > 0$ el primer número natural tal que $A_2^n \subsetneq \overline{B(p, 1)}$ para todo $n \geq r_2$. Ajustamos $\delta_1 > 0$ si fuera necesario para que $B(A_2^{r_2}, \delta_1) \subset \overline{B(p, 1)}$. Luego procedemos de forma similar a como lo hicimos con A_1 para encontrar $\alpha_r > \alpha_{r-1} > \dots > \alpha_0$ (que dependen de A_2) hasta finalmente obtener $\delta_2 < \alpha_r/2 < \delta_1$ para todo $r \leq r_2$. Con esto, si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una δ_2 -pseudo órbita e $y \in A_2$ es tal que $d(y, x_0) < \delta_2$, entonces

$$d(f^r(y), x_r) \leq \underbrace{d(f(f^{r-1}(y)), f(x_{r-1}))}_{< \frac{\alpha_r}{2}} + \underbrace{d(f(x_{r-1}), x_r)}_{< \delta_2 < \frac{\alpha_r}{2}} < \alpha_r < \delta_1$$

para cada $r \leq r_2$ y esta δ_2 -pseudo órbita es δ_1 -sombreada por la órbita de y hasta entrar en $\overline{B(p, 1)}$.

Procedemos ahora de manera inductiva. Fijada una corona A_i , supongamos que tenemos definido $\delta_j > 0$ en cada A_j para $j < i$. Sea $r_i > 0$ el primer natural tal que $A_i^n \subset \overline{B(p, i-1)}$ para todo $n \geq r_i$. Ajustamos si fuera necesario el δ_{i-1} anteriormente definido para que $B(A_i^{r_i}, \delta_{i-1}) \subset \overline{B(p, i-1)}$. Repetimos el argumento de la construcción de los α_r para obtener $\delta_i > 0$ tal que $\delta_i < \alpha_r/2 < \delta_{i-1}$ de forma que si $y \in A_i$ y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una δ_i -pseudo

órbita tal que $d(y, x_0) < \delta_i$ entonces $d(f^r(y), x_r) < \delta_{i-1}$ para cada $r \leq r_i$. Esto prueba el enunciado. ■

Observación 3.14. *Notar que por la forma en que definimos los $\delta_i > 0$ en cada corona se tiene que si $i > j$ entonces $\delta_i < \delta_j$. Por otro lado, sea A_i una corona y $r_i > 0$ el primer natural tal que $A_i^n \subset \overline{B(p, i-1)}$ para todo $n \geq r_i$. Tomemos $x_0 \in A_i$. Por el lema previo sabemos que una δ_i -pseudo órbita $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ comenzando en x_0 se mantiene a menos de δ_{i-1} de la órbita de x_0 hasta que entra a $\overline{B(p, i-1)}$. Una vez que esto sucede, $f^{r_i}(x_0)$ está en alguna corona A_j con $j < i$, además como $j \leq i-1$ se tiene que $d(f^{r_i}(x_0), x_{r_i}) < \delta_{i-1} \leq \delta_j$ y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es δ_j -sombreada para $n \leq r_i$. Podemos entonces aplicar el Lema previo a los puntos $f^{r_i}(x_0)$ y x_{r_i} tomando $\{x_n\}_{n \geq r_i}$ como δ_j -pseudo órbita. Este procedimiento termina una vez que la órbita de x_0 entra en \overline{U} .*

Prueba del Teorema 3.12. Sin pérdida de generalidad tomemos $p = 0$. Dado $\epsilon \in C^+(\mathbb{R}^m)$ arbitrario, tomemos $\alpha > 0$ tal que:

1. $\alpha < \epsilon(0)/4$.
2. Si $y \in B(0, \alpha)$, entonces $\epsilon(y) > \epsilon(0)/2$.

Como 0 es atractor local estable, tomamos U de la definición de atractor tal que $\overline{U} \subset B(0, \alpha)$ y $\overline{f(U)} \subset U$. Notar que como cada $A_i = \overline{B(0, i)} \setminus \overline{B(0, i-1)}$ es compacto y 0 es atractor global estable, existe $l_i \in \mathbb{N}$ tal que $A_i^n \subset \overline{f(U)}$ para todo $n \geq l_i$, por lo que existe $r_i \in \mathbb{N}$ tal que $A_i^n \subset \overline{B(0, i-1)}$ para todo $n \geq r_i$.

Para cada A_i tomamos $s_i > 0$ el mínimo natural tal que $\bigcup_{r \geq 0} A_i^r \subset B(0, s_i)$. Entonces para A_1 consideramos $0 < \delta_0 < \min\{\epsilon(x) : x \in \overline{B(0, s_1)}\}$ tal que $B(f(\overline{U}), \delta_0) \subset U$. Para este δ_0 , tomamos $\hat{\delta}_1 > 0$ correspondiente al A_1 del Lema 3.13 de forma que toda $\hat{\delta}_1$ -pseudo órbita que comienza en A_1 es δ_0 -sombreada hasta entrar en $f(\overline{U})$. Inductivamente definimos $\delta_i > 0$ para

cada $i > 0$ de manera que $0 < \delta_i < \min\{\epsilon(x) : x \in \overline{B(0, s_{i+1})}, \hat{\delta}_i\}$. Para este δ_i , tomamos $\hat{\delta}_{i+1}$ del Lema 3.13 de forma que toda $\hat{\delta}_{i+1}$ -pseudo órbita que comienza en A_{i+1} es δ_i -sombreada hasta entrar en $\overline{B(0, i)}$.

Hemos definido entonces los $\delta_i > 0$ en cada anillo A_i . Tomamos $\delta \in C^+(\mathbb{R}^m)$ dependiendo solamente de la norma de x tal que $\delta(x) < \delta_i$ para cada $x \in A_i$. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una δ -pseudo órbita tal que $x_0 \in A_i$ para algún $i > 0$. Notar que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una δ_i -pseudo órbita hasta que entra a $\overline{B(0, i-1)}$. Sea $r_i > 0$ tal que $A_i^n \subset f(\overline{U})$ para todo $n \geq r_i$. Entonces $f^n(x_0) \in \overline{B(0, i-1)}$ para todo $n \geq r_i$. Además por la Observación 3.14 se tiene que

$$d(f^n(x_0), x_n) < \delta_{i-1} < \epsilon(f^n(x_0)), \quad \text{para todo } n \leq r_i.$$

Ahora $f^{r_i}(x_0) \in A_j$ para algún $j < i$, por lo que $d(f^{r_i}(x_0), x_{r_i}) < \delta_j$. Sea r_j el primer natural tal que $A_j^n \subset \overline{B(0, j-1)}$ para todo $n \geq r_j$, entonces $f^{r_j+r_i}(x_0) \in \overline{B(0, j-1)}$. Como $\delta(x) < \delta_j$ para cada $x \in A_j$, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una δ_j -pseudo órbita para $r_i < n \leq r_i + r_j$. Nuevamente por la Observación 3.14 se cumple que

$$d(f^n(x_0), x_n) < \delta_{j-1} < \epsilon(f^n(x_0)), \quad \text{para todo } r_i < n \leq r_i + r_j.$$

Repetimos este procedimiento hasta que la órbita de x_0 entra a $f(\overline{U})$. Para n tal que $f^n(x_0) \in f(\overline{U})$ se cumple que $x_n \in \overline{U}$ pues $d(f^n(x_0), x_n) < \delta_0$. Entonces

$$\begin{aligned} d(f^n(x_0), x_n) &\leq \underbrace{d(f^n(x_0), 0)}_{< \alpha} + \underbrace{d(0, x_n)}_{< \alpha} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \epsilon(0)/2 \\ &\stackrel{(**)}{\leq} \epsilon(f^n(x_0)) \end{aligned}$$

En la desigualdad (*) se usa que $\alpha < \epsilon(0)/4$ y en la desigualdad (**) se usa que si $y \in B(0, \alpha)$, entonces $\epsilon(y) > \epsilon(0)/2$. Finalmente obtenemos que la

órbita de x_0 ϵ -sombrea esta δ -pseudo órbita para cada $n > 0$. Esto prueba la propiedad del sombreado topológico futuro. Por el Lema A.8, f tiene sombreado topológico. ■

Ahora que sabemos que un mapa con un punto atractor global tiene sombreado topológico podemos usar esto para determinar un grado de cercanía entre este mapa y otro mapa de forma que la dinámica del segundo se parezca a la dinámica del primero, al menos hasta estar suficientemente cerca del punto atractor. Notar que en el Ejemplo 3.11 se muestra un mapa que no tiene sombreado métrico, pero al tener un punto atractor global estable, por el Teorema 3.12 tiene sombreado topológico.

Recordamos entonces el Teorema 1.3 que ya enunciamos en la introducción:

Teorema 1.3. *Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un mapa con un punto p_f atractor global. Dado $\alpha > 0$, existe $\delta \in C^+(\mathbb{R}^m)$ tal que todo mapa g que satisfice:*

- *Existe $q_g \in \mathbb{R}^m$ atractor local de g .*
- *$p_f \in B(q, 2\alpha) \subset U$, donde U es la cuenca de atracción de q_g respecto a g .*
- *$d(g(x), f(x)) < \delta(f(x))$.*

Entonces q es atractor global para g .

Demostración. Como p_f es atractor global para f , por el Teorema 3.12 f tiene sombreado topológico. Dado $\alpha > 0$, tomemos $\epsilon \in C^+(\mathbb{R}^m)$ tal que $\epsilon(x) = \alpha$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Sea $\delta \in C^+(\mathbb{R}^m)$ del sombreado de f correspondiente a ϵ . Sea g en las hipótesis del teorema, entonces fijado cierto $x \in \mathbb{R}^m$, veamos que $\{g^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una δ -pseudo órbita de f :

$$d(g^{n+1}(x), f(g^n(x))) = d(g(g^n(x)), f(g^n(x))) < \delta(f(g^n(x))).$$

En consecuencia, existe y tal que $d(g^n(x), f^n(y)) < \alpha$ para todo $n \geq 0$. Como $f^n(y) \rightarrow p_f$ si $n \rightarrow +\infty$, existe un momento n_0 tal que $d(f^n(y), p_f) < \alpha$ para todo $n \geq n_0$. Se tiene entonces que

$$d(g^n(x), p_f) \leq d(g^n(x), f^n(x)) + d(f^n(x), p_f) < 2\alpha$$

para todo $n \geq n_0$ y $g^n(x) \in B(p_f, 2\alpha) \subset U$ para todo $n \geq n_0$. Concluimos que $g^n(x) \rightarrow q_g$ si $n \rightarrow +\infty$ y obtenemos la tesis. ■

3.2.2. Nuevos ejemplos del problema de LaSalle.

Como mencionamos en la Sección 3.1, LaSalle en su libro [34] plantea un problema inspirado en una conjetura propuesta por Markus y Yamabe [37] de los años 60', que hace referencia a condiciones suficientes de atracción global en el contexto de ecuaciones diferenciales.

En la literatura hay varios artículos que tratan sobre el problema. En algunos se presentan ciertos contraejemplos [11, 12, 14]. En otros, el foco está en presentar familias de ejemplos donde el problema tiene respuesta afirmativa [11, 13, 21].

Haciendo uso del Teorema 3.9 estamos en condiciones de presentar un nuevo ejemplo del Problema de LaSalle si pedimos además que el radio espectral del Jacobiano del mapa en cada punto sea menor que 1. A partir de este plantearemos una forma de encontrar una nueva familia de ejemplos. Asimismo, mostraremos que la condición de LaSalle no está ligada para nada a las dinámicas de atracción global pues puede suceder que el radio espectral del mapa no esté acotado y de todas maneras se tenga una dinámica de atracción global (ver el Ejemplo 3.16).

Ejemplo 3.15. Sea $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $A(x, y) = \frac{1}{2}(x, y)$. Consideremos $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$F(x, y) = A(x, y) + \varphi(x, y)G(x, y)$$

donde $G(x, y) = a(\cos(y), \cos(x))$ con $|a| < 1/4$ y $\varphi(x, y) = \psi(\|(x, y)\|)$ con $\psi : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ de clase C^1 que cumple:

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 2 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\pi \frac{t-2}{r-2}\right) & \text{si } 2 < t < r, \\ 1 & \text{si } t \geq r \end{cases}$$

con $r > 0$ a determinar.

Observar que $\|A\| = 1/2$. Aplicando la Proposición A.1 el lineal A tiene sombreado métrico y por y el Lema A.7 si tomamos $\alpha = 1$ entonces el δ del sombreado correspondiente a $\alpha = 1$ es $\delta = 1/2$. Veamos que F se encuentra en las hipótesis del Corolario 3.9:

$$\|F - A\| \leq \|G\| = |a|\sqrt{2} < \frac{\sqrt{2}}{4} < 1/2.$$

Veamos que el radio espectral de J_F es menor que 1:

$$J_F(x, y) = \frac{1}{2} \text{Id} + \varphi(x, y)J_G(x, y) + \nabla\varphi(x, y)^t \cdot G(x, y).$$

Acotemos las perturbaciones de A . Por un lado

$$J_G(x, y) = a \begin{pmatrix} 0 & -\sin(y) \\ -\sin(x) & 0 \end{pmatrix},$$

por lo que $\|J_G(x, y)\| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$. Por otro lado $\nabla\varphi(x, y)^t G(x, y)$ tiene rango 1, $\|\nabla\varphi\| = |\psi'(t)|$ y $\|G(x, y)\| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$. Entonces $\|\nabla\varphi(x, y)^t \cdot G(x, y)\| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}|\psi'(t)|$. Usando que $\rho(J_F) \leq \|J_F\|$ obtenemos

$$\rho(J_F(x, y)) \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + |\psi'(t)|).$$

Si imponemos $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + |\psi'(t)|) < 1$ entonces $|\psi'(t)| < \sqrt{2} - 1$. A partir de esto buscamos un valor de $r > 0$ que verifique $\frac{\pi}{2(r-2)} < \sqrt{2} - 1$. Tomando $r = 6$ se verifica la desigualdad.

En resumen tomando $F(x, y) = \frac{1}{2}(x, y) + \varphi(x, y) \cdot \frac{1}{4}(\cos(y), \cos(x))$ donde $\varphi(x, y) = \psi(\|(x, y)\|)$ con

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 2 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\pi \frac{t-2}{4}\right) & \text{si } 2 < t < 6, \\ 1 & \text{si } t \geq 6 \end{cases}$$

verifica que $F = A$ en $B(0, 2)$, $F = A + G$ en $B(0, 6)^c$, además $\|F - A\| < 1/2$ y $\rho(J_F(x, y)) < 1$.

Como generalización del ejemplo anterior podemos considerar lo siguiente. Partimos de un mapa lineal A del plano con $\rho(A) < 1$, esto determina una norma matricial $\|\cdot\|$ tal que $\|A\| = k < 1$. Luego tomamos un número $\alpha > 0$ concreto. Consideramos $F(x, y) = A(x, y) + \varphi \cdot G$ donde $G(x, y) = (g_1(y), g_2(x))$ con $g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 y $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ de clase C^1 de forma que en $B(0, 2\alpha)$ coincida con A , en el complemento de una bola $F = A + G$ y debe estar a menos de $(1 - k)\alpha$ de A . Como segunda etapa J_F debe estar suficientemente cerca de A para que sus valores propios se mantengan cercanos a los valores propios de A , y por tanto tengan módulo menor que 1.

En el caso de partir de un mapa base que solamente tiene atracción global, no tenemos una forma de determinar concretamente el grado de cercanía entre el mapa base y el mapa cercano, por tanto no logramos darle una cara concreta a la familia de ejemplos. Aunque teóricamente los Teoremas 1.2 y 1.3 son de interés, no es posible aplicarlos para encontrar nuevas familias de ejemplos.

Por otro lado, la hipótesis del Problema de LaSalle está lejos de ser necesaria. El fenómeno de atracción global trata sobre el comportamiento asintótico de las órbitas. A futuro todas se acercan a cierto punto particular del espacio. Las condiciones sobre la derivada de un mapa trata sobre un comportamiento local en un solo iterado, no es una propiedad que se mantenga a lo largo de las órbitas. Esto ya lo vimos en el Ejemplo 3.8 donde encontramos que el punto $q = (\frac{1}{\sqrt{k-1}}, 0)$, $k \in (1, 2/\sqrt{3})$, cumple que $\rho(J_{F^2}(q)) > 1$.

Mediante el ejemplo que mostraremos a continuación pretendemos evidenciar que la condición sobre el jacobiano no es siquiera necesaria para garantizar la atracción global, pues el radio espectral puede ser arbitrariamente grande y sin embargo se tiene atracción global.

Ejemplo 3.16. Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ de clase C^1 tal que $\phi(x, y) = 0$ si $\|(x, y)\| \leq 2$ y $\phi(x, y) = 1$ si $\|(x, y)\| > 4$. Tomemos $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un mapa de forma que

$$F(x, y) = A(x, y) + \phi(x, y)G(x, y)$$

con $A(x, y) = \frac{1}{2}(x, y)$ y $G(x, y) = \frac{1}{4}(\sin(y^2), \sin(x^2))$.

Verifiquemos que F se encuentra en las hipótesis del Corolario 3.9: Tomamos la norma euclídea en \mathbb{R}^2 . El mapa lineal de base es A , con lo que $\|A\| = k = 1/2$. Sea $\alpha = 1$, si F cumple $\|F - A\| = \|G\| < (1 - k)\alpha = 1/2$ entonces F tiene dinámica de atracción global. Ahora

$$\|F - A\|^2 = \|G\|^2 = \frac{1}{16} |\sin^2(y^2) + \sin^2(x^2)| \leq \frac{1}{8},$$

con lo que $\|G\| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ y el origen es atractor global para F .

Calculando $J_F(x, y)$ para $\|(x, y)\| > 4$ se tiene que

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}y \cos(y^2) \\ \frac{1}{2}x \cos(x^2) & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

y los valores propios son

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{xy \cos(x^2) \cos(y^2)} \right)$$

y

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{xy \cos(x^2) \cos(y^2)} \right).$$

Por tanto el radio espectral es arbitrariamente grande.

En la Figura 3.5 se muestra la idea de este ejemplo en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. En

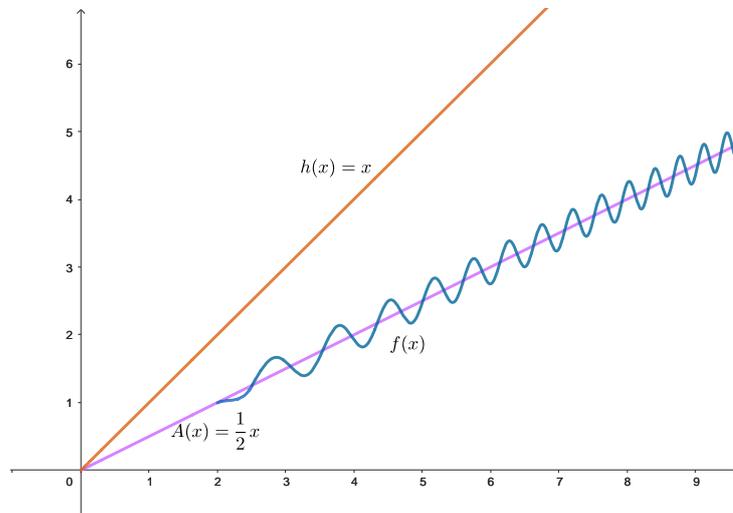


Figura 3.5: El mapa f tiene dinámica de atracción global, se encuentra a menos de $1/2$ de A y su derivada no está acotada.

este sentido una observación interesante sería considerar \mathbb{C}^2 donde en cada coordenada representamos λ_1, λ_2 y el mapa $\Lambda_F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ tal que $(x, y) \xrightarrow{\Lambda_F} (\lambda_1(x, y), \lambda_2(x, y))$. En el ejemplo anterior vimos que $\Lambda_F(\mathbb{R}^2)$ es un conjunto no acotado, además para esta familia se tiene que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ tal que $\Re(\lambda_1) \geq 1/2$.

Si $\Lambda_F(\mathbb{R}^2)$ se encuentra en la bola unidad, estamos en el contexto de la hipótesis del problema de LaSalle. Una pregunta interesante que planteamos entonces es la siguiente:

¿Qué conjunto $K \subset \mathbb{C}^2$ cumple que hay un mapa F con dinámica de atracción global tal que $\Lambda_F(\mathbb{R}^2) = K$?

3.2.3. Conjetura de Rus, condición Fuerte de LaSalle.

En el contraejemplo de Szlenk desarrollado en el Ejemplo 3.8, vimos entre otras cosas que existe un punto q tal que $\rho(J_{F^2}(q)) > 1$. Por tanto la condición sobre el radio espectral menor que 1 no se mantiene para los iterados del mapa. Por otro lado, hay dos familias de ejemplos muy interesantes que además de tener respuesta afirmativa al problema de LaSalle, también cumplen esta condición para cualquier iterado del mapa.

Uno de ellos es la familia de mapas triangulares $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $F(x_1, x_2, \dots, x_m) = (f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_m))$ (ver Teorema 3.5). Estos mapas cumplen además que sus iterados siguen siendo mapas triangulares y es inmediato ver que verifican la condición $\rho(J_{F^n}(x)) < 1$ para todo $n > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Otro es la familia de flujos a *tiempo 1*, soluciones de una ecuación diferencial $x' = F(x)$ en el plano donde $J_F(x)$ tiene todos los valores propios con parte real negativa. Como en este caso el Problema de Markus-Yamabe tiene respuesta afirmativa, el campo F es completo, es decir que las soluciones $\varphi(t, x)$ tal que $\varphi(0, x) = x$, están definidas para todo $t > 0$. Definiendo $f(x) = \varphi(1, x)$, por la propiedad del flujo se tiene que $f^n(x) = \varphi(n, x)$. Por el Lema 3.3 se cumple que $\rho(J_f(x)) < 1$ y entonces $\rho(J_{f^n}(x)) < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \mathbb{R}^m$.

A partir de esto al desarrollar esta memoria, nos surgió una pregunta muy natural: ¿será suficiente pedir $\rho(J_{f^n}(x)) < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}^m$ para obtener una dinámica de atracción global? Haciendo una búsqueda bibliográfica encontramos que Rus plantea esta misma pregunta en [40].

Conjetura 3.17 (de Rus. Condición de LaSalle Fuerte). Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un mapa de clase C^1 tal que $f(p) = p$ para algún $p \in \mathbb{R}^m$ y tal que $\rho(J_{f^n}(x)) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$ y todo $n \in \mathbb{N}$. ¿Es p atractor global?

Una estrategia para abordar este problema será la de determinar si los flujos que se obtienen a partir de los contraejemplos del Problema de Markus-Yamabe son o no completos. En el caso que fuera completo, usando el Lema 3.3 y la observación 3.4 los tiempo 1 de estos flujos servirían como contraejemplo a esta conjetura. Sin embargo, si no lo son, no podemos afirmar nada pues no tenemos forma de definir el flujo a tiempo 1 de manera global.

Contraejemplo en dimensión $m \geq 4$.

En [5] Bernat y Llibre presentan un contraejemplo al problema de Markus-Yamabe en dimensión 4. Consideremos la ecuación diferencial en \mathbb{R}^4 dada por

$$x'(t) = Ax(t) + \phi(\sigma(t))b$$

donde $A \in \mathcal{M}_{4 \times 4}$, $b, c \in \mathbb{R}^4$, $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función lineal a trozos tal que $\phi(0) = 0$ y $\sigma(t) = c^t x(t)$. Este tipo de ecuaciones diferenciales se llaman *sistemas de control no lineal*. La función ϕ se llama función de control.

Esquemáticamente la idea del contraejemplo es la siguiente:

1. Se muestra que el sistema con una función de control lineal a trozos específica tiene una órbita periódica.
2. Luego se muestra que esta órbita es localmente estable.
3. Por último se perturba el sistema para que sea de clase C^1 , mantenga la propiedad de que los valores propios del Jacobiano tengan parte real negativa y persista la órbita periódica.

En concreto, los autores muestran que el campo

$$X_\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, -x_4, x_1 - 2x_4 - k_1\phi(x_4), x_1 + x_3 - x_4 - k_2\phi(x_4)), \quad (3.5)$$

$$\text{donde } k_1 = \frac{9131}{900}, k_2 = \frac{1837}{180} \text{ y } \varphi(x) = \begin{cases} -u & \text{si } x < -u, \\ x & \text{si } |x| \leq u, \\ u & \text{si } x > u, \end{cases} \text{ con } u = \frac{900}{9185}, \text{ tiene}$$

una órbita periódica estable. Luego se considera una función ψ de clase C^r suficientemente cercana a ϕ para que el campo X_ψ también tenga una órbita periódica.

Hasta aquí, no se sabe si el campo $X_\psi(x)$ que cumple las hipótesis del problema de Markus-Yamabe, es completo. Castañeda en [26] logra realizar una nueva perturbación suficientemente cercana al campo X_ψ tal que este nuevo campo está acotado (es decir, existe un compacto K tal que para todo punto $x \in \mathbb{R}^m$, el flujo que a tiempo 0 está en x , a partir de un momento entra en K y no sale más) y por tanto es completo, mantiene una órbita periódica y se encuentra en las hipótesis del Problema de Markus-Yamabe.

Sea $X : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo de clase C^1 , observar que si existe $k > 0$ tal que $\langle X(x), x \rangle < 0$ para todo $\|x\| > k$, entonces X está acotado.

Proposición 3.18. [26] *Existe un campo X de la forma $X = X_\psi - \epsilon Id$ con $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño que cumple que existe $c_0 > 0$ tal que todos los valores propios de $J_X(x)$ tienen parte real $\leq -c_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^4$, está acotado y tiene una órbita periódica estable.*

Teorema 3.19. *La Conjetura de Rus es falsa para $m \geq 4$.*

Demostración. Consideremos el campo X de la Proposición 3.18. Este campo está acotado, por tanto el flujo que determina es completo. Este flujo tiene una órbita periódica que pasa por cierto $x_0 \in \mathbb{R}^4$. Sea $\varphi(x_0, t)$ esta órbita

periódica. Se cumple que para cierto $T > 0$, se tiene $\varphi(x_0, 0) = \varphi(x_0, T)$. Tomemos el flujo a tiempo T , $f = \varphi(\cdot, T) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que determina el campo X . Por el Lema 3.3 y la Observación 3.4 se verifica que $\rho(J_{f^n}(x)) < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in \mathbb{R}^4$, f tiene al menos dos puntos fijos y por tanto el origen no es atractor global. ■

Observación 3.20. *Notar que en la demostración del teorema anterior elegimos un tiempo T para que x_0 sea un punto fijo del flujo a tiempo T . Sin embargo si consideramos diferentes valores de $t_0 \in (0, T)$ y consideramos el flujo a tiempo t_0 obtenemos dinámicas con comportamientos distintos que siguen siendo contraejemplos a la conjetura de Rus.*

En dimensión $m = 3$ estamos investigando si la estrategia de buscar contraejemplos del problema de Markus-Yamabe puede llevar a encontrar contraejemplos de la conjetura de Rus. En [14] se presenta un contraejemplo polinomial del problema de Markus-Yamabe. Sin embargo en estos casos hay soluciones no acotadas. Estamos tratando de determinar si existen o no soluciones con intervalo maximal acotado. En el caso que exista una solución con intervalo maximal acotado, no sirve como contraejemplo de la conjetura.

En el caso de \mathbb{R}^2 podemos dar alguna información parcial si se agrega la hipótesis de que el infinito sea repulsor y que el mapa sea propio. Se dice que F es *propia* si cumple que $\|F(x)\| \rightarrow \infty$ si $\|x\| \rightarrow \infty$. Si $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es continua y propia, considerando la compactificación por un punto entonces $\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ y F se extiende continuamente a \mathbb{S}^2 de forma que $\tilde{F} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ tal que $\tilde{F}(\infty) = \infty$ y $\tilde{F}|_{\mathbb{R}^2} = F$.

Si F tiene un número finito de puntos fijos entonces se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 3.21. *Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ propia, en las hipótesis de la Conjetura 3.17, con un número finito de puntos fijos, tal que además el infinito es repulsor. Entonces el conjunto de puntos periódicos de F es trivial, es decir $\text{Per}(F)$ tiene un solo elemento.*

Para la prueba de este resultado haremos uso del Índice de Lefschetz en \mathbb{S}^2 . Para ello necesitamos que F se extienda a la esfera de forma continua por lo que esta es la razón para pedir que F sea propia.

Supongamos que tenemos una superficie S . Sea $p \in S$, sean U y \tilde{U} dos entornos de p y $f : U \rightarrow \tilde{U}$ un mapa de forma que p es un punto fijo aislado. Podemos definir entonces el índice de Lefschetz de f alrededor de p , como $\text{ind}_L(f, p)$ de la siguiente manera:

Asumiremos que p es el único punto fijo que hay en U , denotamos D_r al disco de centro 0 y radio $r > 0$. Tomamos $h : U \rightarrow D_1$ homeomorfismo que preserva orientación y cumple $h(p) = 0$. Si tomamos r suficientemente chico, tenemos que el mapa $f_h : h \circ f \circ h^{-1}$ está bien definido y tiene a 0 como único punto fijo. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow D_r \setminus \{0\}$ una curva cerrada simple con orientación positiva. Tomamos el mapa $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $g(\theta) = \frac{f_h(\gamma(\theta)) - \gamma(\theta)}{\|f_h(\gamma(\theta)) - \gamma(\theta)\|}$ y definimos el $\text{ind}_L(f, p)$ como el grado de este mapa. Se tiene que si p es punto fijo atractor local o repulsor local, entonces se tiene que $\text{ind}_L(f, p) = 1$. Por otro lado, si p es punto silla entonces $\text{ind}_L(f, p) = -1$. Se define el Índice de Lefschetz de (f, S) como $\text{ind}_L(f, S) = \sum_{x \in \text{fix}(f)} \text{ind}_L(f, x)$. Si la superficie es \mathbb{S}^2 , para cualquier homeomorfismo que tenga un número finito de puntos fijos, por el Teorema de Poincaré-Hopf se tiene que $\text{ind}_L(f, \mathbb{S}^2) = 2$.

Prueba de la Proposición 3.21: Como F es propia, F se extiende continuamente a \mathbb{S}^2 . Sea $\tilde{F} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ la extensión continua, sea p un punto fijo de F , entonces tanto p como ∞ son fijos por \tilde{F} . Supongamos que q es otro punto

periódico de período r , entonces \tilde{F}^r tiene al menos tres puntos fijos. Tanto p como q son atractores locales para F^r pues $\rho(J_{F^r}(p)) < 1$ y $\rho(J_{F^r}(q)) < 1$. Entonces $ind_L(F^r, p) = ind_L(F^r, q) = 1$. Por otro lado ∞ es repulsor y entonces $ind_L(F^r, \infty) = 1$. Ahora, $2 = ind_L(F^r, \mathbb{S}^2) = \sum_{x \in fix(F^r)} ind_L(F^r, x)$. Esto implica que tiene que existir al menos un punto $u \in \mathbb{R}^2$ fijo por F^r con índice -1 , por tanto el punto u no es atractor local, esto implica que $\rho(J_{F^r}(u)) \geq 1$, lo cual es absurdo. ■

Con esto, como el infinito es repulsor, para todo $x \in \mathbb{R}^2$ se cumple que $\omega(x)$ es compacto. Además existe $x_0 \in \mathbb{R}^2$ cuyo ω -límite no es p . Entonces $\omega(x_0)$ es un conjunto compacto invariante que no tiene puntos periódicos. Nos queda por determinar si al considerar la hipótesis fuerte de LaSalle, se puede describir de mejor manera este conjunto. Esto quedará para intentar resolver en trabajos futuros.

3.3. Caminos a seguir

A modo de cierre del capítulo queda entonces por determinar si el problema de Rus es verdadero en dimensión $m = 2, 3$.

- En dimensión $m = 3$ podría ser posible encontrar un contraejemplo de la siguiente forma: consideramos los campos vectoriales que son contraejemplo del problema de Markus-Yamabe. Si uno de estos campos es completo, se puede definir el tiempo 1 del flujo. Este verifica la hipótesis del problema de Rus y por tanto es un contraejemplo. Hasta ahora, de los contraejemplos que hemos analizado no pudimos determinar si eran completos o no.
- En dimensión 2 en el caso de que haya un contraejemplo, la estrategia anterior no es válida dado que en este caso el problema de

Markus-Yamabe tiene respuesta afirmativa. Aquí pueden haber más herramientas para atacar el problema.

Apéndice A

Propiedad del sombreado para mapas lineales hiperbólicos.

Sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, podemos pensar que A es un mapa lineal de $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ considerando $x \mapsto Ax$. En estas líneas desarrollaremos un aspecto fundamental que hemos usado en el Capítulo 3. Veremos que si $\rho(A) < 1$ entonces existe una norma matricial $\|\cdot\|$ tal que $\|A\| < 1$ y por tanto A tiene dinámica de atracción global.

Proposición A.1. *Sea $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ mapa lineal tal que $\rho(A) < 1$. Entonces A tiene sombreado métrico.*

Observación A.2. *Dada una matriz A , aplicando la forma canónica de Jordan, A es semejante a J tal que $A = P^{-1}JP$, con P matriz invertible. Además $A^n = P^{-1}J^nP$. Se tiene que $\rho(A) = \rho(J)$. Calculando $\|J^n\|$, existe n_0 tal que $\|J^{n_0}\| < 1$. Entonces $\|A^{n_0}\| < 1$.*

Lema A.3. *Sea $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un mapa lineal tal que $\rho(A) < 1$. Existe $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que $\|A^n x\| \leq C \lambda^n \|x\|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^m$, donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídea.*

Demostración. Como $\rho(A) < 1$, existe n_0 tal que $\|A^{n_0}\| < \gamma < 1$. Sea $C_1 = \sup\{\|A^j\| : 0 \leq j < n_0\}$ y $\lambda = \gamma^{1/n_0}$. Tomemos $n = kn_0 + r$, donde $0 \leq r < n_0$. Entonces

$$\|A^n\| \leq \|A^{kn_0}\| \cdot \|A^r\| \leq C_1 \gamma^k \stackrel{(*)}{\leq} \frac{C_1}{\gamma} \lambda^n.$$

Para ver la desigualdad (*) notar que $\frac{\lambda^n}{\gamma} = \frac{\gamma^{k+\frac{r}{n_0}}}{\gamma}$, entonces $\gamma^k \leq \frac{\lambda^n}{\gamma}$ si y sólo si $1 \leq \frac{\gamma^{r/n_0}}{\gamma}$ si y sólo si $\gamma \leq \gamma^{r/n_0}$. Por tanto llamando $C = \frac{C_1}{\gamma}$, se tiene $\|A^n x\| \leq C \lambda^n \|x\| \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$. Con esto $A^n x \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$. ■

Definición A.4. Sea (X, d) espacio métrico se dice que un mapa $f : X \rightarrow X$ es una contracción si existe $0 \leq K < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$ para todo $x, y \in X$.

Veamos como construir una norma en \mathbb{R}^m que depende de A de forma que A sea una contracción.

Lema A.5. Bajo las hipótesis del Lema A.3, existe una norma $\|\cdot\|_1$ y $0 < a < 1$ tal que $\|A\|_1 \leq a < 1$.

Demostración. Por el Lema A.3, existen $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tales que $\|A^n\| \leq C\lambda^n$. Sea n_0 tal que $C\lambda^{n_0} < 1$. Definimos $\|x\|_1 = \sum_{j=0}^{n_0-1} \|A^j x\|$. Existe $k > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq k\|x\|$. Entonces

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \sum_{j=1}^{n_0} \|A^j x\| \\ &= \|x\|_1 + \|A^{n_0} x\| - \|x\| \\ &\leq \|x\|_1 + (C\lambda^{n_0} - 1)\|x\| \\ &\leq \underbrace{\left(1 + \frac{C\lambda^{n_0} - 1}{k}\right)}_a \|x\|_1 \end{aligned}$$

Por tanto definiendo $\|A\|_1 = \sup\{\|Ax\|_1 : \|x\|_1 = 1\}$, se tiene $\|A\|_1 \leq a < 1$. ■

Observación A.6. Con esta norma se cumple que $\|A^n x\|_1 \leq a^n \|x\|_1 \rightarrow 0$, si $n \rightarrow +\infty$. Además $\|Ax - Ay\|_1 \leq a\|x - y\|$ y A es una contracción.

Recordar que dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes si existen $\alpha, \beta > 0$ tales que $\beta\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \alpha\|x\|_2$. Veamos que si f tiene sombreado métrico con una norma, entonces tiene sombreado métrico con cualquier norma equivalente:

Supongamos que f tiene sombreado con la norma $\|\cdot\|_2$. Dado $\epsilon > 0$, consideramos $\epsilon' = \epsilon/\alpha$. Para este ϵ' , tomamos $\delta' > 0$ del sombreado de f con la norma $\|\cdot\|_2$ correspondiente a ϵ' . Sea $\delta = \beta\delta'$, tomamos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una δ -pseudo órbita con la norma $\|\cdot\|_1$, es decir, $\|x_{n+1} - f(x_n)\|_1 < \delta$. Entonces $\beta\|x_{n+1} - f(x_n)\|_2 \leq \|x_{n+1} - f(x_n)\|_1 < \delta$ y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una δ -pseudo órbita con la norma $\|\cdot\|_2$. Por tanto existe x tal que $\|f^n(x) - x_n\|_2 < \epsilon' = \epsilon/\alpha$, entonces $\|f^n(x) - x_n\|_1 < \epsilon$ y f tiene sombreado con $\|\cdot\|_1$.

Veamos ahora que una contracción tiene sombreado métrico y por tanto nuestro mapa lineal también. Enunciamos el resultado en el contexto general.

Lema A.7. Sea X un espacio normado completo, $f : X \rightarrow X$ una contracción, entonces f tiene sombreado métrico. Más concretamente, si $0 < k < 1$ es una constante de contracción, dado $\epsilon > 0$, el δ de la propiedad del sombreado se puede tomar como $\delta = (1 - k)\epsilon$.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = (1 - k)\epsilon$, donde $0 < k < 1$ es la constante de contracción. Dadas dos sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, definimos

$$D(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup\{\|x_n - y_n\| : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una δ -pseudo órbita, denotamos

$$X_\epsilon^{\{x_n\}} := \{\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}} : D(\{x_n\}, \{y_n\}) \leq \epsilon\}.$$

Notar que $(X_\epsilon^{\{x_n\}}, D)$ es un espacio métrico completo. Por último definimos $F(\{y_n\})_i = f(y_{i-1})$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Veamos que si $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in X_\epsilon^{\{x_n\}}$, se tiene que $F(\{y_n\}) \in X_\epsilon^{\{x_n\}}$:

$$\begin{aligned}
D(F(\{y_n\}), \{x_n\}) &= D(\{f(y_{n-1})\}, \{x_n\}) \\
&\leq D(\{f(y_{n-1})\}, \{f(x_{n-1})\}) + D(\{f(x_{n-1})\}, \{x_n\}) \\
&\leq k\epsilon + \delta \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

Ahora notemos que F es una contracción:

$$\begin{aligned}
D(F(\{y_n\}), F(\{z_n\})) &= D(\{f(y_{n-1})\}, \{f(z_{n-1})\}) \\
&\leq kD(\{y_{n-1}\}, \{z_{n-1}\}) \\
&= kD(\{y_n\}, \{z_n\})
\end{aligned}$$

Por tanto existe $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que $F(\{y_n\})_i = f(y_{i-1}) = y_i$, con lo que $f(y_{n-1}) = y_n$, donde $y_n = f^n(y_0)$.

Concluimos que dada una δ -pseudo órbita $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, existe una órbita $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que $\|y_n - x_n\| < \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. ■

Prueba de la Proposición A.1: Tomando $\|\cdot\|_1$ del Lema A.5, se tiene que existe $0 \leq a < 1$ tal que $\|A\|_1 = a$. Dado $\epsilon > 0$, considerando $\delta = (1 - a)\epsilon$ del Lema A.7, entonces toda δ -pseudo órbita de A es ϵ -sombreada y A tiene sombreado métrico. ■

A.1. Sombreado topológico a futuro para mapas en espacios localmente compactos.

En el Capítulo 3 vimos que un mapa de \mathbb{R}^m con un atractor global trivial tiene la propiedad del sombreado topológico (ver Teorema 3.12), en realidad probamos el sombreado topológico a futuro.

En la literatura, la propiedad del sombreado para mapas no invertibles es considerada con órbitas y pseudo órbitas indexadas en los naturales, ver por ejemplo [8, 39]. Este caso lo llamaremos *propiedad del sombreado topológico a futuro*. En el caso en que X es un espacio métrico localmente compacto, ambas definiciones son equivalentes.

Lema A.8. *Sea X un espacio métrico localmente compacto y $f : X \rightarrow X$ un mapa. Se cumple que f tiene la propiedad del sombreado si y sólo si f tiene la propiedad del sombreado topológico a futuro.*

Demostración. Asumamos que el mapa f tiene la propiedad del sombreado topológico a futuro. Dado $\epsilon \in C^+(X)$. Tomemos $\delta \in C^+(X)$ de la propiedad del sombreado topológico a futuro y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una δ -pseudo órbita. Para cada $j \geq 0$ existe y_{-j} tal que la órbita futura de y_{-j} ϵ -sombrea a futuro a $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ para $n \geq -j$. Notar que para cada $j \geq 0$ se cumple que $\{f^{k-j}(y_{-k})\}_{k \geq j} \subset \overline{B(x_{-j}, \epsilon(x_{-j}))}$. Para $j = 0$, tomamos una subsucesión convergiendo a algún punto \bar{y}_0 (aquí usamos que X es localmente compacto). Para $j = 1$ tomamos una subsucesión de $\{f^{k-1}(y_{-k})\}$ asociada a los términos de la subsucesión anterior que convergía a \bar{y}_0 y nombremos \bar{y}_{-1} al punto límite. Por continuidad se cumple que $f(\bar{y}_{-1}) = \bar{y}_0$. Procediendo inductivamente obtenemos un punto \bar{y}_{-j} en cada $\overline{B(x_{-j}, \epsilon(x_{-j}))}$ tal que $f(\bar{y}_{-j}) = \bar{y}_{-j+1}$. Por tanto la sucesión $\{\bar{y}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que $f(\bar{y}_n) = \bar{y}_{n+1}$ para $n < 0$; $f^n(\bar{y}_0)$ para $n \geq 0$ ϵ -sombrea esta δ -pseudo órbita.

El recíproco es inmediato dado que si una δ -pseudo órbita es ϵ -sombreada, entonces es ϵ -sombreada a futuro. ■

A.2. Sombreado topológico para homotecias.

En esta parte veremos qué tipo de transformaciones lineales hiperbólicas tienen sombreado topológico. Primero mostraremos que una homotecia en \mathbb{R}^m tiene sombreado topológico y luego que una transformación lineal hiperbólica con valores propios 2 y 1/2 en el plano no tiene sombreado topológico. Esto sienta las bases del Lema B.5 donde se muestra que si hay una órbita que no acumula ni a pasado ni a futuro, entonces esto es una obstrucción para el sombreado topológico.

En lo que sigue mostraremos que el mapa $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $f(x) = 2x$ tiene la propiedad del sombreado topológico.

Proposición A.9. *Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $f(x) = 2x$. Entonces f tiene sombreado topológico.*

Demostración. Contemos inicialmente la idea del sombreado topológico sin ser muy formales. Vamos a dividir la prueba en dos etapas.

Lo que vamos a hacer en una primera etapa es construir un $\delta \in C(\mathbb{R}^2)$ para que las δ -pseudo órbitas tengan sólo dos tipos de comportamiento. Las llamaremos de **Tipo a** y de **Tipo b**. Las de **Tipo a** se encontrarán en una bola centrada en el origen para todo $n \in \mathbb{Z}$. Las de **Tipo b** serán aquellas que a futuro tienden a infinito.

En la segunda etapa ajustaremos el δ para que, además de que las δ -pseudo órbitas sean de estos dos tipos, sean sombreadas a futuro. Por último aplicaremos el Lema A.8 para obtener el sombreado.

Pasemos entonces a probar el sombreado topológico: Dado $\epsilon \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$.
 Sea $r_0 = \epsilon(0)$, llamemos

$$m = \min_{x \in \bar{B}(0, r_0)} \{\epsilon(x)\}$$

Como dijimos en el párrafo anterior, dividiremos la prueba en dos etapas.

Primera Etapa: Vamos a tomar $\delta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$\delta(x) < \begin{cases} m & \text{si } x \in \bar{B}(0, r_0) \\ \frac{\|x\|}{4} & \text{si } x \in \bar{B}(0, r_0)^c \end{cases}.$$

Con estas restricciones se puede considerar sin problemas δ continua, por ejemplo, si $m < \|(r_0, 0)\|$ consideramos δ constante en $\bar{B}(0, r_0)$ y la extendemos de forma continua al complemento hasta que deje de ser menor que los valores que toma en el complemento de la bola. Para este δ , afirmamos que las δ -pseudo órbitas tendrán sólo dos tipos de comportamientos. Llamaremos de **Tipo a** a las δ -pseudo órbitas que se encuentran contenidas en $\bar{B}(0, r_0)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, y de **Tipo b** a las δ -pseudo órbitas que tienden a infinito. Probemos esto; si una δ -pseudo órbita esta siempre dentro de la bola $\bar{B}(0, r_0)$ será de **Tipo a**, en caso contrario, es decir, si algún término de la δ -pseudo órbita esta fuera de la bola, será del otro tipo.

Afirmamos que existen estos tipos δ -pseudo órbitas:

Tipo a. Efectivamente el conjunto de este tipo de δ -pseudo órbitas es no vacío. Intuitivamente, como δ en 0 es positivo, si tomamos puntos muy cercanos a 0, un siguiente término de la pseudo órbita puede volver a estar cerca de 0. Siendo un poco más formales, como $\delta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, $\delta(0) = k_0 > 0$. Si tomamos x_0 suficientemente cercano a 0, se cumple que $\|f(x_0)\| < \delta(f(x_0))$, entonces $B(f(x_0), \delta(f(x_0)))$ contiene a x_0 . Podemos tomar $x_1 = x_0$. De esta forma repitiendo el argumento

podemos considerar $x_n = x_0$ para todo $n > 0$, para el pasado podemos considerar $f^n(x_0)$, si $n < 0$ y con esto $x_n \in \bar{B}(0, \epsilon(0))$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Tipo b. Efectivamente si tomamos una δ -pseudo órbita que no es del **Tipo a**, existe un término de la δ -pseudo órbita que no esta en la bola $\bar{B}(0, r_0)$. Nombramos $x_0 \in \bar{B}(0, r_0)^c$ como primer término de la δ -pseudo órbita. Mostraremos que este tipo de δ -pseudo órbitas cumplen que para $n > 0$, $(\frac{3}{2})^n \|x_0\| < \|x_n\|$ y esto implica que $\|x_n\| \rightarrow +\infty$ si $n \rightarrow +\infty$.

Veamos esto: Como $\delta(x) < \frac{\|x\|}{4}$ en $x \in \bar{B}(0, r_0)^c$ y $f(x) = 2x$,

$$x_1 \in B(f(x_0), \delta(f(x_0))) \subset B\left(f(x_0), \frac{\|f(x_0)\|}{4}\right) = B\left(2x_0, \frac{\|x_0\|}{2}\right)$$

Por lo que $\frac{3}{2}\|x_0\| < \|x_1\|$.

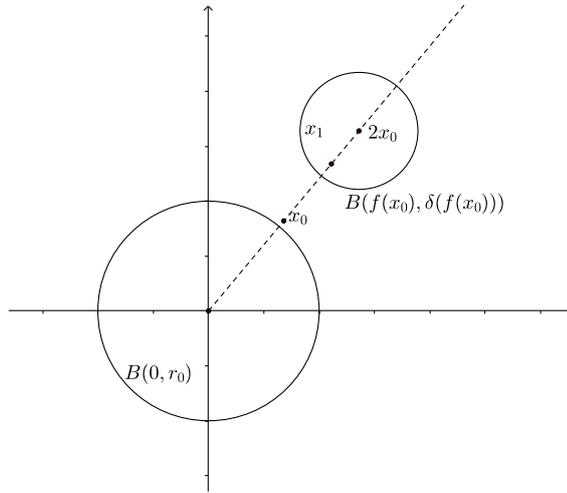


Figura A.1: En $\bar{B}(0, r_0)^c$, $\delta(x) < \|x\|/4$

En particular $x_1 \in \bar{B}(0, r_0)^c$. Plantenado lo mismo para $x_n \in \bar{B}(0, r_0)^c$, llegamos a que $\frac{3}{2}\|x_n\| < \|x_{n+1}\|$ y $x_{n+1} \in \bar{B}(0, r_0)^c$. Por último, con estas desigualdades obtenemos que $(\frac{3}{2})^n \|x_0\| < \|x_n\|$ y entonces $\|x_n\| \rightarrow +\infty$.

Segunda Etapa: Ajustaremos el δ definido en \mathbb{R}^2 para que los dos tipos

de δ -pseudo órbitas construídas en la etapa anterior sean ϵ sombreadas a futuro para el ϵ dado inicialmente:

Sombreado de las δ -pseudo órbitas de **Tipo a**: Este tipo de δ -pseudo órbitas cumplen entonces que $d(0, x_n) \leq r_0$ y por tanto son sombreadas por el 0.

Sombreado de las δ -pseudo órbitas de **Tipo b**: Intentaremos deducir las condiciones adicionales que necesitamos para ϵ -sombrear este tipo de δ -pseudo órbitas. Primero hallemos explícitamente los términos a futuro de una δ -pseudo órbita de este tipo: Sea x_0 un término de una δ -pseudo órbita de este tipo, como $d(f(x_0), x_1) < \delta(f(x_0))$, se tiene $x_1 \in B(f(x_0), \delta(f(x_0)))$, con lo que

$$x_1 = 2x_0 + r_1, \quad \text{donde } \|r_1\| < \delta(f(x_0)).$$

Para el siguiente término vemos que

$$f(x_1) = 2^2x_0 + 2r_1 \text{ y } x_2 \in B(f(x_1), \delta(f(x_1))),$$

con lo que

$$x_2 = 2^2x_0 + 2r_1 + r_2 \quad \text{donde } \|r_2\| < \delta(f(x_1))$$

Siguiendo con este razonamiento obtenemos una expresión explícita para x_n ,

$$x_n = 2^n x_0 + 2^{n-1} r_1 + \dots + 2r_{n-1} + r_n \quad \text{donde } \|r_i\| < \delta(f(x_{i-1})).$$

Para ver que se puede sombrear a futuro estas δ -pseudo órbitas, traeremos los términos a tiempo 0 dividiendo entre 2^n cada término x_n . La sucesión obtenida $\{\frac{x_n}{2^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy: Sea $n > m$, entonces

$$\left\| \frac{x_n}{2^n} - \frac{x_m}{2^m} \right\| = \left\| \sum_{i=m+1}^n \frac{r_i}{2^i} \right\| \leq \sum_{i=m+1}^n \frac{\|r_i\|}{2^i} \leq \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\|r_i\|}{2^i}$$

Por tanto, si δ esta acotada en \mathbb{R}^2 , $\|r_i\|$ también lo estará y lo que nos queda es la cola de una serie convergente. Con esto para un m suficientemente grande, $\left\| \frac{x_n}{2^n} - \frac{x_m}{2^m} \right\|$ es arbitrariamente pequeño.

Tomamos a continuación $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{2^n}$, y lo reescribimos como

$$y = x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_i}{2^i}.$$

Mostremos que es un punto que ϵ -sombrea la δ -pseudo órbita $\{x_n\}$ a futuro. Para ello discutiremos nuevamente dos casos.

- i.* El primer término de la δ -pseudo órbita x_0 se encuentra en $\bar{B}(0, r_0)$
- ii.* El primer término de la δ -pseudo órbita x_0 se encuentra en $\bar{B}(0, r_0)^c$.

En el caso *i.* la δ -pseudo órbita se encontrará dentro de la bola por una cantidad finita de tiempos. Entonces

$$\begin{aligned} d(f^n(y), x_n) &= \left\| \left(2^n x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_i}{2^{i-n}} \right) - \left(2^n x_0 + \sum_{j=1}^n \frac{r_j}{2^{j-n}} \right) \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{r_j}{2^{j-n}} \right\| \\ &\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\|r_j\|}{2^{j-n}} \\ &< \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\delta(f(x_{j-1}))}{2^{j-n}} \end{aligned} \tag{A.1}$$

Buscamos que $d(f^n(y), x_n) \leq \epsilon(x_n)$ tanto para n tal que $x_n \in \bar{B}(0, r_0)$ como para n tal que $x_n \in \bar{B}(0, r_0)^c$. Definimos $j_0 = \min\{i \in \mathbb{N} : x_i \in \bar{B}(0, r_0)^c\}$.

Para $0 \leq n < j_0$, se tiene $x_n \in \bar{B}(0, r_0)$, y entonces $\epsilon(x_n) \geq m$. Pidiendo que $\delta(x) < m$, si retomamos la desigualdad (A.1)

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\delta(f(x_{j-1}))}{2^{j-n}} \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{m}{2^{j-n}} \leq m \leq \epsilon(x_n)$$

con lo que $d(f^n(y), x_n) \leq \epsilon(x_n)$.

Para $n \geq j_0$, si pedimos que δ sea decreciente en norma, es decir $\delta(x) > \delta(y)$ para $\|x\| < \|y\|$, tenemos que $\delta(f(x_{j-1})) < \delta(x_{j-1})$ y además como $\|x_n\|$ es creciente para $n > j_0$, tenemos también que $\delta(x_n) > \delta(x_m)$ si $n < m$.

Entonces retomando la desigualdad (A.1)

$$\begin{aligned} \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\delta(f(x_{j-1}))}{2^{j-n}} &\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\delta(x_{j-1})}{2^{j-n}} \\ &\leq \delta(x_n) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \right) \\ &\leq \epsilon(x_n) \end{aligned}$$

con lo que también logramos que $d(f^n(y), x_n) \leq \epsilon(x_n)$.

En el caso *ii.*, como el primer término de la sucesión $x_0 \in \bar{B}(0, r_0)^c$ para todo $n > 0$, lo visto en la última etapa del paso anterior sirve para justificar el sombreado a futuro. De esta forma, hemos visto que también las δ -pseudo órbitas del **Tipo b** son sombreadas a futuro.

Hasta ahora el δ considerado cumple que los dos tipos de δ -pseudo órbitas son sombreadas a futuro, necesitamos además que sea continuo.

Tomando

$$q_0 = \min_{\|x\|=r_0} \left\{ \frac{\|x\|}{4}, m, \epsilon(x) \right\},$$

reescribimos δ como

$$\delta(x) < \begin{cases} q_0 & \text{si } x \in \bar{B}(0, r_0) \\ \min\left\{ \frac{\|x\|}{4}, \epsilon(x), q_0 \right\} & \text{si } x \in \bar{B}(0, r_0)^c \end{cases}$$

Entonces con estas restricciones δ se puede tomar continuo en \mathbb{R}^2 y positivo; por ejemplo, se puede tomar $\delta = q_0/2$ en la bola y luego extenderlo

al complemento continuamente respetando simplemente las condiciones dadas anteriormente.

Hasta aquí ambos tipos de δ -pseudo órbitas son sombreadas a futuro; aplicando el Lema A.8 garantizamos la propiedad del sombreado topológico.

Por tanto, para el ϵ dado inicialmente, hemos construido $\delta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ tal que toda δ -pseudo órbita es ϵ -sombreada por un punto y . ■

A.3. Lineal con valores propios 2 y 1/2.

Veamos ahora que el otro tipo de lineal hiperbólico, con una dirección que expande y otra dirección que contrae no tiene sombreado topológico, aunque tenga la propiedad del sombreado métrico.

Proposición A.10. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (2x, \frac{1}{2}y)$. Entonces f no tiene sombreado topológico.*

Demostración. Como la contracción es uniforme en la dirección del eje \vec{y} , si tomamos ϵ que decrezca más rápido que $1/2^n$, las únicas δ -pseudo órbitas ϵ -sombreadas van a ser sólomente órbitas verdaderas.

Denotemos $X = (x, y)$. Tomemos $\epsilon \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\epsilon(X) < 2^{-\|X\|}$, si $\|X\| \geq 1$. Fijemos $X_0 = (x_0, 0)$, dado $\delta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ tomemos $\tilde{X}_0 = (x_0, y_0)$, $y_0 > 0$, tal que $d(\tilde{X}_0, X_0) < \delta(X_0)$. De esta forma construimos la δ -pseudo órbita $\{X_n\}$ tal que

$$X_n = \begin{cases} f^n(X_0) & \text{si } n \geq 0 \\ f^n(\tilde{X}_0) & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Supongamos que $Y = (x, y)$ es un punto que sombrea la δ -pseudo órbita,

por tanto sombrea la δ -pseudo órbita a futuro, esto es:

$$d(X_n, f^n(Y)) < \epsilon(X_n), \quad \forall n > 0$$

Como $X_n = 2^n X_0$, $d(X_n, f^n(Y)) = d(2^n X_0, f^n(Y)) = \sup\{2^n|x_0 - x|, \frac{1}{2^n}|y|\}$. Discutamos el valor de esta distancia. Si $x \neq x_0$, existe n_0 tal que si $n > n_0$, $d(X_n, f^n(Y)) = 2^n|x - x_0|$.

Por otro lado, como habíamos tomado $\epsilon(X) < 2^{-\|X\|}$, $\epsilon(2^n X_0) < \frac{1}{2^{2^n\|x_0\|}}$ se tiene que $2^n|x - x_0| < \frac{1}{2^{2^n\|x_0\|}}$ para todo $n > n_0$, y esto se cumple sólo si $x = x_0$. Entonces $x = x_0$ y $d(X_n, f^n(Y)) = \frac{1}{2^n}|y|$, con esto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n}|y| &= d(X_n, f^n(Y)) \\ &< \epsilon(2^n X_0) < \frac{1}{2^{2^n\|X_0\|}}, \quad \forall n > 0 \end{aligned}$$

Con lo que $|y| < \frac{2^n}{2^{2^n\|X_0\|}} \quad \forall n > 0$. Nuevamente esto se cumple solamente si $y = 0$.

Concluimos que la única órbita que sombrea esta δ -pseudo órbita a futuro es la órbita de X_0 .

Para el pasado, $f^n(X_0) \rightarrow 0$, mientras que X_n es tal que $\|X_n\| \rightarrow \infty$ y se tiene que X_0 no sombrea esta δ -pseudo órbita, por tanto encontramos una δ -pseudo órbita que no es ϵ -sombreada. ■

Con esto, en el caso del ejemplo anterior, donde hay direcciones de expansión y contracción uniforme no se hay sombreado topológico. Esto muestra un comportamiento totalmente distinto a lo que sucede con la propiedad del sombreado métrico en este tipo de homeomorfismos.

Como la propiedad del sombreado topológico es una propiedad dinámica tenemos que cualquier conjugado a una homotecia tiene sombreado topológico. Por tanto, los dos ejemplos vistos nos generan por un lado una

familia de homeomorfismos que tienen sombreado topológico, los conjugados a una homotecia en \mathbb{R}^m y no ejemplos de homeos con sombreado topológico, los lineales hiperbólicos con al menos un valor propio de módulo mayor que 1 y otro valor de módulo menor que 1.

En la siguiente sección mostraremos que en el plano hay una sola clase de conjugación de homeos con sombreado topológico si además pedimos expansividad topológica.

Apéndice B

Anosov topológicos en espacios no compactos.

El resultado principal de este apéndice es la clasificación de los homeomorfismos con sombreado y expansividad en el plano [17, 18], que dice que hay una sola clase de conjugación, son todos homotecias u homotecias reversas (si preservan o revierten orientación respectivamente).

Definición B.1. Sea $f : X \rightarrow X$ homeomorfismo. Se dice que f es expansivo topológico si existe $\epsilon \in C^+(X)$ tal que para todo $x, y \in X$, $x \neq y$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $d(f^k(x), f^k(y)) > \epsilon(f^k(x))$.

Se dice que $f : X \rightarrow X$ es Anosov topológico si f es expansivo topológico y tiene la propiedad del sombreado topológico.

Para esto, presentaremos un desarrollo cronológico de lo hecho. En una primera instancia se estudia el conjunto no errante, concluiremos que si $\Omega(f) = \{z_0\}$, entonces el homeomorfismo es conjugado a una homotecia. Luego estudiaremos los conjuntos α y ω -límites, mostraremos que si $\alpha(x) = \emptyset$, entonces $\omega(x)$ es una órbita periódica. Otro resultado interesante

en el camino hacia la clasificación de los homeomorfismos de Anosov topológicos es que en el plano la cuenca de atracción de un punto fijo atractor es no acotada, aquí haremos uso de un resultado de Lewowicz [36] sobre la no existencia de homeomorfismos expansivos en la esfera. Por último, atacaremos el problema de la clasificación haciendo uso de un resultado importante sobre el conjunto no errante. Los homeomorfismos con sombreado y expansividad topológica tienen descomposición espectral en el sentido de Smale [20]. A partir de esto se muestran ciertos resultados sobre la topología de las piezas básicas y se concluye que la única superficie de genero cero y tipo finito tiene que ser el plano y el homeomorfismo es linealizable.

Veamos que una traslación es expansiva topológica pero no tiene la propiedad del sombreado topológico.

Ejemplo B.2 (Traslación en \mathbb{R}^m). *Sea $v \in \mathbb{R}^m$ tal que $v \neq 0$. Consideramos $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $T(x) = x + v$. Tomemos $\alpha \in C^+(\mathbb{R}^m)$ tal que $\alpha(x) \rightarrow 0$ si $\|x\| \rightarrow \infty$. Notar $\|T^n(x)\| \rightarrow \infty$ si $n \rightarrow \infty$ para cualquier $x \in \mathbb{R}^m$. Fijamos $x, y \in \mathbb{R}^m$, como $d(T^n(x), T^n(y)) = d(x, y)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ entonces existe $k > 0$ tal que $d(T^k(x), T^k(y)) > \alpha(T^k(x))$. Esto implica que T es α -expansiva. Que T no tiene sombreado se debe a que si tomamos $\epsilon \in C^+(\mathbb{R}^m)$ tal que $\epsilon = \alpha$ de la expansividad, las pseudo-órbitas con un solo salto no son sombreadas por ninguna órbita. En efecto, dado cualquier $\delta \in C^+(\mathbb{R}^m)$, tomemos $x \neq y$ tal que $d(x, y) < \delta(x)$ y la δ -pseudo órbita $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que $x_n = f^n(x)$ para $n \geq 0$ y $x_n = f^n(y)$ para $n < 0$. Por el $\epsilon \in C^+(\mathbb{R}^m)$ escogido, la única órbita que acompaña a futuro esta δ -pseudo órbita es la de x , sin embargo a pasado la única órbita que acompaña es la de y , por lo que esta δ -pseudo órbita no es ϵ -sombreada.*

Como tanto la expansividad y sombreados topológicos son invariantes por conjugaciones, se tiene que todo homeomorfismo conjugado a una

homotecia es Anosov Topológico. Por el Teorema de Kerékjató (ver Teorema B.12) todo homeomorfismo de \mathbb{R}^m , $m \neq 4, 5$ que preserva orientación con un punto atractor global asintóticamente estable es conjugado a una homotecia. Por tanto es Anosov Topológico. Ahora, ¿es esta la única clase de conjugación? En esta línea, en [17] se prueba que en el plano la clase de conjugación de los homeomorfismos de Anosov topológicos es el de las homotecias u homotecias reversas, por tanto hay una única clase de conjugación. En [18] se logra extender este resultado a superficies no compactas de genero cero y tipo finito, por medio del uso de la descomposición espectral y una clasificación de los atractores expansivos en el plano.

Estos dos trabajos pueden considerarse el preámbulo de lo que se desarrolló en el Capítulo 2.

Presentamos aquí algunos de los resultados más interesantes sobre homeomorfismos con expansividad y sombreado.

B.1. Órbitas que no acumulan a futuro o a pasado.

A partir del Ejemplo B.2, donde se muestra que la traslación no tiene sombreado, se pueden extraer ciertas propiedades de los homeomorfismos con sombreado topológico, por ejemplo los puntos con α o ω -límites vacíos son particularmente importantes, veremos la razón en lo que sigue.

Lema B.3. *Sea (X, d) un espacio métrico no compacto y $f : X \rightarrow X$ un homeomorfismo con sombreado topológico. Si $\omega(x) = \emptyset$ para algún $x \in X$, existe $\epsilon \in C^+(X)$ que cumple que si $y \neq x$, entonces existe $i > 0$ tal que $d(f^i(x), f^i(y)) > \epsilon(f^i(x))$. En particular, si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una pseudo-órbita tal que para algún n_0 ,*

$x_n = f^n(x)$ para todo $n \geq n_0$, entonces la única órbita posible que ϵ -sombrea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Demostración. Sea x tal que $\omega(x) = \emptyset$, entonces existe una familia de entornos abiertos $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dos a dos disjuntos tales que cada U_i es un entorno de $f^i(x)$. Vamos a definir $\epsilon_i > 0$ adecuadamente de forma tal que $\epsilon_i = \epsilon(f^i(x))$ y luego extenderemos la función ϵ continuamente a X . Comencemos definiendo ϵ_0 .

Para U_0 , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, 1/n_0) \subset U_0$. Definimos $\epsilon_0 = 1/n_0$. Sea $n_1 > n_0$ tal que $f(B(x, 1/n_1)) \subset U_1$. Llamamos $\tilde{U}_1 = f(B(x, 1/n_1))$. Definimos $\epsilon_1 > 0$ de forma que $B(f(x), \epsilon_1) \subsetneq \tilde{U}_1$. Sea $n_2 > n_1$ tal que $f(B(x, 1/n_2)) \subset B(f(x), \epsilon_1)$ y $f^2(B(x, 1/n_2)) \subset U_2$. Llamamos $\tilde{U}_2 = f^2(B(x, 1/n_2))$. Tomamos $\epsilon_2 > 0$ tal que $B(f^2(x), \epsilon_2) \subsetneq \tilde{U}_2$.

Procedemos ahora de forma inductiva: Habiendo definido $\epsilon_i > 0$ tal que $B(f^i(x), \epsilon_i) \subsetneq \tilde{U}_i = f^i(B(x, 1/n_i)) \subset U_i$. Entonces tomamos $n_{i+1} > n_i$ tal que $f^i(B(x, 1/n_{i+1})) \subset B(f^i(x), \epsilon_i)$ y $\tilde{U}_{n_{i+1}} = f^{i+1}(B(x, 1/n_{i+1})) \subset U_{i+1}$. Definimos entonces $\epsilon_{i+1} > 0$ de forma que $B(f^{i+1}(x), \epsilon_{i+1}) \subsetneq \tilde{U}_{n_{i+1}}$. De esta forma logramos definir ϵ_i para todo $i \in \mathbb{N}$.

Sea $y \in B(x, \epsilon_0) \setminus \{x\}$, existe algún $n_i \in \mathbb{N}$ definido anteriormente tal que $y \notin B(x, 1/n_i)$. Entonces $f^i(y) \notin f^i(B(x, 1/n_i))$, con lo que $f^i(y) \notin B(f^i(x), \epsilon_i)$ y $d(f^i(y), f^i(x)) \geq \epsilon_i$. Por último podemos considerar $\epsilon \in C^+(X)$ tal que $\epsilon(f^i(x)) = \epsilon_i$ ya que $\omega(x) = \emptyset$ y obtenemos la primera parte de la tesis.

Para probar lo que resta, sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una pseudo-órbita tal que $x_n = f^n(x)$ para todo $n \geq 0$. Tomando el $\epsilon \in C^+(X)$ de arriba, si una órbita $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sombrea a $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, se cumple en particular para $n = 0$ que $d(x, y) < \epsilon(x)$. Por lo visto anteriormente se debe cumplir $y = x$, pues en caso contrario existe i tal que $d(f^i(x), f^i(y)) > \epsilon(f^i(x))$. ■

El Lema anterior se puede generalizar a cuando la órbita es no acotada.

Lema B.4. *Sea $f : X \rightarrow X$ homeomorfismo. Si existe $x \in X$ y una sucesión de enteros positivos $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $f^{n_k}(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$ entonces existe $\epsilon \in C^+(X)$ que verifica: si $y \neq x$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^{n_k}(x), f^{n_k}(y)) \geq \epsilon(f^{n_k}(x))$.*

Omitiremos la prueba por ser similar a la anterior.

Lema B.5. *Sea $f : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo con sombreado topológico. Si $\alpha(x) = \emptyset$, entonces $\omega(x) \neq \emptyset$.*

Demostración. Si $\alpha(x) = \omega(x) = \emptyset$, por el Lema B.3 existe $\epsilon \in C^+(X)$ tal que si $y \neq x$, entonces existen $n, m > 0$ tales que $d(f^n(x), f^n(y)) > \epsilon(f^n(x))$ y $d(f^{-m}(x), f^{-m}(y)) > \epsilon(f^{-m}(x))$. Tomemos $\delta \in C^+(X)$ del sombreado correspondiente a ϵ y consideremos la siguiente δ -pseudo órbita $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$: $x_n = f^n(x)$ para todo $n < 0$; $x_n = f^n(y)$ para todo $n \geq 0$, donde $y \in B(x, \delta(x))$. Entonces la órbita de x debe ϵ -sombrear esta δ -pseudo órbita, pero esto no se cumple por la elección de $\epsilon \in C^+(X)$. ■

Tenemos entonces el siguiente corolario

Corolario B.6. *Si $f : X \rightarrow X$ homeomorfismo con sombreado topológico. Para cualquier $x \in X$ se tiene que su órbita futura o pasada está acotada.*

Lema B.7. *Sea $f : X \rightarrow X$ homeomorfismo con sombreado topológico y z_0 punto fijo. Si existe $z \in X$ tal que $\alpha(z) = \emptyset$ y $\omega(z) = \{z_0\}$, entonces z_0 es Lyapunov estable.*

Demostración. Por el Lema B.3 existe $\mathcal{E} \in C^+(X)$ tal que si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una pseudo-órbita tal que $x_n = f^n(z)$ para todo $n \leq n_0$, entonces la única órbita que puede \mathcal{E} -sombrear $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es la de z pues $\alpha(z) = \emptyset$. Dado $\epsilon > 0$, tomemos n_0 tal que $f^n(z) \notin B(z_0, \epsilon)$ para todo $n \leq n_0$, y construimos $\xi \in C^+(X)$ tal

que $\xi(z_0) = \epsilon$ y $\xi(f^n(z)) = \mathcal{E}(f^n(z))$ para todo $n \leq n_0$. Tomemos $\delta \in C^+(X)$, tal que toda δ -pseudo órbita es ξ -sombreada. Si $y \in B(z_0, \delta(z_0))$ entonces $f^n(y) \in B(z_0, \epsilon)$ para todo $n \geq n_0$, pues en caso contrario existiría una δ -pseudo órbita que no es ξ -sombreada. ■

Lema B.8. *Sea $f : X \rightarrow X$ homeomorfismo con sombreado topológico y z_0 punto fijo. Si existe $x \neq z_0$ tal que $\alpha(x) = \omega(x) = \{z_0\}$, entonces existe $y_0 \neq z_0$ y z tal que $y_0 \in \omega(z)$.*

En lo que sigue veremos que si $\Omega(f) = \{z_0\}$ y $X = \mathbb{R}^m$, $m \neq 4, 5$, entonces f es conjugado a una homotecia u homotecia reversa.

Lema B.9. *Sea $f : X \rightarrow X$ homeomorfismo con sombreado topológico y z_0 punto fijo. Si $\Omega(f) = \{z_0\}$, entonces existe $x \in X$ tal que $\alpha(x) = \emptyset$ o $\omega(x) = \emptyset$.*

Demostración. Observar primeramente que como $\Omega(f) = \{z_0\}$, para todo x los conjuntos $\alpha(x)$ y $\omega(x)$ son o bien vacíos o el conjunto $\{z_0\}$ (dado que si $y \in \alpha(x) \cup \omega(x)$ entonces $y \in \Omega(f)$).

Por último, notar que si $\alpha(x) = \{z_0\}$, entonces aplicando el lema anterior se tiene que $\omega(x) = \emptyset$. ■

Lema B.10. *Sea $f : X \rightarrow X$ homeomorfismo con sombreado topológico y z_0 punto fijo. Si $\Omega(f) \neq \{z_0\}$, entonces existe $y_0 \neq z_0$ y z tal que $y_0 \in \omega(z)$.*

Demostración. Tomemos $x \neq z_0$ tal que $x \in \Omega(f)$ y observemos que podemos asumir que $x \notin \text{fix}(f)$ (sino ya se obtiene la tesis). Sea $\alpha > 0$ tal que $B(z_0, \alpha)$, $B(x, \alpha)$ y $B(f(x), \alpha)$ son dos a dos disjuntos. Sea $\epsilon \in C^+(X)$ tal que $\epsilon(z_0) = \epsilon(x) = \epsilon(f(x)) = \alpha$ y tomemos $\delta \in C^+(X)$ del sombreado. Sea $0 < \beta < \delta(x)/2$ tal que $f(B(x, \beta)) \subset B(f(x), \delta(f(x))/2)$. Como $x \in \Omega(f)$, existen

$y \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que tanto y como $f^n(y)$ se encuentran en $B(x, \beta)$. Por tanto, $f(y)$ se encuentra en $B(f(x), \delta(f(x))/2)$. Luego construimos la siguiente δ -pseudo órbita periódica: $x_0 = x$, $x_i = f^i(y)$ para todo $i = 1, \dots, n-1$, $x_n = x = x_0$. Esta δ -pseudo órbita debe ser ϵ -sombreada por la órbita de z . Por tanto, la órbita de z debe visitar infinitas veces la bola $B(x, \alpha)$. Con esto se obtiene el resultado. ■

Obtenemos entonces el primer resultado de homeomorfismos con sombreado topológico en \mathbb{R}^m .

Teorema B.11. *Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ homeomorfismo con sombreado topológico y z_0 punto fijo. Si $\Omega(f) = \{z_0\}$, entonces f es conjugado a una homotecia u homotecia reversa.*

Demostración. Como ya vimos arriba, para todo x , los conjuntos $\alpha(x)$ y $\omega(x)$ son o bien vacíos o el conjunto $\{z_0\}$. Por el lema B.9 existe $x \in \mathbb{R}^m$ tal que $\alpha(x) = \emptyset$ o $\omega(x) = \emptyset$. Si $\alpha(x) = \emptyset$, entonces por el Lema B.5 $\omega(x) = \{z_0\}$.

Por último, afirmamos que existe x tal que $\alpha(x) = \emptyset$ y por tanto $\omega(x) = \{z_0\}$, entonces todo $z \neq z_0$ cumple que $\alpha(z) = \emptyset$ y por tanto $\omega(z) = \{z_0\}$. En efecto, por el Lema B.7, z_0 es Lyapunov estable. Esto implica que cualquier $z \neq z_0$ tal que $\alpha(z) = \{z_0\}$ debe cumplir también que $\omega(z) = \{z_0\}$, esto es imposible por el Lema B.8. Concluimos que si existe x tal que $\alpha(x) = \emptyset$, entonces z_0 cumple que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(z) = z_0$ para todo $z \in \mathbb{R}^m$. Si no existe x tal que $\alpha(x) = \emptyset$, entonces $\alpha(x) = \{z_0\}$ para todo x . Por tanto $\omega(x) = \emptyset$ para todo $x \neq z_0$. Hemos probado que z_0 es o bien un atractor global, o bien un repulsor que es asintóticamente estable. Con esto, aplicamos el Teorema de Kerékjártó y obtenemos la tesis. ([32], o [24] para un abordaje más actual). ■

En la década del 30', Kerékjártó [32] prueba que un homeomorfismo del plano con un punto fijo asintóticamente estable es conjugado, en su cuenca de atracción a uno de los mapas $z \mapsto z/2$ o $z \mapsto \bar{z}/2$ dependiendo de si f preserva o revierte orientación. En [30] Husch extiende este resultado a \mathbb{R}^m , $m \neq 4, 5$ para el caso de un homeomorfismo que preserva orientación.

Recordemos el Teorema de Kerékjártó.

Teorema B.12. (Kerékjártó) *Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \neq 4, 5$, un homeomorfismo con un punto atractor global asintóticamente estable que preserva orientación, entonces f es conjugado a $z \mapsto z/2$.*

Corolario B.13. *Si $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \neq 4, 5$, es homeomorfismo con sombreado topológico tal que z_0 cumple $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(z) = z_0$ para todo $z \in \mathbb{R}^m$, entonces f es conjugado a una homotecia.*

Demostración. En este caso, $\Omega(f) = \{z_0\}$ y aplicamos el teorema anterior. ■

Con las herramientas desarrolladas hasta aquí se puede decir una cosa más sobre el ω - (o α -) límite de puntos de órbitas que no acumulan a pasado (o a futuro).

Lema B.14. *Sea $f : X \rightarrow X$ homeomorfismo con sombreado topológico. Si $\omega(x) = \emptyset$, entonces $\alpha(x)$ contiene a lo sumo una órbita periódica.*

Demostración. Por el Lema B.3, existe $\epsilon \in C^+(X)$ tal que si $y \neq x$, existe $n > 0$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > \epsilon(f^n(x))$. En particular, para cualquier $\delta \in C^+(X)$, si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una δ -pseudo órbita tal que para algún $n_0 \in \mathbb{Z}$, $x_n = f^n(x)$ para todo $n \geq n_0$, la única órbita que puede ϵ -sombrear $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es la órbita de x . Supongamos que $\alpha(x)$ contiene dos puntos periódicos distintos z_1 y z_2 . Modificando la función ϵ si fuese necesario, podemos

asumir que $B(f^n(z_i), \epsilon(f^n(z_i))) \cap B(f^m(z_j), \epsilon(f^m(z_j))) \neq \emptyset$ si y sólo si $i = j$ y $m = n$. Tomemos $\delta \in C^+(X)$ tal que toda δ -pseudo órbita es ϵ -sombreada y tomemos n_1, n_2 enteros positivos tales que $f^{-n_1}(x) \in B(z_1, \delta(z_1))$ y $f^{-n_2}(x) \in B(z_2, \delta(z_2))$. Construimos ahora dos δ -pseudo órbitas $\{x_n^1\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y $\{x_n^2\}_{n \in \mathbb{Z}}$ como sigue:

$$x_n^1 = \begin{cases} f^{(-n_1-n)}(z_1) & \text{si } n < -n_1 \\ f^n(x) & \text{si } n \geq -n_1 \end{cases};$$

$$x_n^2 = \begin{cases} f^{(-n_2-n)}(z_2) & \text{si } n < -n_2 \\ f^n(x) & \text{si } n \geq -n_2 \end{cases}.$$

Como comentamos al inicio de la prueba, la única órbita que puede ϵ -sombrear cualquiera de estas dos δ -pseudo orbitas es la de x . Sin embargo, si la órbita de x ϵ -sombrea la δ -pseudo órbita $\{x_n^1\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $f^n(x) \in B(x_n^1, \epsilon(x_n^1))$ para todo $n < -n_1$. Esto implica que la órbita de x no puede ϵ -sombrear la pseudo-órbita $\{x_n^2\}_{n \in \mathbb{Z}}$, absurdo. ■

Recordemos que un mapa es expansivo a futuro si existe $\epsilon > 0$ tal que si $x \neq y$, entonces existe $n \geq 0$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > \epsilon$. El siguiente resultado es un resultado clásico de homeomorfismos expansivos en espacios compactos. Una prueba muy elegante puede encontrarse en [19].

Teorema B.15. *Si K es compacto y es soporte de un homeomorfismo expansivo a futuro, entonces es finito.*

Lema B.16. *Sea $f : X \rightarrow X$ homeomorfismo, K compacto invariante. Supongamos que existe $\alpha > 0$, $C > 0$, tales que para $x, y \in K$ que cumplen $0 < d(x, y) < \alpha$, se tiene que existe $j > 0$ tal que $d(f^j(x), f^j(y)) > C$. Entonces K es finito.*

Demostración. Notar que si $C > \alpha$, tenemos que $f|_K$ es α -expansivo a futuro. Si $C \leq \alpha$ tenemos que $f|_K$ es C -expansivo a futuro. En cualquiera de los dos casos, K debe ser finito por el Teorema B.15. ■

Lema B.17. *Sea $f : X \rightarrow X$ homeomorfismo, sea K compacto invariante tal que $f|_K$ es expansivo con constante de expansividad C . Supongamos que para todo $x \in K$ existe un entorno U de x , $y, z \in U$ tal que la órbita de z $C/2$ -sombrea cualquier pseudo órbita $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que $x_n = f^n(y), n < 0$ para cierto $y \in U$ y $x_n = f^n(z), n \geq 0$. Entonces K is finito.*

Demostración. Tomemos un cubrimiento finito de K de forma que los entornos están en las hipótesis de este lema. Sea $\alpha > 0$ tal que si $d(x, y) < \alpha$, entonces x e y están en una de las bolas del cubrimiento. Entonces si $d(x, y) < \alpha$, ambas pseudo-órbitas $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tales que $x_n = f^n(x), n < 0, x_n = f^n(z), n \geq 0$ y $y_n = f^n(y), n < 0, y_n = f^n(z), n \geq 0$ son $C/2$ -sombreadas por la órbita de z , y por tanto $d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < C$ para todo $n > 0$. Por la expansividad, si $0 < d(x, y) < \alpha$, entonces existe $j \geq 0$ tal que $d(f^j(x), f^j(y)) > C$. Por el lema anterior obtenemos el resultado. ■

Lema B.18. *Sea $f : X \rightarrow X$ homeomorfismo Anosov topológico. Si $\omega(z) = \emptyset$, entonces $\alpha(z)$ es o bien no acotado o una única órbita periódica.*

Demostración. Supongamos que $\alpha(z)$ está acotado, por tanto es un conjunto compacto e invariante. Sabemos que $f|_{\alpha(z)}$ es expansivo: existe $C > 0$ tal que $x \neq y, x, y \in \alpha(z)$ implica que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > C$. Afirmamos que $\alpha(z)$ verifica la hipótesis del lema anterior.

Tomamos $\epsilon \in C^+(X)$ como en el Lema B.3, y lo modificamos si fuera necesario de forma que $2\epsilon(x) < C$ para todo $x \in \alpha(z)$. Sea $\delta \in C^+(X)$ del sombreado, y para todo $x \in \alpha(z)$, sea $U_x = B(x, \delta(x)/2)$. Tomemos n_0 tal que

$f^{-n_0}(z) \in U = U_x$, para algún $x \in \alpha(z)$. Por la elección del ϵ , la órbita de z $C/2$ -sombrea cualquier pseudo órbita tal que $x_n = f^n(y)$, $n < 0$ para algún $y \in U$, $x_n = f^{-n_0+n}(z)$, $n \geq 0$. Esto prueba la afirmación, y entonces $\alpha(z)$ es finito.

Por el Lema B.14, $\alpha(z)$ es una órbita periódica. ■

B.2. La cuenca de atracción en el plano es no acotada.

En el contexto del plano supongamos que existe K atractor local tal que el entorno U de la definición de atractor es simplemente conexo y con clausura compacta. En la subsección anterior vimos que si f es Anosov Topológico y $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(U)$, entonces f es conjugado a una homotecia u homotecia reversa. El objetivo de esta parte es mostrar que la cuenca de atracción debe ser no acotada.

Lema B.19. *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un disco topológico abierto con clausura compacta y $f : \bar{D} \rightarrow \bar{D}$ un homeomorfismo α -expansivo. Entonces existe $x \in D$ tal que $d(f^n(x), \partial D) \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Consideremos el espacio cociente $X = \bar{D}/\partial D$. Entonces X es homeomorfo a \mathbb{S}^2 y es un espacio métrico con la métrica del cociente. Además, $f : \bar{D} \rightarrow \bar{D}$ se factoriza sobre X , por tanto el mapa inducido en el cociente $\tilde{f} : X \rightarrow X$ no puede ser expansivo dado que por [36] no hay homeomorfismos expansivos en \mathbb{S}^2 . Como $f : \bar{D} \rightarrow \bar{D}$ es α -expansivo obtenemos la tesis. ■

Teorema B.20. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ homeomorfismo de Anosov topológico. Sea K atractor local tal que U de la definición de atractor es homeomorfo a un disco abierto con clausura compacta. Entonces $\cup_{n \geq 0} f^{-n}(U)$ es no acotada.*

Demostración. Sea $D = \cup_{n \geq 0} f^{-n}(U)$ y supongamos que está acotado. Entonces D es un disco topológico abierto con clausura compacta y $f|_{\overline{D}} : \overline{D} \rightarrow \overline{D}$ es un homeomorfismo expansivo con constante de expansividad $\alpha = \min\{\epsilon(x) : x \in \overline{D}\}$, donde $\epsilon \in C^+(\mathbb{R}^2)$ esta dado por la expansividad topológica de f . Como $f|_{\overline{D}}$ también es expansivo para cualquier $\alpha' < \alpha$, tomamos $\alpha' < d(\partial D, K)$, donde $K = \cap_{n \geq 0} f^n(U)$.

Por el lema anterior se tiene que existe $x \in D$ tal que $d(f^n(x), \partial D) \leq \alpha'$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por cómo tomamos α' , se tiene que $x \notin K$. Esto es una contradicción pues, si n es suficientemente grande, entonces $f^n(x)$ se encuentra fuera del α' -entorno de ∂D . ■

B.3. Descomposición Espectral

En [35] se prueba que los homeomorfismos con expansividad y sombreado topológico tienen descomposición espectral en el sentido de Smale. En [18] se muestra cómo se usa la descomposición espectral para probar varios resultados sobre la topología de las piezas básicas, además se obtiene como resultado principal que los Homeomorfismos de Anosov topológicos en superficies de género cero y tipo finito son linearizables, conjugados a homotecias.

Teorema B.21 (Teorema 1.2 [35]). *Sea X espacio métrico localmente compacto y f homeomorfismo expansivo con la propiedad del sombreado topológico.*

Entonces el conjunto no errante $\Omega(f)$ se descompone como

$$\Omega(f) = \bigcup_{i \in L} \Lambda_i,$$

donde los Λ_i son disjuntos, cerrados, invariantes y $f|_{\Lambda_i}$ es transitivo.

A los conjuntos Λ_i los llamaremos *piezas básicas*. Veamos que bajo estas hipótesis si $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tiene un punto fijo atractor (o repulsor), entonces f es conjugado a una homotecia u homotecia reversa.

Si $\epsilon \in C^+(\mathbb{R}^m)$ denotamos

$$W_\epsilon^s(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon(f^n(x)), \forall n \geq 0\}$$

y denotamos

$$W_\epsilon^u(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon(f^n(x)), \forall n \leq 0\}.$$

Por la Proposición 20 de [20], f tiene estructura de producto local, es decir si $\epsilon \in C^+(\mathbb{R}^m)$ es dado por la expansividad topológica, entonces existe $\delta \in C^+(\mathbb{R}^m)$ y $t : B(x, \delta(x)) \times B(x, \delta(x)) \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua tal que

$$W_\epsilon^s(w) \cap W_\epsilon^u(y) = \{t(w, y)\}$$

si $(w, y) \in B(x, \delta(x)) \times B(x, \delta(x))$. Consecuentemente, $t(\gamma(s) \times \{y\})$, $s \in [0, 1]$ es un conjunto conexo contenido en $W_\epsilon^u(y)$, donde $\gamma : [0, 1] \rightarrow B(x, \delta(x))$ es un mapa continuo tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$.

Lema B.22. *Si existe un punto fijo atractor x_0 , entonces f es conjugado a una homotecia u homotecia reversa.*

Demostración. Sea B la cuenca de atracción de x_0 , veamos que $B = \mathbb{R}^m$. En ese caso x_0 es asintóticamente estable y obtenemos la tesis aplicando el

Teorema de Kerékjártó ([32], [29]). Supongamos existe $x \in \partial B$. Por lo anterior existe un entorno U de x tal que $W_\epsilon^s(w) \cap W_\epsilon^u(y) = t(w, y)$ para todo $(w, y) \in U^2$, donde $\epsilon \in C^+(\mathbb{R}^m)$ es dado por la expansividad. Modificando ϵ si fuera necesario, tenemos que cada $y \in U \cap B$ no esta en $W_\epsilon^s(x)$, pues $y \in B$ implica $f^n(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$. Por tanto podemos tomar $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ continua tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$ y el conjunto $t(\gamma(s) \times \{y\}), s \in [0, 1]$ no es solamente $\{y\}$. Concluimos que $W_\epsilon^u(y)$ contiene un conexo que contiene a y . De este modo podemos hallar $z \in W_\epsilon^u(y) \cap B, z \neq y$, tal que $z \in W_\epsilon^s(y)$ (pues si z está suficientemente cerca de y , sus iterados se van a mantener cerca de los iterados de y hasta que ambos entran en $B(x_0, \epsilon(x_0)/2)$). De esta forma $z \in W_\epsilon^s(y) \cap W_\epsilon^u(y)$ con lo que se contradice la expansividad. Por tanto $B = \mathbb{R}^m$ y $\Omega(f) = \{x_0\}$. Aplicando el Teorema B.11 obtenemos la tesis. ■

Este lema tiene consecuencias inmediatas sobre la estructura de las piezas básicas.

Lema B.23. *Las piezas básicas son compactas.*

Demostración. Supongamos que existe una pieza básica Λ no compacta. Por la transitividad de $f|_\Lambda$ existe $x \in \Lambda$ tal que tanto su órbita futura como pasada son densas en Λ y por tanto no acotadas (Lemma 2.2 y Corolario 2.3 de [25]). Aplicando el Lema B.4 se niega el sombreado. ■

Decimos que existe un *ciclo* de piezas básicas si existen $\Lambda_0, \dots, \Lambda_{n-1}$ piezas básicas dos a dos disjuntas y puntos x_0, \dots, x_{n-1} tales que $x_i \notin \Omega(f)$ para cada $i = 0, \dots, n-1$ de manera que $\alpha(x_i) \subset \Lambda_i, \omega(x_i) \subset \Lambda_{i+1}$ para cada $i = 0, \dots, n-1$, donde $\Lambda_n = \Lambda_0$.

Lema B.24. *No hay ciclos de piezas básicas.*

Demostración. Tomemos Λ_i y x_i de la definición de ciclo de piezas básicas, $i = 0, \dots, n-1$. Como $f|_{\Lambda_i}$ es transitivo, tomamos $z_i \in \Lambda_i$ con órbita densa. Sea $r > 0$ tal que las bolas $B(x_i, r)$, $i = 0, \dots, n-1$ son dos a dos disjuntas, y $\overline{B(x_i, r)} \cap \Omega(f) = \emptyset$. Tomemos $\epsilon \in C^+(\mathbb{R}^m)$ tal que $\epsilon(x_i) = r$, $i = 0, \dots, n-1$. Sea $\delta \in C^+(\mathbb{R}^m)$ del sombreado. Para cada $i = 0, \dots, n-1$, sea $x_i^- \in \Lambda_i \cap \alpha(x_i)$, $x_i^+ \in \Lambda_{i+1} \cap \omega(x_i)$; $B_i^- = B(x_i^-, \delta(x_i^-)/2)$, $B_i^+ = B(x_i^+, \delta(x_i^-)/2)$; $l_i < 0$ tal que $f^{l_i}(x_i) \in B_i^-$, $m_i > 0$ tal que $f^{m_i}(x_i) \in B_i^+$, y $n_i > 0$ tal que $f^{n_i}(z_i) \in B_{i+1}^-$, $z_i \in B_i^+$.

Construimos ahora una δ -pseudo órbita periódica como sigue: $f^j(x_0)$, $j = l_0, m_0 - 1$, $f^j(z_0)$, $j = 0, \dots, n_0 - 1$, $f^j(x_1)$, $j = l_1, m_1 - 1$, $f^j(z_1)$, $j = 0, \dots, n_1 - 1$, \dots , $f^j(x_i)$, $j = l_i, m_i - 1$, $f^j(z_i)$, $j = 0, \dots, n_i - 1$, $f^j(x_{i+1})$, $j = l_{i+1}, m_{i+1} - 1$, $f^j(z_{i+1})$, $j = 0, \dots, n_{i+1} - 1$, \dots , $f^j(x_{n-1})$, $j = l_{n-1}, m_{n-1} - 1$, $f^j(z_{n-1})$, $j = 0, \dots, n_{n-1} - 1$, $f^{l_0}(x_0)$. Ver Figura B.1.

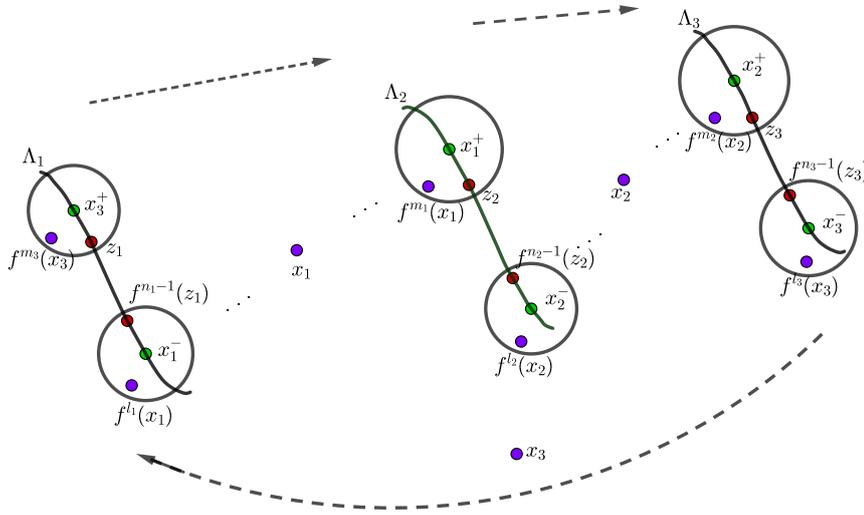


Figura B.1: Construcción de una pseudo órbita periódica a partir de un ciclo de piezas básicas.

Tomemos x tal que la órbita de x ϵ -sombrea esta δ -pseudo órbita. En-

tonces la órbita de x debe intersectar $B(x_0, r)$ una cantidad infinita de veces, por lo que tiene un punto de acumulación en $\overline{B(x_0, r)}$. Esto es absurdo pues habíamos elegido $B(x_0, r) \cap \Omega(f) = \emptyset$. ■

Lema B.25. *Si existe una órbita no acotada a pasado, entonces su ω -límite está contenido en una pieza básica atractora.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^m$ y una sucesión de enteros negativos $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $f^{n_k}(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$. Por el Lema B.3, existe $\epsilon \in C^+(\mathbb{R}^m)$ tal que si $y \neq x$, entonces existe un entero $n < 0$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > \epsilon(f^n(x))$. Sea $\delta \in C^+(\mathbb{R}^m)$ de la definición del sombreado. Por el Lema B.6, $\omega(x)$ es compacto. Es claro que $\omega(x)$ no puede estar contenido en una pieza básica repulsora, por tanto debemos descartar que $\omega(x) \subset \Lambda$, con Λ de tipo silla. En este caso, existiría $y \notin \Omega(f)$ tal que $\alpha(y) \subset \Lambda$. Sea $r > 0$ de forma que $B(y, r) \cap \mathcal{O}(x) = \emptyset$. Modificando ϵ si fuera necesario, podemos asumir que $\epsilon(y) < r$. Sea $z \in \Lambda$ y $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $d(f^{-n}(y), z) < \delta(z)$. Sea $w \in \Lambda$ tal que su órbita futura es densa en Λ y $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $d(f^m(x), w) < \delta(w)$.

Ahora construimos una δ -pseudo órbita $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ como sigue: $x_n = f^n(x)$ para cada $n \leq m-1$, $x_{m+j} = f^j(w)$ para cada $j = 0, \dots, l-1$, donde $d(f^l(w), z) < \delta(z)/2$, $x_{m+l+j} = f^{-n+j}(y)$ para cada $j \geq 0$. Por la elección de ϵ , esta δ -pseudo órbita debe ser sombreada por la órbita de x , pero esto contradice que $\mathcal{O}(x) \cap B(y, \epsilon(y)) = \emptyset$. ■

Lema B.26. *Existe una pieza básica atractora o bien una pieza básica repulsora.*

Demostración. Supongamos toda pieza básica es de tipo silla. Por el Lema anterior, toda órbita está acotada. Además, todo punto errante tiene su α -

y ω -límite contenido en dos piezas de tipo silla diferentes (ver Lema B.24). Sea x_0 un punto errante, sea $\alpha(x_0) \subset \Lambda_0$ y $\omega(x_0) \subset \Lambda_1$. Por la definición de pieza de tipo silla, existe x_{-1}, x_1 punto errante, Λ_{-1}, Λ_2 pieza de tipo silla, tal que $\alpha(x_{-1}) \subset \Lambda_{-1}$, $\omega(x_{-1}) \subset \Lambda_0$, $\alpha(x_1) \subset \Lambda_1$, $\omega(x_1) \subset \Lambda_2$. Además, los conjuntos Λ_i son dos a dos diferentes por el Lema B.24. Procediendo de manera inductiva, se obtiene una sucesión de piezas básicas de tipo silla diferentes $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tales que para todo $n \in \mathbb{Z}$ existe un punto errante x_n con $\alpha(x_n) \subset \Lambda_n$ y $\omega(x_n) \subset \Lambda_{n+1}$. Además, podemos asumir que el conjunto $X = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Lambda_n}$ es compacto, pues en caso contrario concluimos la prueba aplicando el lema anterior y la propiedad del sombreado. Por tanto, si tomamos $x_n \in \Lambda_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, existe un punto de acumulación z que debe estar en una pieza básica Λ . Esto implica que esta pieza Λ es acumulada por piezas básicas. Ahora, por [20] las piezas básicas son abiertas en $\Omega(f)$ y obtenemos un absurdo. ■

Todo lo anteriormente expuesto da un panorama del estado del arte de los homeomorfismos con expansividad y sombreado en espacios no compactos, en particular en el plano.

Bibliografía

- [1] E. Akin, J. Auslander, and K. Berg. When is a transitive map chaotic? In *Convergence in ergodic theory and probability. Papers from the conference, Ohio State University, Columbus, OH, USA, June 23–26, 1993*, pages 25–40. Berlin: de Gruyter, 1996.
- [2] B. Alarcón, V. Guíñez, and C. Gutierrez. Planar embeddings with a globally attracting fixed point. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods*, 69(1):140–150, 2008.
- [3] D. V. Anosov. Geodesic flows on closed riemann manifolds with negative curvature. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, (90), 1967.
- [4] A. V. Babin and M. I. Vishik. *Attractors of evolution equations. Transl. from the Russian by A. V. Babin*, volume 25 of *Stud. Math. Appl.* Amsterdam etc.: North-Holland, 1992.
- [5] J. Bernat and J. Llibre. Counterexample to Kalman and Markus-Yamabe conjectures in larger than 3. *Dyn. Contin. Discrete Impulsive Syst.*, 2(3):337–379, 1996.
- [6] J. E. Billotti and J. P. Lasalle. Dissipative periodic processes. *Bull. Am. Math. Soc.*, 77:1082–1088, 1971.

- [7] R. Bowen. Markov partitions for axiom a diffeomorphisms. *American Journal of Mathematics*, 92(3):725–747, 1970.
- [8] J. H. Brown and J. O. Warren. The strong shadowing property on the unit interval. *Elec. Journal of Undergrad Math*, 4, 1998.
- [9] M. Brunella. Complete polynomial vector fields on the complex plane. *Topology*, 43(2):433–445, 2004.
- [10] A. Cima. Globally attracting equilibrium points. *Butll. Soc. Catalana Mat.*, 36(2):121–152, 2021.
- [11] A. Cima, A. Gasull, and F. Mañosas. The discrete Markus-Yamabe problem. *Nonlinear Anal.*, 35(3):343–354, 1999.
- [12] A. Cima, A. Gasull, and F. Mañosas. Examples and counterexamples for Markus-Yamabe and LaSalle global asymptotic stability problems. In *Proceedings of the Workshop Future Directions in Difference Equations*, volume 69 of *Colecc. Congr.*, pages 89–96. Univ. Vigo, Serv. Publ., Vigo, 2011.
- [13] A. Cima, A. Gasull, and F. Mañosas. On the global asymptotic stability of difference equations satisfying a Markus-Yamabe condition. *Publ. Mat.*, 58:167–178, 2014.
- [14] A Cima, A. van den Essen, A. Gasull, E. Hubbers, and F. Mañosas. A polynomial counterexample to the Markus-Yamabe conjecture. *Adv. Math.*, 131(2):453–457, 1997.
- [15] G. Cousillas. A fixed point theorem for plane homeomorphisms with the topological shadowing property. *Arxiv.org*, 2017.

- [16] G. Cousillas. Topology of global attractors for homeomorphisms with the topological shadowing property in \mathbb{R}^m . Preprint, arXiv:2308.05824 [math.DS] (2025), 2025.
- [17] G. Cousillas, J. Groisman, and J. Xavier. Topologically anosov plane homeomorphisms. *TMNA*, 54(1):371–382, 2019.
- [18] G. Cousillas, J. Groisman, and J. Xavier. Linearization of topologically Anosov homeomorphisms of non compact surfaces of genus zero and finite type. *TMNA*, 58(1):323 – 333, 2021.
- [19] E. M. Coven and M. Keane. Every compact metric space that supports a positively expansive homeomorphism is finite. In *Dynamics and stochastics. Festschrift in honor of M. S. Keane. Selected papers based on the presentations at the conference ‘Dynamical systems, probability theory, and statistical mechanics’, Eindhoven, The Netherlands, January 3–7, 2005, on the occasion of the 65th birthday of Mike S. Keane.*, pages 304–305. Beachwood, OH: IMS, Institute of Mathematical Statistics, 2006.
- [20] T. Das, K. Lee, D. Richeson, and J. Wiseman. Spectral decomposition for topologically Anosov homeomorphisms on noncompact and non-metrizable spaces. *Topology Appl.*, 160(1):149–158, 2013.
- [21] G. Di Lena, M. Martelli, and B. Messano. Global stability and plus-global stability. An application to forward neural networks. *Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste*, 42:1–18, 2010.
- [22] R. Feß ler. A proof of the two-dimensional Markus-Yamabe stability conjecture and a generalization. *Ann. Polon. Math.*, 62(1):45–74, 1995.

- [23] F. R. Gantmacher. *The theory of matrices. Vol. 2. Transl. from the Russian by K. A. Hirsch*. Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, reprint of the 1959 translation edition, 1998.
- [24] A. Gasull, J. Groisman, and F. Mañosas. Linearization of planar homeomorphisms with a compact attractor. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 48(2):493–506, 2016.
- [25] J. Groisman and J. Vieitez. On transitive expansive homeomorphisms of the plane. *Topology Appl.*, 178:125–135, 2014.
- [26] V. Guíñez and A. Castañeda. A bounded Hurwitz vector field in \mathbb{R}^4 having a periodic orbit. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A, Math. Anal.*, 18(3):311–317, 2011.
- [27] C. Gutiérrez. A solution to the bidimensional global asymptotic stability conjecture. *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*, 12(6):627–671, 1995.
- [28] J. Gutiérrez García, T. Kubiak, and J. Picado. Localic real functions: A general setting. *J. Pure Appl. Algebra*, 213(6):1064–1074, 2009.
- [29] J. K. Hale. *Asymptotic behavior of dissipative systems*, volume 25 of *Math. Surv. Monogr.* Providence, RI: American Mathematical Society, 1988.
- [30] L. S. Husch. A topological characterization of the dilation in E^n . *Proc. Am. Math. Soc.*, 28:234–236, 1971.
- [31] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems. With a supplement by Anatole Katok and Leonardo Men-*

- doza*, volume 54 of *Encycl. Math. Appl.* Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [32] B. Kerékjártó. Topologische charakterisierung der linearen. *Acta Litt. Acad. Sei. Szeged.*, (6):235–262, 1934.
- [33] O. Ladyzhenskaya. *Attractors for semigroups and evolution equations.* Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1991.
- [34] J. P. LaSalle. *The stability of dynamical systems.* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1976. With an appendix: “Limiting equations and stability of nonautonomous ordinary differential equations” by Z. Artstein.
- [35] K. Lee, N. Nguyen, and Y. Yang. Topological stability and spectral decomposition for homeomorphisms on noncompact spaces. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 38(5):2487–2503, 2018.
- [36] J. Lewowicz. Expansive homeomorphisms of surfaces. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática - Bulletin/Brazilian Mathematical Society*, 20(1):113–133, 1989.
- [37] L. Markus and H. Yamabe. Global stability criteria for differential systems. *Osaka Math. J.*, 12:305–317, 1960.
- [38] C. Olech. On the global stability of an autonomous system on the plane. *Contrib. Differ. Equations* 1, 389-400 (1963)., 1963.
- [39] T. Pennings and J. Van Eeuwen. Pseudo-orbit shadowing on the unit interval. *Real Anal. Exchange*, 16(1):238–244, 1990/91.
- [40] I. A. Rus. Remarks on a LaSalle conjecture on global asymptotic stability. *Fixed Point Theory*, 17(1):159–172, 2016.

- [41] S. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos. With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Boca Raton, FL: CRC Press, 3rd edition edition, 2024.