

Transitividad robusta de endomorfismos singulares.

Un mapa de \mathbb{T}^n que es C^2 robustamente transitivo pero no es C^1 robustamente transitivo.

Autor: **Juan Carlos Morelli Ramírez**

Orientador: Dr. Jorge Iglesias

Tribunal: Dr. Jorge Groisman, Dr. Jorge Iglesias, Dr. Roberto Markarian



**UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY**

PEDECIBA

2019

A mi madre y mi padre.
A Jorge.
Al tribunal.
A todos quienes me enseñaron y me enseñan matemática.
A los buenos compañeros del I.M.E.R.L. y del C.E.S.
Al seminario de sistemas dinámicos.

Gracias.

Índice

1. Introducción	6
1.1. Programa	6
1.2. Antecedentes	6
2. Preliminares	7
2.1. Geométricos	7
2.2. Singularidades	8
2.3. Dinámicos	10
2.3.1. Transitividad	11
2.3.2. Hiperbolicidad	11
2.3.3. Descomposición Dominada.	13
3. Un endomorfismo f de \mathbb{T}^n.	14
3.1. Construcción de f	14
3.2. El conjunto crítico de f	15
3.2.1. Clasificación de S_f	16
3.2.2. Geometría de S_f	17
3.2.3. Clasificación de los puntos críticos	19
3.3. Dinámica de f	20
4. Un endomorfismo distinguido H de \mathbb{T}^n	22
4.1. Construcción de H	22
4.2. H no es C^1 robustamente transitivo	25
4.3. H es C^2 robustamente transitivo	26

Glosario de símbolos y notaciones.

- \mathbb{R} : conjunto de los números reales.
- \mathbb{Z} : conjunto de los números enteros.
- \bar{X} : clausura del conjunto X .
- \dot{X} o $\text{int}(X)$: interior del conjunto X .

Si f es un mapa lineal:

- $\ker(f)$: núcleo de f .
- $\text{Im}(f)$: imagen de f .

Si f es un mapa k veces diferenciable, $i \leq k$:

- $D_x f$: diferencial de f en el punto x (o su jacobiano).
- $D^i f$: i -ésimo diferencial del mapa f .
- $D_x^i f$: i -ésimo diferencial en el punto x del mapa f .

Si M es una variedad real cerrada (compacta y sin borde):

- σ_M : atlas de M .
- σ_x : carta del atlas que lleva $0 \in \mathbb{R}^n$ en $x \in M$.
- $T_x M$: espacio tangente a M en x .
- $k \in [0, +\infty] \Rightarrow C^k(M)$: conjunto de endomorfismos de M k -veces diferenciables con derivadas continuas.
- $\mathcal{U}_f \in C^k$: entorno del endomorfismo f en la topología C^k .
- $\varepsilon - \mathcal{U}_f \in C^k$: entorno del endomorfismo f en la topología C^k de radio ε .
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: conjunto de las matrices reales de tamaño $n \times n$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- $\text{rg}(A)$: rango de A .
- $\det(A)$: determinante de A .

Si $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ y $h < n \Rightarrow$

- $\tilde{v}_h = (v_1, v_2, \dots, v_h)$
- $\tilde{v}_{n-1} = \tilde{v}$
- $\langle v, w \rangle_h = \sum_{k=1}^h v_k \cdot w_k$

1. Introducción

1.1. Programa

A partir de una matriz de coeficientes enteros mayores que uno se construye un endomorfismo de \mathbb{T}^n que tiene conjunto crítico persistente y admite conos inestables. Las características geométricas del conjunto crítico permiten elegir un punto distinguido donde perturbar a fin de obtener un nuevo mapa que colapsa un abierto en un segmento invariante por lo que no es C^1 transitivo. Finalmente, utilizando los conos, probaremos que el mapa es transitivo en la topología C^2 siguiendo (iterando) curvas aceleradas que viajan dentro de ellos.

1.2. Antecedentes

Cuando pensamos en las propiedades dinámicas de un sistema vienen a nosotros casi inevitablemente en primer lugar los conceptos de *estabilidad* para un mapa y *robustez* para una propiedad. Si bien estos conceptos pueden definirse en forma precisa en términos matemáticos, informalmente podemos decir que la estabilidad implica que mapas cercanos tienen dinámicas iguales; y que la robustez de una propiedad implica que mapas cercanos la satisfacen. La importancia de la estabilidad es evidente; la de la robustez está en que una propiedad robusta es capaz de resistir a las perturbaciones.

Este trabajo en particular se centra en el estudio de la robustez de la transitividad, entendiendo por *transitividad* la existencia de un punto con órbita a futuro densa.

En realidad, el análisis que buscamos hacer no es en si nuevo ya que se conocen una buena cantidad de resultados concernientes a la transitividad robusta; la novedad está en que se ataca una clase particular de mapas, los endomorfismos singulares, sobre los cuales poco o nada se sabe. Para ordenar un poco las ideas, se listan a continuación los resultados conocidos más relevantes sobre este tema.

Comenzamos con el caso más estudiado: la transitividad robusta en el contexto de difeomorfismos. El conjunto de resultados conocidos provee una imagen bastante completa del comportamiento de estos mapas. Comenzando por las superficies, para las cuales Mañé prueba en [M] que la transitividad robusta implica que la variedad es \mathbb{T}^2 y el difeomorfismo es Anosov, hasta el caso de las variedades de $\dim(M) = n$ donde [BDP] prueban que todo difeomorfismo robustamente transitivo implica la existencia de splitting dominado de los espacios tangentes (que es una forma débil de hiperbolicidad). Luego, la transitividad robusta de endomorfismos regulares (invertibles local pero no globalmente) los cuales si bien han sido menos estudiados que los difeomorfismos, [LP] prueban que la expansión de volumen es condición necesaria (no suficiente) para que un endomorfismo en cualquier dimensión sea C^1 -robustamente transitivo. Por último, la transitividad robusta de mapas singulares (conjunto crítico no vacío), que es por mucho el caso menos estudiado; tanto así que hasta 2013 no se había escrito nada al respecto. Fue en ese año cuando [BR] construyeron el primer ejemplo de un mapa singular C^1 robustamente transitivo. El segundo ejemplo apareció en 2016 cuando [ILP] construyeron un mapa C^1 -robustamente transitivo con conjunto crítico persistente. Nada más se sabía que estos dos ejemplos hasta ese momento, no obstante, últimamente se ha logrado avanzar en el área habiendo aparecido algunos resultados importantes para endomorfismos singulares en superficies. En [LR1], por ejemplo, se prueba que la hiperbolicidad parcial es una condición necesaria para la transitividad robusta de estos endomorfismos. En cuanto al *state of the art* del tópico, a principios de este mismo año [LR2] probaron que las únicas superficies que admiten endomorfismos singulares persistentes y robustamente transitivos son \mathbb{T}^2 y la botella de Klein, y que todo endomorfismo de este tipo está en la clase de homotopía de un mapa lineal con al menos un valor propio de módulo mayor que uno.

En cuanto a este trabajo, mencionamos que la construcción hecha en [ILP] permite deducir la existencia de un endomorfismo de \mathbb{T}^2 con conjunto crítico persistente y que es robustamente transitivo en la topología C^2 pero no lo es en la topología C^1 . Este resultado, que puede verse en [IP], es el punto de partida para el resultado aquí presentado. Veremos que la construcción efectuada por [IP] en la superficie \mathbb{T}^2 puede llevarse a cabo en \mathbb{T}^n utilizando las mismas técnicas, lo que se traducirá en un aporte nuevo al estudio de la transitividad robusta de endomorfismos singulares.

2. Preliminares

En esta sección se definen todos los conceptos dinámicos y geométricos que aparecen a lo largo del trabajo. También se enuncian los teoremas y propiedades de estas áreas que se utilizan. De los más conocidos se omiten las pruebas y de los demás se proporcionan.

2.1. Geométricos

En general, para mas detalles sobre los contenidos de esta sección el lector podrá dirigirse a [DC] donde encontrará la mayoría de las definiciones y pruebas que se citan aquí.

Definición 2.1 Un espacio topológico M se llama **variedad diferencial** sin borde de dimensión n sii $\forall x \in M, \exists V_x$ entorno abierto de x en M , $\exists U_x$ entorno abierto de 0 en \mathbb{R}^n , $\exists \sigma_x : U_x \rightarrow V_x$ un homeomorfismo tales que $\sigma_x(0) = x$, $\sigma_x(U_x) = V_x$ y cada vez que $V_x \cap V_y \neq \emptyset$ para algún $y \in M$ entonces la composición $\sigma_y^{-1} \circ \sigma_x : \sigma_x^{-1}(V_x \cap V_y) \rightarrow \sigma_y^{-1}(V_x \cap V_y)$ es un difeomorfismo de \mathbb{R}^n .

Observación 2.1 La terna (σ_x, U_x, V_x) se llama **carta local** alrededor de x (nos referiremos a las cartas locales como σ_x , obviando los abiertos).

Definición 2.2 Llamamos **atlas** de M a $\sigma_M := \bigcup_{x \in M} \{(\sigma_x, U_x, V_x)\}$.

Observación 2.2 Formalmente, el atlas de la variedad es el conjunto maximal ordenado por inclusión que contiene a σ_M pero abusando de la definición también le llamamos atlas. Por otra parte, en un atlas pueden existir múltiples cartas que llevan $0 \in \mathbb{R}^n$ en $x \in M$; sin embargo puede probarse (ver [DC]) que las definiciones siguientes son independientes de las cartas.

Definición 2.3 Sean $x \in M$ y $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ una curva C^∞ tal que $\alpha(0) = x$. Llamamos **vector tangente a M en x** según α al operador $v_\alpha : \{f \in C^\infty(M, \mathbb{R})\} \rightarrow \mathbb{R}/v_\alpha(f) = \frac{\partial}{\partial t}(f \circ \alpha)|_{t=0}$

Definición 2.4 El **espacio tangente** a x en M es $T_x M = \{v_\alpha/\alpha \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon), M)\}$ el conjunto de vectores tangentes a M en x según todas las curvas que pasan por él.

Definición 2.5 Decimos que una variedad diferencial sin borde y compacta es una **variedad cerrada**.

Definición 2.6 Sea M una variedad diferencial y $W \subset M$. Decimos que W es **subvariedad** de M de dimensión $k < n$ sii $\forall x \in W, \forall \sigma_x; V_x \cap W$ es difeomorfo a $U_x \cap \mathbb{R}^k$.

En lo que sigue, M y N son variedades diferenciables cerradas con $\dim(M) \geq \dim(N)$, $x \in M, y \in N$, σ_x y σ_y las cartas que llevan $0 \in \mathbb{R}^n$ a x y y respectivamente, $u : U_x \rightarrow U_y$ el difeomorfismo de cambio de coordenadas en \mathbb{R}^n y $W \subset N$ una subvariedad.

Definición 2.7 Sea $f : M \rightarrow N/f(x) = y$. Decimos que f es **diferenciable** de clase C^k en x sii la composición $\sigma_y^{-1} \circ f \circ \sigma_x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable de clase C^k en 0 . Si $k = +\infty$ el mapa se dice **suave**.

En lo que sigue, $f : M \rightarrow N$ es un mapa diferenciable.

Definición 2.8 El **diferencial** de f en x es $D_x f := D_0 \sigma_y \circ D_0 u \circ (D_0 \sigma_x)^{-1} : T_x M \rightarrow T_y N$. Su matriz asociada se llama **Jacobiano** de f .

Observación 2.3 Si tenemos en cuenta el teorema de Whitney el cual dice que toda variedad real se encuentra encajada en algún espacio euclideo en el cual tiene la topología relativa, entonces el espacio tangente a x en M puede verse como la imagen del diferencial de alguna carta que lleva 0 en x , es decir, $T_x M = \text{Im}(D_0 \sigma_x)$.

Definición 2.9 Decimos que f es **transversal** a W en $f(x) \in N$ y lo denotamos por $f \bar{\cap} W$ en $f(x)$ si se cumple una de las siguientes dos condiciones: $f(x) \notin W$ ó $T_{f(x)} W \oplus D_x f(T_x M) = T_{f(x)} N$.

Definición 2.10 Decimos que $f \bar{\cap} W$ sii para todo $x \in f^{-1}(W)$ vale que $f \bar{\cap} W$ en $f(x)$.

Teorema 2.1 De la preimagen de subvariedad transversal ([GG], capítulo 2, teorema 4.4):
 $f : M \rightarrow N$ un mapa diferenciable entre variedades. W subvariedad de N y $f \bar{\cap} W$. Entonces $f^{-1}(W)$ es subvariedad de M de la misma codimensión que W en N .

Proposición 2.1 La transversalidad es una propiedad C^1 -abierto (C^1 -estable) i.e. $f \bar{\cap} W$ entonces existe un entorno $\mathcal{U}_f \in C^1$ de f tal que $\forall g \in \mathcal{U}_f : g \bar{\cap} W$

Teorema 2.2 De transversalidad de Thom ([GG], capítulo 2, teorema 4.12): La transversalidad es C^r -genérica i.e. dada W , $f \bar{\cap} W$ para un conjunto denso de mapas $f \in C^r$. Si además W es cerrada este conjunto denso de mapas es abierto.

Definición 2.11 Decimos que x es un **punto regular** para f sii $D_x f$ es sobreyectivo sii $rg(D_x f) = \dim(N)$.

Definición 2.12 Decimos que y es un **valor regular** de f sii $\forall x \in f^{-1}(y)$, x es punto regular.

Teorema 2.3 De la preimagen de valor regular ([GG], capítulo 1, teorema 2.8):
 $f : M \rightarrow N$ un mapa diferenciable, $y \in N$ un valor regular. Entonces $f^{-1}(y)$ es subvariedad de M de codimensión igual a la dimensión de N . Además $\forall x \in f^{-1}(y)$ se cumple que $T_x(f^{-1}(y)) = \ker(D_x f)$.

Definición 2.13 Decimos que $x \in M$ es un **punto crítico o singularidad** de f sii $D_x f$ no es sobreyectivo sii $rg(D_x f) < \dim(N)$.

Definición 2.14 El **conjunto crítico** de f es $S_f = \{x \in M / rg(D_x f) < n\}$.

Definición 2.15 y es un **valor crítico** si no es un valor regular.

Observación 2.4 Si $\dim(M) = \dim(N)$ las definiciones de valor regular y de valor crítico son equivalentes a que el determinante del jacobiano sea respectivamente no nulo o nulo.

2.2. Singularidades

Continuamos los preliminares haciendo algunas observaciones referentes a singularidades de endomorfismos. En general, las singularidades de cualquier mapa diferenciable tienen buen comportamiento geométrico; pueden ser agrupadas en 'tipos' de singularidades según una relación de equivalencia y todas las singularidades de una misma clase se agrupan en subvariedades de M tales que cada una de estas subvariedades está contenida en la de la clase anterior.

Los contenidos de esta subsección están tomados de [GG].

Definición 2.16 Sean $f_1 : M \rightarrow N$ y $f_2 : M \rightarrow N$ mapas tales $x_1 \in S_{f_1}$ y $x_2 \in S_{f_2}$. Decimos que x_1 y x_2 son **singularidades del mismo tipo** ($x_1 \sim x_2$) sii existen entornos U_i de x_i , V_i de $f_i(x_i)$, $i \in \{1, 2\}$ y dos difeomorfismos $h_1 : U_1 \rightarrow U_2$ y $h_2 : V_1 \rightarrow V_2$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{h_1} & U_2 \\ f_{1|U_1} \downarrow & & \downarrow f_{2|U_2} \\ V_1 & \xrightarrow{h_2} & V_2 \end{array}$$

Es claro que \sim es de equivalencia.

La descripción de todas las singularidades que pertenecen a una misma clase recibe el nombre de **forma normal** de la singularidad y por simplicidad son clasificadas para algún mapa $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ con singularidad en $x = 0$. Luego, decimos que $f : M \rightarrow N$ tiene una singularidad de tipo *tal* en $x \in M$ si existe un entorno U de x en M y un entorno V de $f(x)$ en N , existe un entorno U' de $0 \in \mathbb{R}^m$ y V' de $g(0) \in \mathbb{R}^n$ y dos difeomorfismos $h_1 : U \rightarrow U'$ y $h_2 : V \rightarrow V'$ tales que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{h_1} & U' \\ f|_U \downarrow & & \downarrow g|_{U'} \\ V & \xrightarrow{h_2} & V' \end{array}$$

Esta clasificación para singularidades si bien es útil tiene la desventaja de que las clases de equivalencia pueden ser infinitas lo que trae aparejado el problema de no poder describirlas de modo satisfactorio. Teniendo esto en cuenta es que las clases de equivalencia se pueden considerar otra vez agrupadas según un criterio llamado de **Thom-Boardman**. Todo mapa diferenciable puede ser aproximado por otro con una cantidad finita de tipos de singularidades Thom-Boardman. Y para esta clasificación vale que cada clase de singularidades es una subvariedad de M .

En 1955 en su paper [T], Thom propone una clasificación para las singularidades de un mapa $C^\infty(M, N)$ definiendo el conjunto $S_{k_1}(f) = \{x \in M / \dim(\ker(D_x f)) = k_1\}$. Suponiendo que S_{k_1} es subvariedad de M , entonces se puede considerar $f|_{S_{k_1}}$ y el conjunto $S_{k_1, k_2}(f) = \{x \in S_{k_1} / \dim(\ker(D_x f)) = k_2\} = S_{k_2}(f|_{S_{k_1}})$, si otra vez obtenemos una subvariedad podemos repetir y encontrar S_{k_1, k_2, k_3} y así sucesivamente. La r -upla (k_1, k_2, \dots, k_r) se llama *símbolo* de la singularidad y la caracteriza. Lamentablemente esta buena descripción descansa en un hecho sumamente restrictivo que es asumir una estructura de subvariedad que en principio puede no existir.

Este problema fue resuelto en 1967 por Boardman en [B], utilizando el concepto de *jet* de un mapa diferenciable que permite definir a los S_k como subespacios de los espacios de *jets* en forma análoga a la de Thom y además permite dar las expresiones locales (ecuaciones) de la acción de f en un entorno de la singularidad, demostrando en consecuencia que las intuiciones de Thom eran correctas.

Otra consecuencia importante de los trabajos de Boardman con respecto a singularidades es que los mapas estables no son densos en $C^\infty(M, N)$.

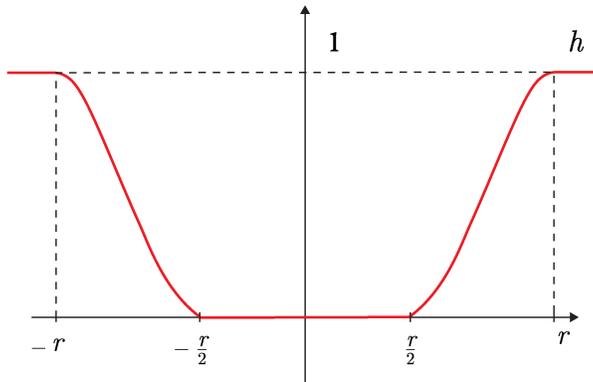


Figura 1: Gráfico de h

La singularidad más frecuente es la llamada **singularidad de doblez** y corresponde al símbolo $\tau = (1, 0)$ en la clasificación Thom-Boardman (asimismo, es la primera que puede encontrarse). En el desarrollo clásico de la teoría de singularidades se definen los puntos de doblez a partir de su forma normal y se prueba que tienen esta propiedad. Nosotros seguiremos el camino presentado en [GG] y daremos la siguiente definición:

Definición 2.17 *Decimos que una singularidad x es de doblez si $\ker(D_x f) \cap T_x S_f$.*

Anotamos como F_f al conjunto de puntos de doblez de f ; es decir, $F_f = \{x \in S_f / x \text{ es de doblez}\}$. Luego, si $x \in F_f$, entonces existe un cambio de coordenadas en \mathbb{R}^n de modo que f toma la forma normal para puntos de doblez. Formalmente, si $f : M \rightarrow M/f(x) = y$ y $x \in F_f$ entonces $\exists U, V$ entornos abiertos de x e y en M , $\exists N$ entorno abierto de $0 \in \mathbb{R}^m$ y existen difeomorfismos $g : N \rightarrow U$ y $h : V \rightarrow N$ tales que $\forall (x_1, \dots, x_n) \in N$, $(h \circ f|_U \circ g)(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^2)$ como puede verse en [GG] (*capítulo 3, Teorema 4.5*).

Probamos ahora un lema para los puntos de doblez que será central para el objetivo que perseguimos. En él se establece que si un mapa diferenciable f presenta una singularidad de doblez, entonces en todo entorno $\mathcal{U}_f \in C^1$ existe algún mapa cuyo conjunto crítico contiene abiertos.

Lema 2.1 *Si $f \in C^1(M, M)$ y $x \in F_f$ entonces $\forall \varepsilon > 0, \forall W$ entorno abierto de x en M , $\exists g \in \varepsilon - \mathcal{U}_f \in C^1$, $\exists V$ entorno abierto de x en M tales que $V \subset S_g, g(V) = f(S_f \cap V)$ y $g(x) = f(x), \forall x \notin W$.*

Dem.:

Sin perder generalidad, suponemos $x = (0, \dots, 0)$ y f en forma normal.

Dados entonces $\varepsilon > 0$ y W entorno abierto de x , elegimos $r > 0 / 7r < \varepsilon, r^2 < \varepsilon$ y $B_{(0,r)} \subset W$. Consideramos ahora una función chichón $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 como en la Figura 1 con $|h'| < \frac{4}{r}$ y definimos la función $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / g(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^2 \cdot h(x_n))$ de lo que $(f - g)(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0, x_n^2 \cdot (1 - h(x_n)))$ en $B_{(0,r)}$ y nula en $B_{(0,r)}^c$. Entonces:

- $|f - g| \leq |x_n^2| \cdot |1 - h(x_n)| < r^2 < \varepsilon$
- $|\frac{\partial}{\partial x_n}(f - g)| \leq |2x_n(1 - h(x_n)) - x_n^2 \cdot h'(x_n)| < 2r + r^2 \cdot \frac{4}{r} < 7r < \varepsilon$

Si $V = B_{(0, \frac{\varepsilon}{2})} \Rightarrow g|_V = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = f|_{S_f} = f|_{S_f \cap V}$. La restante afirmación viene de que $W^c \subset B_{(0,r)}^c$. \square

Observación 2.5 *El Lema 2.1 no vale en un entorno $\varepsilon - \mathcal{U}_f \in C^2$. Basta ver que el Hessiano de f tiene un elemento 2 en la última entrada. Daremos más adelante en el Teorema 4.3 una prueba diferente de esta afirmación.*

Para terminar con los preliminares referidos a singularidades mencionamos que tanto Mather (1971) como Morin (1972) revisaron los desarrollos de Thom y Boardman desde el punto de vista del análisis complejo y de la geometría algebraica dando una alternativa más concreta al desarrollo de la teoría. Y si bien la clasificación de Thom-Boardman es sumamente útil en el estudio de mapas singulares no es exhaustiva según trabajos de Porteous (1972) donde se exhibe un mapa $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ con singularidades aisladas de tipo S_2 en la clausura de las singularidades de tipo $S_{1,1,1,1}$ con comportamientos radicalmente diferentes. Las limitaciones de la clasificación Thom-Boardman se deben en definitiva a que si bien logra presentar las clases de singularidades como subvariedades de M , la clausura de su unión no necesariamente es subvariedad de M .

2.3. Dinámicos

Los resultados presentados en estas subsecciones están basados en los contenidos presentes en [KH], [J], [P] y [S]. En lo que sigue $f : M \rightarrow M$ es un endomorfismo diferenciable:

2.3.1. Transitividad

Definición 2.18 La *órbita* de x es $\mathcal{O}(x) = \{f^n(x), n \in \mathbb{N}\}$.

Definición 2.19 f es *transitivo* sii $\exists x \in M/\overline{\mathcal{O}(x)} = M$.

Teorema 2.4 Si f es continua son equivalentes:

1. f es transitivo
2. $\forall U, V$ abiertos en M , $\exists n \in \mathbb{N}/f^n(U) \cap V \neq \emptyset$
3. $\exists R$ residual (intersección numerable de abiertos densos) tal que $\forall x \in R : \overline{\mathcal{O}(x)} = M$.

Dem.:

1 \Rightarrow 2 - Es claro ya que la órbita de x visita a todo par de abiertos.

2 \Rightarrow 3 - Sea $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una base de abiertos de M .

Por hipótesis, $\forall U$ abierto en M , fijado k , $\exists n \in \mathbb{N}/f^n(U) \cap U_k \neq \emptyset$ por lo que $U \cap f^{-n}(U_k) \neq \emptyset$.

Definimos $B_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U_k)$ que es abierto y $\forall k$ verifica $U \cap B_k \neq \emptyset$.

Aplicando teorema de Baire, $R = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k$ es el conjunto buscado pues $\forall x \in R : x \in B_k, \forall k \Rightarrow x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U_k), \forall k \Rightarrow x \in f^{-n_0}(U_k)$ para algún n_0 , entonces $\forall k, \exists n_0/f^{n_0}(x) \in U_k$.

3 \Rightarrow 1 - Trivial. \square

Definición 2.20 $f \in C^k$ es C^k -**robustamente transitivo** sii existe un entorno $\mathcal{U}_f \in C^k$ de f tal que para todo mapa $g \in \mathcal{U}_f : g$ es transitivo.

2.3.2. Hiperbolicidad

En esta subsección se hace una revisión suscita de los conceptos centrales de la teoría de hiperbolicidad. Se elige presentarla así ya que no existe aún una teoría de endomorfismos singulares hiperbólicos. Distinguimos dos casos:

2.3.2.1 Difeomorfismos

Sea $\Lambda \subset M$ compacto invariante (observamos que tanto $\overline{\mathcal{O}(x)}$ como M lo son), entonces:

Definición 2.21 f es difeomorfismo hiperbólico en Λ sii $\forall x \in \Lambda, \exists E_x^u, E_x^s$ subespacios de $T_x M$ tales que:

- $T_x M = E_x^u \oplus E_x^s$,
- $D_x f(E_x^u) = E_{f(x)}^u$ y $D_x f(E_x^s) = E_{f(x)}^s$,
- $\exists c_u > 0, \exists \lambda_u \in (1, +\infty)/\forall v \in E_x^u : \|D_x^n f(v)\| \geq c_u \cdot \lambda_u^n \cdot \|v\|, \forall n > 0$,
- $\exists c_s > 0, \exists \lambda_s \in (0, 1)/\forall v \in E_x^s : \|D_x^n f(v)\| \leq c_s \cdot \lambda_s^n \cdot \|v\|, \forall n > 0$.

Definición 2.22 Decimos que un difeomorfismo que verifica los dos primeros ítems de la Definición 2.21 y alguno de los dos últimos es un difeomorfismo **parcialmente hiperbólico**.

Definición 2.23 Si $\Lambda = M$ en la Definición 2.21 entonces f se dice **Anosov**.

Los difeomorfismos hiperbólicos gozan de las siguientes propiedades:

- **Sombreado:** Toda α pseudo-órbita en Λ (es decir, un conjunto $\{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \subset \Lambda/\forall j : \|f(x_j) - x_{j+1}\| < \alpha$) es β sombreada por una órbita (es decir, existe $z \in M/\forall j : \|f^j(z) - x_j\| < \beta$).
- El conjunto estable local de un punto fijo x , $W_\varepsilon^s(x) = \{y \in M/\|f^n(x) - f^n(y)\| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}\}$ admite estructura de variedad. Además, $W^s(x) = \bigcup_{\{n \in \mathbb{N}\}} f^{-n}(W_\varepsilon^s(x))$ es una variedad inmersa en M .

- El conjunto inestable local de un punto fijo x , $W_\varepsilon^u(x) = \{y \in M / \|f^{-n}(x) - f^{-n}(y)\| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}\}$ admite estructura de variedad. Además, $W^u(x) = \bigcup_{\{n \in \mathbb{N}\}} f^n(W_\varepsilon^u(x))$ es una variedad inmersa en M .
- Expansividad: $\exists C > 0$ tal que si $\forall n \in \mathbb{Z}, \|f^n(x) - f^n(y)\| < C \Rightarrow x = y$
- Hiperbolicidad robusta: Existe un entorno abierto U de Λ y un entorno abierto \mathcal{U}_f de f tales que $\forall g \in \mathcal{U}_f : \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} g^j(U)$ es hiperbólico para g .

Si además f es Anosov:

- Si U_x es un entorno de x , entonces el conjunto no errante $\Omega(f) = \{x \in M / \forall U_x, \exists n > 1 / f^n(U_x) \cap U_x \neq \emptyset\}$ coincide con M .
- Los puntos periódicos son densos en M , es decir, $\overline{Per(f)} = M$.
- Es transitivo.
- Las variedades estable e inestable son densas en M .
- Estabilidad: Es C^r -estructuralmente estable; es decir, existe un entorno abierto $\mathcal{U}_f \in C^r$ de f tal que para toda $g \in \mathcal{U}_f, \exists h : M \rightarrow M$ un homeomorfismo tal que $f \circ h = h \circ g$.

2.3.2.2 Endomorfismos Regulares

Sean $f : M \rightarrow M$ de clase C^1 sin singularidades y un conjunto compacto $\Lambda \subset M$ tal que $f(\Lambda) = \Lambda$.

Definición 2.24 Llamamos **límite inverso** de f al conjunto $\widehat{M} = \{\widehat{x} \in M^{\mathbb{Z}} / \forall i \in \mathbb{Z}, f(x_i) = x_{i+1}\}$ donde $M^{\mathbb{Z}}$ es el conjunto de sucesiones $\widehat{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ enteras con imágenes en M .

Observación 2.6 \widehat{M} es compacto con la topología producto y f induce el shift unilateral F en \widehat{M} . Además, si f es biyectiva, entonces \widehat{M} es homeomorfo a M y F conjugada a f .

Definición 2.25 Decimos que Λ es un conjunto hiperbólico para f sii $\exists C > 0, \exists \mu$ tal que $0 < \mu < 1$ dos constantes reales tales que $\forall \widehat{x} \in \widehat{M}$ con $x_0 \in \Lambda$ y $\forall i \in \mathbb{Z}$:

- $T_{x_i} = E_{x_i}^s \oplus E_{x_i}^u$,
- $D_{x_i} f(E_{x_i}^u) = E_{x_{i+1}}^u$ y $\forall v \in E_{x_i}^u : \|D_{x_i}^n f(v)\| \geq (C \cdot \mu^n)^{-1} \cdot \|v\|, \forall n > 0$,
- $D_{x_i} f(E_{x_i}^s) = E_{x_{i+1}}^s$ y $\forall v \in E_{x_i}^s : \|D_{x_i}^n f(v)\| \leq C \cdot \mu^n \cdot \|v\|, \forall n > 0$.

Definición 2.26 Si en la Definición 2.25 es $\Lambda = M$ entonces f se llama **endomorfismo de Anosov**.

Como puede verse en [P], los endomorfismos regulares de Anosov gozan de propiedades similares a las de las de difeomorfismos de Anosov (bajo ciertas hipótesis más o menos restrictivas que pueden ajustarse apropiadamente en cada caso):

- Sombreado como en el caso de difeomorfismos. Si además la pseudo-órbita es periódica entonces la órbita que acompaña también lo es.
- Vale que $\overline{Per(f)} = \Omega(f) = M$ y esta propiedad es C^1 -estable (es decir, todo otro endomorfismo de Anosov suficientemente cercano en la topología C^1 tiene la misma propiedad).
- Pueden definirse los conjuntos estable e inestable $W^s(x)$ y $W^u(\widehat{x})$ análogamente y admiten estructura de variedad. Es interesante ver que la variedad estable local es una subvariedad de M , similar al caso de difeomorfismos, mientras que la variedad inestable depende de la pre-órbita elegida y por lo tanto no puede dársele estructura de variedad en M aunque si puede hacerse en el límite inverso \widehat{M} como variedad encajada.

- **Estabilidad en el límite inverso:** Existe un entorno abierto $\mathcal{U}_f \in C^1$ de f tal que para toda $g \in \mathcal{U}_f$, existe un homeomorfismo $h : \widehat{M}_g \rightarrow \widehat{M}_f / f \circ h = h \circ g$
- ([P], teorema 4.12) Si no es difeomorfismo ni es expansor ($\exists \lambda > 1 / \forall x \in M, \forall v \in T_x M : \|D_x f(v)\| > \lambda \cdot \|v\|$) entonces no es C^r -estable.

2.3.3. Descomposición Dominada.

Consideramos nuevamente $f : M \rightarrow M$, $f \in C^1$ y un conjunto compacto $\Lambda \subset M$ tal que $f(\Lambda) = \Lambda$.

Definición 2.27 Decimos que Λ admite una **descomposición dominada** sii $\forall x \in \Lambda$ el espacio tangente se escinde en dos subespacios tales que $T_x M = S_x \oplus U_x$ y:

- $D_x f(S_x) = S_{f(x)}$ y $D_x f(U_x) = U_{f(x)}$,
- U_x y S_x varían continuamente según $x \in \Lambda$,
- Existen $c > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tales que $\forall x \in \Lambda : \|Df_{|S_x}^n\| \cdot \|Df_{|U_{f^n(x)}}^{-n}\| \leq c \cdot \lambda^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

La definición nos dice que todo subespacio que no esté contenido en S_x o U_x converge exponencialmente rápido hacia U_x al iterarlo por el diferencial de f .

Tenemos la evidente implicancia: Λ hiperbólico $\Rightarrow \Lambda$ admite descomposición dominada.

La descomposición dominada puede caracterizarse en términos de conos inestables.

Definición 2.28 Sea $x \in M$, llamamos **cono** de parámetro a y vértice x a

$$C_a^u(x) = \left\{ (v_1, \dots, v_n) \in T_x M / \frac{\|(v_{k+1}, \dots, v_n)\|}{\|(v_1, v_2, \dots, v_k)\|} < a \right\}$$

para cada $k \in \mathbb{N} \cap [1, n-1]$.

En este caso decimos que el cono inestable es de **índice** $n - k$.

Definición 2.29 Decimos que un mapa f admite un **cono inestable** de parámetro a y vértice $x \in M$ sii existe $C_a^u(x) \subset T_x M$ tal que $D_x f(C_a^u(x)) \setminus \{0\} \subset C_a^u(f(x))$.

Decimos que f admite conos inestables si admite un cono inestable de vértice x , $\forall x \in M$.

Proposición 2.2 La existencia de conos inestables es una propiedad C^1 robusta:

Si f admite conos inestables entonces existe un entorno $\mathcal{U}_f \in C^1$ de f tal que $\forall g \in \mathcal{U}_f : g$ admite conos inestables.

La existencia de conos inestables es equivalente a la descomposición dominada:

Proposición 2.3 ([S], Proposición 2.2)

Λ admite descomposición dominada $\Leftrightarrow f$ admite conos inestables en Λ .

Los conos inestables están relacionados también a la hiperbolicidad; es posible vincular ambas definiciones geoméricamente observando que el truncamiento del numerador en la definición de cono corresponde al generador del espacio estable en la definición de hiperbolicidad y el del denominador al del espacio inestable.

3. Un endomorfismo f de \mathbb{T}^n .

3.1. Construcción de f .

Se construye ahora la función central de este trabajo a la que llamaremos f . A partir de ella podremos definir el mapa buscado H . En primer lugar establecemos como variedad ambiente al toro n -dimensional \mathbb{T}^n con la métrica standard. Sea entonces \widehat{A} la matriz diagonal de coeficientes enteros y dimensión n^2 que aparece a continuación: (vale la construcción para cualquier par de enteros λ y μ tales que $|\lambda| > |\mu| > 1$, la elección de los valores 8 y 2 se hace para facilitar la comprensión del contenido del trabajo)

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

\widehat{A} define un endomorfismo en el toro $A : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n/A(x_1, \dots, x_n) = (8x_1, 2x_2, \dots, 2x_n)$ localmente invertible. Observamos que $p = (\frac{1}{4}, 0, \dots, 0, \frac{1}{4}) \in \mathbb{T}^n \Rightarrow A.p = (0, 0, \dots, 0, \frac{1}{2})$ y $A^2.p = 0$. Este punto p es el centro de la bola donde se va a efectuar una perturbación que permitirá lograr el mapa que buscamos construir.

Comenzamos a fijar los parámetros que definirán a f .

En primer lugar elegimos $r > 0$ de modo que se verifiquen las siguientes condiciones:

- $A(B(p, r)) \cap \overline{B(p, r)} = \emptyset$,
- $A^{-1}(B(p, r)) \cap \{x \in \mathbb{R}^n/x_n = 0\} = \emptyset$ y
- $B(p, r) \cap B(A.p, r) = B(A.p, r) \cap B(0, r) = \emptyset$.

Lo elegimos de este modo para que al iterar f no existan puntos de la región de perturbación que se mantengan en ella ni que provengan del hiperplano $\{x_n = 0\}$ en una iteración por A .

Elegido r , fijamos un segundo valor θ , $0 < \theta < \frac{r}{2}$ y definimos una función $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ con un único punto crítico en $\frac{1}{16}$, con $\psi(\frac{1}{16}) = 4$ y $\psi'(\frac{1}{16}) = \psi''(\frac{1}{16}) = 0$; y con $\psi(x) = 0 \forall x$ en el complemento de $(\frac{1}{16} - \theta, \frac{1}{16} + \theta)$ y con un eje de simetría en la recta $x = \frac{1}{16}$ como se ve en la figura 2 (a).

Fijamos ahora otro parámetro arbitrario real $a \in (0, \frac{3}{7})$ (este parámetro jugará un papel clave en la Sección 3.3 donde estudiamos la dinámica de f) y por último fijamos un valor δ con $0 < \delta < 2\theta$ que verifique la siguiente condición: consideramos, que como la derivada de ψ es acotada una vez que se ha fijado θ ; si llamamos $M(\theta) := M = \max_{x \in \mathbb{R}}\{|\psi'(x)|\}$ a este máximo, le pedimos a δ verificar $2.M.r.\delta.(1+a) < a$.

Una vez elegido δ , consideramos una función $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ clase C^∞ tal que:

- φ' es como en la Figura 2 (b),
- $\varphi(\frac{1}{4}) = 0$, $\varphi'(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$, $\varphi''(\frac{1}{4}) \neq 0$, $\varphi'(\frac{1}{4} + \frac{\delta}{8}) = 1$
- $\varphi(x) = 0$ para todo $x \notin [\frac{1}{4} - \frac{\delta}{4}, \frac{1}{4} + \frac{3\delta}{4}]$.

Observación 3.1 $\max\{|\varphi(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leq \delta$.

Pasamos entonces a definir un mapa que depende de r , δ y θ al que por simplicidad llamaremos f y es

$$f := f_{r,\theta,\delta} : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n/f(x_1, \dots, x_n) = \left(8x_1, 2x_2, \dots, 2x_n - \varphi(x_n) \cdot \psi \left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 \right) \right). \quad (1)$$

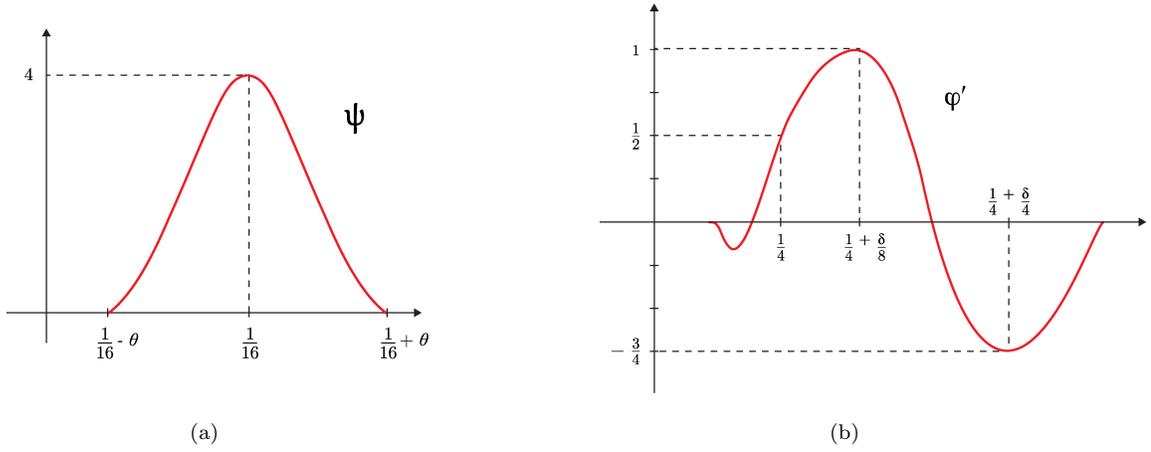


Figura 2: Gráficos de ψ y φ'

Para facilitar la lectura lo anotamos como $f(x_1, \dots, x_n) = (8x_1, 2x_2, \dots, 2x_n - \varphi \cdot \psi)$, sobreentendiendo las evaluaciones que aparecen en la definición.

Observación 3.2 . Es inmediato verificar las siguientes propiedades:

- 1- $f \in C^\infty$.
- 2- $f|_{B_{(p,r)}^c} = A$.
- 3- $f(p) = A \cdot p = (0, 0, \dots, 0, \frac{1}{2})$ y $f^2(p) = A^2 \cdot p = 0$.

3.2. El conjunto crítico de f

Recordamos que el conjunto crítico de f está dado por $S_f = \{x \in \mathbb{T}^n / \det(D_x f) = 0\}$. Para determinarlo comenzamos calculando $D_x f$ en $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$D_x f = \begin{pmatrix} 8 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ -2 \cdot x_1 \cdot \varphi \cdot \psi' & -2 \cdot x_2 \cdot \varphi \cdot \psi' & \cdots & -2 \cdot x_{n-1} \cdot \varphi \cdot \psi' & 2 - \varphi' \cdot \psi \end{pmatrix} \quad (2)$$

Un cálculo directo provee $\det(D_x f) = 8 \cdot (2)^{n-2} \cdot (2 - \varphi' \cdot \psi)$ y por lo tanto $S_f = \{x \in \mathbb{T}^n / 2 - \varphi' \cdot \psi = 0\}$.

Observamos:

- 1) Que el punto $p \in S_f$ y por lo tanto $S_f \neq \emptyset$.
- 2) Que la última columna del jacobiano (2) es nula en todo punto crítico $\Rightarrow \forall x \in S_f, \ker(D_x f)$ está generado por el conjunto $\{(0, \dots, 0, 1)\}$.
- 3) Que el conjunto crítico S_f es persistente en el sentido de que para todo $k \geq 1$ existe un C^k entorno de f para el cual todos sus mapas tienen conjunto crítico no vacío, pues si $q_1 = (\frac{1}{4}, 0, \dots, 0, \frac{1}{4} + \frac{\delta}{4}) \Rightarrow \det(D_{q_1} f) = 5 \cdot (8^{n-1})$ y si $q_2 = (\frac{1}{4}, 0, \dots, 0, \frac{1}{4} + \frac{\delta}{8}) \Rightarrow \det(D_{q_2} f) = -2 \cdot (8^{n-1}) \therefore \exists \mathcal{U}_f \in C^1 / \forall g \in \mathcal{U}_f: S_g \neq \emptyset$.

3.2.1. Clasificación de S_f

El objetivo de este apartado es probar que S_f es subvariedad de \mathbb{T}^n y de codimensión 1. Comenzamos haciendo un razonamiento que conduce al camino que da la prueba.

Sea $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices de coeficientes reales y cuadradas de tamaño n , y por \mathcal{R}_k a las matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rango k . Entonces \mathcal{R}_k es una subvariedad de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ([GG], capítulo 2, proposición 5.3). En particular, si $k = n - 1$ entonces \mathcal{R}_{n-1} es de dimensión $n^2 - 1$. Si definimos un mapa h (que depende de f)

$$h_f := h : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/h(x) = D_x f$$

el cual asigna a cada punto x de \mathbb{T}^n el jacobiano de f en $x \Rightarrow h(S_f) \subset \mathcal{R}_{n-1}$ pues $\forall x \in S_f : rg(D_x f) = n - 1$. Como además $h^{-1}(\mathcal{R}_{n-1}) \subset S_f \Rightarrow S_f = h^{-1}(\mathcal{R}_{n-1})$.

Bastaría entonces probar que $h \bar{\cap} \mathcal{R}_{n-1}$ para que, aplicando el Teorema 2.1 tengamos la prueba.

Observemos que si $x \notin S_f, h(x) \notin \mathcal{R}_{n-1} \Rightarrow h \bar{\cap} \mathcal{R}_{n-1}$.

Resta ver el caso $x \in S_f$: por definición: $h \bar{\cap} \mathcal{R}_{n-1}$ en $x \Leftrightarrow T_{h(x)}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = T_{h(x)}(\mathcal{R}_{n-1}) \oplus (D_x h)(T_x(\mathbb{T}^n))$.

Equivalentemente $h \bar{\cap} \mathcal{R}_{n-1}$ en $x \Leftrightarrow T_{h(x)}(\mathbb{R}^{n^2}) = T_{h(x)}(\mathcal{R}_{n-1}) \oplus (D_x h)(\mathbb{R}^n)$.

Alcanza entonces determinar $T_{h(x)}(\mathcal{R}_{n-1})$ y $Im(D_x h)$ cuando $x \in S_f$:

Lema 3.1 *Se cumple que*

$$\forall x \in S_f : T_{h(x)}(\mathcal{R}_{n-1}) = \{(x_1, \dots, x_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2} / x_{n^2} = 0\}.$$

Dem.

Consideremos el mapa $\xi : \mathcal{R}_{n-1} \rightarrow \mathbb{R} / \xi(M) = det(M)$.

$\forall M \in \mathcal{R}_{n-1}$ el diferencial de ξ es $D_M \xi = (A_{11}, A_{12}, \dots, A_{nn})$ siendo A_{ij} el adjunto del elemento en la fila i y la columna j de la matriz M ; y como $M \in \mathcal{R}_{n-1}$, sabemos que al menos uno de estos adjuntos es no nulo, por lo que el diferencial de ξ es de dimensión mayor o igual que uno $\forall M \in \mathcal{R}_{n-1}$ lo que implica que $\forall M \in \xi^{-1}(0) : D_M \xi$ es sobreyectivo. Equivalentemente, 0 es un valor regular para el mapa ξ . Se deduce, según el Teorema 2.3, que el espacio tangente a \mathcal{R}_{n-1} en $h(x)$ es $T_{h(x)}(\xi^{-1}\{0\}) = ker(D_{h(x)}\xi)$. Observando que $h|_{S_f}$ tiene la última columna nula $\Rightarrow D_{h(x)}(\xi) = (0, \dots, 0, 8 \cdot (2^{n-2}))$ de lo que $\forall x \in S_f : ker(D_{h(x)}\xi) = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n^2-1}, 0)\} \subset \mathbb{R}^{n^2}$.

Combinando $T_{h(x)}(\mathcal{R}_{n-1}) = T_{h(x)}(\xi^{-1}\{0\}) = ker(D_{h(x)}\xi)$ y el Teorema 2.3 tenemos la tesis. \square

Lema 3.2 *Se cumple que*

$$\forall x \in S_f : Im(D_x h) \supset \{(0, 0, \dots, 0, 1)\}$$

Dem.

Como $h : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ y $f \in C^2 \Rightarrow h \in C^1$ por lo tanto $\exists D_x h \in \mathcal{M}_{n^2 \times n}(\mathbb{R})$ y es continua. La tesis del lema es equivalente a que el jacobiano $D_x h$ tenga algún elemento no nulo en la última fila.

Lo calculamos explícitamente:

$$(D_x h)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < n^2 - n + 1 \\ -2 \cdot \varphi \cdot \psi - 4 \cdot x_j^2 \cdot \psi'' & \text{si } n^2 - n < i < n^2 \text{ y } j = i \\ -4 \cdot x_{i-n^2+n} \cdot x_j \cdot \varphi \cdot \psi'' & \text{si } n^2 - n < i < n^2 \text{ y } j \notin \{i, n\} \\ -2 \cdot x_{i-n^2+n} \cdot \varphi' \cdot \psi' & \text{si } n^2 - n < i < n^2 \text{ y } j = n \\ -2x_j \cdot \varphi' \cdot \psi' & \text{si } i = n^2 \text{ y } j \neq n \\ -\varphi'' \cdot \psi & \text{si } i = n^2 \text{ y } j = n \end{cases}$$

Considerando $i = n^2$:

Si $\varphi'' \neq 0$, como $\psi > 0$ en todo punto de S_f tenemos un elemento no nulo en la última columna, cuando $j = n$. Si $\varphi'' = 0$, mirando el gráfico de φ' (Figura 2) encontramos únicamente tres puntos donde es $\varphi'' = 0$. Descartamos

los dos cuya imagen por φ' es negativa pues no están en S_f (recordando que $\forall x \in S_f : 2 - \varphi' \cdot \psi = 0$) y descartamos en consecuencia también la última columna. Queda ver entonces solamente que si $x_n = \frac{1}{4} + \frac{\delta}{8}$ entonces $\exists j / -2 \cdot x_j \cdot \varphi' \cdot \psi' \neq 0$ ó equivalentemente $x_j \cdot \psi' \neq 0$ pues $-2 \cdot \varphi'(\frac{1}{4} + \frac{\delta}{8}) = -2$.

Discutimos dos casos, mirando la Ecuación (1) y la Figura 2:

Si fuera $\psi' = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 = \frac{1}{16}$, y como $\psi(\frac{1}{16}) = 4 \Rightarrow 2 - \varphi' \cdot \psi = -2 \Rightarrow 2 - \varphi' \cdot \psi \neq 0 \Rightarrow x \notin S_f$.

Si es $\psi' \neq 0$ y fuera $\forall j : x_j = 0$, como $\psi(0) = 0 \Rightarrow 2 - \varphi' \cdot \psi = 2 \Rightarrow 2 - \varphi' \cdot \psi \neq 0 \Rightarrow x \notin S_f$

Por lo tanto $\forall x \in S_f / x_n = \frac{1}{4} + \frac{\delta}{8}$, existe un $j < n$ tal que $x_j \cdot \psi' \neq 0$.

Queda así probada la afirmación. \square

Teorema 3.1 S_f es subvariedad de \mathbb{T}^n de codimensión 1.

Dem.:

Recordando que $h \pitchfork \mathcal{R}_{n-1}$ en $x \Leftrightarrow T_{h(x)}(\mathbb{R}^{n^2}) = T_{h(x)}(\mathcal{R}_{n-1}) \oplus (D_x h)(\mathbb{R}^n)$, aplicamos los Lemas 3.1 y 3.2 junto con el Teorema 2.1. \square

3.2.2. Geometría de S_f

Habiendo demostrado ya que S_f es subvariedad de \mathbb{T}^n , pasamos a mirar su geometría. El objetivo de esta sección es probar que el conjunto crítico es un producto de dos esferas $S_f \simeq S^{n-2} \times S^1$. A modo de introducción, lo analizamos primero en dimensiones bajas y luego probamos el caso general.

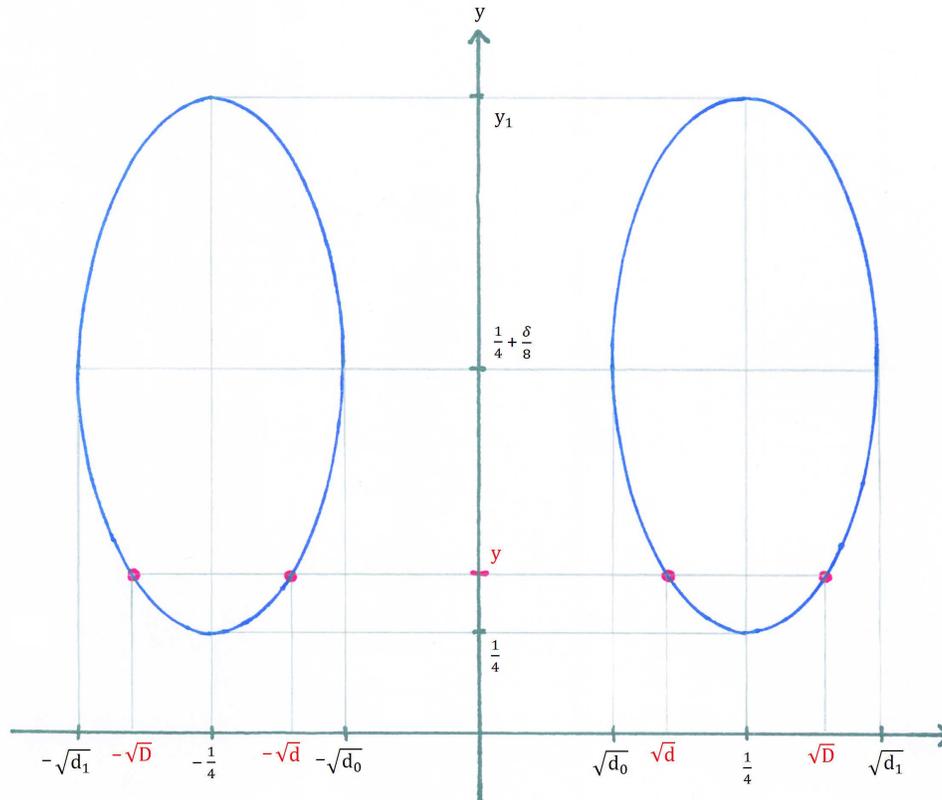


Figura 3: S_f para $n = 2$.

Caso $n = 2$:

Este caso es estudiado en [IP]. No obstante, dado que lo desarrollado allí no es idéntico a lo que aparece en este trabajo y que además es relevante para nuestro propósito lo revisamos.

En primer lugar tenemos que f es $f := f_{r,\theta,\delta} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 / f(x, y) = (8x, 2y - \varphi(y) \cdot \psi(x^2))$.

El conjunto crítico es $S_f = \{(x, y) \in \mathbb{T}^2 / 2 - \varphi'(y) \cdot \psi(x^2) = 0\}$. Como $\psi \leq 4$, si $\varphi' < \frac{1}{2} \Rightarrow \psi \cdot \varphi' < 2$, por lo tanto debe ser $\forall (x, y) \in S_f : \varphi'(y) \geq \frac{1}{2}$; en consecuencia $\varphi'(y) \in [\frac{1}{2}, 1]$ y $\psi(x^2) \in [2, 4]$.

Volvamos a los gráficos de φ' y ψ (Figura 2).

Sea $[\frac{1}{4}, y_1]$ el intervalo donde $\varphi'(y) \in [\frac{1}{2}, 1] \Leftrightarrow y \in [\frac{1}{4}, y_1]$.

Sea $[d_0, d_1]$ el intervalo donde $\psi(x^2) \in [2, 4] \Leftrightarrow x^2 \in [d_0, d_1]$.

Para cada $y \in [\frac{1}{4}, y_1]$, $\exists d = d(y) \in [d_0, d_1]$ con $\psi(d(y)) = \frac{2}{\varphi'(y)}$ tales que $\{x^2 = d(y)\} \times \{y\} \subset S_f$. En particular, existe un único $d = \frac{1}{16}$ para los casos $y = \frac{1}{4}$ o $y = y_1$ y existen *dos* valores $d(y) < D(y)$ para cada $y \in (\frac{1}{4}, y_1)$ que verifican esta propiedad y son simétricos con respecto a $\frac{1}{16}$. Lo que está sucediendo es que mientras y 'recorre' el intervalo $[\frac{1}{4}, y_1]$, el conjunto crítico se va describiendo como una unión del borde de dos intervalos con centro 0 que son esferas de codimensión 2 en \mathbb{T}^2 como muestra la Figura 3. Tenemos entonces que S_f se puede escribir como $\bigcup_{y \in [\frac{1}{4}, y_1]} (\{-\sqrt{D(y)}, -\sqrt{d(y)}\} \cup \{\sqrt{d(y)}, \sqrt{D(y)}\}) \times \{y\}$; pero como además $y = \frac{1}{4}$ e $y = y_1$ tienen el mismo valor $d(y) = D(y) = \frac{1}{16}$ podemos identificarlos para obtener $S_f \simeq S^0 \times S^1$. Observamos que los valores extremos de d y D se obtienen cuando $y = \frac{1}{4} + \frac{\delta}{8}$

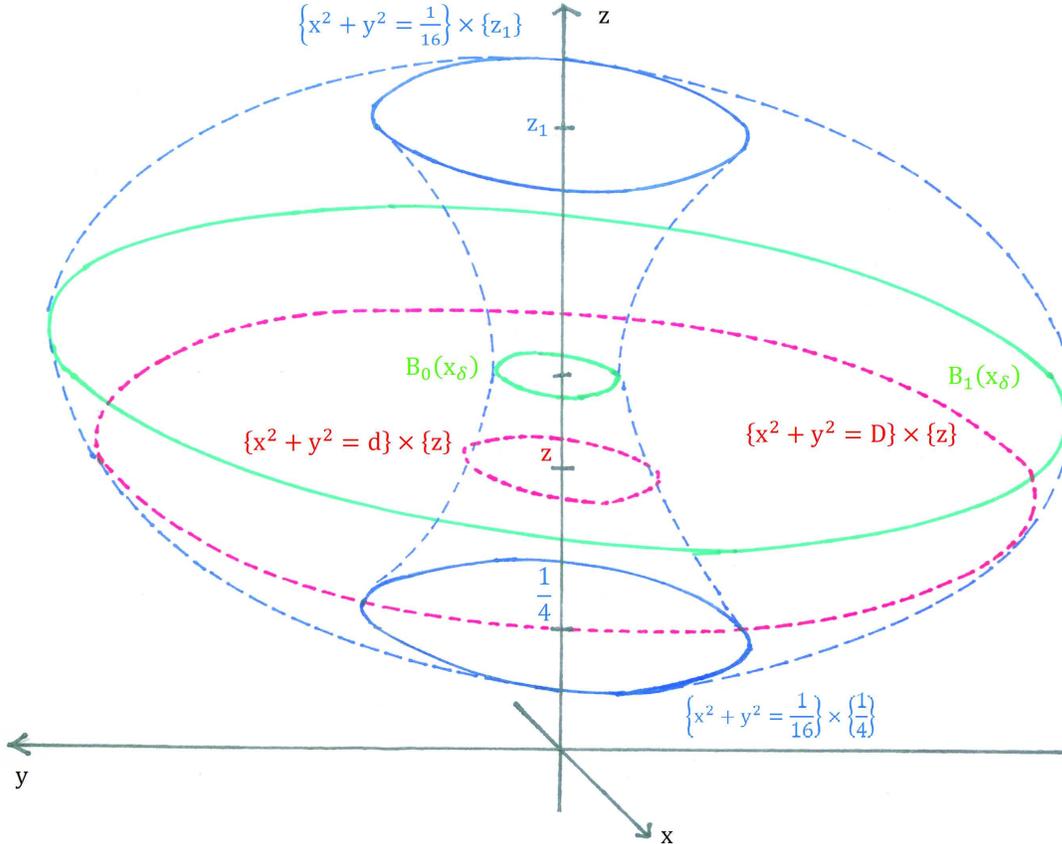


Figura 4: S_f para $n = 3$.

Caso $n = 3$:

En este caso tenemos que f es $f := f_{r,\theta,\delta} : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3 / f(x, y, z) = (8x, 2y, 2z - \varphi(z) \cdot \psi(x^2 + y^2))$.

El conjunto crítico es $S_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{T}^3 / 2 - \varphi'(z) \cdot \psi(x^2 + y^2) = 0\}$. Igual que antes, como $\psi \leq 4$, si $\varphi' < \frac{1}{2} \Rightarrow \psi \cdot \varphi' < 2$, por lo tanto debe ser $\forall (x, y, z) \in S_f : \varphi'(y) \geq \frac{1}{2}$ y en consecuencia $\varphi'(z) \in [\frac{1}{2}, 1]$ y $\psi(x^2 + y^2) \in [2, 4]$.

Volviendo nuevamente a los gráficos de φ' y ψ se tiene:

$[\frac{1}{4}, z_1]$ es el intervalo tal que $\varphi'(z) \in [\frac{1}{2}, 1] \Leftrightarrow z \in [\frac{1}{4}, z_1]$.

$[d_0, d_1]$ es el intervalo tal que $\psi(x^2 + y^2) \in [2, 4] \Leftrightarrow x^2 + y^2 \in [d_0, d_1]$.

Para cada $z \in [\frac{1}{4}, z_1]$, $\exists d = d(z) \in [d_0, d_1]$ con $\psi(d(z)) = \frac{2}{\varphi'(z)}$ tales que $\{x^2 + y^2 = d(z)\} \times \{z\} \subset S_f$. En particular, existe un único $d = \frac{1}{16}$ para los casos $z = \frac{1}{4}$ o $z = z_1$ y existen *dos* valores $d(z) < D(z)$ para cada $z \in (\frac{1}{4}, z_1)$ que verifican esta propiedad y son simétricos con respecto a $\frac{1}{16}$. Lo que está sucediendo ahora es que mientras z 'recorre' el intervalo $[\frac{1}{4}, z_1]$ el conjunto crítico se va describiendo como la unión del borde de dos bolas de centro $(0, 0, z)$ de dimensión dos (que son esferas de codimensión 2 en \mathbb{T}^3) contenidas en el hiperplano $z = cte.$ como muestra la Figura 4. Tenemos entonces que S_f se puede escribir como $\bigcup_{z \in [\frac{1}{4}, z_1]} (\{x^2 + y^2 = d(z)\} \cup \{x^2 + y^2 = D(z)\}) \times \{z\}$ o lo que es lo mismo $S_f = \bigcup_{z \in [\frac{1}{4}, z_1]} (\partial B_{(\tilde{0}, \sqrt{d(z)})} \cup \partial B_{(\tilde{0}, \sqrt{D(z)})}) \times \{z\}$. Además, como $z = \frac{1}{4}$ y $z = z_1$ tienen el mismo valor de $d = D = \frac{1}{16}$ podemos identificar $\{x^2 + y^2 = \frac{1}{16}\} \times \{\frac{1}{4}\}$ con $\{x^2 + y^2 = \frac{1}{16}\} \times \{z_1\}$ para obtener $S_f \simeq S^1 \times S^1$. Observamos además que otra vez los valores extremos de d y D se obtienen cuando $z = \frac{1}{4} + \frac{\delta}{8}$

Analizando el caso general como los particulares deducimos:

$S_f = \{x \in \mathbb{T}^n / 2 - \varphi' \cdot \psi = 0\}$ y $\psi \leq 4$ entonces si $\varphi' < \frac{1}{2}$, $\psi \cdot \varphi' < 2$, por lo tanto debe ser

$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in S_f : \varphi'(x_n) \geq \frac{1}{2}$ y en consecuencia $\psi \in [2, 4]$.

Volvamos a los gráficos de φ' y ψ (Figura 2).

Sea $[\frac{1}{4}, x_1]$ el intervalo donde $\varphi'(x_n) \in [\frac{1}{2}, 1] \Leftrightarrow x_n \in [\frac{1}{4}, c]$.

Sea $[d_0, d_1]$ el intervalo donde $\psi(d) \in [2, 4] \Leftrightarrow d \in [d_0, d_1]$.

Para cada $x_n \in [\frac{1}{4}, c]$, $\exists d = d(x_n) \in [d_0, d_1]$ tales que $\partial B_{(\tilde{0}, \sqrt{d(x_n)})} \times \{x_n\} \subset S_f$.

Además, como $\forall x \in S_f, \varphi' \cdot \psi = 2 \Rightarrow \forall x_n \in [\frac{1}{4}, c]$ existen *dos* valores $d(x_n) < D(x_n)$ que verifican esta propiedad para $x_n \in (\frac{1}{4}, c)$, y uno único $d = D = \frac{1}{16}$ para ambos casos $x = \frac{1}{4}$ ó $x = c$ (como muestra la Figura 5). Lo que está sucediendo es que mientras x_n 'recorre' el intervalo $[\frac{1}{4}, c]$, el conjunto crítico se va foliando por el borde dos bolas de codimensión uno (que son esferas de codimensión 2) en \mathbb{T}^n . A las bola de centro $(\tilde{0}, x_n)$ de esta descripción les llamamos $B_0(x_n)$ a la que tiene el menor radio $d(x_n)$ y $B_1(x_n)$ a la de que tiene el mayor radio $D(x_n)$. Definiendo $x_\delta := x_n = \frac{1}{4} + \frac{\delta}{8}$, se tiene que en x_δ es donde se obtienen las bolas de radios extremos. De este modo S_f se puede escribir como $S_f = \bigcup_{x_n \in [\frac{1}{4}, c]} (\partial B_0(x_n) \cup \partial B_1(x_n)) \times \{x_n\}$, sin embargo, como $B(\frac{1}{4}) = B(c)$ podemos identificar $(\frac{1}{4}, B(\frac{1}{4})) \sim (c, B(c))$ para obtener

$$S_f \simeq S^{n-2} \times S^1.$$

que es lo que queríamos probar. \square

3.2.3. Clasificación de los puntos críticos

Teorema 3.2 *Todo punto crítico salvo aquellos en los cuales $x_n = x_\delta$ es de doblez.*

Dem.:

Por la observación 2 de la Ecuación (2), $\ker(D_x f) = \{(0, \dots, 0, 1)\}, \forall x \in S_f \Rightarrow$ como $T_x S_f$ es de dimensión $n - 1$, alcanza con que $\{(0, 0, \dots, 0, 1)\} \not\subseteq T_x S_f$ para que x sea de doblez. Ya sabemos, según el Lema 3.2 que $S_f = h^{-1}(\mathcal{R}_{n-1}) \Rightarrow T_x S_f = T_x h^{-1}(\mathcal{R}_{n-1}) = \ker(D_x h)$. En la prueba se vio que si $\varphi'' \neq 0 \Rightarrow (0, 0, \dots, 1) \in \text{Im}(D_x h) \Rightarrow (0, 0, \dots, 1) \notin \ker(D_x h) \Rightarrow x$ es de doblez. Deducimos que si x no es de doblez entonces $\varphi'' = 0 \Rightarrow x_n = \frac{1}{4} + \frac{\delta}{8}$, de lo que deducimos que los únicos puntos críticos que no son de doblez son los que están en $(B_0(x_\delta) \cup B_1(x_\delta)) \times \{x_\delta\}$. \square

Corolario 3.1 F_f es abierto.

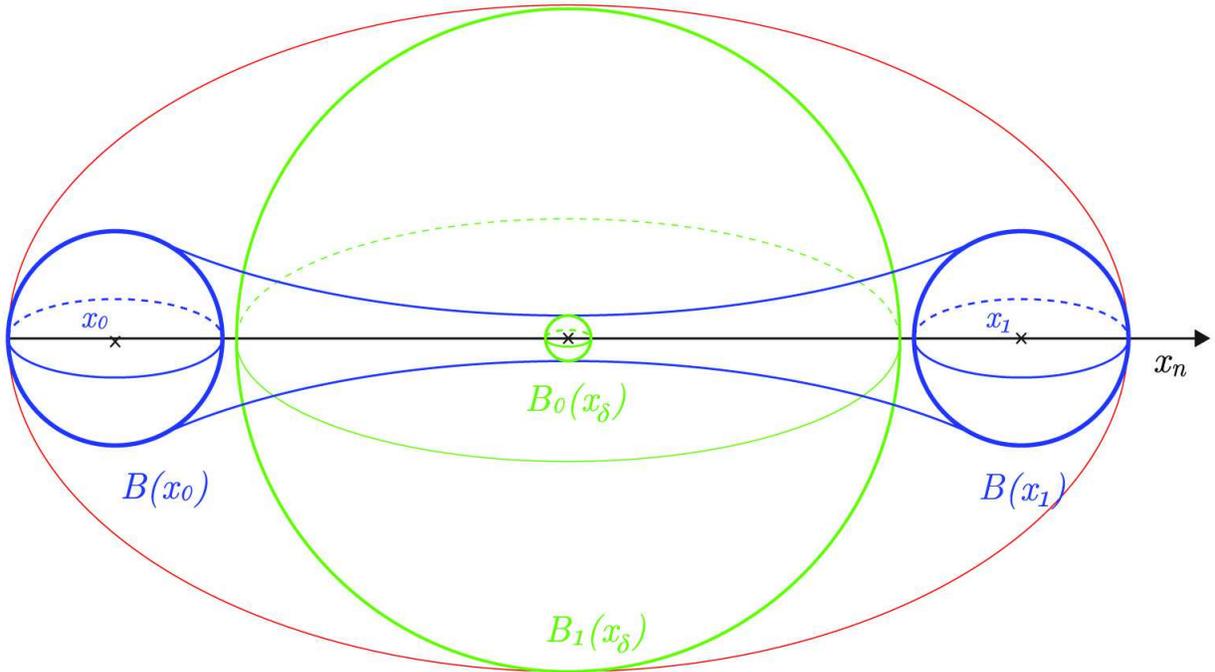


Figura 5: Conjunto crítico S_f para $n \geq 3$, $x_\delta = \frac{1}{4} + \frac{\delta}{8}$, $B(x_0) = B_{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})}$, $B(x_1) = B_{(c, \frac{1}{4})}$

3.3. Dinámica de f .

Una de las propiedades esenciales que posee el mapa f es que preserva conos inestables. Se utilizan en esta sección las siguientes notaciones:

- Si $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \Rightarrow \tilde{v}_h = (v_1, v_2, \dots, v_h)$ y $\tilde{v}_{n-1} = \tilde{v}$
- Si $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ y $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \Rightarrow \langle v, w \rangle_h = \sum_{k=1}^h v_k \cdot w_k$

Recordemos, llamamos cono de parámetro a y vértice x a $C_a^u(x) = \{v \in T_x M / \frac{\|(v_{k+1}, \dots, v_n)\|}{\|(v_1, v_2, \dots, v_k)\|} < a\}$. Recordemos también que la existencia de conos inestables se puede asociar a la idea de espacio inestable en el contexto de mapas hiperbólicos y que nuestro mapa f es un difeomorfismo local en todo punto fuera de la región de perturbación. Para el caso $k = 1$ (que es el de los conos que aparecen en este trabajo); el espacio inestable fuerte E^u vendría a estar generado por el primer vector coordenado $\{\vec{e}_1\}$.

En la prueba del lema a continuación se pone en evidencia el porqué de la elección del parámetro a y la condición impuesta sobre δ al principio cuando construimos f . Recordemos que le pedimos a δ verificar $2.M.r.\delta.(1+a) < a$ para ese parámetro. Cabe también observar que si δ_0 es otro parámetro positivo y menor que δ entonces las afirmaciones a continuación valen también para δ_0 .

Lema 3.3 Existencia de conos inestables para f .

Afirmación: Dado $a \in (0, \frac{2}{7})$ (el cual fue fijado antes de definir δ):

1. $C_a^u(x) = \{(v_1, \dots, v_n) / \frac{\|v_{2, \dots, v_n}\|}{|v_1|} < a\}$ satisface $\overline{D_x f(C_a^u(x))} \setminus \{0\} \subseteq C_a^u(f(x))$

2. Para todo $v \in C_a^u(x)$ se cumple $\|D_x f(v)\| > 7\|v\|$.

Demostración:

1. Por la ecuación (1), tenemos que $\forall v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in C_a^u(x)$:

$$u(u_1, \dots, u_n) := D_x f(v) = (8.v_1, 2.v_2, \dots, -2.\langle x, v \rangle_{n-1}.\varphi.\psi' + v_n.(2 - \varphi'.\psi))$$

Calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\|u_2, \dots, u_n\|}{|u_1|} &= \frac{\|(2.v_2, \dots, 2.v_{n-1}, -2.\langle x, v \rangle_{n-1}.\varphi.\psi' + v_n.(2 - \varphi'.\psi))\|}{|8.v_1|} \leq \\ &\leq \frac{\|2.v_2, \dots, 2.v_{n-1}\|}{|8.v_1|} + \frac{2.\|\tilde{x}\|.\|\tilde{v}\|.\|\varphi\|.\|\psi'\|}{|8.v_1|} + \frac{|2 - \varphi'.\psi|.|v_n|}{|8.v_1|} < \frac{a}{4} + 2.r.\left(\frac{1+a}{8}\right).\delta.M + \frac{5.a}{8} < a \end{aligned}$$

donde en la primera utilizamos las desigualdades triangular y de Cauchy-Schwarz; en la segunda utilizamos que:

- $v \in C_a^u(x)$
- $\|\tilde{x}\| \leq \|x\| < r$
- $|\varphi| < \delta$
- $|\psi'| < M$
- $|2 - \varphi'.\psi| \leq 5$ pues $\frac{-3}{4} \leq \varphi' \leq 1$ y $0 \leq \psi \leq 4$
- $\frac{\|\tilde{v}\|}{|8.v_1|} \leq \frac{|v_1| + \|v_2, \dots, v_{n-1}\|}{|8.v_1|} \leq \frac{1+a}{8}$

y en la tercera la última condición impuesta sobre δ . \square

2. $\forall v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in C_a^u(x)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\|D_x f(v)\|}{7.\|v\|}\right)^2 &= \frac{64.v_1^2 + 4.\sum_{j=2}^{n-1}.v_j^2 + (-2.\langle x, v \rangle_{n-1}.\varphi.\psi' + v_n.(2 - \varphi'.\psi))^2}{49.\sum_{j=1}^n v_j^2} \geq \\ &\geq \frac{64.v_1^2}{49.\sum_{j=1}^n v_j^2} > \frac{64}{49(1+a^2)} > \frac{58}{49(1+a^2)} > 1, \forall a \in \left(0, \frac{3}{7}\right). \square \end{aligned}$$

Corolario 3.2 Existe un entorno $\mathcal{U}_f \in C^1$ de f tal que para toda $g \in \mathcal{U}_f$: g admite conos inestables tales que $\forall g \in \mathcal{U}_f, \forall v \in C^u(x) : \|D_x g(v)\| \geq 7\|v\|$.

Corolario 3.3 \mathbb{T}^n admite descomposición dominada bajo f .

Corolario 3.4 \vec{e}_1 es una dirección inestable fuerte para f .

4. Un endomorfismo distinguido H de \mathbb{T}^n

Pasamos ahora a construir el mapa objetivo de este trabajo, un mapa H que es C^2 robustamente transitivo pero no C^1 robustamente transitivo obtenido de perturbar f . La idea es ver que, dado ε , alrededor de p existe un abierto de \mathbb{T}^n cuya imagen por algún g en $\varepsilon - \mathcal{U}_H \in C^1$ a futuro es 'plana' y esto permitirá probar que la transitividad no es C^1 robusta. Finalmente veremos que H sí es C^2 robustamente transitivo.

4.1. Construcción de H .

Comenzamos probando que en el conjunto crítico la última variable es, cerca de p , función de las anteriores y todas las derivadas de primer y segundo orden en p de esta función son nulas.

Teorema 4.1 $\exists U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ entorno abierto de $\tilde{p} = (\frac{1}{4}, 0, \dots, 0)$; $\exists V \subset \mathbb{R}$ entorno abierto de $\frac{1}{4}$, $\exists \phi : U \rightarrow V$ suave con $\phi(\tilde{p}) = \frac{1}{4}$ tales que $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in S_f \cap U \times V \Rightarrow x_n = \phi(x_1, \dots, x_{n-1})$.

Dem.:

Recordemos que $S_f = \{x \in \mathbb{T}^n / 2 - \varphi' \cdot \psi = 0\}$ y $p = (\frac{1}{4}, 0, \dots, 0, \frac{1}{4}) \in S_f$. Comenzamos derivando en S_f según x_n para obtener $\frac{\partial}{\partial x_n}(2 - \varphi' \cdot \psi) = -\varphi'' \cdot \psi$ que evaluado en p es no nulo pues $\varphi''(\frac{1}{4}) \neq 0$. Utilizando el teorema de la función implícita, \exists un entorno abierto U de $\tilde{p} = (\frac{1}{4}, 0, \dots, 0)$, $\exists V$ un entorno abierto de $\frac{1}{4}/U \times V \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $\exists \phi : U \rightarrow V / \phi(\tilde{p}) = \frac{1}{4}$ suave tales que $\forall x \in S_f \cap U \times V, x = (\tilde{x}, \phi(\tilde{x}))$. \square .

Vemos en primer lugar que todas las derivadas de primer y segundo orden de ϕ son nulas en \tilde{p} .

Lema 4.1 $\forall k, k' \leq n-1 : \frac{\partial}{\partial x_k} \phi(\tilde{p}) = \frac{\partial^2}{\partial x_k \cdot x_{k'}} \phi(\tilde{p}) = 0$

Dem.

Computamos las derivadas según x_k : $\forall x \in S_f, 2 - \varphi'(\phi) \cdot \psi = 0 \Rightarrow \forall k \leq n-1 : \frac{\partial}{\partial x_k} [2 - \varphi'(\phi) \cdot \psi] = 0 \Rightarrow$

$$\forall k \leq n-1 : -\varphi''(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \phi \cdot \psi - 2 \cdot \varphi'(\phi) \cdot x_k \cdot \psi' = 0 \therefore \frac{\partial}{\partial x_k} \phi = -\frac{2x_k \cdot \varphi'(\phi) \cdot \psi'}{\varphi''(\phi) \cdot \psi}$$

Derivando de nuevo,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \cdot x_{k'}} \phi = \left[\frac{\partial}{\partial x_{k'}} \left(\frac{-2x_k \cdot \varphi'(\phi)}{\varphi''(\phi) \cdot \psi} \right) \right] \cdot \psi' + \left(\frac{-2x_k \cdot \varphi'(\phi)}{\varphi''(\phi) \cdot \psi} \right) \cdot (2x_{k'} \cdot \psi'')$$

Es claro que ambas están bien definidas en U y como $\psi'(\frac{1}{16}) = \psi''(\frac{1}{16}) = 0$ entonces se anulan en \tilde{p} . \square

Corolario 4.1 $\forall \varepsilon' > 0, \exists U' \subset U$ entorno abierto de \tilde{p} en $\mathbb{R}^{n-1} / \forall k, k' \leq n-1$;

$$\max \left\{ \left| \phi(x) - \frac{1}{4} \right|, \left| \frac{\partial}{\partial x_k} \phi(x) \right|, \left| \frac{\partial^2}{\partial x_k \cdot x_{k'}} \phi(x) \right| \right\} < \varepsilon', \forall x \in U'$$

Dem.:

Aplicar el Lema 4.1 y la definición de continuidad. \square

Corolario 4.2 $\forall \varepsilon' > 0, \exists U' \subset U$ entorno abierto de \tilde{p} en $\mathbb{R}^{n-1} / \forall x \in U', \forall k \leq n-1$;

$$\left| \phi(x) - \frac{1}{4} \right| < \varepsilon' \|x - \tilde{p}\|^2, \left| \frac{\partial}{\partial x_k} \phi(x) \right| < \varepsilon' \|x - \tilde{p}\|.$$

Dem.

Aplicar el teorema de Taylor a ϕ en \tilde{p} junto con el Lema 4.1. \square

Vemos a continuación que la imagen del conjunto crítico a través de f goza de la misma propiedad que él, es decir, la última coordenada es función de las anteriores y todas las derivadas de primer y segundo orden de esta nueva función (a la que llamaremos Φ) son nulas en $\tilde{f}(p)$.

Observamos también que como $A(p) = f(p) = (\tilde{0}, \frac{1}{2})$ entonces $\widetilde{A(p)} = \widetilde{f(p)} = \tilde{0}$.

Para facilitar la lectura anotamos $\forall v \in \mathbb{R}^{n-1} : \phi(\tilde{v})$ como $\tilde{\phi}$ en el resto de la sección. Luego, utilizando la función implícita del Teorema 4.1 y sustituyendo x_n por $\tilde{\phi}$ en los puntos del conjunto crítico, un cálculo directo nos muestra que $f|_{S_f \cap U \times V}(x_1, \dots, x_n) = (8x_1, 2x_2, \dots, 2x_{n-1}, 2\tilde{\phi} - \varphi(\tilde{\phi}).\psi)$.

Observemos ahora que como la matriz \hat{A} del comienzo de la sección 3 es invertible permite definir un mapa que, abusando del lenguaje, anotamos como A^{-1} y es $A^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / A^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (\frac{x_1}{8}, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{2})$. Este mapa, si bien no está definido en \mathbb{T}^n , es de utilidad para encontrar la expresión de la función Φ que buscamos ya que llamando $\widetilde{A(x)} := z$ permite escribir $f|_{S_f \cap U \times V}(x) = (z, 2\tilde{\phi}(A^{-1}((z, 0))) - \varphi(\tilde{\phi}(A^{-1}((z, 0))))).\psi(A^{-1}((z, 0)))$. Definiendo

$$\Phi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R} / \Phi(z) = [2.(\tilde{\phi} \circ A^{-1}) - (\varphi \circ \tilde{\phi} \circ A^{-1}).(\psi \circ A^{-1})](z, 0)$$

encontramos la expresión explícita de la última coordenada como función de las anteriores en la imagen por f del conjunto crítico.

Observación 4.1 *Es inmediato de la definición que $\forall x \in f(S_f \cap U \times V)$ es $x_n = \Phi(\tilde{x})$.*

Lema 4.2 $\forall k, k' \leq n-1 : \frac{\partial}{\partial x_k} \Phi(\tilde{0}) = \frac{\partial^2}{\partial x_k \cdot x_{k'}} \Phi(\tilde{0}) = 0$

Dem.:

Alcanza con observar que $A_{\{x_n=0\}}^{-1}$ es lineal. Luego, aplicando la regla de la cadena al derivar Φ y el Lema 4.1 a la derivada sigue la tesis. \square

Observando además que $A_{\{x_n=0\}}^{-1}$ contrae y que $|\varphi'| \leq 1$, tenemos los siguientes corolarios:

Corolario 4.3 $\forall \varepsilon' > 0, \exists V$ entorno abierto de $\tilde{0}$ en $\mathbb{R}^{n-1} / \forall k, k' \leq n-1;$

$$\max \left\{ \left| \Phi(x) - \frac{1}{2} \right|, \left| \frac{\partial}{\partial x_k} \Phi(x) \right|, \left| \frac{\partial^2}{\partial x_k \cdot x_{k'}} \Phi(x) \right| \right\} < \varepsilon', \forall x \in V. \square$$

Corolario 4.4 $\forall \varepsilon' > 0, \exists V$ entorno abierto de $\tilde{0}$ en $\mathbb{R}^{n-1} / \forall k \leq n-1;$

$$\left| \Phi(x) - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon' \|x\|^2, \left| \frac{\partial}{\partial x_k} \Phi(x) \right| < \varepsilon' \|x\|, \forall x \in V. \square$$

Construimos ahora un difeomorfismo F adecuado, C^2 cerca de Id que compondremos con f para obtener H . Esencialmente, F cerca de $f(p)$ 'aplana' la imagen del conjunto crítico y 'lejos' es la identidad.

En primer lugar, dado $\varepsilon > 0$, elegimos V donde valen los Corolarios 4.3 y 4.4 para un $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{50}$. A continuación fijamos un $b \in \mathbb{R}$ de modo que $0 < b < \frac{1}{4}$ y que la bola de centro $\tilde{0}$ y radio $2b$ tiene clausura contenida en V . Luego, dado $l, 0 < l < b$, definimos una función auxiliar $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ clase C^∞ como muestra la Figura 6 para la cual valen $\omega|_{B_{(0,l)}} = 1, \omega|_{B_{(0,2l)}^c} = 0, \|\omega\| = 1, \|\omega'\| < \frac{2}{l}$ y $\|\omega''\| < \frac{8}{l^2}$.

Por último, definimos $u : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R} / u(\tilde{x}) = \omega(\|\tilde{x}\|).(\Phi(\tilde{x}) - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}$
Vale que $u|_{B_{(0,l)}} = \Phi$ y que $u|_{B_{(0,2l)}^c} = \frac{1}{2}$.

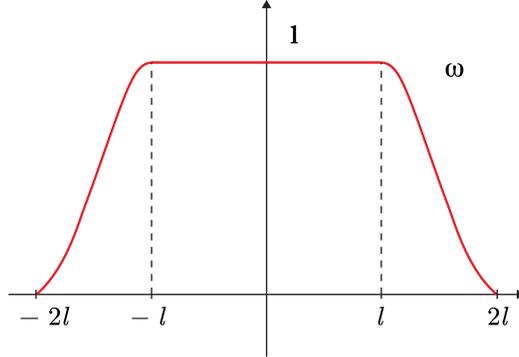


Figura 6: Gráfico de ω

Lema 4.3

$$\forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1}, \forall k, k' < n : \max \left\{ \left| u(\tilde{x}) - \frac{1}{2} \right|, \left| \frac{\partial}{\partial x_k} u(\tilde{x}) \right|, \left| \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_{k'}} u(\tilde{x}) \right| \right\} < \varepsilon$$

Dem:

Comenzamos observando que alcanza calcular los máximos en $\overline{B_{(\tilde{0}, 2l)} \setminus B_{(\tilde{0}, l)}}$ pues en la componente acotada del complemento del anillo es menor o igual que ε' (está controlado por Φ) y en la componente no acotada son cero. Computamos entonces para \tilde{x} en el anillo. Para facilitar la lectura, escribimos $\omega(\|\tilde{x}\|)$ como ω :

1)

$$\left| u(\tilde{x}) - \frac{1}{2} \right| = \left| \omega \cdot \left(\Phi(\tilde{x}) - \frac{1}{2} \right) \right| \leq \left| \Phi(\tilde{x}) - \frac{1}{2} \right| \leq \varepsilon' < \varepsilon.$$

2)

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_k} u(\tilde{x}) \right| = \left| \omega' \cdot \frac{(\tilde{x})_k}{\|\tilde{x}\|} \cdot \left(\Phi(\tilde{x}) - \frac{1}{2} \right) + \omega \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \Phi(\tilde{x}) \right| \leq \frac{2}{l} 4l^2 \varepsilon' + 2l \varepsilon' < 10l \varepsilon' < \varepsilon.$$

3)

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_{k'}} u(\tilde{x}) \right| &= \left| \omega'' \cdot \frac{(\tilde{x})_{k'}}{\|\tilde{x}\|} \cdot \frac{(\tilde{x})_k}{\|\tilde{x}\|} \cdot \left(\Phi(\tilde{x}) - \frac{1}{2} \right) + \omega' \cdot \frac{-(\tilde{x})_k \cdot (\tilde{x})_{k'}}{\|\tilde{x}\|^3} \cdot \left(\Phi(\tilde{x}) - \frac{1}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \omega' \cdot \frac{(\tilde{x})_k}{\|\tilde{x}\|} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{k'}} \Phi(\tilde{x}) + \omega' \cdot \frac{(\tilde{x} - \tilde{f}(p))_{k'}}{\|\tilde{x} - \tilde{f}(p)\|} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \Phi(\tilde{x}) + \omega \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_{k'}} \Phi(\tilde{x}) \right| \leq \\ &\leq \frac{8}{l^2} 4l^2 \varepsilon' + \frac{2}{l} \frac{1}{l} 4l^2 \varepsilon' + 2 \left(\frac{2}{l} 2l \varepsilon' \right) + \varepsilon' < 50 \varepsilon' < \varepsilon. \square \end{aligned}$$

Corolario 4.5 \exists un difeomorfismo F de \mathbb{T}^n tal que $d_{C^2}(F, Id) < \varepsilon$ y $\exists l > 0$ tales que $\forall x \in f(S_f) \cap B_{(f(p), l)} : F(x) = (\tilde{x}, \frac{1}{2})$

Dem.:

Definimos explícitamente $F : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n / F(x) = (\tilde{x}, x_n - u(\tilde{x}) + \frac{1}{2})$.

Vale:

- F es un difeomorfismo de \mathbb{T}^n pues $\forall x \in \mathbb{T}^n, \det(D_x F) = 1$.

- $\forall x \in \mathbb{T}^n, \|(F - Id)(x)\| = |u(\tilde{x}) - \frac{1}{2}|$. Luego, por el Lema 4.3, $d_{C^2}(F, Id) < \varepsilon$.
- $F|_{B_{(\tilde{0}, 2l)}^c \times \mathbb{R}}(x) = Id$ por lo tanto $F|_{B_{(f(p), 2l)}^c}(x) = Id$
- $F|_{B_{(\tilde{0}, l)} \times \mathbb{R}}(x) = (\tilde{x}, x_n + \frac{1}{2} - \Phi(\tilde{x}))$
- Por la Observación 4.1, $\forall x \in f(S_f) : x_n = \Phi(\tilde{x}) \Rightarrow F|_{B_{(f(p), l)} \cap f(S_f)} \subset \{x_n = \frac{1}{2}\}$.

□

Estamos ahora en condiciones de definir el mapa H que tiene las propiedades anunciadas.

$$H : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n / H(x) = (F \circ f)(x).$$

Es inmediato verificar que se satisfacen:

- $d_{C^2}(H, f) < \varepsilon$
- $H(p) = f(p)$
- $S_H = S_f$ y en consecuencia $p \in S_H$
- $H(B_{(p, r)}) \cap B_{(p, r)} = \emptyset$ por como definimos f y r al comienzo.
- $H(x) = A(x), \forall x \in \mathbb{T}^n \setminus (B_{(p, r)} \cup A^{-1}(B_{(A(p), r)}))$ por como está definida H .
- $\exists a' \leq a$ tal que $\overline{D_x H(C_{a'}^u(x))} \setminus \{(0, 0)\} \subset C_{a'}^u(H(x)), \forall x \in \mathbb{T}^n$ por el Corolario 3.2. Observamos que tanto el parámetro ε' de los Corolarios 4.3 y 4.4 como el l del Lema 4.3 pueden reducirse si fuera necesario para que H esté más cerca de f si lo quisiéramos aún más cerca.
- $H(S_H) = F[f(S_f)] \subset \{x_n = \frac{1}{2}\}, \forall x \in B_{(f(p), l)}$ por el Corolario 4.5

Probamos en las siguientes subsecciones que H es el mapa C^2 -robustamente transitivo pero no C^1 -robustamente transitivo buscado.

4.2. H no es C^1 robustamente transitivo

Comenzamos la subsección recordando el Lema 2.1 que dice que un mapa f con una singularidad de doblez tiene cerca algún mapa g cuyo conjunto crítico contiene un abierto V cuya imagen por g verifica $g(V) = f(S_f \cap V)$ y probamos entonces que H no es C^1 robustamente transitivo:

Lema 4.4 p es un punto de doblez para el mapa H

Dem.

Sea h el mapa de la Subsección 3.2.1, entonces,

$$T_p S_H = T_p S_f = T_p h^{-1}(\mathcal{R}_{n-1}) = \ker(D_p h) \text{ y } \ker(D_p H) = \ker(D_p f).$$

Luego, del Lema 3.2 y la observación 2 en la Ecuación 2 tenemos que $T_p S_H \oplus \ker(D_p H) = \mathbb{R}^n$. □

Teorema 4.2 H no es C^1 robustamente transitivo.

Dem. (ver Figura 7)

Sea $\varepsilon > 0$. Como p es de doblez para H , por el Lema 2.1 existen una función g en $\varepsilon - \mathcal{U}_H \in C^1$ y un abierto W de \mathbb{T}^n que contiene a p tales que: $W \subset S_g$ y $g(W) = H(S_H \cap W), \forall x \in W$ y $g = H$ en $B_{(p, l)}^c$. Abusando del lenguaje en el Corolario 4.5 llamamos W a $W \cap B_{(p, l)}$ y entonces $g(W) = H(S_H \cap W) \subset H(S_H) \subset \{x_n = \frac{1}{2}\}$. Como además $H = A$ en $B_{(p, r)}^c$, $f(p) \neq p$ y $|g(p) - f(p)| < \varepsilon$ entonces, reduciendo previamente W otra vez si fuera necesario, vale $g^2(W) = g(g(W)) = H(g(W)) = A(g(W)) \subset \{x_n = 0\}$. Por otro lado, $\{x_n = 0\}$ es invariante por g (pues 'lejos' de p , g es A) entonces $g^m(W) \subset \{x \in \mathbb{T}^n / x_n = 0\}, \forall m \geq 2 \Rightarrow g$ no es transitivo. Como g no es transitivo, H no es C^1 robustamente transitivo □.

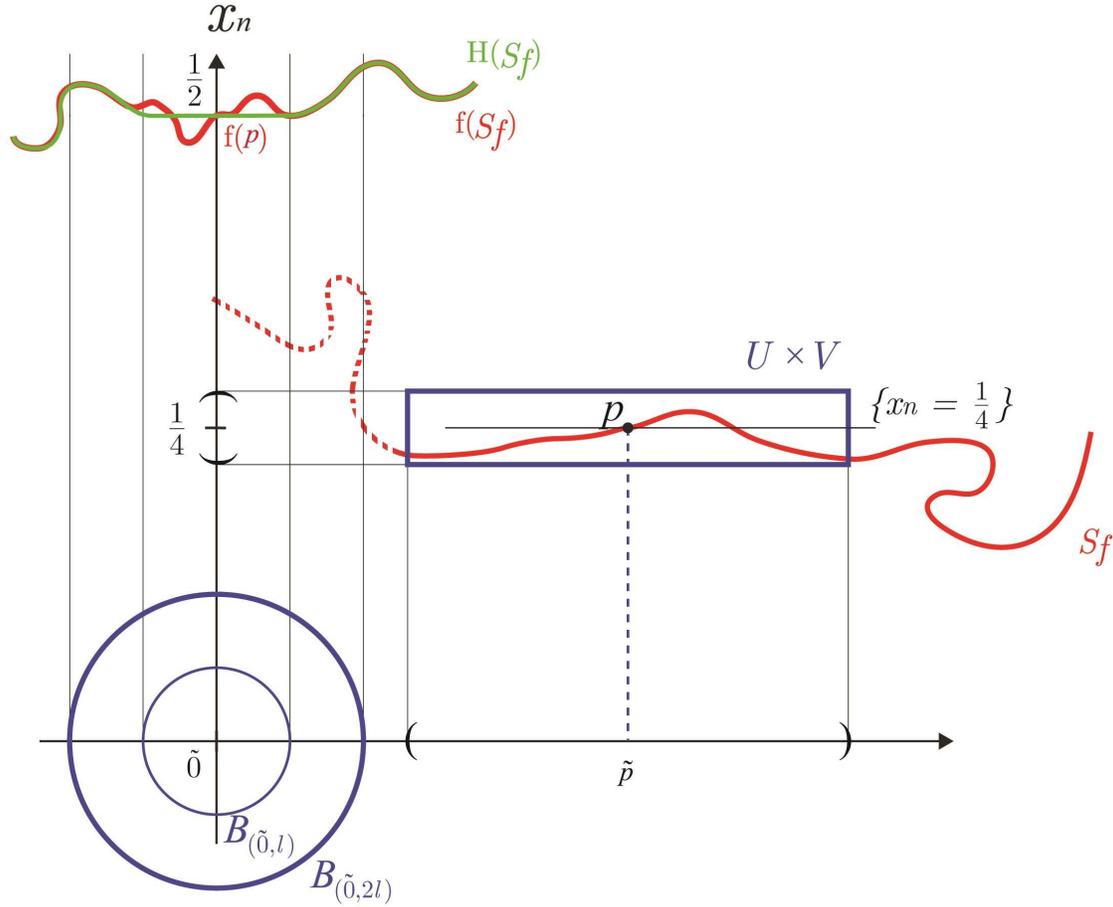


Figura 7: H 'aplasta' la imagen del conjunto crítico alrededor de $f(p)$

4.3. H es C^2 robustamente transitivo

Comenzamos la sección probando un teorema que muestra que en la topología C^2 no puede existir una función que colapse abiertos, contrapuesto a lo que sucede en la topología C^1 establecido en el Lema 2.1:

Teorema 4.3 *Existe un C^2 entorno \mathcal{U}_f de f tal que $\forall g \in \mathcal{U}_f, \forall V$ abierto en \mathbb{T}^n , es $\text{int}(g(V)) \neq \emptyset$*

Dem.:

Observando que los Lemas 3.1 y 3.2 valen simultáneamente para cierto entorno $\mathcal{U}_f \in C^2$ de f , deducimos que $\forall g \in \mathcal{U}_f, S_g$ es subvariedad de \mathbb{T}^n de codimensión uno. Entonces, dada g arbitraria en $\mathcal{U}_f, \forall V$ abierto de \mathbb{T}^n existe $U \subset V$ abierto tal que $U \cap S_g = \emptyset$. Como g es un difeomorfismo local en el interior de $V \setminus S_g$ transforma a U en un abierto y por lo tanto el interior de $g(V)$ es no vacío. \square

Continuamos la sección recordando que la función f satisface:

- 1) f admite conos inestables y esta propiedad es C^1 -estable según el Corolario 3.2 (cabe observar que el parámetro a puede elegirse tan pequeño como se desee a fin de que la diferencia entre longitud y diámetro sea menor que un cierto ε elegido de antemano. Esto permite identificar diámetro con longitud sin riesgo).

- 2) $f|_{\mathbb{T}^n \setminus B_{(p,r)}}$ expande por la Observación 3.2.

Definimos entonces un entorno C^1 de f donde vale el ítem 1, luego lo reducimos de modo que $\forall \hat{f}$ de ese entorno valga que $\hat{f}|_{\mathbb{T}^n \setminus B_{(p, \frac{3}{2}r)}}$ expande (ítem 2) y lo reducimos a un entorno $\mathcal{U}_f \in C^2$ de f donde vale el Teorema 4.3 para toda $\hat{f} \in \mathcal{U}_f$. Además, como $H = F \circ f$ y $d_2(F, Id) < \varepsilon$ podemos tomar $H \in \mathcal{U}_f, \mathcal{U}_H \in C^2$ y $\mathcal{U}_H \subset \mathcal{U}_f$.

En lo que sigue, elegimos $g \in \mathcal{U}_H$ arbitrario, si probamos que g es transitivo, entonces habremos probado que H es C^2 robustamente transitivo. La estrategia es ver que en todo abierto V existen curvas que viajan dentro de los conos inestables de g y logran escapar de la región de perturbación sin volver a entrar en el futuro. Como estamos en un entorno C^2 donde vale el Teorema 4.3 entonces un subconjunto abierto de V logra también escapar, luego, siendo g como A , entonces g es transitivo.

Comenzamos con una serie de lemas que formalizan estas afirmaciones.

Lema 4.5 *Sea $V \subset \mathbb{T}^n$ abierto.*

Entonces $\exists y \in V, \exists n_0 \in \mathbb{N} / g^k(y) \in \text{int}(g^k(V))$ y $g^k(y) \in \mathbb{T}^n \setminus B_{(p, 2r)}, \forall k \geq n_0$.

Dem.:

Sea una curva $\beta \subset \text{int}(V)$ parametrizada por $\beta : I \rightarrow \mathbb{T}^n$ tales que $\forall t \in I, \beta'(t) \in C_a^u(\beta(t))$. En virtud de la condición 3.3 sobre el diferencial de f y la invariancia de los conos inestables es $\text{diam}(g^n(\beta)) > 6^n \cdot \text{diam}(\beta)$, por lo tanto existe n_0 tal que $\text{diam}(g^{n_0}(\beta)) > 9r$. Podemos elegir entonces una curva $\alpha \subset g^{n_0}(\beta) \setminus B_{(p, 2r)}$ y $\text{diam}(\alpha) \geq 2r$. Construimos ahora una sucesión de curvas $\{\alpha_k\}$ tales que $\forall k \in \mathbb{N}$:

- $g(\alpha_{k-1}) \supset \alpha_k$
- $\alpha_k \subset \mathbb{T}^n \setminus B_{(p, 2r)}$
- $\alpha'_k(t) \in C_a^u(\alpha_k(t))$

Tomamos $\alpha_1 = \alpha \Rightarrow \text{diam}(g(\alpha_1)) > 12r$ pues $\alpha'(t) \in C_a^u(\alpha(t))$. Como $\text{diam}(B_{(p, 2r)}) = 4r$ entonces existe $\alpha_2 \subset g(\alpha_1)$ tal que $\alpha_2 \subset \mathbb{T}^n \setminus B_{(p, 2r)}$ y $\text{diam}(\alpha_2) \geq 2r$. Procediendo inductivamente según este algoritmo encontramos la sucesión $\{\alpha_k\}$. Definamos una familia de curvas γ_k tales que $\forall k : \gamma_k \subset \alpha_1$ y $g^k(\gamma_k) = \alpha_k$. Tenemos que $g^{k+1}(\gamma_k) = g(g^k(\gamma_k)) = g(\alpha_k) \supset \alpha_{k+1} \Rightarrow g^{k+1}(\gamma_k) \supset g^{k+1}(\gamma_{k+1})$ de lo que deducimos $\gamma_k \supset \gamma_{k+1}$ y por lo tanto $\exists x / \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \gamma_k = \{x\}$ por el teorema de Cantor de cerrados encajados y vale $g^k(x) \in \mathbb{T}^n \setminus B_{(p, 2r)} \forall k \in \mathbb{N}$. Eligiendo $y \in g^{-n_0}(x)$ encontramos un punto que verifica la afirmación de la tesis. \square

Lema 4.6 *Para todo V abierto de $\mathbb{T}^n, \exists y \in V, \exists n_v \in \mathbb{N} / \forall k \geq n_v : g^k(V) \supset B_{(g^k(y), r)}$.*

Dem.:

$\forall V$, por el lema anterior, $\exists y \in V, \exists n_0 \in \mathbb{N} / g^k(y)$ es interior a $g^k(V)$ y $g^k(y) \in \mathbb{T}^n \setminus B_{(p, 2r)}, \forall k \geq n_0$. Como $g|_{\mathbb{T}^n \setminus B_{(p, 2r)}}$ expande y vale el Teorema 4.3 para cada iterado de g entonces $\exists n_V / g^k(V) \supset B_{(g^k(y), r)}, \forall k \geq n_V$. \square

Lema 4.7 *Dado $\varepsilon > 0$, \exists una familia finita de abiertos $\{B_j\}_{j \in \{1, \dots, d\}}$ de \mathbb{T}^n tales que $\forall j, \text{diam}(B_j) < \varepsilon$ y $\exists m \in \mathbb{N}$ tales que:*

- $\bigcup_{j=1}^d B_j = \mathbb{T}^n$
- $\forall j, A^m(B_j) = \mathbb{T}^n$
- $\exists \mathcal{U}_A$ un C^0 entorno de A tal que $\forall g \in \mathcal{U}_A, \forall j \in \{1, \dots, d\} : g^m(B_j) = \mathbb{T}^n$

Dem.:

La primera afirmación se desprende de que \mathbb{T}^n es compacto y la segunda de que A expande.

Para la tercera, sea $\mathcal{U}_A = \{g : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n / \forall p \leq m, \forall j \leq d : |g^p(B_j) - A^p(B_j)| < \varepsilon\}$ un C^0 entorno de A . Como A es lineal y g es homotópica a A , entonces g transforma bolas en conjuntos simplemente conexos. Como los bordes de $g^p(B_j)$ y de $A^p(B_j)$ están a distancia menor que ε para todo j , tenemos que \mathcal{U}_A es el entorno que termina la prueba. \square

Teorema 4.4 H es C^2 robustamente transitivo.

Dem.:

Dado $\varepsilon = \frac{r}{4}$, elegimos un entorno \mathcal{U}_A en C^0 dado por el Lema 4.7 y \mathcal{U}_H como al principio de la sección y contenido en \mathcal{U}_A . Probamos que $\forall g \in \mathcal{U}_H$, g es transitivo. Veremos que de hecho $\forall V$ abierto de \mathbb{T}^n , $\exists \hat{m} \in \mathbb{N}/g^{\hat{m}}(V) = \mathbb{T}^n$. Por el Lema 4.6, $\exists y \in V, \exists n_V \in \mathbb{N}/g^{n_V}(V) \supset B_{(g^{n_V}(y), r)}, \forall n \geq n_V$. Sea ahora la familia de abiertos $\{B_j\}_{j \in \{1, \dots, d\}}$ y $m \in \mathbb{N}$ dados por el Lema 4.7, por el último ítem de este lema sabemos que como $\text{diam}(B_j) < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $g^{m_V}(V) \supset B_j$. Utilizando ahora el tercer ítem, podemos asegurar que $g^m(B_j) = \mathbb{T}^n$ por lo que $g^{m+n_V}(V) = \mathbb{T}^n$ que implica la transitividad de g . Como el razonamiento es válido $\forall g \in \mathcal{U}_H$, obtenemos que H es robustamente transitivo. \square .

Referencias

- [T] R. Thom. Les singularités des applications différentiables. Ann. Inst. Fourier 6. p. 43–87. 1955.
- [B] J.M. Boardman. Singularities of differentiable maps. Publ. Math. IHES 33 p. 21–57. 1967.
- [GG] M. Golubitsky, V. Guillemin. "Stable mappings and their singularities". Graduate texts in mathematics 14. Springer, New York, 1973.
- [P] F. Przytycki. Anosov Endomorphisms. Studia Mathematica T. LVIII. 3. p. 249–285. Polish Academy of Sciences, 1976.
- [M] R. Mañé. An ergodic closing lemma. Ann. of Math 116. p. 503–540. 1982.
- [DC] M. Do Carmo. Riemannian Geometry". Birkhäuser, Boston, 1992.
- [J] M. Jönsson. "Hyperbolic Dynamics of endomorphisms". Royal Institute of Technology, Stockholm, 1997.
- [KH] B. Hasselblatt and A. Katok, "A First Course in Dynamical Systems". Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [BDP] C. Bonatti, L.J. Díaz, E. Pujals. A C^1 generic dichotomy for diffeomorphisms: weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources. Ann. of Math (2) 158. p. 355–418. 2003.
- [LP] C. Lizana, E. Pujals. Robust transitivity for endomorphisms. Ergod. Th. Dynam. Sys. 33 p. 1082–1114. 2013.
- [BR] P. Berger, A. Rovella. On the inverse limit stability of endomorphisms. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire , 30. p. 463–475. 2013.
- [S] M. Sambarino. A (short) survey on Dominated Splitting. arXiv:1403.6050 2014.
- [ILP] J. Iglesias, C. Lizana and A. Portela. Robust transitivity for endomorphisms admitting critical points. Proc. Amer. Math. Soc. 144, no. 3. p. 1235–1250. 2016.
- [LR1] C. Lizana, W. Ranter. Topological obstructions for robustly transitive endomorphisms on surfaces. arXiv:1711.02218 2017.
- [IP] J. Iglesias, A. Portela. An example of a map which is C^2 robustly transitive but not C^1 robustly transitive. Colloq. Math. 152, no. 2 p.285–297. 2018.
- [LR2] C. Lizana, W. Ranter. New classes of C^1 robustly transitive maps with persistent critical points. arXiv:1902.06781 2019.