Expansividad Non-Standard

Autor : Luis R. Ferrari

Tesis de Maestría en Matemática

Orientadores : Jorge Groisman y Samuel Gomes Da Silva

Universidad de la República

PEDECIBA.

19 de Septiembre de 2019

Agradecimientos

Quiero agradecer a Alexandre Miquel y Mauricio Guillermo del Equipo de Lógica de la Facultad de Ingeniería por el apoyo académico y financiero que me dieron durante el desarrollo de este trabajo, a mi orientador inicial Walter Ferrer por ser un mentor e insistirme en que debía tener una formación amplia en matemática, a mi co-orientador Samuel Gomes Da Silva por la orientación y por invitarme al carnaval de Bahía(espero que se repita), a mi co-orientador Jorge Groisman por la orientación y por su amistad, a Analu, Maryori y Josseline, a mis amigos del Imerl. También quiero agradecer a Alfonso Artigue por invitarme al Departamento de Matemática y Estadística del Litoral para dictutir el ejemplo de libremente expansivo, a Chichi León por motivarme a estudiar análisis no estándar, gracias a eso se me ocurrió la idea de relacionar a los libremente expansivos con el análisis no estándar.

Resumen

Sea (X, d) espacio métrico, un homeomorfismo $f : X \to X$ se dice que es *expansivo*, con constante de expansividad $c > 0$, si para todo $x, y \in X$ distintos, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > c$. Groisman y Da Silva usando la teoría de ultrafiltros estudiaron una subfamilia de estas dinámicas a las que llamaron *libremente expansivos*, desde el punto de vista combinatorio estas dinámicas son homeomorfismos tales que para cualquier par de puntos distintos los momentos de separación son infinitos (el n de la definición). En este trabajo veremos que el análisis no estándar es una herramienta alternativa para el estudio de estas dinámicas. Una de las ventajas de esta aproximación es que nos permite introducir nuevos conceptos dinámicos y generalizar a los libremente expansivos para ambientes no compactos, a estos homeomorfismos los llamamos *non-standard expansivos.*

Palabras clave: homeomorfismo expansivo, libremente expansivo, non-standard expansivo, análisis no estándar, ultrafiltros.

Índice general

Índice general **1**

Introducción **3**

1 Ultrafiltros y Análisis No Estándar **5**
1.0.1 Brevísima Historia de los Infinitesimales 5
1.0.2 Conjuntos "Grandes" 5
1.1 Ultrafiltros 6
1.1.1 Convergencia vía Ultrafiltros 8
1.2 Análisis No Estándar vía Ultrafiltros 10
1.2.1 Reales No Estándar 11
1.2.2 Extensiones 13
1.3 Superestructuras 13
1.3.1 Principio de Transferencia 15
1.4 Espacios Métricos 16

2 Homeomorfismos Expansivos **20**
2.1 Definiciones y Resultados Básicos 20
2.2 Dinámica Simbólica 22

3 Libremente Expansivos **24**
3.1 Definiciones y Resultados Básicos 24
3.2 Libremente expansivo = se separan en infinitos tiempos 25
3.3 Ejemplos 27
3.4 Preservación de los libremente expansivos por potencias y conjugaciones 28
3.5 Libremente Expansivo = Expansivo sin puntos doblemente asintóticos 29

4 Non-Standard Expansivos **31**
4.1 Definición y Ejemplos 31
4.2 Non-standard expansivo = Libremente expansivo en ambientes compactos 32
4.3 Preservación de la non-standard expansividad por potencias y conjugaciones en ambientes compactos 33
4.4 Non-Standard expansivo = Expansivo sin puntos doblemente asintóticos en ambientes compactos 35
4.5 Non-standard expansividad y uniformidad 37

4.6 Homeomorfismos Separables y Non-standard Separables 40
4.7 Non-standard expansividad y dinámica simbólica 42

5 Problemas y consideraciones finales 45

Bibliografía 46

Introducción

En la teoría de los sistemas dinámicos se dice que un homeomorfismo $f : X \to X$ es α-expansivo, si para todo $x, y \in X$, distintos, existe $n \in \mathbb{Z}$, tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > \alpha$ este tipo de dinámicas ha tenido un profuso estudio, en general la teoría se ha desarrollado suponiendo la compacidad del espacio X. En este trabajo estudiaremos una subfamilia de estas dinámicas desde dos puntos de vista: La primera es el contenido del capítulo 3, esta aproximación es desarrollada por Groisman y Da Silva en [16], estas dinámicas se dicen que son *libremente expansivas* si para todo $x, y \in X$ existe un ultrafiltro libre p tal que $d(f^p(x), f^p(y)) > \alpha$ o $d(f^{-p}(x), f^{-p}(y)) > \alpha$, podemos decir sucintamente que un ultrafiltro libre define una noción de convergencia.Esto es, dada una sucesión $x : \mathbb{N} \to X$, las subsucesiones convergentes de x son capturadas por un ultrafiltro libre, es decir, dado un espacio métrico compacto X, $y \in X$ es el límite de una subsucesión de x si y solo si y es el p-límite de x, donde z es el p-límite si para todo V entorno de z el conjunto de $\{n \in \mathbb{N} : n \in V\} \in p$, como el p-límite de una sucesión está asociado a las subsucesiones convergentes de x, es necesario la compacidad para asegurarnos la existencia de los p-límites, de ahí que la teoría de los libremente expansivos suponga la compacidad del espacio. Desde el punta de vista combinatorio un homeomorfismo es libremente expansivo si y solo si para todo par de puntos distintos sus tiempos de separación son infinitos, esto es , si x, y son distintos, entonces el conjunto $\{n \in \mathbb{Z} : d(f^n(x), f^n(y)) > \alpha\}$ es infinito. La segunda aproximación, propuesta por el autor, consiste en tomar al análisis no estándar como marco teórico y constituye el núcleo de esta tesis, nuestra propuesta es estudiar las dinámicas libremente expansivas en términos del análisis no estándar, si bien nuestro estudio se concentra en los espacios métricos compactos, nuestra definición no necesita de la compacidad del espacio. Decimos que un homeomorfismo $f : X \to X$ es *non-standard expansivo* si para todo $x, y \in X$, distintos, existe $n \in {}^*\mathbb{Z} - Z$, con ${}^*\mathbb{Z}$ la extensión no estándar de Z, tal que ${}^*d({}^*f^n(x), {}^*f(y)) > \alpha$, donde ${}^*d$ y ${}^*f$ son las extensiones no estándar de d y f respectivamente, este n es un entero infinito en la extensión , es decir, es más grande en valor absoluto que cualquier estándar, en ambientes compactos los libremente expansivos coinciden con los non-standard expansivos, pero en los non-standard expansivos a diferencia de estos últimos, la existencia de ${}^*f^n$ con $n \in {}^*\mathbb{Z} - \mathbb{Z}$ está garantizada independientemente de la compacidad del espacio.

El objetivo central de esta tesis es mostrar cómo el análisis no estándar nos ofrece demostraciones novedosas de los resultados conocidos para los homeomorfismo libremente expansivos, y además nos permite introducir nuevos conceptos dinámicos. Esperamos que el lector encuentre en este trabajo una interesante interacción entre sistemas dinámicos, ultrafiltros (teoría de conjuntos) y análisis no estándar (lógica).

Capítulo 1

Ultrafiltros y Análisis No Estándar

1.0.1 Brevísima Historia de los Infinitesimales

El uso de magnitudes infinitamente pequeñas se puede encontrar desde los trabajos de Arquímedes, pero hay que esperar hasta los trabajos de Leibniz para encontrar una exposición sistemática de este concepto, Leibniz se valió de los infinitesimales para desarrollar su teoría del cálculo diferencial, Newton creo en paralelo el cálculo diferencial pero usó el concepto de "fluxión", muy emparentado con las infinitesimos. Si bien los matemáticos usaron durante mucho tiempo este concepto, la falta de una fundamentación rigurosa hizo aumentar el criticismo sobre los infinitesimales, luego de que Bolzano introdujera la técnica $\epsilon - \delta$, y más tarde Weierstrass la sistematizara, el uso de los infinitesimales cayó en desuso. En el año 1960 Abraham Robinson, usando técnicas de lógica matemática, logró darle a los infinitesimales una fundamentación rigurosa, más tarde se desarrollaron otras fundamentaciones alternativas como la "Internal Set Theory"de Nelson[26] y la teoría de las superestructuras, estas nuevas teorías permitieron extender la "filosofía no estándar" a otras ramas de la matemática. En este trabajo usaremos la técnica de las superestructuras.

1.0.2 Conjuntos "Grandes"

Cauchy consideraba a los infinitesimales como cantidades variables que decrecían indefinidamente a 0, esto lo podemos expresar como una sucesión $r : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, tal que $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$, es claro que hay varias sucesiones que convergen a 0, una forma de distinguir dos infinitesimales es distinguir la rapidez con la que convergen a 0, por ejemplo podemos decir que $r_n = \frac{1}{n}$ converge a 0 más lento que $s_n = \frac{1}{n^2}$, y por lo tanto $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un infinitésimo más pequeño que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a su vez las sucesiones $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ y $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ deberían representar al mismo infinitésimo.
Una primera aproximación es considerar que dos sucesiones $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ representan al mismo infinitésimo si, $\{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\}$ es cofinito, esto nos enfrenta al siguiente problema, consideremos las sucesiones $r = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \ldots)$ y $s = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \ldots)$, parecen representar al mismo infinitésimo pero no coinciden en ninín indide, en particular en conjunto cofinito de índices, además

si queremos que nuestra extensión de $\mathbb{R}$ sea un cuerpo ordenado, debemos definir una desigualdad, siguiendo por el camino de los conjuntos cofinitos, la manera natural sería $r < s$ si y solo si $\{n \in \mathbb{N} : r_n < s_n\}$ es cofinito, por lo cual las dos sucesiones antes mencionadas no serían comparables, esto nos dice que es necesario desarrollar una teoría de los conjuntos "grandes"de naturales, nuestros índices, y que de alguna manera decida si los impares o los pares son conjuntos grandes, todo indica que está elección será en cierta medida arbitraria y dependiendo de la elección, el infinitésimo que converge a 0 de la forma $\frac{1}{n}$, será representado por $r = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \ldots)$ o por $s = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \ldots)$.
Si existe una extensión de $\mathbb{R}$ que agrega infinitésimos distintos de cero, considerando su inverso tendremos números más grandes que cualquier real estándar, por ejemplo, si consideramos al infinitésimo $r = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$ es natural pensar que su inverso será $\frac{1}{r} = (2, 3, \ldots, n, \ldots)$ y tendrá la propiedad de ser más grande que cualquier real estándar, estas consideraciones sugieren que una forma de construir esta extensión es considerando el espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ identificando estas sucesiones por algún criterio que nos diga quienes son los conjuntos grandes de índices, o sea los conjuntos grandes de naturales.
En primer lugar es claro que $\mathbb{N}$ es un conjunto grande de naturales , por lo tanto tendremos toda sucesión será equivalente a si misma, si consideramos $r = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}, s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}, t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tales que $A_{r,s} = \{n : r_n = s_n\}$ y $A_{s,t} = \{n : s_n = t_n\}$ son subconjuntos grandes, entonces r será equivalente a s y s será equivalente a t, pero si $A_{r,s}$ y $A_{s,t}$ son grandes entonces $A_{r,s} \cap A_{s,t}$ son grandes, pero $A_{r,s} \cap A_{s,t} \subset A_{r,t}$, entonces $A_{r,t}$ contiene a un subconjunto grande, entonces él mismo es grande, por tanto r y t son equivalentes, el único punto que puede generar dudas es porque considerar a la intersección de subconjuntos grandes como grande, una forma de justificar esta requerimiento , es pensar al complemento de un conjunto grande como un conjunto pequeño, y es natural pensar a la únion de conjuntos pequeños como pequeño, por lo tanto no resulta extraño pedir que la intersección de conjuntos grandes sea un conjunto grande, en la siguiente sección mostraremos la teoría de los conjuntos "grandes".

1.1 Ultrafiltros

Definición 1.1 (*Filtro*) Sea X conjunto no vacío. Una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ se dice que es un *filtro* sobre X si vale:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$.
2. Si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.
3. Si $A \in \mathcal{F}$, y $A \subset B$, entonces $B \in \mathcal{F}$.

Observación 1.1 Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $\mathcal{F}$ verifica 1 y 2 de la definición anterior, entonces $\mathcal{F}$ satisface la p.i.f (*propiedad de intersección finita*), es decir, si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, $A_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset$.

Demostración Supongamos que $n = 2$, Como $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ verifica la condición 2 de la definición de filtro, se cumple que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$ y como $\emptyset \notin \mathcal{F}$, tenemos el resultado. Por inducción en n se demuestra en general.

Observación 1.2 Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, tal que tiene la p.i.f, entonces $\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \{Y \subset X : \exists k \geq 1 \text{ y } A_1, \dots A_k \in \mathcal{A}, \text{ con } A_1 \cap \dots \cap A_k \subset Y\}$, por lo tanto $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ es un filtro.
Al filtro $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ se la llama filtro generado por $\mathcal{A}$.

Ejemplo 1.1 *(*Filtro de Frechet*) Sea* X *conjunto infinito,*
$Cofin(X) = \{A \subset X : X - A \text{ es finito}\}$.

Definición 1.2 Sea $\mathcal{F}$ filtro sobre X, decimos que $\mathcal{F}$ es libre si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.

Observación 1.3 Sea $\mathcal{F}$, filtro finito, entonces no es libre.

Demostración Si X es finito, entonces $\mathcal{F}$ es finito y tiene la p.i.f, entonces no es libre.

Proposición 1.0.1 Sea X conjunto infinito, y $\mathcal{F}$ filtro sobre X, entonces $\mathcal{F}$ es libre si y solo si $Cofin(X) \subset \mathcal{F}$.

Demostración Directo: Sea $A \in Cofin(X)$, entonces $A^c = \{x_1, \dots x_n\}$, como $\mathcal{F}$ es libre, para todo $i = 1, \dots, n$ existe $A_i \in \mathcal{F}$ tal que $x_1 \notin A_i$, entonces $\{x_1, \dots, x_n\} \cap (\bigcap_{i=1}^{i=n} A_i) = \emptyset$, entonces $\bigcap_{i=1}^{i=n} A_i \subset \{x_1, \dots, x_n\}^c = A$, entonces $A \in \mathcal{F}$.
Recíproco: $\bigcup_{x \in X} \{x\} = X$, entonces $\bigcap_{x \in X} \{x\}^c = \emptyset$, y como $\{x\}^c \in \mathcal{F}$, entonces $\bigcap \mathcal{F} \subset \bigcap_{x \in X} \{x\}^c = \emptyset$

Definición 1.3 Sea X conjunto no vacío y $\mathcal{F}$ filtro sobre X, decimos que es un *ultrafiltro* si satisface :
Para todo $A \subset X$, se cumple que $A \in \mathcal{F}$ o $A^c \in \mathcal{F}$.

Ejemplo 1.2

Sea X conjunto no vacío y $x \in X$, entonces $\mathcal{U}_x = \{A \subset X : x \in A\}$ es un ultrafiltro.

Proposición 1.0.2 Sea $\mathcal{U}$ ultrafiltro sobre X, y $\emptyset \neq A \subset X$ tal que $\mathcal{U} \cup \{A\}$ tiene la p.i.f, entonces $A \in \mathcal{U}$.

Demostración Si $A \notin \mathcal{U}$ entonces $A^c \in \mathcal{U}$ entonces $A^c \in \mathcal{U} \cup \{A\}$, y como $\mathcal{U} \cup \{A\}$ tiene la p.i.f, entonces $A \cap A^c \in \mathcal{U} \cup \{A\}$, entonces $\emptyset \in \mathcal{U} \cup \{A\}$, entonces $\emptyset \in \mathcal{U}$ o $\emptyset = A$, absurdo.

Proposición 1.0.3 Sea $\mathcal{F}$ filtro sobre X, entonces $\mathcal{F}$ es filtro maximal con respecto de la inclusión en X si y solo si $\mathcal{F}$ es ultrafiltro.

Demostración (Recíproco) Sea $\mathcal{F}$ ultrafiltro y $\mathcal{F}'$ ultrafiltro tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$, sea $A \in \mathcal{F}'$, entonces $\mathcal{F} \cup \{A\}$ tiene la p.i.f, entonces por la proposición anterior $A \in \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$, por lo tanto $\mathcal{F}$ es maximal.
(Directo) Si $\mathcal{F}$ filtro maximal, sea $A \subset X$ y $A \notin \mathcal{F}$, supongamos que $\mathcal{F} \cup \{A^c\}$ tiene la p.i.f,entonces por la observación 1.2 y tomando el filtro generado por las intersecciones finitas tenemos que $A^c \in \mathcal{F}$, y queda demostrado. Veamos que $\mathcal{F} \cup \{A^c\}$ tiene la p.i.f: Sean $C, D \in \mathcal{F} \cup \{A^c\}$, si $C, D \neq A^c$, entonces $C, D \in \mathcal{F}$ entonces no hay nada que verificar, si los dos son iguales a A^c es trivial, si $C = A^c$ y $D \in \mathcal{F}$, entonces $C \cap D \neq \emptyset$, de lo contario $D \subset A$, y tendríamos que $A \neq \mathcal{F}$, por lo tanto queda demostrada la proposición.

Teorema 1.1 (Tarski) Sea $\mathcal{F}$ filtro sobre X, entonces existe $\mathcal{U}$ ultrafiltro sobre X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$.

Demostración Ver [15] pág 20.

Proposición 1.1.1 (Los Ultrafiltros son filtros primos) Sea $\mathcal{U}$ ultrafiltro sobre X , y $A, B \in X$. Si $A \cup B \in \mathcal{U}$ entonces $A \in \mathcal{U}$ o $B \in \mathcal{U}$.

Demostración Si $A \notin \mathcal{U}$ y $B \notin \mathcal{U}$, entonces $A^c \in \mathcal{U}$ y $B^c \in \mathcal{U}$, entonces $A^c \cap B^c \in \mathcal{U}$, entonces $(A \cup B)^c \in \mathcal{U}$, entonces $A \cup B \notin \mathcal{U}$.

Observación 1.4 Sea $\mathcal{U}$ ultrafiltro sobre X, y $A_1, \ldots, A_n \subset X$, $A \in \mathcal{U}$ disjuntos tales que $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, entonces existe un único $i \in \mathbb{N}$ tal que $A_i \in \mathcal{U}$.

Demostración Por inducción en n, si $n = 1$ es claro. Si $n = k + 1$, entonces $A = (A_1 \cup \ldots \cup A_k) \cup A_{k+1}$, Por la proposición anterior $A_1 \cup \ldots \cup A_k \in \mathcal{U}$ o $A_{k+1} \in \mathcal{U}$, si pasa lo primero, aplicamos hipótesis de inducción, de lo contrario $A_{k+1} \in \mathcal{U}$, y queda demostrada la existencia.
unicidad: Si $A_i, A_j \in \mathcal{U}$ entonces $A_i \cap A_j \in \mathcal{U}$.

Definición 1.4 Sea $\mathcal{U}$ ultrafiltro, decimos que es un *ultrafiltro libre*, si es un filtro libre.

Observación 1.5 Sea $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$, es un ultrafiltro libre si y solo si se verifica:

1. $\emptyset \notin X$, $X \in \mathcal{U}$.
2. Si $A, B \in \mathcal{U}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{U}$.
3. Si $A \subset X$, entonces $A \in \mathcal{U}$ o $A^c \in \mathcal{U}$.
4. Si $A \subset X$, finito, entonces $A^c \in \mathcal{U}$.

Demostración

Trivial.

Otra de las ventajas de la teoría de los conjuntos "grandes" es que nos permite estudiar la convergencia de forma elegante y sintética, esta teoría de convergencia será usada en el capítulo 3.

1.1.1 Convergencia vía Ultrafiltros

Definición 1.5 Definimos $\beta\mathbb{N} = \{p \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}) : p \text{ es ultrafiltro sobre } \mathbb{N}\}$ y $\mathbb{N}^* = \{p \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}) : p \text{ es ultrafiltro libre sobre } \mathbb{N}\}$.

Observación 1.6 Sea X espacio métrico, y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión , entonces $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ si y solo si para todo V entorno de x se tiene que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} \in Cofin(\mathbb{N})$.

Demostración Trivial.

Proposición 1.1.2 Sea X espacio métrico y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión, entonces z es el límite de una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si y solo si $z \in \bigcap_{A\in Cofin(\mathbb{N})} \overline{\{x_n : n \in A\}}$.

Demostración Directo: Sea $z = \lim_{k\to+\infty} x_{n_k}$, y $A \in Cofin(\mathbb{N})$, veamos que $z \in \overline{\{x_n : n \in A\}}$. Sea V entorno de x entonces existe k_0 tal que para todo $k \geq k_0$, $x_{n_k} \in V$, como $\lim_{k\to+\infty} n_k = +\infty$ y A^c es finito se concluye que el cardinal del conjunto $\{n_k : n_k \in A\}$ es infinito, entonces para k' suficientemente grande tenemos que $x_{n_{k'}} \in V$ y $n_{k'} \in A$, por lo tanto $V \cap \{x_n : n \in A\} \neq \emptyset$, entonces $z \in \overline{\{x_n : n \in A\}}$.
Reciproco: Sea $z \in \bigcap_{A\in Cofin(\mathbb{N})} \overline{\{x_n : n \in A\}}$, consideremos la sucesión de conjuntos definida de la siguiente manera, $A_n = \{i \in \mathbb{N} : i > n\}$. Dado $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $B(x, \frac{1}{k}) \cap \overline{\{x_n : n \in A\}} \neq \emptyset$, entonces tomamos $x_{n_k} \in B(x, \frac{1}{k})$ y $n_k \in A_k$, entonces $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es la subsucesión requerida.

Corolario 1.1.1 Si $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, entonces $\{x\} = \bigcap_{A\in Cofin(\mathbb{N})} \overline{\{x_n : n \in A\}}$

Demostración Si $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ entonces $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = x$ para toda subsucesión x_{n_k}.

Observación 1.7 El recíproco del corolario anterior no se cumple.

Demostración Consideremos $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida como $x_n = \frac{1}{n}$ si n es impar, y $x_n = n$ si n es par.

Proposición 1.1.3 Si X es un espacio métrico compacto, entonces vale el recíproco del corolario anterior, es decir si $\{x\} = \bigcap_{A\in Cofin(\mathbb{N})} \overline{\{x_n : n \in A\}}$, entonces $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.

Demostración Supongamos que x_n no converge a x, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $n_k \geq k$ tal que $x_{n_k} \notin B(x, \epsilon)$, entonces x_{n_k} es una subsucesión tal que x_{n_k} no converge a x, pero como X es compacto, existe una subsucesión de x_{n_k} tal que no converge a x, y por lo tanto existe una subsucesión de x_n tal que no converge a x, absurdo.

Definición 1.6 Sea X espacio métrico ,$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en X, y $p \in \beta\mathbb{N}$, $x \in X$ se dice que es un p-límite de la suceción, si para todo entorno V de x se cumple que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} \in p$.

Observación 1.8 El p-límite de una sucesión (si existe) es único.

Demostración Sean $x, y \in X$ tal que x, y son p-límites , con $x \neq y$, como X es espacio métrico, es de Haussdorff, entonces existen V_x y V_y entornos de x e y respectivamente tales que $V_x \cap V_y = \emptyset$, pero además de cumple que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V_x\} \in p$, y $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V_y\} \in p$, entonces $\emptyset = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in V_x\} \cap \{n \in \mathbb{N} : x_n \in V_y\} \in p$, absurdo.

Observación 1.9 Sea X espacio métrico compacto, y $\mathcal{F}$ filtro, entonces

$$\bigcap_{A\in\mathcal{F}} \overline{\{x_n : n \in A\}} \neq \emptyset$$

.

Demostración $\mathcal{F}$ tiene la p.i.f por ser filtro, entonces si $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{F}$, tenemos que $\emptyset \neq A_1 \cap \ldots \cap A_k \in \mathcal{F}$,entonces $\{x_n : n \in A_1\} \cap \ldots \cap \{x_n : n \in A_k\} = \{x_n : n \in A_1 \cap \ldots \cap A_k\} \neq \emptyset$, entonces $\emptyset \neq \overline{\{x_n : n \in A_1\}} \cap \ldots \cap \overline{\{x_n : n \in A_k\}} = \overline{\{x_n : n \in A_1\}} \cap \ldots \cap \overline{\{x_n : n \in A_k\}}$, por lo tanto $\{\overline{\{x_n : n \in A\}} : A \in \mathcal{F}\}$ tiene la p.i.f, y como X es compacto deducimos que $\bigcap_{A\in\mathcal{F}} \overline{\{x_n : n \in A\}} \neq \emptyset$.

Proposición 1.1.4 Sea X espacio métrico compacto, $p \in \beta\mathbb{N}$, y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en X, entonces $\{\ p\text{-lím}\, x_n\} = \bigcap_{A\in p} \overline{\{x_n : n \in A\}}$.

Demostración Sea $x \in \bigcap_{A\in p} \overline{\{x_n : n \in A\}}$, y V entorno de x, entonces para todo $A \in p$, $V \cap \{x_n : n \in A\} \neq \emptyset$. Sea $Y_V = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\}$, entonces $p \cup \{Y_V\}$ tiene la p.i.f, en efecto, si consideramos $A_1, \ldots, A_n \in p \cup \{Y_V\}$, puede pasar que $A_i \neq Y_V$ para todo $i = 1, \ldots n$, en cuyo caso no hay nada que probar $Y_V = A_i$ para algún $i = 1, \ldots, n$, supongamos sin perdida de generalidad que $A_n = Y_V$, entonces si $A = A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}$, entonces $A \in p$, pero cap $Y_V \cap A \neq \emptyset$, por lo tanto $p \cup \{Y_V\}$ tiene la p.i.f, entonces tenemos que $Y_V \in p$, entonces $x = p\text{-lím}\, x_n$.

Observación 1.10 Sea X espacio métrico compacto, $p \in \beta\mathbb{N}$, p principal, es decir, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $p = p_m = \{A \subset \mathbb{N} : m \in A\}$, y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{M}}$ sucesiíon con $x = p\text{- lím}\, x_n$, entonces $x = x_m$.

Demostración Sea $x = p\text{-lím}\, x_n$ entonces $\{x\} = \bigcap_{A\in p}\{x_n : n \in A\}$, pero $x_m \in \{x_n : n \in A\}$ para todo A, entonces $x = x_m$.

La observación anterior muestra que los único casos de interés surgen cuando el filtro p no es principal, es decir, es un filtro libre.

Proposición 1.1.5 Sea X espacio métrico compacto, $\{x_n\}_{n\mathbb{N}}$ sucesión, y $x \in X$. Entonces x es límite de una subsucesión de x_n si y solo si existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $x = p\text{-lím}\, x_n$.

Demostración Directo : Sea $x = \lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}$, consideremos la familia de conjuntos definida como $A_i = \{n_k : k \geq i\}$, entonces $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tiene la p.i.f, entonces tomando el filtro generado y aplicando el Teorema 1.1, existe p ultrafiltro tal que $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset p$, como $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \emptyset$, entonces p es libre, pero como $x = \lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = x$, dado V entorno de x existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$, se verifica que $x_{n_k} \in V$, entonces para todo $n \in A_{k_0}$, se tiene que $x_n \in V$, entonces $A_{k_0} \subset \{n : x_n \in V\}$, entonces $\{n : x_n \in V\} \in p$.
Observar que no utilizamos la hipótesis de compacidad para este caso.
Reciproco: Supongamos que existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $x = p\text{-lím}\, x_n$, como X es compacto, tenemos que $x \in \bigcap_{A\in p} \overline{\{x_n : n \in A\}}$, pero como $Cofin(\mathbb{N}) \subset p$, entonces $\bigcap_{A\in p} \overline{\{x_n : n \in A\}} \subset \bigcap_{A\in Cofin(\mathbb{N})} \overline{\{x_n : n \in A\}}$, entonces
$x \in \bigcap_{A\in Cofin(\mathbb{N})} \overline{\{x_n : n \in A\}}$, entonces x es el límite de alguna subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

1.2 Análisis No Estándar vía Ultrafiltros

Ahora estamos en condiciones de construir los reales no estándar.

1.2.1 Reales No Estándar

Consideremos $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de todas las sucesiones de números reales, y $\mathcal{U}$ ultrafiltro libre, definimos la siguiente relación, dados $(r_n)_{\mathbb{N}}, (s_n)_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, decimos que son equivalentes si $\{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\} \in \mathcal{U}$, es fácil verificar que esto es una relación de equivalencia, a la clase de equivalencia de $(r_n)_{\mathbb{N}}$ la notaremos como $\overline{(r_n)_{n\in\mathbb{N}}}$

Definición 1.7 A $^*\mathbb{R} := \{\overline{(r_n)_{n\in\mathbb{N}}} : (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$ le podemos dar una estructura de cuerpo ordenado de la siguiente manera.

Suma: $\overline{(r_n)_{n\in\mathbb{N}}} \;\overline{+}\; \overline{(s_n)_{n\in\mathbb{N}}} := \overline{(r_n + s_n)_{n\in\mathbb{N}}}$.

Producto: $\overline{(r_n)_{n\in\mathbb{N}}} \;\bar{\cdot}\; \overline{(s_n)_{n\in\mathbb{N}}} := \overline{(r_n \cdot s_n)_{n\in\mathbb{N}}}$.

Neutro de la suma: $\overline{0} := \overline{(0, 0, \ldots, 0, \ldots)}$.

Neutro del producto: $\overline{1} := \overline{(1, 1, \ldots, 1, \ldots)}$.

Estructura de Orden: $\overline{(r_n)_{n\in\mathbb{N}}} < \overline{(s_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ si y solo si $\{n \in \mathbb{N} : r_n < s_n\} \in \mathcal{U}$.

Si el lector quiere ver una demostración de porque $^*\mathbb{R}$ con esta definición es un cuerpo ordenado, ver [24] pág 18.

Observación 1.11 Podemos ver a los reales estándar como un subconjunto de $^*\mathbb{R}$ mediante la función $^* : \mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$, definida como $^*r := \overline{(r, r, \ldots, r, \ldots)}$, es fácil verificar que esta función verifica las siquiente propiedades:

$^*(r + s) = {}^*r \;\overline{+}\; {}^*s$.

$^*(r.s) = {}^*r \;\bar{\cdot}\; {}^*s$.

$^*(r < s)$ si y solo si $^*r < {}^*s$.

$^*(r = s)$ si y solo si $^*r = {}^*s$.

Por lo tanto * es un monomorfismo de cuerpos ordenados.

Ahora podemos demostrar la existencia de los infinitesimales, tomemos la sucesión $r_n = \frac{1}{n}$, y $a \in \mathbb{R}$ positivo, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ se cumple que $r_n < a$, por lo tanto $\{n \in \mathbb{N} : r_n < a\}$ es cofinito, pera ya vimos que un ultrafiltro libre contiene a todos los conjuntos cofinitos, entonces $\{n \in \mathbb{N} : r_n < a\} \in \mathcal{U}$, entonces $r = \overline{(r_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ verifica que $r < a$, es decir, encontramos un elemento de $^*\mathbb{R}$ distinto de cero que es menor que cualquier real positivo, si ahora tomamos su inverso $\frac{1}{r} = \overline{(1, 2, \ldots, n, \ldots)}$ tenemos que para cualquier $b > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que el conjuntos $\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{r_n} > b\}$ es cofinito, y por lo tanto $\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{r_n} > b\} \in \mathcal{U}$, entonces $\frac{1}{r} > b$ para todo b real positivo, así que demostramos que en la extensión no estándar tenemos números infinitos. Una vez demostrado que $^*\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado, no es necesario recurrir a la definición por ultrafiltros para demostrar que si r es un infinitesimal entonces $\frac{1}{r}$ es infinito, en efecto, si $r < \frac{1}{a}$ para todo real a positivo, entonces $\frac{1}{r} > a$ para todo real positivo a. Al igual que la construcción de los reales estándar mediante sucesiones de racionales, es esperable que sea posible dejar de recurrir a la definición, y por lo tanto a los ultrafiltros, para demostrar propiedades de $^*\mathbb{R}$, gracias al principio de transferencia, veremos que esto es posible.

Definición 1.8 Sea $r \in {}^*\mathbb{R}$, definimos:

1. r es *infinito* si $|r| > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. r es *finito* si $|r| < n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.
3. r es *infinitesimal* si $|r| < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.9 Dados $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$, definimos ${}^*\mathbb{N}_\infty = {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$, ${}^*\mathbb{Z}_\infty = {}^*\mathbb{Z} - \mathbb{Z}$

Proposición 1.1.6 Las siguiente propiedades valen en ${}^*\mathbb{R}$.

1. La suma, resta, y producto de números finitos es finita.
2. La suma, resta, y producto de infinitesimales es infinitesimal.
3. El producto de un infinitesimal por un finito es un infinitesimal.

Demostración Ver [24] pag 20

Definición 1.10 Sean $a, b \in {}^*\mathbb{R}$ decimos que son *infinitesimalmente cercanos* si $a - b$ es un infinitesimal.
Por la proposición anterior esta relación es simétrica.

Proposición 1.1.7 Sea $r \in {}^*\mathbb{R}$, finito, entonces existen únicos $a \in \mathbb{R}$ y ξ infinitesimal, tales que $r = a + \xi$.

Demostración ver [24] página 21

Definición 1.11 A los a y ξ de la proposición anterior les llamamos la *parte estándar* de r ($st(r)$) y a ξ la *parte no estándar* de r ($nst(r)$)

Proposición 1.1.8 Sean $a, b \in {}^*\mathbb{R}$ finitos, entonces se verifica

- $st(a \pm b) = st(a) \pm st(b)$.
- $st(a.b) = st(a).st(b)$.
- si $a < b$ entonces $st(a) \leq st(b)$.

Demostración ver [24] página 20

Observación 1.12 ¿Si cambiamos el ultrafiltro obtenemos otro modelo no estándar? Es decir, si $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ son ultrafiltros distintos ¿Los cuerpos obtenidos son no isomorfos? Esta pregunta es equivalente a la hipótesis del continuo. Si asumimos esta hipótesis los modelos obtenidos mediante esta contrucción son isomorfos.

1.2.2 Extensiones

Si queremos utilizar a los reales no estándar para hacer análisis es necesario poder extender funciones, conjuntos y relaciones en general, por ejemplo, dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ queremos construir una extensión ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$.

Definición 1.12 Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y $P \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, definimos ${}^*A \subset {}^*\mathbb{R}$, ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$, ${}^*P \subset {}^*R \times {}^*R$ de la siguiente manera:

1. $\overline{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}} \in {}^*A$ si y solo si $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in A\} \in \mathcal{U}$
2. ${}^*f(\overline{(r_n)_{n\in\mathbb{N}}}) := \overline{(f(r_n))_{n\in\mathbb{N}}}$.
3. $(\overline{(r_n)_{n\in\mathbb{N}}}, \overline{(s_n)_{n\in\mathbb{N}}}) \in {}^*P$ si y solo si $\{n \in \mathbb{N} : (r_n, s_n) \in P\} \in \mathcal{U}$.

Observación 1.13 Si tomamos $a \in A$ y su inmersión ${}^*a \in {}^*R$, ${}^*a = \overline{(a, a, \ldots, a, \ldots)}$ como el conjunto de índices de esa sucesión tales que $a \in A$ es $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$, se tiene que ${}^*a \in {}^*A$, análogamente se prueba que las definiciones anteriores son extensiones.

Proposición 1.1.9 Sean $r \in \mathbb{R}$, $a \in {}^*\mathbb{R}$, ξ infinitesimal positivo tal que $r < a + \xi$, entonces $r \leq a$.

Si el lector está interesado en profundizar en las propiedades de los reales no estándar puede consultar los libros [24], [18], [15].

1.3 Superestructuras

En este sección presentaremos las superestructuras y veremos que esto permite extender el método no estándar a otras teorías matemáticas, enunciaremos el principio de transferencia, herramienta fundamental para el Análisis no Estándar.
En la sección anterior vimos como extender conjuntos, funciones y relaciones binarias, sabemos que en matemática necesitamos construir otro tipo de objetos, por ejemplo, productos cartesianos, relaciones de aridad arbitraria, etc. Una estructura matemática se puede pensar como con conjunto X con operaciones, funciones y relaciones sobre X, una superestructura es un conjunto que pretender englobar todas las construcciones matemáticas que necesitemos para desarrollar nuestra teoría. Nuestro objetivo es extender el método no estándar a otras teorías matemáticas, la idea es que una superestructura tomada adecuadamente nos será suficiente para considerar su extensión no estándar, por ejemplo si consideramos que X es un espacio métrico, tanto la métrica como los límites o el conjuntos de funciones de X en X serán elementos de su superestructura.

Definición 1.13 Sea X un conjunto, consideremos la siguiente sucesión de conjuntos $V_0(X) = X$, $V_{n+1}(X) = V_n(X) \cup \mathcal{P}((V_n(X))$.
Al conjunto $V(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n(X)$ lo llamamos la *superestructura* sobre X.

Observación 1.14 Es fácil ver que las funciones sobre X, la relaciones de aridad arbitraria, las partes de esos conjuntos , y la partes de las partes .... pertenecen a la superestructura de X.

Cuando construimos los reales no estándar vimos que hay varias propiedades de $\mathbb{R}$ que son heredadas por ${}^*\mathbb{R}$, por ejemplo la propiedades de cuerpo, pero hay otras que no, sabemos que $\mathbb{R}$ es un cuerpo completo, sin embargo ${}^*\mathbb{R}$ no ya que el conjunto de infinitesimales positivos está acotado superiormente pero no tiene supremo, el principio de transferencia nos permite saber cuales son la propiedades de X que se transfieren a ${}^*X$, para establecer con exactitud cuales son esta propiedades, es necesario formalizar las afirmaciones que pueden hacerse sobre X con el fin de convertirlas en un objeto de estudio en si mismo, esto es lo que se suele llamarse " Metamatemática ".

Lenguaje para una Superestructura

Sea $S = V(X)$ una superestructura, el lenguaje $\mathcal{L}_X$ asociado a S se define de la siguiente manera:
Alfabeto :

- Para cada $a \in S$ tenemos un símbolo de constante $\underline{a}$.
- Una cantidad infinita numerable de símbolos de variables: $x_1, \ldots, x_n, \ldots$.
- Símbolos lógicos : $\rightarrow, \wedge, \vee, =, \neg$.
- Cuantificadores universales : $\forall$, $\exists$.
- Símbolos auxiliares: $(,), <, >$.
- Símbolo de pertenencia : $\in$.

Términos:
Los términos son los elementos del lenguaje que denotan elementos particulares de la superestructura, se definen inductivamente de la siguiente manera.

- Todo símbolo de constante es un término.
- Cada símbolo de variable es un término.
- Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos, entonces $< t_1, \ldots, t_n >$ es un término.

Fórmulas:
Las fórmulas son los objetos de nuestro lenguaje que representan afirmaciones sobre los elementos de S. Se definen inductivamente de la siguiente forma.

- Si t_1, t_2 son términos,e entonces $t_1 \in t_2$ y $t_1 = t_2$ son fórmulas.
- Si φ, y ψ son fórmulas, entonces $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$, $\neg\varphi$ son fórmulas.
- si x es una variable, t un término y φ una fórmula, entonces $(\forall x \in t)\varphi$ y $(\exists x \in t)\varphi$ son fórmulas.

En este lenguaje se puede definir una semántica formal, nosotros manejaremos una interpretación intuitiva sin definirla formalmente.

Ejemplo : Tomemos $X = \mathbb{R}$, y la siguiente expresión
$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x+y = y+x)$. Si consideramos $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x, y) = x+y$. Entonces la expresión $x + y = y + x$ la podemos expresar como
$(\forall z \in \mathbb{R})(< x, y, z >\in \underline{f} \to< y, x, z >\in \underline{f})$. Por lo tanto consideraremos que la fórmula
$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y = y + x)$ es una expresión de nuestro lenguaje es claro que representa la conmutatividad de la suma de los reales, nuestro manejo de la semántica será intuitivo en este sentido.

1.3.1 Principio de Transferencia

Definición 1.14 ($*$-Transformación) Sean $V(X)$, $V(Y)$ superestructuras y $* : V(X) \to V(Y)$ función inyectiva, definimos la $*$-transformación de una fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_X$ como la fórmula ${}^*\varphi$ de $\mathcal{L}_Y$ que se obtiene de sustituir en φ cada símbolo de constante $\underline{a}$ por el símbolo de constante $\underline{*a}$, a $*(a)$ lo notaremos como ${}^*a$.

Observación 1.15 Como $X \subset V(X)$ y $X \in V(X)$, la imagen de X por $*$ como "conjunto" la notaremos $*(X)$ y la imagen como "elemento" la notaremos por ${}^*X$.

Teorema 1.2 (*Principio de Transferencia*) Sea X conjunto infinito, existe un conjunto Y y una función ${}^* : X \to Y$, inyectiva no sobreyectiva, tal que la $*$-transformación cumple que $Y = {}^*X$ y para toda fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_X$, φ es verdadera en $V(X)$ si y solo si ${}^*\varphi$ es verdadera en $V(Y)$.

Demostración Ver [24] pág 47.

Observación 1.16 Para demostrar el teorema anterior se utiliza la técnica de los ultraproductos. El conjunto ${}^*X$ se construye de la misma manera que ${}^*\mathbb{R}$, y del mismo modo podemos ver a X como un subconjunto de ${}^*X$ identificando a todo x en X con la clase $\overline{(x, \ldots, x, \ldots)}$, por esta razón cuando aplicamos el principio de transferencia a una fórmula φ en donde aparece un constante $\underline{a}$ con $a \in X$, no cambiaremos ese símbolo de constante.

Tomemos $X = \mathbb{R}$, ${}^*X = {}^*\mathbb{R}$, veamos un ejemplo para la observación anterior. Sea $r \in \mathbb{R}$, sabemos que si $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, entonces $r < n$, por lo tanto la siguiente fórmula es verdadera $(\exists n \in {}^*\mathbb{N})(\underline{r} < n)$, aquí usamos la identificación de la observación anterior para decir que esta fórmula representa a una fórmula de $\mathcal{L}_{^*X}$, ahora usamos el principio de transferencia y podemos concluir que $(\exists n \in \mathbb{N})(\underline{r} < n)$ también es verdadera, esto demuestra que si todo número real está acotado por un natural infinito entonces esta acotado por un natural estándar.

Proposición 1.2.1 Sea X un conjunto y $A, B, C, A_1, \ldots, A_n \in V(X)$, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.

1. ${}^*(\{A_1, \ldots, A_n\}) = \{{}^*A_1, \ldots, {}^*A_n\}$.
2. ${}^*(A_1, \ldots, A_n) = ({}^*A_1, \ldots, {}^*A_n)$.

3. $A \in B$ si y solo si ${}^*A \in {}^*B$.

4. $A = B$ si y solo si ${}^*A = {}^*B$.

5. $A \subset B$ si y solo si ${}^*A \subset {}^*B$.

6. ${}^*(\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{i=n} {}^*A_i$, ${}^*(\bigcap_{i=1}^{i=n} A_i) = \bigcap_{i=1}^{i=n} {}^*A_i$

7. ${}^*(A_1 \times \ldots \times A_n) = {}^*A_1 \times \ldots \times {}^*A_n$.

8. Si $R \subset A_1 \times \ldots \times A_n$, entonces ${}^*R \subset {}^*A_1 \times \ldots \times {}^*A_n$.

9. Si $f : A \to B$ es una función , entonces ${}^*f : {}^*A \to {}^*B$ también es una función, que cumple ${}^*(\underline{f}(\underline{a})) = \underline{{}^*f}(\underline{{}^*a})$.

10. Sean $f : A \to B$, y $g : B \to C$ funciones, entonces ${}^*(g.f) = {}^*g.{}^*f$.

Demostración Veamos 10 :Consideremos la fórmula $(\forall a \in \underline{A})(\underline{g}.\underline{f}(a) = \underline{g}(\underline{f}(a)))$, sabemos que es verdadera, entonces por el principio de transferencia la siguiente fórmula también es verdadera $(\forall a \in \underline{A})({}^*\underline{g}.{}^*\underline{f}(a) = {}^*(\underline{g}(\underline{f}(a)))$, y por 9 la fórmula siguiente también $(\forall a \in \underline{A})({}^*\underline{g}.{}^*\underline{f}(a) = \underline{{}^*g}(\underline{{}^*f}(a)))$.
Las demostraciones de las restantes se pueden ver en [24]

Teorema 1.3 Para todo $a, b \in {}^*\mathbb{Z}$, $b > 0$, existen $q, r \in {}^*\mathbb{Z}$ únicos tales que $a = bq + r$, con $0 \leq r < |b|$.

Demostración Por el teorema de Euclídes tenemos que la siguiente fórmula es verdadera
$(\forall a \in \mathbb{Z})(\forall b \in \mathbb{Z})(b > 0 \to (\exists q \in \mathbb{Z})(\exists r \in \mathbb{Z})((a = bq + r) \wedge (0 \leq r < |b|))$, entonces por el principio de transferencia tenemos que la siguiente fórmula también es verdadera
$(\forall a \in {}^*\mathbb{Z})(\forall b \in {}^*\mathbb{Z})(b > 0 \to (\exists q \in {}^*\mathbb{Z})(\exists r \in {}^*\mathbb{Z}))((a = bq + r) \wedge (0 \leq r < |b|))$.

Observación 1.17 La demostración del teorema de Euclídes utiliza de manera fundamental que $\mathbb{N}$ es un buen orden, pero el conjunto ${}^*\mathbb{N}$ no es un buen orden, por lo tanto no es posible “ transferir” la demostración de $\mathbb{N}$ a ${}^*\mathbb{N}$, sin embargo el principio de transferencia nos permite transferir el teorema.

Observación 1.18 Sí queremos trabajar en una superestructura $V(X)$ es conveniente que el conjunto $\mathbb{N}$ sea un subconjunto del conjunto X, por ejemplo, en nuestro caso queremos trabajar en la superestructura $V(X)$ donde X es un espacio métrico, podemos considerar $X' = X \sqcup N$ y considerar la superestructura $V(X')$.

La aplicaciones del análisis no estándar a los sistemas dinámicos que estudiamos en esta tesis necesitan del estudio del concepto de espacio métrico en el contexto de las extensiones no estándar, ese es el contenido de la siguiente sección.

1.4 Espacios Métricos

Definición 1.15 Sea X conjunto, y $d : X \times X \to \mathbb{R}$, decimos que X es una *métrica*, y X es espacio métrico , si se verifica.

1. $d(x, y) \geq 0$, para todo $x, y \in X$.

2. $d(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$.

3. $d(x,y) = d(y,x)$.

4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Sea X un espacio métrico, $V(X)$ su superestructura, y su correspondiente extensión non-standard $* : V(X) \to V(^*X)$.
Por el principio de transferencia tenemos una función $^*d : {}^*X \times {}^*X \to {}^*\mathbb{R}$, es fácil demostrar la siguiente proposición.

Proposición 1.3.1 $^*d : {}^*X \times {}^*X \to {}^*\mathbb{R}$, satisface las siguientes propiedades.

$^*d(x,y) \geq 0$, para todo $x, y \in {}^*X$.

$^*d(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$.

$^*d(x,y) = {}^*d(y,x)$.

$^*d(x,y) \leq {}^*d(x,z) + {}^*d(z,y)$.

Demostración Consideremos las siguientes fórmulas
$(\forall x, y \in X)(d(x,y) \geq 0)$.
$(\forall x, y \in X)(d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y)$.
$(\forall x, y \in X)(d(x,y) = d(y,x))$.
$(\forall x, y, x \in X)(d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y))$.
Entonces por el principio de transferencia tenemos las siguientes fórmulas:
$(\forall x, y \in {}^*X)({}^*d(x,y) \geq 0)$.
$(\forall x, y \in {}^*X)({}^*d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y)$.
$(\forall x, y \in {}^*X)({}^*d(x,y) = {}^*d(y,x))$.
$(\forall x, y, z \in {}^*X)({}^*d(x,y) \leq {}^*d(x,z) + {}^*d(z,y))$.

La proposición anterior nos sugiere la siguiente definición.

Definición 1.16 Sea M conjunto y $d : M \times M \to {}^*R$, decimos que (M, d) es un *espacio métrico no estándar*, y d una *métrica no estándar* si se cumple que para todo $x, y, z \in M$

1. $d(x,y) \geq 0$, para todo $x, y \in M$.

2. $d(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$.

3. $d(x,y) = d(y,x)$.

4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Observación 1.19 Los ejemplos más simples de métricas no estándar son los que provienen del principio de transferencia, es decir, sea (M, d) espacio métrico, entonces $({}^*M, {}^*d)$, es un espacio métrico no estándar.

Definición 1.17 Sea (M, d) espacio métrico no estándar, sea $x \in M$, $\epsilon \in {}^*\mathbb{R}$, $r > 0$, definimos $B(x,r) = \{y \in M : d(y,x) < r\}$, a este conjunto lo llamamos *bola de centro x y radio r*.

Análogamente a la teoría de espacios métricos " estándar", tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.3.2 Sea (M, d) espacio métrico no estándar el conjunto $\mathcal{B} = \{B(x, r) : x \in M, r \in {}^*\mathbb{R}, r > 0\}$ es una base para una topología en M.

Demostración Es claro que $\bigcup_{x \in M} B(x, r)$ para cualquier $r > 0$.
Sea $y \in B(x, r) \cap B(x', r')$, debemos probar que existe $\epsilon > 0$ tal que $B(y, \epsilon) \subset B(x, r) \cap B(x', r')$, sabemos que $d(y, x) < r$, $d(y, x') < r'$, sea $\epsilon = \min\{r - d(y, x), r' - d(y, x')\}$. Sea $z \in B(y, \epsilon)$, entonces $d(z, y) < \epsilon < r - d(y, x)$, entonces $d(z, y) + d(y, x) < r$, entonces $d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < r$, entonces $d(z, x) < r$, análogamente $d(z, x') < r'$.

Observación 1.20 Una consecuencia de la proposición anterior es que dado un espacio métrico (X, d), tenemos una forma " natural "de dotar a ${}^*X$ con una topología, esta es la generada por la métrica no estándar, a menos que digamos lo contrario, cuando pensemos a ${}^*X$ como un espacio topológico, será con esta topología.

Definición 1.18 Sea X espacio métrico, $x, y \in {}^*X$ decimos que x e y están *infinitesimalmente cerca*, lo notamos como $x \simeq y$, si ${}^*d(x, y) \simeq 0$. Al conjunto $m(x) = \{y \in {}^*X : y \simeq x\}$ se le llama la *mónada* de x.

Es posible caracterizar la compacidad en términos de las mónadas, ese es el contenido del siguiente teorema.

Teorema 1.4 (Robinson) Sea X espacio métrico, entonces X es compacto si y solo si para todo $y \in {}^*X$ existe $x \in m(y) \cap X$.

Demostración ver [24] pág 86.

Se puede caracterizar la continuidad de una función en términos de su extensión no estándar y la relación de estar infinitamente cerca, veamos la siguiente proposición.

Proposición 1.4.1 Sea X espacio métrico y $f : X \to X$ función, $x_0 \in X$, entonces f es continua en x_0 si y solo si para todo $x \in {}^*X$, con $x \simeq x_0$ se tiene que ${}^*f(x) \simeq f(x_0)$.

Demostración ver [18] página 46.

Definición 1.19 Sea X espacio métrico, decimos que $f : X \to X$ es un homeomorfismo si f es continua y con inversa continua.

Observación 1.21 Sea una función $f : X \to X$, sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos una función $f^n : X \to X$, la composición de f n-veces. Sea $\mathcal{F}(X, X)$ el conjunto de todas las funciones de X en X, es claro que $\mathcal{F}(X, X) \in V(X)$, ahora consideremos la siguiente función $F : \mathbb{N} \times (\mathcal{F}(X, X)) \to \mathcal{F}(X, X)$, $F(n, f) = f^n$, tomemos ${}^*F : {}^*\mathbb{N} \times {}^*(\mathcal{F}(X, X)) \to {}^*(\mathcal{F}(X, X))$, entonces definimos $({}^*f)^n := {}^*F(n, {}^*f)$.

Observación 1.22 Definimos ${}^*f^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, en particular para $n \in \mathbb{N}$, veamos que que en ese caso coincide con la composición de ${}^*f$ n veces.
Sea $n \in \mathbb{N}$, ${}^*F(n, {}^*f) = {}^*F({}^*n, {}^*f) = {}^*(F(n, f)) = {}^*(f^n) = ({}^*f)^n$.
En el caso de que f sea invertible tenemos definido f^n para todo $n \in \mathbb{Z}$ y de la misma manera $({}^*f)^n$ para todo $n \in {}^*\mathbb{Z}$

Un punto a destacar es que la extensión no estándar de una función puede elevarse a un n infinito, para aproximarnos a una "intuición "de que quiere decir esto, recordemos la construcción de las extensiones de funciones mediante ultrafiltros. Sea $f : X \to X$, definimos ${}^*X$ de la misma manera que ${}^*\mathbb{R}$, por lo tanto un elemento de ${}^*X$ es la clase de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X, donde la relación de equivalencia está definida mediante un ultrafiltro libre de la misma manera que en ${}^*\mathbb{R}$, un elemento en ${}^*\mathbb{N}_\infty$ se puede ver como la clase de una sucesión $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\lim_{n\to+\infty}\gamma_n = \infty$, entonces si $\gamma = \overline{(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ y $x = \overline{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ entonces ${}^*f^\gamma(x) = {}^*f^{\overline{(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}}}(\overline{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}) = \overline{(f^{\gamma_n}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}}$

Proposición 1.4.2 Sea X espacio métrico, $a, b \in X$, $a', b' \in {}^*X$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, entonces.

1. Si ${}^*d(a', b') > r$ entonces $d(a, b) \geq r$.
2. Si $d(a, b) > r$ entonces $st({}^*d(a', b')) \geq r$.

Demostración

1. $r < {}^*d(a', b') \leq {}^*d(a'.a) + {}^*d(a, b) + {}^*d(b, b') = {}^*d(a', b') \leq {}^*d(a', a) + d(a, b) + {}^*d(b, b') = d(a, b) + \xi$, con ξ infinitesimal, entonces $r < d(a, b) + \xi$, entonces $d(a, b) \geq r$, de lo contrario $d(a, b) < r$, entonces $0 < r - d(a, b) < \xi$, absurdo.

2. $r < d(a, b) = {}^*d(a, b) \leq {}^*d(a, a') + {}^*d(a', b') + {}^*d(b', b)$, pero ${}^*d(a, a') \simeq 0$, ${}^*d(b, b') \simeq 0$, por lo tanto tenemos que $r < {}^*d(a', b') + \xi$, con $\xi \in {}^*\mathbb{R}$, infinitesimal no negativo. Si ${}^*d(a', b')$ es infinito, no hay nada que demostrar, en caso contrario tenemos que $r = st(r) \leq st({}^*d(a', b') + \xi) = st({}^*d(a', b')) + st(\xi) = st({}^*d(a', b')) + 0 = st({}^*d(a', b'))$.

Capítulo 2

Homeomorfismos Expansivos

2.1 Definiciones y Resultados Básicos

Definición 2.1 Sea X espacio métrico, $f : X \to X$ homeomorfismo, decimos que f es *expansivo* si existe $c > 0$ tal que para todo $x, y \in X$ distintos, existe $n \in \mathbb{Z}$, tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > c$, a ese c se le llama constante de expansividad.

Definición 2.2 Decimos que f es *expansivo a futuro* si en la definición anterior consideramos $n \in \mathbb{N}$, es decir, para todo $x, y \in X$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > c$.

Definición 2.3 Decimos que f es *expansivo a pasado* si f^{-1} es expansivo a futuro.

En ambientes compactos no es posible tener homeomorfismos expansivos a futuro o a pasado a menos que el espacio sea finito, este es el contenido del siguiente teorema

Teorema 2.1 (Utz) Sea X espacio métrico compacto, si existe $f : X \to X$ homeomorfismo expansivo a futuro, entonces X es finito.

Demostración ver [22]

Definición 2.4 Sean X e Y espacios métricos compactos y $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ dos homeomorfismos, decimos que las dinámicas (X, f), (Y, g) son *conjugadas* si existe $\varphi : X \to Y$ homeomorfismo tal que $\varphi^{-1}.g.\varphi = f$.

Teorema 2.2 [En compactos la expansividad se preserva por conjugación] Sean X, Y espacios métricos compactos, y (X, f), (Y, g) dinámicas conjugadas, se cumple que si $f : X \to X$ es expansivo entonces g es expansivo.

Demostración Supongamos que f es expansivo con constante de expansividad α, vamos a probar que $g = \varphi.f.\varphi^{-1}$ es expansivo, es decir, encontraremos un $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ tal que si para todo $a, b \in Y$ se cumple que $d(g^n(a), g^n(b)) < c$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces $a = b$.

Como X es compacto φ^{-1} es uniformemente continua, por lo tanto existe $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, tal que si $d(y, y') < c$, entonces $d(\varphi^{-1}(y), \varphi^{-1}(y')) < \alpha$. Supongamos que para $a, b \in Y$ tenemos que $d(g^n(a), g^n(b)) < c$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces $d(\varphi^{-1}(g^n(a), \varphi^{-1}(g^n(b))) < \alpha$ parar todo $n \in \mathbb{Z}$, pero $a = \varphi(x)$ y $b = \varphi(x')$ para algunos $x, x' \in X$, entonces $d(\varphi^{-1}(g^n(\varphi(x)), \varphi^{-1}(g^n(\varphi(x')))) < \alpha$, pero $\varphi^{-1}(g^n(\varphi(z)) = f^n(z)$ para todo $z \in X$, entonces $d(f^n(x), f^n(x')) < \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, y como f es α-expansivo tenemos que $x = x'$, entonces $a = b$.

Veamos otra demostración del teorema anterior, para eso usaremos el lema siguiente.

Lema 2.1 Sean X e Y espacios métricos compactos, y $f : X \to Y$ homeomorfismo, se cumple que para todo $\alpha > 0$ existe $\beta > 0$ tal que para todo $a, b \in X$, si $d_X(a, b) \geq \alpha$ entonces $d_Y(f(a), f(b)) \geq \beta$.

Demostración Por la continuidad uniforme de f^{-1} dado $\alpha > 0$ existe $\beta > 0$ tal que para todo $c, d \in Y$, si $d_Y(c, d) < \beta$,entonces $d_X(f^{-1}(c), f^{-1}(d)) < \alpha$, por lo tanto si $d_X(f^{-1}(c), f^{-1}(d)) \geq \alpha$, entonces $d_Y(c, d) \geq \beta$, poniendo $a = f^{-1}(c)$ y $b = f^{-1}(d)$ tenemos el resultado.

Observación 2.1 (Otra demostración del teorema 2.2) Por el lema anterior para la constante de expansividad de $\alpha > 0$ existe $\beta > 0$ tal que para todo $a, b \in X$, distintos, si $d_X(a, b) \geq \alpha$ entonces $d_Y(\varphi(a), \varphi(b)) \geq \beta$. Sean $c, d \in Y$ distintos, tomemos $a = \varphi^{-1}(c)$, $b = \varphi^{-1}(d)$, como φ es inyectiva tenemos que $a \neq b$, entonces como f es expansivo, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $d(f^n(a), f^n(b)) > \alpha$, entonces por el lema anterior $d(\varphi(f^n(a), \varphi(f^n(b))) \geq \beta$, pero $d(\varphi(f^n(\varphi^{-1}(c)), \varphi(f^n(\varphi^{-1}(d)))) = d(g^n(c), g^n(d))$, tomando $\gamma < \beta$ como constante de expansividad tenemos el resultado.

Teorema 2.3 Sea X espacio métrico compacto, $f : X \to X$ homeomorfismo expansivo, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$, f^k también es expansivo.

Demostración Sea c la constante de expansividad de f, por la continuidad uniforme sabemos que existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f^i(x), f^i(y)) < c$ para todo $i = 1, \dots k$. Supongamos que f^k no es expansivo, entonces existen $x_0, y_0 \in X$ tales que para todo $m \in \mathbb{Z}$ se tiene que $d(f^{mk}(x_0), f^{mk}(y_0)) < \delta$. Sea $n \in \mathbb{Z}$, por el teorema de Euclídes existe $m, i \in \mathbb{Z}$, con $0 \leq i < k$ tal que $n = mk + i$, entonces $d(f^n(x_0), f^n(y_0)) = d(f^{mk+i}(x_0), f^{mk+i}(y_0)) = d(f^i(f^{mk}(x_0)), f^i(f^{mk}(y_0))) < c$, entonces f no es expansivo, absurdo.

Definición 2.5 Sea X espacio métrico compacto, y $f : X \to X$ homeomorfismo, decimos que es c-uniformemente expansivo, si para todo $\epsilon > 0$ existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x, y \in X$, si $d(x, y) > \epsilon$ entonces $d(f^i(x), f^i(y)) > c$, para algún $i \in \mathbb{Z}$, $|i| < n_\epsilon$.

Proposición 2.3.1 ([5]) Sea X espacio métrico compacto, y $f : X \to X$ homeomorfismo, si f es c-expansivo, entonces f es c-uniformemente expansivo.

Demostración Supongamos que f no es c-uniformemente expansivo, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para todo n existen $x_n, y_n \in X$, tales que $d(x_n, y_n) > \epsilon$ y $d(f^i(x_n), f^i(y_n)) \leq c$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, con $|i| < n$, entonces como X es compacto, tomando subsucesiones de ser necesario, podemos suponer que

$\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$, para algunos $x, y \in X$. Sea $k \in \mathbb{Z}$, como $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, tenemos que $\lim_{n\to+\infty} f^k(x_n) = f^k(x)$ y $\lim_{n\to+\infty} f^k(y_n) = f^k(y)$, tomemos dado $\delta > 0$, existe n_0 tal que $n_0 > |k|$, y $d(f^k(x), f^k(x_n)) < \frac{\delta}{2}$, $d(f^k(y), f^k(y_n)) < \frac{\delta}{2}$ para todo $n \geq n_0$, entonces
$d(f^k(x), f^k(y)) \leq d(f^k(x), f^k(x_{n_0})) + d(f^k(x_{n_0}), f^k(y_{n_0})) + d(f^k(y_{n_0}), f^k(y)) < \frac{\delta}{2} + c + \frac{\delta}{2} = c + \delta$, entonces
$d(f^k(x), f^k(y)) < c+\delta$ para todo $\delta > 0$, entonces $d(f^k(x), f^k(y)) \leq c$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, entonces f no es c-expansivo.

Teorema 2.4 Un intervalo $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ no admite homeomorfismos expansivos.

Demostración ver [7]

Proposición 2.4.1 Sea $f : X \to X$, $X \subset \mathbb{R}$, compacto, si f es homeomorfismo expansivo, entonces X es totalmente disconexo.

Demostración Supongamos que X tiene un número finito de componentes conexas no triviales, es decir, sea A una componente conexa de X, como f es un homeomorfismo $f^n(A) = I_n$ y $f^n(A) = I_{-n}$ son conexos,es decir , intervalos, como hay una cantidad finita, existen n y k,tales que $f^n(I_k) = I_k$, pero f^n homeomorfismo expansivo y I_k intervalo cerrado, lo cual es absurdo por la proposición anterior.
Supongamos que X tiene una cantidad infinita de componentes conexas no triviales, entonces dado A componente conexa, entonces
$\lim_{n\to+\infty} \text{longitud}(f^n(A)) \neq \infty$, de lo contrario se violaría la compacidad de X, entonces pueden suceder dos cosas, o $\lim_{n\to+\infty} \text{longitud}(f^n(A)) = 0$, o existe una subsucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, tal que $\lim_{k\to+\infty} \text{longitud}(f^{n_k}(A)) = r$, $r > 0$, supongamos que sucede esto último, entonces por la compacidad de X, existen n, k tales que $f^n(I_k) \cap I_k = I \neq \emptyset$, entonces $I \subset I_k$, entonces $f^n(I) \subset f^n(I_k)$, pero $I_k \cap f^{-n}(I_k)$, por lo tanto $f^n(I) \subset I_k$, entonces $f^n(I) \subset f^n(I_K) \cap I_k = I$, entones $f^n(I) \subset I$, análogamente $f^{-n}(I) \subset I$, por lo tanto $I \subset f^n(I)$, entonces $f^n(I) = I$, con I intervalo cerrado y f^n homoeomorfismo expansivo, lo cual es absurdo por la proposición anterior, por el mismo argumento tampoco puede existir una subsucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to+\infty} \text{longitud}(f^{-n_k}(A)) = r$, $r > 0$, por lo tanto tiene que suceder que $\lim_{n\to+\infty} \text{longitud}(f^n(A)) = 0$ y $\lim_{n\to+\infty} \text{longitud}(f^{-n}(A)) = 0$, pero por los mismos argumentos de la propisición anterior, concluimos que esto no puede suceder, lo cual es absurdo.

2.2 Dinámica Simbólica

Definición 2.6 Sea A conjunto tal que $card(A) = N$, definimos el espacio de N símbolos, o *Shift* como $\Sigma_N = A^{\mathbb{Z}}$.

Proposición 2.4.2 Sea $d : \Sigma_N \times \Sigma_N \to \Sigma_N$, definida por

$$d(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\delta(x_n, y_n)}{2^{|n|}}$$

Donde

$$\delta(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \neq b \\ 0 & \text{si } a = b \end{cases}$$

Entonces (Σ_N, d) es un espacio métrico compacto y totalmente disconexo.

Demostración d es una métrica : Es claro que $d(x,y) \geq 0$ para todo $x, y \in \Sigma_N$.
$x_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ si y solo si $\delta(x_n, y_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ si y solo si $d(x,y) = 0$.
$\delta(a,b) = \delta(b,a)$ entonces $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in \Sigma_N$.
Es claro que $\delta(a,b) \leq \delta(a,c) \leq \delta(c,b)$, entonces

$$d(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\delta(x_n, y_n)}{2^{|n|}} \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\delta(x_n, z_n)}{2^{|n|}} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\delta(z_n, y_n)}{2^{|n|}} = d(x,z) + d(z,y)$$

para todo $x, y, z \in \Sigma_N$.
Si consideramos a $\mathcal{A} = \{1, \ldots, N\}$, con la métrica discreta, entonces $\Sigma_N = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ entonces d es una métrica para la topología producto, luego como producto de compactos es compacto, tenemos que (Σ_N, d), y como $\mathcal{A}$ con la topología discreta es totalmente disconexo y producto de totalmente disconexos es totalmente disconexos, podemos concluir que Σ_N es totalmente disconexo.

Definición 2.7 Sea $\sigma : \Sigma_N \to \Sigma_N$, definida como $x \in \Sigma_N$, $\sigma(x)(i) = x(i+1)$, a esta función la llamamos *shift*

Proposición 2.4.3 Sea $X \subset \Sigma$, tal que $\sigma(X) \subset X$, con $\sigma : \Sigma_N \to \Sigma_N$, el shift, entonces $\sigma \restriction X : X \to X$ es un homeomorfismo expansivo.

Demostración Es claro que $(\sigma^{-1}(x))_i = x_{i-1}$, y que σ y σ^{-1} son continuas. Sean $x, y \in \Sigma_N$, si $x \neq y$, entonces existe n tal que $x(n) \neq y(n)$, entonces $\sigma^n(x)(0) = x(n)$ y $\sigma^n(y)(0) = y(n)$, por lo tanto $d(\sigma^n(x), \sigma^n(y) \geq 1$, por lo tanto tomando $0 < c < 1$, tenemos que σ es c expansivo.

Teorema 2.5 Sea X espacio métrico compacto y totalmente disconexo, $f : X \to X$ es homeomorfismo expansivo si y solo si es conjugado de un subshift, es decir existe $A \subset \Sigma_N$ compacto, con $\sigma(A) \subset A$, y $h : X \to A$ homeomorfismo, tal que $f = h^{-1}.\sigma_A.h$, donde $\sigma_A := \sigma \restriction A$.

Demostración Ver [17]

Capítulo 3

Libremente Expansivos

3.1 Definiciones y Resultados Básicos

Definición 3.1 (p-iterados) Sea X espacio métrico compacto, $f : X \to X$ homeomorfismo, y $p \in \beta\mathbb{N}$, definimos f^p y f^{-p}, el p-iterado para el futuro y el p-iterado para el pasado respectivamente, para un $x \in X$ de la siguiente manera:

- $f^p(x) = p\text{-lím}\, f^n(x)$.
- $f^{-p}(x) = p\text{-lím}\, f^{-n}(x)$.

A la familia $\{f^p : p \in \beta\mathbb{N}\} \cup \{f^{-p} : p \in \beta\mathbb{N}\}$ la denotaremos como $\{f^{ip} : p \in \beta\mathbb{N}, i = \{-1, 1\}\}$.

Si p es principal y $p = p_m$, entonces $f^p(x) = f^m(x)$.

Observación 3.1 Si p es principal y $p = p_m$, entonces $f^p(x) = f^m(x)$, este hecho motiva la notación f^p, para p filtro.

Definición 3.2 Sea X espacio métrico, $f : X \to X$ homeomorfismo, $x, y \in X$.

1. Sea dice que x, y son *proximales* si para todo $\epsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon\}$ es infinito.

2. Sea $p \in \mathbb{N}^*$, x, y se dicen que son *p-proximales* si para todo $\epsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon\} \in p$.

3. Sea $p \in \mathbb{N}^*$, x, y se dicen *$(-p)$-proximales* si para todo $\epsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N} : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < \epsilon\} \in p$.

Proposición 3.0.1 Sea X espacio métrico compacto, $f : X \to$ homeomorfismo, $x, y \in X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. x, y son p-proximales para todo $p \in \mathbb{N}^*$.
2. Para todo $\epsilon > 0$, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon\}$ es cofinito.

3. x, y son positivamente asintóticos, esto es
$$\lim_{n\to+\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$$
.

Demostración $2 \Leftrightarrow 3$ Evidente.

$2 \Rightarrow 1$: Sea $\epsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon\} \in Cofin(\mathbb{N})$, pero p es libre, por lo tanto $Cofin(\mathbb{N}) \subset p$, entonces $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon\} \in p$.

$1 \Rightarrow 3$: Supongamos que $\lim_{n\to+\infty} d(f^n(x), f^n(y)) \neq 0$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $d(f^j(x), f^j(y)) \geq \epsilon$, para todo $j \in \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$, para alguna n_k sucesión, como X es compacto, tomando subsucesiones de ser necesario, podemos suponer que $\lim_{k\to+\infty} f^{n_k}(x) = a$, y $\lim_{k\to+\infty} f^{n_k}(y) = b$, con $d(a, b) \neq 0$. Consideremos la sucesión de conjuntos $A_i = \{n_k : k \geq i\}$ y el ultrafiltro libre p que extiende a la familia $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, entonces $a = f^p(x)$, y $b = f^p(y)$, entonces x, y no son p-proximales.

Observación 3.2 Sea X espacio métrico compacto y $f : X \to X$ homeomorfismo, la noción de expansividad puede verse en términos de los p-iterados de la siguiente manera:
f es α-expansivo si para todo $x, y \in X$, existe $p_m \in \beta\mathbb{N}$ filtro principal, tal que $d(f^{p_m}(x), f^{p_m}(y)) > \alpha$ o $d(f^{-p_m}(x), f^{-p_m}(y)) > \alpha$.

Definición 3.3 Sea X espacio métrico compacto, $f : X \to X$ homeomorfismo, $\alpha > 0$. Decimos que f es *libremente expansivo*, con constante de expansividad α, si para todo $x, y \in X$, existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $d(f^p(x), f^p(y)) > \alpha$ o $d(f^{-p}(x), f^{-p}(y)) > \alpha$.

Observación 3.3 Es claro que f es libremente expansivo si y solo si f^{-1} es libremente expansivo.

3.2 Libremente expansivo = se separan en infinitos tiempos

Teorema 3.1 Sea X espacio métrico compacto, $f : X \to X$ homeomorfismo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es libremente expansivo.

2. Existe $\lambda > 0$ tal que para todo $x, y \in X$, existe $Y \subset \mathbb{N}$ infinito, tal que $d(\{f^n(x) : n \in Y\}, \{f^n(y) : n \in Y\}) > \lambda$ o

   $d(\{f^{-n}(x) : n \in Y\}, \{f^{-n}(y) : n \in Y\}) > \lambda$.

3. Existe $\theta > 0$ tal que para todo $x, y \in X$, el conjunto $\{k \in \mathbb{Z} : d(f^k(x), f^k(y)) > \theta\}$ es infinito.

Demostración $1 \Rightarrow 2$: Sea α la constante de expansividad, consideremos $\lambda < \alpha$. Sean $x, y \in X$ y $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $d(f^p(x), f^p(y)) > \alpha$ (o tomamos f^{-1}), como $\alpha > \lambda$, existen U, V entornos de $f^p(x)$ y $f^p(y)$ tales que $d(U, V) > \lambda$.
Sea $B = \{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in U\}$, y $C = \{n \in \mathbb{N} : f^n(y) \in V\}$, entonces $B, C \in p$, por lo tanto $B \cap C \in p$, entonces $Y = B \cap C$ es el que precisamos.

$2 \Rightarrow 3$: Evidente.

$3 \Rightarrow 1$: Sea $x, y \in X$, sabemos que $\{k \in \mathbb{Z} : d(f^k(x), f^k(y)) > \theta\}$ es infinito, supongamos que $A = \{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) > \theta\}$ es infinito(de lo contrario usamos el mismo argumento con f^{-1}).
Sea p ultrafiltro libre tal que $A \in p$, entonces $f^p(x) \in \overline{\{f^n(x) : n \in A\}}$, en efecto, sea V entorno de $f^p(x)$, entonces $\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in V\} \in p$, pero $A \in p$, entonces $A \cap \{n : f^n(x) \in V\} = \{n \in A : f^n(x) \in V\} \in p$, entonces $\{n \in A : f^n(x) \in V\} \neq \emptyset$, entonces $f^p(x) \in \overline{\{f^n(x) : n \in A\}}$, de igual modo $f^p(y) \in \overline{\{f^n(y) : n \in A\}}$, entonces $d(f^p(x), f^p(y)) \geq \theta$, por lo tanto f es libremente expansivo para cualquier $\alpha < \theta$.

La siguiente caracterización involucra a los ultrafiltros.

Teorema 3.2 Sea X espacio métrico compacto y $f : X \to X$ homeomorfismo, las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. f es libremente expansivo.
2. Existe $\alpha > 0$ tal que para todo $x, y \in X$ y para todo $\beta < \alpha$, existe p ultrafiltro libre tal que

$$\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) > \beta\} \in p$$

o

$$\{n \in \mathbb{N} : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) > \beta\} \in p$$

Demostración $1 \Rightarrow 2$: Sea α la constante de expansividad, $x, y \in X$ tales que $d(f^p(x), f^p(y)) > \alpha$ (si $d(f^{-p}(x), f^{-p}(y)) > \alpha$ se razona de manera análoga). Tomemos $\beta < \alpha$, supongamos que

$$\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) > \beta\} \notin p$$

entonces $A = \{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) \leq \beta\} \in p$.
Pero $f^p(x) \in \overline{\{f^n(x) : n \in A\}}$ y $f^p(y) \in \overline{\{f^n(y) : n \in A\}}$, entonces $d(f^p(x), f^p(y)) \leq \beta < \alpha$, absurdo.

$2 \Rightarrow 1$: Sea α cono en la hipótesis, si no existe $\beta < \alpha$ tal que f es β-expansivo, entonces tomemos $\beta_1 < \beta_2 < \alpha$, como f no es β_1-libremente expansivo, existen $u, v \in X$ distintos tales que para todo ultrafiltro libre p se cumple que $d(f^p(u), f^p(v)) \leq \beta_1$ y $d(f^{-p}(u), f^{-p}(v)) \leq \beta_1$.
Si aplicamos 2) a $\beta_1 < \alpha$ tenemos que existe $q \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$A = \{n \in \mathbb{N} : d(f^n(u), f^n(v)) > \beta_2\} \in q$$

Pero $f^q(u) \in \overline{\{f^n(u) : n \in A\}}$ y $f^q(v) \in \overline{\{f^n(v) : n \in A\}}$, por lo tanto $d(f^q(u), f^q(v)) \geq \beta_1 > \beta_1$, absurdo.

3.3 Ejemplos

Ejemplo 3.1 *Sea $I = [0,1)$, $0 < a < b < 1$, y $r : I \to I$, con a, b racionalmente independientes (como elementos de $\mathbb{R}$ considerado como espacio vectorial sobre los racionales). Consideremos la función definida de la siguiente manera.*

$$r(x) = \begin{cases} x + 1 - a \ \text{ si } \ x \in [0,a) \\ \\ x - a + 1 - b \ \ \textit{si} \ \ x \in [a,b) \\ \\ x - b \ \text{ si } \ x \in [b,1) \end{cases}$$

Definamos una sucesión $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de la siguiente manera.

$$r(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ r^k(0) \in [0,a) \\ \\ 1 \ \ \textit{si} \ \ r^k(0) \in [a,b) \\ \\ 2 \ \text{ si } \ r^k(0) \in [b,1) \end{cases}$$

Consideremos $\Sigma = \{0,1,2\}$, y el shift $\sigma : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \Sigma^{\mathbb{N}}$, tomemos X como la clausura de la óribta de x. En [1] se afirma que X no tiene puntos doblemente asintóticos con respecto al homeomorfismo $\sigma \upharpoonright X : X \to X$, entonces por el teorema 3.1 $\sigma \upharpoonright X : X \to X$ es libremente expansivo.

Veamos que existen homeomorfismos expansivos que no son libremente expansivos, para esto antes debemos hacer algunas consideraciones sobre los libremente expansivos en el espacio de N-símbolos.

Proposición 3.2.1 Sea $X \subset \Sigma_N$ subshift, entonces σ es libremente expansivo si y solo si para todo $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}, (y_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X$ el conjunto $A = \{i \in \mathbb{Z} : x_i \neq y_i\}$ es infinito.

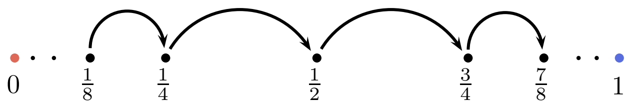
Demostración Directo: Sean $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}, (y_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X$ distintos, como es libremente expansivo el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z} : d(\sigma^n((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}), \sigma^n((y_i)_{i\in\mathbb{Z}}) \geq 1\}$ es inifnito, pero $d(\sigma^n((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}), \sigma^n((y_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{\delta(x_{i+n}, y_{i+n})}{2^{|n|}}$, entonces $x_n \neq y_n$ para todo $n \in A$.

Recíproco: Si $A = \{i \in \mathbb{Z} : x_i \neq y_i\}$ es infinito, entonces para todo $n \in A$ se cumple que $d(\sigma^{-n}((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}), \sigma^{-n}((y_i)_{i\in\mathbb{Z}}) \geq 1$.

Ejemplo 3.2 *Sea $X = \{0,1\} \cup \{\frac{1}{n} : n \geq 2\} \cup \{1 - \frac{1}{n} : n \geq 3\}$, definimos $f : X \to X$ de la siguiente manera.*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ x = 0 \\ \\ 1 \ \ \textit{si} \ \ x = 1 \\ \\ \frac{1}{n-1} \ \text{ si } \ x = \frac{1}{n} \ \text{ con } \ n \geq 3 \\ \\ 1 - \frac{1}{n+1} \ \text{ si } \ x = 1 - \frac{1}{n} \ \text{ con } \ n \geq 2 \end{cases}$$

El siguiente dibujo ilustra la dinámica del ejemplo, hay tres órbitas, los puntos rojo y azul que son fijos, y los puntos negros que pertenecen todos a la misma órbita.

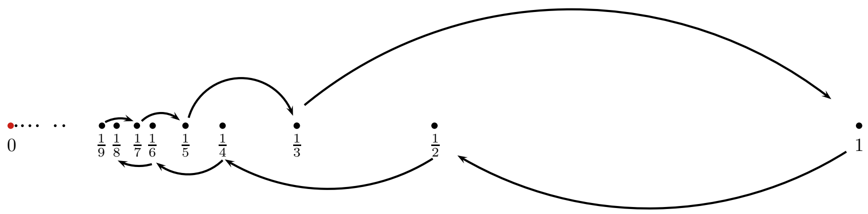


Es claro que f es un homeomorfismo, y si tomamos dos puntos distintos, para el pasado o para el futuro sus iterados se separan en algún momento a más de $\frac{1}{6}$, sin embargo no es libremente expansivo ya que si tomamos dos puntos $x, y \in X - \{0,1\}$ distintos, para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$ se verifica que $f^{-p}(x) = f^{-p}(y) = 0$, esto es porque el 0 es el único punto límite de una sucesión de iterados negativos, análogamente $f^p(x) = f^p(y) = 1$.

Ejemplo 3.3 *Sea $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \geq 1\}$, definimos $f : X \to X$ de la siguiente manera.*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \\ \frac{1}{n+2} \quad si \quad x = \frac{1}{n} \quad con \quad n \geq 2 \quad par \\ \\ \frac{1}{n-2} \quad \text{si} \quad x = \frac{1}{n} \quad \text{con} \quad n \geq 3 \quad impar \\ \\ \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

El siguiente dibujo ilutra la dinámica del ejemplo, hay dos órbitas, los puntos negros que pertenecen a una misma órbita y el punto rojo que es fijo.



Es claro que f es un homeomorfismo, además es expansivo ya que dados dos puntos $x, y \in X$ distintos para el pasado o para el futuro sus iterados se separan a más de $\frac{1}{2}$, sin embargo 0 es el único punto límite de cualquier sucesión de iterados, tanto para el pasado como para el futuro, por lo tanto para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$ los iterados f^p y f^{-p} son constantes e iguales a 0, entonces no es libremente expansivo.

3.4 Preservación de los libremente expansivos por potencias y conjugaciones

En el capítulo 1 vimos que los homeomorfismos expansivos se preservan por iteraciones, el teorema siguiente nos dice que esto también pasa con los homeomorfismos libremente expansivos, para demostrar este hecho veamos primero el siguiente lema.

Lema 3.1 Sean X e Y espacios métricos compactos, y $f : X \to Y$ homeomorfismo, sea $k \geq 0$ entero, se cumple que para todo $\alpha > 0$ existe $\beta > 0$ tal que para todo $a, b \in X$, si $d_X(a,b) \geq \alpha$ entonces $d_Y(f^j(a), f^j(b)) \geq \beta$, para todo $j \in \mathbb{Z}$ con $1 \leq |j| \leq k$.

Demostración Por el lema 2.1, dado α para todo $j \in \mathbb{Z}$ tal que $1 \leq |j| \leq k$ existe $\beta_j > 0$ tal que si $d_X(a,b) \geq \alpha$ entonces $d_Y(f^j(a), f^j(b)) \geq \beta_j$, tomando $\beta = min\{\beta_j : 1 \leq |j| \leq k\}$, tenemos el resultado.

Teorema 3.3 Sean X espacio métrico compacto ,$f : X \to X$ homeomorfismo libremente expansivo y $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, entonces f^k es libremente expansivo.

Demostración Sea $\alpha > 0$ la constante de expansividad, tomemos $x, y \in X$ distintos, por el teorema 3.1 parte 3 sabemos que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z} : d(f^n(x), f^n(y)) > \alpha\}$ es infinito, queremos ver que $A \cap k\mathbb{Z}$ es infinito, consideremos la partición de $\mathbb{Z}$ en intervalos $[mk, (m+1)k]$ con $m \in \mathbb{Z}$, como A es infinito existe una sucesión a_i, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ y una sucesión b_i, $b : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tales que $d(f^{a_i}(x), f^{a_i}(y)) > \alpha$ y $a_i \in [b_i k, (b_i+1)k]$ para todo $i \in \mathbb{N}$, pero por el lema anterior existe $\beta > 0$ tal que $d(f^j(f^{a_i}(x)), f^j(f^{a_i}(y)) \geq \beta$, en particular para $j = (b_i+1)k - a_i$ por lo tanto $d(f^{(b_i+1)k-a_i}(f^{a_i}(x)), f^{(b_i+1)k-a_i}(f^{a_i}(y)) \geq \beta$, entonces $d(f^{(b_i+1)k}(x), f^{(b_i+1)k}(y)) \geq \beta$, tomando como constante de expansividad cualquier $\gamma < \beta$ tenemos el resultado.

Teorema 3.4 (Los libremente expansivos se preservan por conjugaciones) Sean X, Y espacios métricos comnpactos y (X, f) y (Y, g) dinámicas conjugadas, si $f : X \to X$ es homeomorfismo libremente expansivo, entonces g también.

Demostración Sea $\varphi : X \to Y$ homeomorfismo ,y $f : X \to X$ homeomorfismo libremente expansivo con constante de expansividad α, vamos a probar que $g = \varphi^{-1}.f.\varphi$ es libremente expansivo, donde $\varphi : X \to Y$ es un homeomorfismo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Sea $c, d \in Y$ distintos usando la caracterización del teorema 3.1 parte 3 alcanza con probar que el conjunto $A = \{k \in \mathbb{Z} : d(g^k(c), g^k(d)) \geq \beta\}$ es infinito para algún $b > 0$, sea $a = \varphi^{-1}(c)$, $b = \varphi^{-1}(d)$, como φ es inyectiva tenemos que $a \neq b$, entonces como f es libremente expansivo tenemos que el conjunto $B = \{k \in \mathbb{Z} : d(f^k(a), f^k(b)) > \alpha\}$ es infinito, para $\alpha > 0$ y φ aplicamos el lema?, por lo tanto existe un β tal que si $d(f^k(a), f^k(b)) > \alpha$ entonces $d(\varphi(f^k(a)), \varphi(f^k(b))) \geq \beta$, pero $d(\varphi(f^k(\varphi^{-1}(c))), \varphi(f^k(\varphi^{-1}(d)))) = d(g^k(c), g^k(d))$, entonces tomando $\gamma < \beta$ como constante de expansividad tenemos el resultado.

3.5 Libremente Expansivo = Expansivo sin puntos doblemente asintóticos

El siguiente teorema es una caracterización de los libremente expansivos en términos de su comportamiento asintótico.

Teorema 3.5 Sea X espacio métrico compacto y $f : X \to X$ homeomorfismo, entonces f es libremente expansivo si y solo si es expansivo y no tiene puntos doblemente asintóticos.

Demostración Directo: Sabemos que si f es libremente expansivo es expansivo, sea α la constante de expansividad, tomemos $x, y \in X$ distintos, entones existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $d(f^p(x), f^p(y)) > \alpha$, pero $f^p(x) = \lim_{k\to+\infty} f^{n_k}(x)$ y $f^p(y) = \lim_{k\to+\infty} f^{n_k}(y)$, para alguna sucesión n_k, entonces
$\alpha < d(f^p(x), f^p(y)) = d(\lim_{k\to+\infty} f^{n_k}(x), \lim_{k\to+\infty} f^{n_k}(y))$, y
$d(\lim_{k\to+\infty} f^{n_k}(x), \lim_{k\to+\infty} f^{n_k}(y)) = \lim_{k\to+\infty} d(f^{n_k}(x), f^{n_k}(y))$, entonces
$\lim_{k\to+\infty} d(f^{n_k}(x), f^{n_k}(y)) > \alpha$, por lo tanto no son doblemente asintóticos.

Recíproco: Sean $x, y \in X$ distintos, como no son doblemente asintóticos existe $\epsilon > 0$ tal que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z} : d(f^k(x), f^k(y)) > \epsilon\}$ es infinito. Por la expansividad uniforme para $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $d(x, y) > \epsilon$ entonces $d(f^j(x), f^j(y)) > \alpha$ para algún $j \in \mathbb{Z}$ con $1 \leq |j| \leq N$, por lo tanto para todo $k \in A$ se verifica que $d(f^j(f^k(x)), f^j(f^k(y)) > \alpha$ para algún $j \in \mathbb{Z}$ con $1 \leq |j| \leq N$, entonces x, y se separan en infinitos iterados, entonces por la caracterización del teorema 3.1 parte 3, tenemos que f es libremente expansivo.

Capítulo 4

Non-Standard Expansivos

4.1 Definición y Ejemplos

Definición 4.1 Sea $f : X \to X$ homeomorfismo, decimos que es *non-standard expansivo* si existe $c \in \mathbb{R}$, llamada constante de expansividad, tal que para todo $x, y \in X$ distintos, existe $n \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$ tal que ${}^*d(({}^*f)^n(x), ({}^*f)^n(y)) > c$.

Si el contexto no admite confusión seguiremos el convenio de notar d en vez de ${}^*d$ y f en vez de ${}^*f$.

Ejemplo 4.1 *Sea* $X = \{1, 0\}$, *definimos* $f : X \to X$ *como* $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ *es claro que* f *es un homeomorfismo tal que se para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *se cumple que* $d(f^n(0), f^n(1) = 1$, *entonces la siguiente fórmula es verdadera*
$(\forall n \in \mathbb{Z})(d(f^n(0), f^n(1)) = 1)$.
Entonces por el principio de transferencia la siguiente fórmula también es verdadera.
$(\forall n \in {}^*\mathbb{Z})({}^*d({}^*f^n(0), {}^*f^n(1)) = 1)$.
En particular para cualquier $n \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$ *se tiene que* ${}^*d({}^*f^n(0, {}^*f^n(1)) = 1$, *por lo tanto* f *es non-standard expansivo.*

Veamos que los ejemplos 3.2 y 3.3 son expansivos pero no non-standard expansivos.

Ejemplo 4.2 *Sea* $X = \{0, 1\} \cup \{\frac{1}{n} : n \geq 2\} \cup \{1 - \frac{1}{n} : n \geq 3\}$, *definimos* $f : X \to X$ *de la siguiente manera.*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ x = 0 \\ \\ 1 \ \ si \ \ x = 1 \\ \\ \frac{1}{n-1} \ \text{ si } \ x = \frac{1}{n} \ \text{ con } \ n \geq 3 \\ \\ 1 - \frac{1}{n+1} \ \text{ si } \ x = 1 - \frac{1}{n} \ \text{ con } \ n \geq 2 \end{cases}$$

Ya observamos que f *es un homeomorfismo expansivo, pero si tomamos un punto* $x \neq 0$, *y* $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ *tenemos que* $f^n(x) = 1 - \frac{1}{n+1}$, *pero* $\frac{1}{n+1} \simeq 0$ *por lo tanto* $f^n(x) \simeq 1$ *y* $f^{-n}(x) = \frac{1}{n+1} \simeq 0$, *entonces no es non-standard expansivo.*

Ejemplo 4.3 *Sea* $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \geq 1\}$, *definimos* $f : X \to X$ *de la siguiente manera.*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \\ \frac{1}{n+2} \ \textit{si} \ x = \frac{1}{n} \ \textit{con} \ n \geq 2 \ \textit{par} \\ \\ \frac{1}{n-2} \text{ si } x = \frac{1}{n} \text{ con } n \geq 3 \ \textit{impar} \\ \\ \frac{1}{2} \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

Si tomamos $x \in X$, *distinto de* 0 *tenemos que para* $f^n(x) = \frac{1}{n+2}$ *o* $f^n(x) = \frac{1}{n-2}$ *para todo* $n \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$, *por lo tanto* f *no es non-standard expansivo.*

A diferencia de los libremente expansivos, el concepto de non-standard expansivo tiene sentido en ambientes no compactos, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.4 *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = 2x$, *es claro que* ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$, *cunple* ${}^*f(x) = 2x$, *tomemos* $x, y \in \mathbb{R}$, *distintos, para todo* $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ *se verifica que* $|f^n(x) - f^n(y)| = 2^n|x - y| > r$ *para cualquier* $r \in \mathbb{R}$, *con* $r > 0$, *por lo tanto* f *es non-standard expansivo con cualquier constante de expansividad.*

4.2 Non-standard expansivo = Libremente expansivo en ambientes compactos

Teorema 4.1 Sea $f : X \to X$ homeomorfismo, entonces f es non-standard expansivo, con constante de expansividad c si y solo si para todo $x, y \in X$ el conjunto $\{n \in \mathbb{Z} : d(f^n(x), f^n(y)) > c\}$ es infinito.

Demostración Directo: Supongamos que $\{n \in \mathbb{Z} : d(f^n(x), f^n(y)) > c\}$ es finito. Por la finitud sabemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que
$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq \underline{m} \to d(f^n(\underline{x}), f^n(\underline{y})) \leq \underline{c})$, entonces por el principio de tranferencia la siguiente fórmula también es verdadera
$(\forall n \in {}^*\mathbb{N})(n \geq \underline{m} \to {}^*d({}^*f^n(\underline{x}), {}^*f^n(\underline{y})) \leq \underline{c})$, entonces en particular para todo n entero positivo infinito se tiene que ${}^*d({}^*f^n(x), {}^*f^n(y)) \leq c$, análogamente por la finitud de $\{n \in \mathbb{Z}_{\leq 0} : d(f^n(x), f^n(y)) > c\}$ y cambiando f por por f^{-1} tenemos que para todo n entero negativo infinito $d(f^n(x), f^n(y)) \leq c$, por lo tanto no es non-standard expansivo.

Recíproco: Supongamos que $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) > c\}$ es infinito, de lo contrario razonamos con f^{-1}, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m > n$ tal que $d(f^m(x), f^m(y)) > \underline{c})$ entonces existe una función $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}((\psi(n) > n) \wedge d(f^{\psi(n)}(\underline{x}), f^{\psi(n)}(\underline{y})) > \underline{c})$, entonces por el principio de transferencia $\forall n \in {}^*\mathbb{N}(({}^*\psi(n) > n) \wedge d(f^{{}^*\psi(n)}(\underline{x}), f^{{}^*\psi(n)}(\underline{y})) > \underline{c})$,entonces si $m \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, entonces ${}^*\psi(m) \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, por lo tanto$f$ es non-standard expansivo.

Observación 4.1 Una consecuencia del teorema anterior es que en ambientes compactos ser libremente expansivo es lo mismo que ser non-standard expansivo, pero en ambientes no compactos el concepto de libremente expansivo puede no tener sentido debido a la no existencia de p límites.

Corolario 4.1.1 El homeomorfismo del ejemplo 3.1 es non-standard expansivo.

Observación 4.2 (*¿Fuertemente non-standard expansivo?*) Una pregunta que podemos hacernos es ¿ qué pasa si en la defínción de non-standard expansivo en vez de cuantificar sobre X cuantificamos sobre ${}^*X$? es decir, podríamos definir que $f : X \to X$ es c-non-standard expansivo si y solo si para todo $x, y \in {}^*X$ distintos, existe $n \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$ tal que ${}^*d(({}^*f)^n(x), ({}^*f)^n(y)) > c$, es claro que esta versión a priori más fuerte implica la non-standard expansividad, veamos que el recíproco también se cumple:
Por el teorema anterior sabemos que la siguiente fórmula es verdadera.
$(\forall x \in X)(\forall y \in X)(x \neq y \to (\forall n \in \mathbb{N})(\exists i \in \mathbb{Z})(|i| > n) \wedge (d(f^i(x), f^i(y)) > c)$, entonces por el principio de transferencia la siguiente fórmula también es verdadera.
$(\forall x \in {}^*X)(\forall y \in {}^*X)(x \neq y \to (\forall n \in {}^*\mathbb{N})(\exists i \in {}^*\mathbb{Z})(|i| > n) \wedge ({}^*d(f^i(x), f^i(y)) > c)$, por lo tanto dados $x, y \in {}^*X$ y $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ existe $i \in \mathbb{Z}$, con $|i| > n$ tal que $d(f^i(x), f^i(y)) > c$, pero como $n \in {}^*\mathbb{N}$, entonces $i \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$, además esto prueba que se separan en infinitos números infinitos.

Ya sabemos que ser libremente expansivo es lo mismo que ser non-standard expansivo en ambientes compactos, por lo tanto todas las propiedades de los libremente expansivos las cumplen los non-standard expansivos en ambientes compactos, veremos que esas propiedades pueden ser demostradas utilizando los métodos del análisis no estándar.

4.3 Preservación de la non-standard expansividad por potencias y conjugaciones en ambientes compactos

Teorema 4.2 Sea X espacio métrico compacto, $f : X \to X$ homeomorfismo non-standard expansivo, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$, f^k también es non-standard expansivo.

Demostración Sea c la constante de expansividad de f, por la continuidad uniforme sabemos que existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f^i(x), f^i(y)) < c$ para todo $i = 1, \ldots k$. Supongamos que f^k no es non-standard expansivo, entonces existen $x_0, y_0 \in X$ tales que para todo $m \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$ se tiene que $d(f^{mk}(x_0), f^{mk}(y_0)) < \delta$. Sea $n \in {}^*\mathbb{Z}$, por el teorema de Euclídes (no estándar) existen $m, i \in {}^*\mathbb{Z}$, con $0 \leq i < k$ tal que $n = mk + i$, pero si $n \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$, entonces $m \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$, entonces $d(f^n(x_0), f^n(y_0)) = d(f^{mk+i}(x_0), f^{mk+i}(y_0)) = d(f^i(f^{mk}(x_0)), f^i(f^{mk}(y_0))) < c$, entonces f no es non-standard expansivo, absurdo.

Observación 4.3 Observemos que la demostración de teorema anterior es prácticamente igual a la demostración del teorema para expansivos.

Observación 4.4 Podemos demostrar el teorema anterior sin necesidad de usar reducción al absurdo, veamos otra demostración. Sea c la constante de expansividad. Sean $x, y \in X$ distintos, como f es libremente expansivo existe $n \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > c$, pero por el teorema de Euclídes (no estándar) existen $m, i \in {}^*\mathbb{Z}$, con $0 \leq i < k$ tal que $n = mk + i$, pero si $n \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$, entonces $m \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$, pero por simple transferencia el lema 2.1 también vale en ${}^*X$ por lo tanto si lo aplicamos para $c > 0$ existe $\beta > 0$ tal que ${}^*d(f^{-i}(f^n(x)), f^{-i}(f^n(y))) \geq \beta$, entonces ${}^*d(f^{mk}(x), f^{mk}(y)) \geq \beta$, entonces tomando $\gamma < \beta$ como constante de expansividad tenemos que f^k es non-standard expansivo.

Observación 4.5 En espacios no compactos no tiene porque preservarse la non-standard expansividad por potencias. Veamos el siguiente contraejemplo.
Sean $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tales que $c_n < d_n < a_n < b_n < a'_n < b'_n < c'_n < d'_n$, $d(c_n, d_n) = d(c'_n, d'_n) = \frac{1}{n}$, $d(d_n, a_n) = d(a_n, b_n) = d(a'_n, b'_n) = d(b'_n, c'_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con $\lim_{n\to+\infty} x_n = \infty$ para todo $x = a, b, c, d, a', b', c', d'$, con
$A_n = \{c_n, d_n, a_n, b_n, a'_n, b'_n, c'_n, d'_n\}$, y $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$, sea $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, definimos $f : X \to X$ como $f(c_n) = a_n$, $f(a_n) = c'_n$, $f(c'_n) = a'_n$, $f(a'_n) = c_n$, $f(d_n) = b_n$, $f(b_n) = d'_n$, $f(d'_n) = b'_n$, $f(b'_n) = d_n$, es claro que f es un homeomorfismo, además todo par de puntos distintos se separan en al menos todos los momentos impares , por lo tanto es non-standard expansivo, pero $d(f^2(c_n), f^2(d_n)) = d(c'_n, d'_n) = \frac{1}{n}$ y $d(f^2(c'_n), f^2(d'_n)) = d(c_n, d_n) = \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f^2 no es expansivo y por lo tanto no es non-standard expansivo.

Teorema 4.3 (En compactos la expansividad non-standard se preserva por conjugación)
Sean X, Y espacios métricos compactos, y (X, f), (Y, g) dinámicas conjugadas, si $f : X \to X$ es homeomorfismo non-standard expansivo, entonces $g : Y \to Y$ también.

Demostración Sea $\varphi : X \to Y$ homeomorfismo ,y $f : X \to X$ homeomorfismo non-standard expansivo con constante de expansividad α, vamos a probar que $g = \varphi.f.\varphi^{-1}$ es no estandar expansivo, es decir, encontraremos un $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ tal que si para todo $a, b \in Y$ se cumple que $d(g^n(a), g^n(b)) < c$ para todo $n \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$, entonces $a = b$.
Recordemos que si $\varphi : X \to Y$ es uniformemente continua, entonces
${}^*\varphi : {}^*X \to {}^*Y$ es uniformemente continua, y además si el diagrama
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$
conmuta, entonces el diagrama
$$\begin{tikzcd} {}^*X \arrow[r, "{}^*f"] \arrow[d, "{}^*\varphi"'] & {}^*X \arrow[d, "{}^*\varphi"] \\ {}^*Y \arrow[r, "{}^*g"'] & {}^*Y \end{tikzcd}$$
también conmuta. Como X es compacto $\varphi^{-1} : Y \to X$ es uniformemente continua, y por el principio de transferencia $\varphi^{-1} : {}^*Y \to {}^*X$ también es uniformemente continua, por lo tanto existe $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, tal que si $d(y, y') < c$, entonces $d(\varphi^{-1}(y), \varphi^{-1}(y')) < \alpha$. Supongamos que para $a, b \in Y$ tenemos que $d(g^n(a), g^n(b)) < c$ para todo $n \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$, entonces $d(\varphi^{-1}(g^n(a), \varphi^{-1}(g^n(b))) < \alpha$ parar todo $n \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$, pero $a = \varphi(x)$ y $b = \varphi(x')$ para algunos $x, x' \in X$, entonces

$d(\varphi^{-1}(g^n(\varphi(x)), \varphi^{-1}(g^n(\varphi(x')))) < \alpha$, pero $\varphi^{-1}(g^n(\varphi(z)) = f^n(z)$ para todo $z \in X$, entonces $d(f^n(x), f^n(x')) < \alpha$ para todo $n \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$, y como f es α-expansivo tenemos que $x = x'$, entonces $a = b$.

Observación 4.6 (*Otra demostración del teorema anterior*) Al igual que en el caso de los expansivos "estándar"podemos demostrar el teorema anterior de otra manera.
Nuevamente usamos la versión en ${}^*X$ del lema 2.1, entonces para la constante de expansividad de $\alpha > 0$ existe $\beta > 0$ tal que para todo $a, b \in {}^*X$, distintos, si ${}^*d_X(a, b) \geq \alpha$ entonces ${}^*d_Y(\varphi(a), \varphi(b)) \geq \beta$. Sean $c, d \in Y$ distintos, tomemos $a = \varphi^{-1}(c)$, $b = \varphi^{-1}(d)$, como φ es inyectiva tenemos que $a \neq b$, entonces como f es non-standard expansivo, existe $n \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$ tal que $d(f^n(a), f^n(b)) > \alpha$, entonces por el lema anterior $d(\varphi(f^n(a), \varphi(f^n(b))) \geq \beta$, pero $d(\varphi(f^n(\varphi^{-1}(c)), \varphi(f^n(\varphi^{-1}(d)))) = d(g^n(c), g^n(d))$, tomando $\gamma < \beta$ como constante de expansividad tenemos el resultado.

Observación 4.7 Si comparamos la demostraciones anteriores con la demostraciones para expansivos , podemos observar que se vuelve a repetir el fenómeno de que la demostración de un hecho de la expansividad non-standard es muy similar a la de su análogo en la teoría de los expansivos habituales, esto refuerza nuestra tesis de que la aproximación de los libremente expansivos por medio del análisis no estándar, no solo nos permite generalizar dicha noción para ambientes no compactos, sino que nos permite adaptar de manera natural demostraciones ya existentes.

Observación 4.8 En espacios no compactos no tiene porque preservarse la non-standard expansividad por conjugación. Veamos el siguiente contraejemplo.
Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones reales inyectivas tales que $d(x_n, y_n) = \frac{1}{n}$ y $d(x'_n, y'_n) = 1$, definimos $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n, y_n\}$, $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x'_n, y'_n\}$, $f : X \to X$, $f(x_n) = y_n$, $f(y_n) = x_n$, $g : Y \to Y$, $g(x'_n) = y'_n$, $g(y'_n) = x'_n$, es claro que f y g son homeomorfismos tales que f no es expansivo y por lo tanto no es non-standard expansivo, y g es non-standard expansivo porque dos puntos cualesquiera se separan en infinitos momentos, tomemos $\varphi : X \to Y$ definida como $\varphi(x_n) = x'_n$ y $\varphi(y_n) = y'_n$ es un homeomorfismo que verifica $\varphi^{-1} \cdot g . \varphi = f$, por lo tanto f y g son conjugados.

4.4 Non-Standard expansivo = Expansivo sin puntos doblemente asintóticos en ambientes compactos

Proposición 4.3.1 Sea X espacio métrico y $f : X \to X$, entonces $x, y \in X$ son positivamente asintóticos si y solo si para todo $m \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ se tiene que $f^m(x) \simeq f^m(y)$.

Demostración Directo : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$, entonces dado $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que se cumple
$(\forall m \in \mathbb{N})(m \geq \underline{n_\epsilon} \to d(f^m(x), f^m(y)) < \underline{\epsilon})$, por el principio de transferencia tenemos que la siguiente fórmula también es verdadera

$(\forall m \in {}^*\mathbb{N})(m \geq n_\epsilon \rightarrow d(f^m(x), f^m(y)) < \underline{\epsilon})$, si $m \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, entonces $m > n_\epsilon$ para todo ϵ, por lo tanto se cumple que $d(f^m(x), f^m(y)) < \epsilon$, para todo ϵ, entonces $f^m(x) \simeq f^m(y)$.

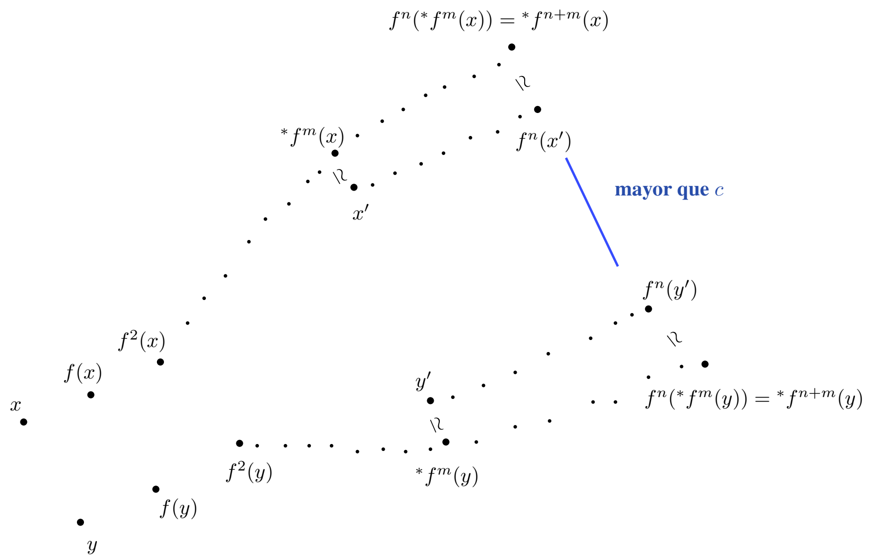
Recíproco : Supongamos que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(f^n(x), f^n(y)) \neq 0$, entonces existe $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica
$(\exists m \in \mathbb{N})((m \geq n) \wedge d(f^m(x), f^m(y)) > \epsilon)$, entonces tomando nuevamente una función de elección $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tenemos que
$(\forall n \in \mathbb{N})(\psi(n) > n) \wedge (d(f^{\psi(n)}(x), f^{\psi(n)}(y) > \underline{\epsilon})$ entonces por el principio de transferencia tenemos que $(\forall n \in {}^*\mathbb{N})({}^*\psi(n) > n) \wedge (d(f^{{}^*\psi(n)}(x), f^{{}^*\psi(n)}(y)) > \underline{\epsilon})$, entonces si $m \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ entonces ${}^*\psi(m) \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, con $d(f^{\psi(n)}(x), f^{\psi(n)}(y) > \epsilon$, por lo tanto $f^m(x) \not\simeq f^m(y)$. Análogamente para x, y negativamente asintóticos.

Teorema 4.4 Sea X espacio métrico compacto, $f : X \to X$ homeomorfismo, entonces f es non-standard expansivo si y solo si f es expansivo y no tiene puntos doblemente asintóticos.

Demostración

Directo : Si f es non-standard expansivo, entonces para todo $x, y \in X$ existe $m \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$, tal que $d(f^m(x), f^m(y)) > c$, entonces por la proposición anterior x, y no son doblemente asintóticos para ningún para de puntos en X.

Recíproco: La idea de la demostración se puede resumir en el siguiente dibujo.



Sean $x, y \in X$, como no son doblemente asintóticos sabemos que existe $m \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$ tal que $f^m(x) \not\simeq f^m(y)$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que ${}^*d(f^m(x), f^m(y)) > \alpha$, como X es compacto , por el teorema de Robinson existen $x', y' \in X$ tal que $x' \simeq f^m(x)$, $y' \simeq f^m(y)$,y como ${}^*d(f^m(x), f^m(y)) > \alpha$ tenemos que $d(x', y') \geq \alpha$, y en particular $x' \neq y'$, pero f es expansivo, entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $d(f^n(x'), f^n(y')) > c$, como f^n es continua, entonces por la caracterización de la continuidad de la prop 1.4.1, tenemos que ${}^*(f^n)(f^m(x)) \simeq f^n(x')$,

${}^*(f^n)(f^m(y)) \simeq f^n(y')$ entonces por la prop 1.4.2 parte 2, $st(d(f^n(f^m(x)), f^n(f^m(y)))) \geq c$, pero esto implica que $d(f^n(f^m(x)), f^n(f^m(y))) > \frac{c}{2}$ y como $n \in \mathbb{Z}$ y $m \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$, entonces $n+m \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$, pero si entonces f es non-standard expansivo.

Observación 4.9 En la demostración del directo del teorema anterior no utilizamos la compacidad del espacio, no así en el recíproco, veamos un ejemplo de un homeomorfismo en un espacio no compacto que es expansivo y sin puntos doblemente asintóticos pero que no es non-standard expansivo.
Consideremos dos sucesión de funciones $x_i^n : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2$, $y_i^n : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2$ tales que $d(x_i^n, x_j^n) = d(y_i^n, y_j^n) = 1$, $d(x_i^n, y_i^n) = \frac{1}{n}$, si $i \neq j$, $d(x_0^n, y_0^n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}$, y $d(A_n, A_m) = 1$, si $n \neq m$, donde $A_n = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \{x_i^n, y_i^n\}$. Definimos $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, y $f : X \to X$ como $f(x_i^n) = x_{i+1}^n$, $f(y_i^n) = y_{i+1}^n$, es claro que f es un homeomorfismo, y es expansivo con cualquier constante $c < 1$, ya que los únicos puntos que pueden contradecir la expansividad son de la forma x_i^n, y_i^n, pero $d(f^{-i}(x_i^n), f^{-i}(y_i^n)) = d(x_0^n, y_0^n) = 1$, es claro que no tiene puntos doblemente asintóticos debido a que para cualquier par de puntos, todos sus iterados, salvo una cantidad finita, están a una distancia constante , pero f no es non-standard expansivo ya que dado cualquier constante $c > 0$, tomando n suficientemente grande se tiene que $\frac{1}{n} < c$, pero $d(f^i(x_0^n), f^i(y_0^n)) < c$ para todo $i \neq 0$, por lo tanto no se separan en una cantidad infinita de momentos.

Observación 4.10 En la demostración anterior, a diferencia de la versión con ultrafiltros, no hemos usado la expansividad uniforme, en la siguiente definición introduciremos un concepto análogo para los non-standard expansivos, esperamos con esto persuadir al lector de que esta aproximación de los libremente expansivos mediante el análisis no estándar, no solo sirve para encontrar demostraciones novedosas y sintéticas, sino también como una herramienta de descubrimiento de nuevos conceptos dinámicos.

4.5 Non-standard expansividad y uniformidad

Definición 4.2 Sea X espacio métrico, y $f : X \to X$ homeomorfismo, decimos que es c-uniformemente non-standard expansivo, si para todo $\epsilon > 0$ existe $n_\epsilon \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ tal que para todo $x, y \in X$, si $d(x, y) > \epsilon$ entonces $d(f^i(x), f^i(y)) > c$, para algún $i \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$, $|i| < n_\epsilon$, la idea es que los "tiempos infinitos"de separación están uniformemente acotados para todo par de puntos que están a distancia mayor que una constante que podemos elegir arbitrariamente pequeña.

En el siguiente teorema demostraremos que si el ambiente es compacto un homeomorfismo es c-non-standard expansivo si y solo si es c-uniformemente non-standard expansivo.

Teorema 4.5 Sea X espacio métrico compacto, y $f : X \to X$ homeomorfismo, las siguiente afirmaciones son equivalentes.

1. f es c- non-standard expansivo.

2. Para todo $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, y para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$, $m > n$ tal que para todo $x, y \in X$, se cumple que si $d(x, y) > \epsilon$ entonces

$d(f^i(x), f^i(y)) > c$ para algún $i \in \mathbb{Z}$ con $n < |i| < m$.

3. Para todo $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ existe $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sucesión estrictamente creciente tal que para todo $x, y \in X$, si $d(x, y) > \epsilon$ entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $d(f^i(x), f^i(y)) > c$ para algún $i \in \mathbb{Z}$ con $n(k) < |i| < n(k+1)$.

4. Para todo $\epsilon > 0$ existe $n_\epsilon \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ tal que para todo $x, y \in {}^*X$, si ${}^*d(x, y) > \epsilon$ entonces ${}^*d(f^i(x), f^i(y)) > c$, para algún $i \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$, $|i| < n_\epsilon$.

5. f es c-uniformemente non-standard expansivo.

Demostración $1 \Rightarrow 2$: Supongamos que 2 no se cumple, entonces existe $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que para todo $m \in \mathbb{N}$, con $m > n$ existen $x_m, y_m \in X$ tales que $d(x_m, y_m) > \epsilon$ y $d(f^i(x_m), f^i(y_m)) \leq c$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ con $n < |i| < m$. Como X es compacto, tomando subsucesiones de ser necesario, podemos suponer que $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge a x y que $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge a y.
Sea $k \in \mathbb{Z}$ tal que $|k| > n$, sea $\delta > 0$, como f^k es continua, entonces $f^k(x_m)$ converge a $f^k(x)$ y $f^k(y_m)$ converge a $f^k(y)$, entonces podemos encontrar un m tal que $m > n$, $m > |k|$, $d(f^k(x_m), f^k(x)) < \frac{\delta}{2}$ y $d(f^k(y_m), f^k(y)) < \frac{\delta}{2}$, entonces tenemos que $d(f^k(x), f^k(y)) \leq d(f^k(x), f^k(x_m)) + d(f^k(x_m), f^k(y_m)) + d(f^k(y_m), f^k(y)) \leq \frac{\delta}{2} + c + \frac{\delta}{2} = c + \delta$, entonces $d(f^k(x), f^k(y)) \leq c$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ con $|k| > n$, entonces x, y se separan a lo más en una cantidad finita de puntos, entonces f no es non-standarexpansivo, absurdo.

$2 \Rightarrow 3$: Contruiremos la sucesión por recursión, tomemos $n(1) = 1$ y $n(2) > n(1)$ el "m" de la afirmación 2, ahora supongamos que tenemos definidos $n(1), n(2), \ldots, n(k)$, tomemos $n(k+1) > n(k)$ el "m" de la afirmación 2, entonces tenemos el resultado.

$3 \Rightarrow 4$: Tomemos $\epsilon > 0$, $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la sucesión de la afirmación 3, y un $l \in {}^*\mathbb{N}_\infty$. Sean $x, y \in X$ tales que $d(x, y) > \epsilon$ por el axioma de elección numerable y la afirmación 3, existe $i : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $n(k) < |i(k)| < n(k+1)$ y $d(f^{i(k)}(x), f^{i(k)}(y)) > c$, podemos extender esa función i, tal que $i : X \times X \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, verifique si $d(x, y) > \epsilon$, $i(x, y, k)$ sea la antigua función y para los otros caso como una constante arbitraria, por la tanto la siguiente fórmla es verdadera $(\forall x \in X)(\forall y \in X)(d(x, y) > \underline{\epsilon} \to (\forall k \in \mathbb{N})((n(k) < |i(x, y, k)| < n(k+1)) \wedge (d(f^{i(x,y,k)}(x), f^{i(x,y,k)}(x) > \underline{c})$. Entonces por el principio de transferencia la siguiente fórmula también es verdadera $(\forall x \in {}^*X)(\forall y \in {}^*X)({}^*d(x, y) > \underline{\epsilon} \to (\forall k \in {}^*\mathbb{N})(({}^*n(k) < |{}^*i(x, y, k)| < {}^*n(k+1)) \wedge ({}^*d({}^*f^{{}^*i(x,y,k)}(x), {}^*f^{{}^*i(x,y,k)}(x) > \underline{c})$ Como $l \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ y n es estrictamente creciente, se tiene que ${}^*n(l) \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ y ${}^*n(l+1) \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, entonces para todo $x, y \in {}^*\mathbb{X}$, se tiene que ${}^*i(x, y, l) \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$, por lo tanto queda probado.

$4 \Rightarrow 5$: Es evidente ya que si se cumple 4, en particular 5.

$5 \Rightarrow 1$: Sea $x, y \in X$ distintos,tomemos $\epsilon < d(x, y)$, como f es c-uniformemente non-standard expansivo tenemos el resultado.

Proposición 4.5.1 Sea X espacio métrico no necesariamente compacto, entonces las afirmaciones $2, 3, 4$ del teorema anterior son equivalentes.

Demostración En la demostración del teorema anterior no usamos la hipótesis de compacidad para demostrar que $2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$. Veamos que $4 \Rightarrow 2$:
Supongamos que 2 no se cumple, entonces existen $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que para todo $m > n$ existen $x, y \in X$, con $d(x, y) > \epsilon$ y $d(f^i(x), f^i(y)) \leq c$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ que cumple $n < |i| < m$. Entonces la siguiente fórmula es verdadera $(\forall m \in \mathbb{N})(\exists x \in X)(\exists y \in X)(d(x, y) > \underline{\epsilon} \quad \wedge \quad (\forall i \in \mathbb{Z})(\underline{n} < |i| < m \rightarrow d(f^i(x), f^i(y)) \leq \underline{c})$ y por el principio de transferencia la siguiente fórmula también es verdadera $(\forall m \in {}^*\mathbb{N})(\exists x \in {}^*X)(\exists y \in {}^*X)({}^*d(x, y) > \underline{\epsilon} \quad \wedge \quad (\forall i \in {}^*\mathbb{Z})(\underline{n} < |i| < m \rightarrow {}^*d({}^*f^i(x), {}^*f^i(y)) \leq \underline{c})$, entonces para todo $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ existen $x, y \in {}^*X$ tales que ${}^*d(x, y) > \epsilon$ y ${}^*d({}^*f^i(x), {}^*f^i(y)) \leq \underline{c}$ para todo $\in {}^*\mathbb{Z}$ con $n < |i| < m$, en particular para todo $i \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$ tal que $|i| < m$, debido a que $|i| > n$, por lo tanto no se cumple 4.

Observación 4.11 En el teorema anterior se puede demostrar que 2 implica 4 directamente aplicando transferencia, en efecto, si vale 2 la siguiente fórmula es verdadera $(\forall n \in \mathbb{N})((\exists m \in \mathbb{N})(m > n) \wedge (\forall x \in X)(\forall y \in X)(d(x, y) > \underline{\epsilon} \rightarrow (\exists i \in \mathbb{Z})(d(f^i(x), f^i(y)) > \underline{c}) \wedge (n \leq |i| \leq m)))$, entonces por el principio de transferencia la siguiente fórmula también es verdadera $(\forall n \in {}^*\mathbb{N})((\exists m \in {}^*\mathbb{N})(m > n) \wedge (\forall x \in {}^*X)(\forall y \in {}^*X)({}^*d(x, y) > \underline{\epsilon} \rightarrow (\exists i \in {}^*\mathbb{Z})(d(f^i(x), f^i(y)) > \underline{c}) \wedge (n \leq |i| \leq m)))$, por lo tanto si tomamos $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, el $m > n$ dado por la primera fórmula cumple que $m \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ y como $n < |i| \leq m$ entonces $i \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$.

Observación 4.12 Sea X espacio métrico no necesariamente compacto. Las afirmaciones $2, 3, 4$ implica la expansividad uniforme, es muy sencillo ver que la afirmación 3 la implica, también es sencillo demostrarlo a partir de 4) usando transferencia, veámoslo.
Si vale 4) en particular vale que dado $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ la siguiente fórmula es verdadera $(\exists n \in {}^*\mathbb{N})(\forall x \in {}^*X)(\forall y \in {}^*X)({}^*d(x, y) > \underline{\epsilon} \rightarrow (\exists i \in {}^*\mathbb{Z})({}^*d(f^i(x), f^i(y)) > \underline{c}) \wedge (1 \leq |i| \leq n))$, pero por el principio de transferencia la siguiente fórmula también es verdadera. $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in X)(\forall y \in X)(d(x, y) > \underline{\epsilon} \rightarrow (\exists i \in \mathbb{Z})(d(f^i(x), f^i(y)) > \underline{c}) \wedge (1 \leq |i| \leq n))$, y esto es exactamente la expansividad uniforme.

Observación 4.13 Si X no es compacto las afirmaciones del teorema anterior no son equivalentes. Consideremos el siguiente ejemplo en el plano. Tomemos $a, b, a', b', c \in \mathbb{R}$, tales que $b' < b < a < a'$, y $d(a, b) < c < 1$ y $d(a', b') > c$, definimos dos sucesión sucesiones bi-infinitas de la siguiente manera.

$$x_n = \begin{cases} (n, a) & \text{para todo } n < 0 \\ (n, a') & \text{para todo } n \geq 0 \end{cases}$$

$$y_n = \begin{cases} (n, b) & \text{para todo } n < 0 \\ (n, b') & \text{para todo } n \geq 0 \end{cases}$$

Para todo $n \in \mathbb{Z}$

Sea $X = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{x_n, y_n\}$, definimos $f : X \to X$ como $f(x_n) = x_{n+1}$, $f(y_n) = y_{n+1}$, es claro que f es un homeomorfismo. además es c-non-standard expansivo, y por lo tanto c-expansivo, dado que para cualquier $u, v \in X$ distintos, se separan a más de de c en infinitos momentos, en efecto, si $u, v \in (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ o $u, v \in (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

siempre están a una distancia mayor o igual a 1, si $u \in (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ y $v \in (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ lo más cerca que pueden estar es si $u = (n, a)$ y $v = (n, b)$ con $n < 0$, pero entonces $d(f^m(u), f^m(v)) = d(a', b') > c$ para todo $m > |n|$ por lo tanto queda probado. Son embargo no es c-uniformemente expansivo, en efecto, dado $\epsilon < d(a, b)$ y dado $N \in \mathbb{N}$ si tomo $u = (n, a)$ y $v = (n, b)$ con $n < 0$ y $|n| > N$, se necesita un tiempo mayor que N para separarlos, por tanto no puede ser c-uniformemente expansivo, entonces por la observación 4.12 no se cumplen las afirmaciones 2, 3, y 4 del teorema 4.5.

Observación 4.14 Observemos que para todo $x, y \in X$ a lo sumo no se van a separar a futuro en una cantidad finita de naturales. es decir, dado $x, y \in X$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que la siguiente fórmula es verdadera. $(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq \underline{k} \rightarrow d(f^n(\underline{x}), f^n(\underline{y}) > \underline{c})$. pero por el principio de transferencia la siguiente fórmula también es verdadera $(\forall n \in {}^*\mathbb{N})(n \geq \underline{k} \rightarrow {}^*d(f^n(\underline{x}), f^n(\underline{y}) > \underline{c})$, pero si $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ entonces $n > k$ por lo tanto cualquier para de puntos distintos en X se separan en cualquier $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, por lo tanto es c-uniformemente non-standard expansivo. El homeomorfismo de este ejemplo cumple que es c-uniformemente non-standard expansivo y c-non-standard expansivo, creemos que estos dos conceptos no son equivalentes en ambientes no compactos, sin embargo este ejemplo no nos sirve como contraejemplo.

4.6 Homeomorfismos Separables y Non-standard Separables

El concepto de homeomorfismo separable fue introducido por Wine [33], daremos la definición presentada por Artigue [3].

Definición 4.3 Sea X, espacio métrico, $f : X \to X$ homeomorfismo, decimos que es *separable* si existe $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ tal que para todo $x, y \in X$, tales que $y \notin O_f(x)$, existe $n \in \mathbb{Z}$ que verifica $d(f^n(x), f^n(y)) > c$.

Observación 4.15 Si $f : X \to X$ homeomorfismo, si f es expansivo entonces es separable.

Observación 4.16 El recíproco de la observación anterior no es cierto, veamos el siguiente ejemplo que aparece en [2] página 9.
Sea $X \subset \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, definido por $X = \{\infty\} \cup \{(n, 0) : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(n \pm \frac{1}{m} : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^+, |n| < m\}$, definimos $f : X \to X$ de la siguiente manera, $f((n,0)) = (n + 1, 0)$, $f((n, \pm\frac{1}{m})) = (n + 1, \pm\frac{1}{m})$ si $|n| < m$, $f((m, \frac{1}{m})) = (-m, -\frac{1}{m})$ $f((m, -\frac{1}{m})) = (-m, \frac{1}{m})$.
Es fácil ver que es un homeomorfismo, además es separable porque dos puntos de órbitas distintas se separan ya que tienen períodos distintos, sin embargo cualquier par de puntos $(0, \frac{1}{m})$ $(0, -\frac{1}{m})$ pertenecen a la misma órbita y tomando m suficientemente grande negamos la expansividad para cualquier constante.

Teorema 4.6 (Wine) Sea X, espacio métrico compacto, $f : X \to X$ homeomorfismo separable, entonces f es expansivo si y solo si existe $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, tal que todo $x \in X$, $n \in \mathbb{Z}$, y $f^n(x) \neq x$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$, que cumple $d(f^{k+n}(x), f^k(x)) > c$.

Demostración Directo: Si f es expansivo entonces tomando c la constante de expansividad, si $f^n(x) \neq x$, entonces si $y = f^n(x)$, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $d(f^m(x), f^m(y)) > c$ y queda probado.
Recíproco: Sea $x, y \in X$ distintos, sea c el de la hipótesis y c' la constante de separabilidad, si $y \notin O_f(x)$ entonces existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $d(f^m(x), f^m(y)) > c'$, si $y \in O_f(x)$ entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(x) = y$, como $x \neq y$ entonces $f^n(x) \neq y$, entonces por hipótesis existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > c$, entonces tomando $c'' = \min\{c, c'\}$ f es expansivo con constante de expansividad c''.

Por analogía con los non-standard expansivos es natural introducir el concepto de non-standard separable.

Definición 4.4 Sea X, espacio métrico, $f : X \to X$ homeomorfismo, decimos que es *non-standard separable* si existe $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ tal que para todo $x, y \in X$, tales que $y \notin O_f(x)$, existe $n \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$ que verifica ${}^*d(f^n(x), f^n(y)) > c$.

De manera natural se extiende el teorema 4.6 (Wine) para non-standard separables, la demostración es análoga, por completitud daremos la prueba.

Teorema 4.7 Sea X, espacio métrico compacto, $f : X \to X$ homeomorfismo non-standard separable, entonces f es non-standard expansivo si y solo si existe $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, tal que todo $x \in X$, $n \in \mathbb{Z}$, y $f^n(x) \neq x$, entonces existe $k \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$, que cumple
$d(f^{k+n}(x), f^k(x)) > c$.

Demostración Directo: Si f es non-standard expansivo entonces tomando c la constante de expansividad, si $f^n(x) \neq x$, entonces si $y = f^n(x)$, existe $m \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$ tal que $d(f^m(x), f^m(y)) > c$ y queda probado.
Recíproco: Sea $x, y \in X$ distintos, sea c el de la hipótesis y c' la constante de separabilidad, si $y \notin O_f(x)$ entonces existe $m^* \in \mathbb{Z}_\infty$ tal que $d(f^m(x), f^m(y)) > c'$, si $y \in O_f(x)$ entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(x) = y$, como $x \neq y$ entonces $f^n(x) \neq x$, entonces por hipótesis existe $k^* \in \mathbb{Z}$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > c$, entonces tomando $c'' = \min\{c, c'\}$ f es non-standard expansivo con constante de expansividad c''.

Como es esperable, existen homeomorfismo que son non-standard separables pero no son non-standard expansivos.

Ejemplo 4.5 *Recordemos el ejemplo 3.2*
$X = \{0, 1\} \cup \{\frac{1}{n} : n \geq 2\} \cup \{1 - \frac{1}{n} : n \geq 3\}$, *definimos* $f : X \to X$ *de la siguiente manera.*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \;\text{ si }\; x = 0 \\ \\ 1 \;\; si \;\; x = 1 \\ \\ \frac{1}{n-1} \;\text{ si }\; x = \frac{1}{n} \;\text{ con }\; n \geq 3 \\ \\ 1 - \frac{1}{n+1} \;\text{ si }\; x = 1 - \frac{1}{n} \;\text{ con }\; n \geq 2 \end{cases}$$

Tenemos tres órbitas $O_f(0)$, $O_f(\frac{1}{2})$, $O_f(1)$, *sea* $x \in O_f(\frac{1}{2})$, *y* $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, *se cumple que* $d(f^n(x), f^n(0)) = d(1, 0)$ *y* $d(f^{-n}(x), f^{-n}(1)) = d(0, 1)$, *por lo tanto es non-standard separable con cualquier constante menor que* 1, *sin embargo no es non-standard expansivo.*

Proposición 4.7.1 Sea X, espacio métrico, $f : X \to X$ homeomorfismo,entonces f es non-standard separable si y solo si para todo $x, y \in X$, si $y \notin O_f(x)$, entonces $\{n \in \mathbb{Z} : d(f^n(x), f^n(y)) > c\}$ es infinito para algún $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$.

Demostración Ver la prop 4.1, la prueba es exactamente la misma.

4.7 Non-standard expansividad y dinámica simbólica

Consideremos el espacio de N símbolos Σ_N, y su extensión no estándar ${}^*\Sigma_N$, recordemos que podemos ver a Σ_N como subconjunto de su extensión no estándar mediante $*(\Sigma_N) = \{{}^*x \in {}^*\Sigma_N : x \in \Sigma_N\}$, a menos que digamos lo contrario siempre identificaremos a Σ_N con $*(\Sigma_N)$.

Proposición 4.7.2 Sea $\sigma : \Sigma_N \to \Sigma_N$, entonces para todo $n \in {}^*\mathbb{Z}$, y $x \in {}^*\Sigma_N$, se verifica que $(({}^*\sigma)^n(x))_i = x_{i+n}$, para todo $i \in {}^*\mathbb{Z}$.

Demostración Sabemos que la siguiente fórmula es verdadera
$(\forall x \in \Sigma_N)(\forall n \in \mathbb{Z}(\forall i \in \mathbb{Z}((\sigma^n(x))_i = x_{i+n})$, entonces por el principio de transferencia la siguiente fórmula también es verdadera
$(\forall x \in {}^*\Sigma_N)(\forall n \in {}^*\mathbb{Z}(\forall i \in {}^*\mathbb{Z}((\sigma^n(x))_i = x_{i+n})$

Observación 4.17 Por la caracterización combinatoria es claro que si $X \subset \Sigma_N$ subshift, $\sigma : X \to X$ es non-standard expansivo si y solo si para todo $x, y \in X$, distintos, se diferencian en infinitas coordenadas.

Proposición 4.7.3 Sean $x, y \in \Sigma_N$, entonces x, y se diferencian en infinitas coordenadas si y solo si existe $n \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$ tal que $x_n \neq y_n$.

Demostración Directo :Si x, y se diferencian en infinitas coordenadas, dado $n \in \mathbb{N}$, se cumple que
$(\exists m \in \mathbb{Z})((|m| > n) \wedge (x_m \neq y_m))$,tomemos una función de elección $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tal que $(\forall n \in \mathbb{N})(|\psi(n)| > n) \wedge (x_{\psi(n)} \neq y_{\psi(n)})$, entonces por el principio de transferencia tenemos que
$(\forall n \in {}^*\mathbb{N})(|{}^*\psi(n)| > n) \wedge (x_{{}^*\psi(n)} \neq y_{{}^*\psi(n)})$, si $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, entonces ${}^*\psi(n) \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$, por lo tanto existe $m \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$, $m = {}^*\psi(n)$, tal que $x_m \neq y_m$.
Reciproco: Si x, y no se diferencian en infinitas coordenadas, entonces existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $(\forall n \in \mathbb{Z})(n > |m| \to x_n = y_n)$, entonces por el principio de transferencia tenemos que $(\forall n \in {}^*\mathbb{Z})(n > |m| \to x_n = y_n)$, entonces para todo $n \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$, $x_n = y_n$.

Corolario 4.7.1 Sea $X \subset \Sigma_N$ subshift $\sigma \upharpoonright X$ es non-standard expansivo si y solo si para todo $x, y \in X$ existe $m \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$ tal que $x_m \neq y_m$.

Definición 4.5 Sea $f : X \to X$ homeomorfismo, $x \in X$, decimos que x es *recurrente* respecto a f si existe una sucesión n_k, con $\lim_{k \to +\infty} n_k = \infty$, tal que
$\lim_{k \to \infty} f^{n_k}(x) = x$(recurrente a futuro) o
$\lim_{k \to \infty} f^{-n_k}(x) = x$(recurrente a pasado).

Proposición 4.7.4 Sea $f : X \to X$ homeomorfismo, $x \in X$, entonces x es recurrente respecto de f si y solo si existe $n \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$ tal que $f^n(x) \simeq x$.

Demostración Directo: Supongamos que es recurrente a futuro, si lo es a pasado se razona de igual modo. Sea n_k tal que $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = x$, entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe $k_\epsilon \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n \in \mathbb{N}(n > \underline{k_\epsilon}) \to d(f^n(x), x) < \underline{\epsilon})$, entonces por el principio de transferencia $\forall n \in {}^*\mathbb{N}(n > \underline{k_\epsilon}) \to d(f^n(x), x) < \underline{\epsilon})$, si $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, entonces $n > k_\epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, entonces $d(f^n(x), x) < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ con $\epsilon \in \mathbb{R}$, entonces $d(f^n(x), x) \simeq 0$, entonces $f^n(x) \simeq x$.
Recíproco : Supongamos que x no es recurrente a futuro, entonces existe $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, y $k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}(n > k \to d(f^n(x), x) > \epsilon$, entonces por el principio de transferencia $\forall n \in {}^*\mathbb{N}(n > k \to d(f^n(x), x) > \epsilon$, entonces si $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, se tiene que $n > k$,y $f^n(x) \not\simeq x$. Se razona de manera análoga si no es recurrente a pasado.

Proposición 4.7.5 Sean $x, y \in {}^*\Sigma_N$, ${}^*d(x, y) \simeq 0$ si y solo si $x_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración Directo: Supongamos que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x_n \neq y_n$, como ${}^*d(x, y) \simeq 0$ tenemos que ${}^*d(x, y) < \frac{1}{2^{|n|}}$, entonces la siguiente fórmula es verdadera

$$(\exists x \in {}^*\Sigma_N)(\exists y \in {}^*\Sigma_N)(\exists n \in {}^*\mathbb{Z})((x_n \neq y_n) \wedge ({}^*d(x, y) < \frac{1}{2^{|n|}})).$$

Entonces por el principio de transferencia la siguiente fórmula también es verdadera

$$(\exists x \in \Sigma_N)(\exists y \in \Sigma_N)(\exists n \in \mathbb{Z})((x_n \neq y_n) \wedge (d(x, y) < \frac{1}{2^{|n|}})).$$

Pero si $x_n \neq y_n$, entonces $d(x, y) \geq \frac{1}{2^{|n|}}$, absurdo.

Recíproco: Supongamos que ${}^*d(x, y) \not\simeq 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que ${}^*d(x, y) > \frac{1}{2^{n-1}}$, pero como como $x_i = y_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, en particular para todo $l \in \mathbb{Z}$, si $|l| < n$, se tiene que $x_l = y_l$, entonces la siguiente fórmula es verdadera

$$(\exists x \in {}^*\Sigma_N)(\exists y \in {}^*\Sigma_N)(\exists n \in {}^*\mathbb{N})(({}^*d(x, y) > \frac{1}{2^{n-1}}) \wedge (\forall l \in {}^*\mathbb{Z}(|l| < n \to (x_l = y_l)))$$

y por el principio de transferencia la siguiente fórmula también es verdadera (*)

$$(\exists x \in \Sigma_N)(\exists y \in \Sigma_N)(\exists n \in \mathbb{N})((d(x, y) > \frac{1}{2^{n-1}}) \wedge (\forall l \in \mathbb{Z}(|l| < n \to (x_l = y_l)))$$

y $\sum_{i=n}^{i=\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}$, entonces $d(x, y) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{\delta(x_i, y_i)}{2^{|i|}} = d(x, y) = \sum_{-\infty}^{i=-n} \frac{\delta(x_i, y_i)}{2^{|i|}} + d(x, y) = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\delta(x_i, y_i)}{2^{|i|}} \leq \sum_{i=n}^{i=\infty} \frac{1}{2^i} + \sum_{i=n}^{n=\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$, entonces $d(x, y) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, pero la fórmula (*) no dice que $d(x, y) > \frac{1}{2^{n-1}}$, absurdo.

Proposición 4.7.6 Sea $\Sigma_N \subset {}^*\Sigma_N$, $\sigma : \Sigma_N \to \Sigma_N$ shift, $(\sigma(x))_i = x_{i+1}$, $x \in \Sigma_N$, si x es recurrente respecto a σ, entonces existe $n \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$ tal que $(\sigma^n(x))_i = x_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Demostración Por la proposición 4.7.4 sabemos que existe $n \in {}^*\mathbb{Z}$ tal que $\sigma^n(x) \simeq x$, entonces por la proposicón 4.7.5, tenemos que $(\sigma^n(x))_i = x_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$

Observación 4.18 Sea $X \subset \Sigma_N$, subshift, $\sigma : X \to X$ el shift, y $x, y \in X$. Si y es un punto límite de la órbita de x, se tiene que existe $m \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$ tal que $\sigma^m(x) \simeq y$, ya vimos que esto quiere decir que $x(m+i) = y(i)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, esto nos dice que en las coordenadas no estándar de x tenemos una copia de la coordenadas estándar de y, en particular, si σ es minimal todo elemento x tiene una copia de las coordenadas estándar de todo elemento y de X, en esta intuición se base la demostración del siquiente teorema.

Un resultado en el shift

Teorema 4.8 Sea $X \subset \Sigma^N$ subshift y $\sigma : X \to X$ el shift. Si σ es minimal y non-standard separable entonces es non-standard expansivo.

Demostración Por el teorema 4.7 (Wine no estándar) alcanza con probar que dado x y $n \in \mathbb{Z}$ tales que $x \neq \sigma^n(x)$, existe $m \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$ tales que ${}^*d(\sigma^{m+n}(x), \sigma^m(x)) > c$, ya vimos que esto es equivalente a que x y $\sigma^n(x)$ se diferencien en infinitos puntos, y esto es equivalente a que existe $m' \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$, tal que $x(m') \neq \sigma^n(x)(m')$.
Como $x \neq \sigma^n(x)$ existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x(k) \neq \sigma^n(x)(k) = x(n+k)$, como σ es minimal existe $m \in {}^*\mathbb{Z}_\infty$ tal que $\sigma^m(x) \simeq x$, y por la prop 4.7.5 esto quiere decir que $x(m+i) = x(i)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, como σ^n es continua por la prop 1.4.1 tenemos que $\sigma^n(\sigma^m(x)) \simeq \sigma^n(x)$, entonces $\sigma^m(\sigma^n(x)) \simeq \sigma^n(x)$, entones por la prop 4.7.5 $\sigma^m(\sigma^n(x))(i) = \sigma^n(x)(i)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, entonces $x(m+n+i) = x(n+i)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, entonces $x(m+k) = x(k) \neq x(n+k) = x(m+n+k) = \sigma^n(x)(m+k)$, tomando $m' = m+k$ tenemos el resultado.

Corolario 4.8.1 Sea X espacio métrico compacto, $f : X \to X$ homeomorfismo, si f es minimal y non-standard separable entonces es non-standard expansivo.

Demostración Por el Corolario 2.7 de [3] sabemos que si f es minimal y separable, entonces X es totalmente disconexo y f es expansivo, por lo tanto sabemos que f es conjugado a un subshift $A \subset \Sigma_N$, pero ser minimal y separable se preserva por conjugación (este es un hecho muy sencillo de probar, lo dejamos para que el lector lo verifique), ahora aplicamos el teorema anterior y conlcuimos que σ es non-standard expansivo, y como ser non-standard expansivo se preserva por conjugación, podemos afirmar que f también lo es.

Capítulo 5

Problemas y consideraciones finales

Problema 1: Vimos en el capítulo 4 que si $f : X \to X$ es un homeomorfismo, con X compacto, si f es non-standard expansivo, entonces es uniformemente non-standard expansivo ¿Vale esto para espacios no compactos?

Problema 2 : En la teoría de los homeomorfismos sabemos que los homeomorfismos expansivos en espacios métricos compactos totalmente disconexos son conjugados a un subshift ¿Qué se puede decir de los non-standard expansivos(libremente expansivos)? ¿Es posible caracterizar a los non-standard expansivos en compactos totalmente disconexos en términos de la dinámica simbólica ? es decir, encontrar alguna caracterización en términos de las palabras o de la topología del espacio.

Problema 3 : Dado (X, d) espacio métrico, tenemos su extensión no estándar $(^*X, ^*d)$, vimos que $^*d$ induce una topología, a pesar de que esta topología no es metrizable, existe una versión topológica de expansividad ¿Cuál es la relación entre las dinámicas expansivas que admite (X, d) y las que admite $(^*X, ^*d)$?

Problema 4 En nuestro trabajo todos los resultados son independientes del modelo no estándar, es decir, no depende del ultrafiltro con el que se contruyó el modelo ¿Existen propiedades dinámicas interesantes que dependan del modelo no estándar?

A modo de conclusión podemos señalar que el análisis no estándar es un marco natural para el estudio de las dinámicas libremente expansivas, tanto en ambientes compactos como en su generalización en ambientes no compactos. Considerar la extensión no estándar de un espacio métrico genera nuevas interrogantes que pueden dar lugar a nuevos problemas y conceptos. Creemos que este trabajo muestra que la interacción entre la Lógica y los Sistemas Dinámicos puede ser fecunda e ir más allá de los problemas planteados en esta tesis.

Bibliografía

[1] Alfonso Artigue. Expansive dynamical systems. 2015.

[2] Alfonso Artigue. Kinematic expansive flows. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 36(2):390–421, 2016.

[3] Alfonso Artigue. Separating homeomorphisms. *Advances in Dynamical Systems and Applications*, 2017.

[4] Andreas Blass. Ultrafilters: where topological dynamics= algebra= combinatorics. *arXiv preprint math/9309203*, 1993.

[5] BF Bryant. Expansive self-homeomorphisms of a compact metric space. *The American Mathematical Monthly*, 69(5):386–391, 1962.

[6] BF Bryant and DB Coleman. Some expansive homeomorphisms of the reals. *The American Mathematical Monthly*, 73(4):370–373, 1966.

[7] BF Bryant et al. On expansive homeomorphisms. *Pacific J. Math*, 10:1163–1167, 1960.

[8] Tullio Ceccherini-Silberstein and Michel Coornaert. *Cellular automata and groups*. Springer Science & Business Media, 2010.

[9] Ethan M Coven, Michael Keane, et al. Every compact metric space that supports a positively expansive homeomorphism is finite. *IMS Lecture Notes Monogr. Ser., Dynamics & Stochastics*, 48:304–305, 2006.

[10] Joseph Warren Dauben. *Abraham Robinson: The Creation of Nonstandard Analysis, a Personal and Mathematical Odyssey*, volume 307. Princeton University Press, 2014.

[11] Mauro Di Nasso. On the foundations of nonstandard mathematics. *Mathematica Japonica*, 50:131–160, 1999.

[12] Philip Ehrlich. *Real numbers, generalizations of the reals, and theories of continua*, volume 242. Springer Science & Business Media, 2013.

[13] Peter Fletcher, Karel Hrbacek, Vladimir Kanovei, Mikhail G Katz, Claude Lobry, and Sam Sanders. Approaches to analysis with infinitesimals following robinson, nelson, and others. *Real Analysis Exchange*, 42(2):193–252, 2017.

[14] Salvador García-Ferreira and Manuel Sanchis. Ultrafilter-limit points in metric dynamical systems. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 48(3):465–485, 2007.

[15] Robert Goldblatt. *Lectures on the hyperreals: an introduction to nonstandard analysis*, volume 188. Springer Science & Business Media, 2012.

[16] Jorge Groisman and Samuel G da Silva. Expansive dinamics in the sense of ultrafilters. 2019.

[17] Gustav A Hedlund. Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system. *Theory of computing systems*, 3(4):320–375, 1969.

[18] Albert E Hurd and Peter A Loeb. *An introduction to nonstandard real analysis*, volume 118. Academic Press, 1985.

[19] H Jerome Keisler. On cardinalities of ultraproducts. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 70(4):644–647, 1964.

[20] H Jerome Keisler. The ultraproduct construction. *Ultrafilters across mathematics*, 530:163–179, 2010.

[21] Semën Samsonovich Kutateladze. Nonstandard analysis: Its creator and place. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 7(3):287–295, 2013.

[22] Jorge Lewowicz. *Dinámica de los homeomorfismos*. IMCA, 2003.

[23] Albert Harold Lightstone and Abraham Robinson. *Nonarchimedean fields and asymptotic expansions*. Elsevier, 2016.

[24] Peter A Loeb and Manfred PH Wolff. *Nonstandard analysis for the working mathematician*. Springer, 2000.

[25] Marston Morse and Gustav A Hedlund. Symbolic dynamics. *American Journal of Mathematics*, 60(4):815–866, 1938.

[26] Edward Nelson. Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 83(6):1165–1198, 1977.

[27] Abraham Robinson. *Non-standard analysis*. Princeton University Press, 2016.

[28] Abraham Robinson and Wilhelmus Anthonius Josephus Luxemburg. *Contributions to Non-standard Analysis*. Elsevier, 1972.

[29] S Salbany and Todor Todorov. Nonstandard analysis in topology: nonstandard and standard compactifications. *The Journal of Symbolic Logic*, 65(4):1836–1840, 2000.

[30] Sergio Salbany and Todor Todorov. Nonstandard analysis in point-set topology. *Lecture Notes*, 666:52, 1998.

[31] WR Utz. Unstable homeomorphisms. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1(6):769–774, 1950.

[32] Marcelo Viana. Ergodic theory of interval exchange maps. *Revista Matemática Complutense*, 19(1):7–100, 2006.

[33] JD Wine. Extending expansive homeomorphisms. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 86(3):531–534, 1982.

[34] JD Wine. A further result on extending expansive homeomorphisms. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 95(1):131–134, 1985.