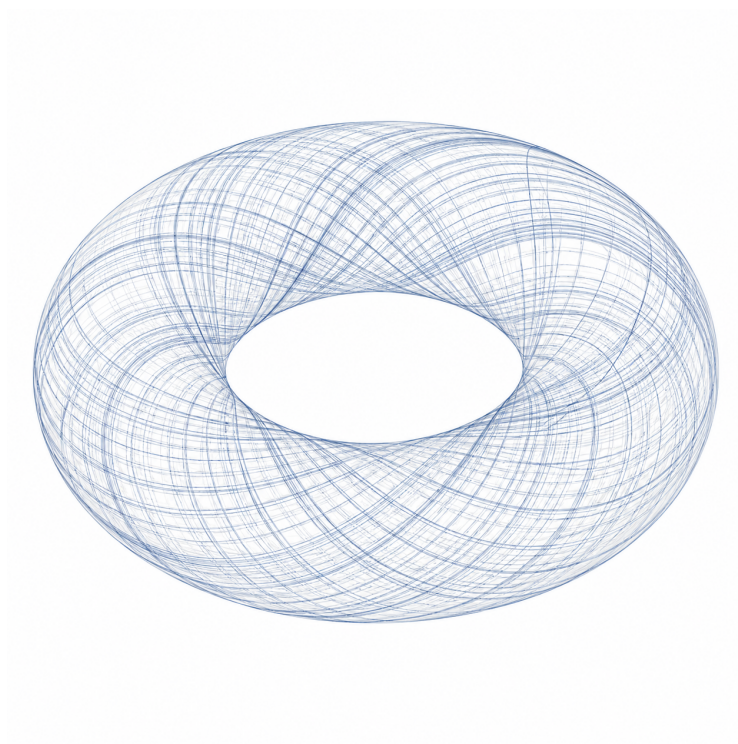


Transitividad, minimalidad y sensibilidad en dinámica topológica y acciones de semigrupos

Tesis de Maestría en Matemática

Andrea Pérez Nicoli

Tutor: Aldo Portela



Universidad de la República. PEDECIBA
Montevideo, 30 de mayo de 2026

Agradecimientos

Este trabajo no habría sido posible sin el acompañamiento de muchas personas que, de distintas maneras, sostuvieron el proceso.

En primer lugar, quiero agradecer profundamente a Aldo, mi tutor. No solo por su orientación académica, sino por algo mucho más valioso, su seguimiento constante y su confianza. Durante todo este tiempo estuvo atento a cada paso del trayecto: qué materias cursaba, cuáles debía cursar, si me había anotado, si estaba preparando el examen, si lo iba a dar, cómo me había ido. Con paciencia y firmeza, luchó conmigo para que no abandonara cuando el cansancio parecía más fuerte que la motivación. Este logro es también suyo.

A Daniel, compañero inseparable de estudio durante toda la maestría. Compartimos cursadas, apuntes, dudas, mate y extensas jornadas de estudio. Si nos hubieran permitido realizar la tesis juntos, lo habríamos hecho con gusto y con la misma dedicación que sostuvo cada etapa del camino. El trabajo compartido fue, sin duda, uno de los mayores sostenes de este trayecto y una experiencia profundamente disfrutable.

A Fernando, con quien coincidí en una parte significativa de esta etapa. Las instancias compartidas y las largas discusiones matemáticas forman parte de este proceso y del aprendizaje construido en estos años.

A los compañeros y compañeras con quienes compartí instancias de estudio en distintas asignaturas. De cada uno aprendí algo: una idea, una mirada distinta, una forma de encarar un problema. El intercambio constante fue parte esencial de mi formación.

A mi familia y a mis amigos, que tuvieron una paciencia infinita. Gracias por comprender ausencias, postergaciones y conversaciones interrumpidas por “tengo que estudiar”. Prometo que, al menos por un tiempo prudencial, no volveré a repetir esa frase con tanta frecuencia. Gracias por sostener y acompañar.

Y finalmente, a Adrián, quien sembró la idea inicial, fue él quien propuso que podíamos cursar esta maestría juntos y me impulsó a inscribirme... aunque luego no asistió a ninguna clase, su entusiasmo inicial fue el punto de partida de todo este recorrido.

A todos ellos, gracias por formar parte de esta etapa.

Índice

1. Introducción	3
2. Preliminares	5
2.1. Definiciones básicas y notaciones	5
3. Transitividad	10
3.1. Consideraciones previas	10
3.2. Diferentes nociones de transitividad y sus relaciones	10
4. Sensibilidad y expansividad	16
5. Caos en el sentido de Devaney	20
5.1. Definición de caos	20
5.2. Comentario histórico y conceptual	22
5.3. Relación entre transitividad, periodicidad y sensibilidad	22
6. Minimalidad en dinámica discreta	30
6.1. Definiciones y propiedades	30
6.2. Minimalidad en el círculo	35
7. Transitividad, minimalidad y sensibilidad en acciones de semigrupos	38
7.1. Nociones básicas	38
7.2. Generalización y limitaciones de resultados dinámicos al pasar de funciones a acciones de semigrupos	40
7.3. Condiciones que implican sensibilidad en sistemas dinámicos	46
Reflexión final	62
Referencias	63

1. Introducción

La teoría de sistemas dinámicos topológicos estudia el comportamiento a largo plazo de iteraciones de funciones continuas sobre espacios topológicos o métricos. En este contexto, nociones como transitividad, sensibilidad a las condiciones iniciales y minimalidad juegan un papel central en la descripción cualitativa de la dinámica, permitiendo capturar distintos grados de complejidad y recurrencia en la evolución de los sistemas.

Una de las ideas fundamentales en dinámica topológica es la de transitividad, que formaliza la existencia de órbitas densas y expresa, en términos topológicos, una forma de indescomponibilidad del sistema. Una noción estrechamente relacionada es la de transitividad topológica, definida mediante la intersección de iterados de abiertos no vacíos. Aunque ambas definiciones coinciden en numerosos contextos clásicos, su equivalencia requiere incorporar hipótesis sobre el espacio, lo que motiva un análisis cuidadoso de las condiciones bajo las cuales ambas nociones resultan equivalentes.

Por otra parte, la sensibilidad a las condiciones iniciales constituye uno de los rasgos característicos de los sistemas dinámicos caóticos. Esta propiedad expresa la posibilidad de que trayectorias inicialmente próximas se separen de manera significativa bajo la iteración, reflejando una fuerte dependencia respecto de las condiciones iniciales. En este sentido, la definición de caos introducida por Devaney combina tres propiedades fundamentales: transitividad topológica, densidad de puntos periódicos y sensibilidad a las condiciones iniciales. Resulta natural preguntarse en qué medida estas condiciones son independientes y bajo qué hipótesis algunas de ellas implican a las otras.

La noción de minimalidad proporciona otra perspectiva relevante en dinámica topológica, al describir sistemas o subconjuntos invariantes en los que todas las órbitas son densas. El estudio de conjuntos y puntos minimales permite comprender la estructura interna de la dinámica y su relación con propiedades globales como la transitividad y la sensibilidad. En espacios compactos, y en particular en el círculo, la minimalidad admite clasificaciones precisas bajo hipótesis adecuadas, como la de homeomorfismo, lo que conduce a resultados estructurales de gran interés.

El objetivo de esta tesis es estudiar las relaciones entre transitividad, sensibilidad y minimalidad en sistemas dinámicos sobre espacios métricos, poniendo especial énfasis en el análisis de las hipótesis necesarias para que ciertos resultados clásicos sean válidos. A lo largo del trabajo se presentan demostraciones detalladas de resultados conocidos, así como una amplia colección de ejemplos que ilustran tanto los casos en que las propiedades son válidas como aquellos en los que dichas relaciones fallan.

En una primera parte, se establecen las nociones preliminares y se analiza la equivalencia entre transitividad y transitividad topológica en espacios métricos de Baire con base numerable y sin puntos aislados. Posteriormente, se estudia la sensibilidad a las condiciones iniciales y su vínculo con la transitividad y la densidad de puntos periódicos, en particular en el contexto del caos en el sentido de Devaney. A continuación, se introduce la noción de minimalidad y se analizan los conjuntos y puntos minimales, con especial atención a la clasificación de conjuntos minimales en el círculo y a ejemplos provenientes de la dinámica holomorfa.

Finalmente, el trabajo se extiende al marco más general de acciones de semigrupos, mostrando que varios de los resultados obtenidos para iteraciones de una sola función dejan de ser válidos en este contexto. Se presentan ejemplos que evidencian las limitaciones de estas generalizaciones y se establecen criterios que permiten recuperar propiedades como la transitividad o la sensibilidad bajo hipótesis complementarias.

2. Preliminares

2.1. Definiciones básicas y notaciones

En este trabajo (X, d) será siempre un espacio métrico.

Definición 2.1 (Bola). Para $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, llamamos bola abierta de centro x y radio ε al conjunto $\{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$. Denotamos por $B(x, \varepsilon)$.

Definición 2.2 (Conjunto abierto). Decimos que V es un conjunto abierto si para todo $x \in V$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset V$.

Definición 2.3 (Entorno). Decimos que V_x es un entorno de x si V_x es un conjunto abierto tal que $x \in V_x$.

Definición 2.4 (Punto aislado). Decimos que x es un *punto aislado* si existe un entorno V_x tal que $V_x = \{x\}$.

Definición 2.5 (Punto de acumulación). Sea $M \subset X$, decimos que $x \in X$ es un *punto de acumulación* de M si toda bola abierta centrada en x intersecta a $M \setminus \{x\}$. Denotamos por M' , al conjunto de los puntos de acumulación de M .

Definición 2.6 (Sucesión de Cauchy). Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio métrico (X, d) es de *Cauchy* si $\forall \varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

Definición 2.7 (Completitud). El espacio (X, d) se dice *completo* si toda sucesión de Cauchy en X converge a un punto de X .

Definición 2.8 (Totalmente acotado). El espacio (X, d) se dice *totalmente acotado* si para todo $\varepsilon > 0$ existe una familia finita de bolas de radio ε cuya unión cubre a X .

Definición 2.9 (Localmente compacto). El espacio X se dice *localmente compacto* si todo punto $x \in X$ admite un entorno cuya clausura es compacta.

Definición 2.10 (Relativamente compacto). Un subconjunto $A \subset X$ se dice *relativamente compacto* si su clausura $(\overline{A})$ es compacta.

Definición 2.11 (Base numerable). Un espacio métrico X se dice que tiene *base numerable* si existe una familia numerable de abiertos $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que todo abierto de X puede escribirse como unión de elementos de dicha familia.

Definición 2.12 (Órbita). Sean $f : X \rightarrow X$ y $x \in X$. Se define la *órbita* de x bajo f como:

$$\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Definición 2.13 (Puntos periódicos). Un punto $p \in X$ se dice *periódico* si existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$f^k(p) = p.$$

El menor entero positivo k con esta propiedad se denomina el *período* de p .

Transitividad

Definición 2.14 (Función transitiva). Sea $f : X \rightarrow X$. Se dice que f es *transitiva* o *punto transitiva* (PT) si existe un punto $x_0 \in X$ tal que

$$\overline{\mathcal{O}(x_0)} = X.$$

En este caso, el punto x_0 se denomina *punto transitivo* de f .

Definición 2.15 (Función topológicamente transitiva). Sea $f : X \rightarrow X$. Se dice que f es *topológicamente transitiva* (TT) si para cualquier par de abiertos no vacíos $U, V \subset X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Ejemplo 2.16. Función transitiva y topológicamente transitiva.

Sea

$$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$$

con la distancia usual, y sea $f : S^1 \rightarrow S^1$ una rotación irracional. Entonces f es topológicamente transitiva y todo punto de S^1 es transitivo.

Demostración. Identificamos S^1 con $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y consideramos la rotación

$$f(x) = x + \alpha \pmod{1}$$

donde α es un número irracional. Observamos que la órbita de cualquier punto $x \in S^1$ es una traslación de la órbita de 0. Por lo tanto, basta estudiar la órbita de 0.

Denotamos por $[x]$ la clase de $x \in \mathbb{R}$ en el cociente. Sea $[y] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y sea $\varepsilon > 0$. Tomamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$ y consideramos los $N + 1$ puntos

$$[0], [\alpha], [2\alpha], \dots, [N\alpha] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Observamos que estos puntos son todos distintos. En efecto, si existieran

$$0 \leq t < j \leq N$$

tales que $[t\alpha] = [j\alpha]$, entonces $[(j-t)\alpha] = [0]$, lo que implicaría que α es racional.

Notar que existen enteros $0 \leq t < j \leq N$ tales que

$$d([t\alpha], [j\alpha]) < \frac{1}{N},$$

donde d es la distancia en $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Sea $q = j - t$, como α es irracional, se tiene $[q\alpha] \neq [0]$. Además,

$$d([q\alpha], [0]) = d([j\alpha], [t\alpha]) < \frac{1}{N}.$$

Los múltiplos de $[q\alpha]$ permiten aproximar cualquier punto del círculo con error menor que ε . En consecuencia, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $d([rq\alpha], [y]) < \varepsilon$.

Esto prueba que la órbita de 0 es densa en S^1 . Como la órbita de cualquier punto es una traslación de la de 0, se concluye que todo punto de S^1 es un punto transitivo.

Para ver que f es topológicamente transitiva, sean $U, V \subset S^1$ abiertos no vacíos. Tomamos $x \in U$, como la órbita de x es densa, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) \in V$. En particular,

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset,$$

y por lo tanto f es topológicamente transitiva.

□

Ejemplo 2.17. Función transitiva, no topológicamente transitiva.

Sea

$$X = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

con la métrica usual, y sea $f : X \rightarrow X$ definida por

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Entonces f es transitiva pero no es topológicamente transitiva.

Demostración. Veamos primero que f es transitiva. Tomemos $x_0 = 1$. Se tiene

$$\mathcal{O}(1) = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}.$$

Como 0 es un punto de acumulación del conjunto $\{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$, resulta que

$$\overline{\mathcal{O}(1)} = X.$$

Por lo tanto, f es una función transitiva.

Veamos ahora que f no es topológicamente transitiva. Consideramos los abiertos

$$U = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \cap X, \quad V = B\left(1, \frac{1}{4}\right) \cap X.$$

Observar que $V = \{1\}$. Por otra parte, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^n(U) \subset X \setminus \{1\}$. En consecuencia,

$$f^n(U) \cap V = \emptyset \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

□

Ejemplo 2.18. Función topológicamente transitiva que no es transitiva.

Sea $g : S^1 \rightarrow S^1$ definida por $g(z) = z^2$ y sea $z \in S^1$ periódico para g .

Como $g^k(z) = z^{2^k}$, la condición de periodicidad equivale a

$$z^{2^k} = z \iff z^{2^k - 1} = 1.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, las soluciones de la ecuación $z^{2^k - 1} = 1$ se ubican equidistantes sobre el círculo unitario y forman un polígono regular de $2^k - 1$ lados inscripto en él.

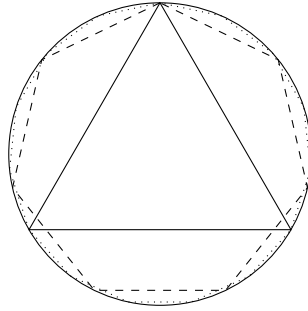


Figura 1: Polígonos regulares asociados a las raíces $(2^k - 1)$ -ésimas de la unidad, para $2^k - 1 = 3, 7, 15$.

Como las raíces consideradas pertenecen a S^1 y los arcos entre raíces consecutivas se hacen arbitrariamente pequeños al aumentar k , se deduce que el conjunto de puntos periódicos de g es denso en S^1 .

Sea ahora

$$X = \{z \in S^1 : \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } g^k(z) = z\},$$

con la distancia usual, y definamos $f = g|_X$. Esta función está bien definida, ya que la imagen de un punto periódico vuelve a ser un punto periódico.

Veamos que f es topológicamente transitiva, pero no es transitiva.

Demostración. Sean $U, V \subset X$ abiertos no vacíos. Entonces existen abiertos $U', V' \subset S^1$ tales que

$$U = U' \cap X \quad \text{y} \quad V = V' \cap X.$$

Como la función $g(z) = z^2$ es topológicamente transitiva en S^1 (ver ejemplo 3.7), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$g^n(U') \cap V' \neq \emptyset.$$

Esto implica que $U' \cap g^{-n}(V')$ es un abierto no vacío de S^1 . Como X es denso en S^1 , existe

$$z \in X \cap U' \cap g^{-n}(V').$$

En particular $z \in U$ y $g^n(z) \in V'$. Como X es invariante por g , se tiene $g^n(z) \in X$, y por lo tanto $g^n(z) \in V$.

Como $f = g|_X$, se obtiene

$$f^n(z) = g^n(z) \in V,$$

lo que implica que

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Por otro lado, si $z \in X$, entonces z es periódico para f , y su órbita $\mathcal{O}(z)$ es finita. En consecuencia,

$$\overline{\mathcal{O}(z)} = \mathcal{O}(z) \neq X,$$

y no existe ningún punto con órbita densa en X .

□

3. Transitividad

3.1. Consideraciones previas

Definición 3.1 (Conjunto residual). Un subconjunto $R \subset X$ se dice *residual* si puede escribirse como intersección numerable de abiertos densos; es decir, si existen abiertos densos $U_n \subset X$ tales que

$$R = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Definición 3.2 (Espacio de Baire). El espacio X se dice un *espacio de Baire* si todo conjunto residual en X es denso en X .

Teorema 3.3 (Teorema de Baire). Si (X, d) es completo o localmente compacto, entonces X es un espacio de Baire.

3.2. Diferentes nociones de transitividad y sus relaciones

Proposición 3.4. Sean (X, d) de Baire, con base numerable, sin puntos aislados y $f : X \rightarrow X$ una función continua. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. f es transitiva.
2. f es topológicamente transitiva.
3. Existe un subconjunto residual $R \subset X$ de puntos transitivos.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que f es transitiva. Entonces existe un punto $x_0 \in X$ tal que $\overline{\mathcal{O}(x_0)} = X$. Sean $U, V \subset X$ abiertos no vacíos. Como la órbita de x_0 es densa, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(x_0) \in U$.

Dado que X no tiene puntos aislados, el conjunto $\mathcal{O}(x_0) \cap V$ es infinito, por lo que existe $m_0 > n_0$ tal que $f^{m_0}(x_0) \in V$.

Tomando $n = m_0 - n_0$, se tiene

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset,$$

y por lo tanto f es topológicamente transitiva.

(2) $\Rightarrow$ (3). Supongamos que f es topológicamente transitiva y sea $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una base numerable de abiertos de X . Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$B_k = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U_k).$$

Como la preimagen de un abierto por una función continua es abierta y la unión numerable de abiertos es abierta, cada conjunto B_k es abierto.

Veamos que B_k es denso en X . Sea $V \subset X$ un abierto no vacío. Como f es topológicamente transitiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(V) \cap U_k \neq \emptyset$, lo cual equivale a $V \cap f^{-n}(U_k) \neq \emptyset$.

Por lo tanto, $V \cap B_k \neq \emptyset$ y se concluye que B_k es denso en X , entonces,

$$R = \bigcap_{k=0}^{\infty} B_k$$

es un conjunto residual de X .

Dado que X es un espacio métrico de Baire, R es denso.

Si $x \in R$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_k}(x) \in U_k$.

Como $\{U_k\}$ es una base de la topología de X , se deduce que $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Inmediato.

□

Proposición 3.5. Sean (X, d) y $f : X \rightarrow X$ una función topológicamente transitiva. Si X posee un punto aislado, entonces el conjunto de puntos transitivos de f es denso en X .

Demostración. Como X tiene un punto aislado x , entonces el conjunto $\{x\}$ es abierto. Como f es topológicamente transitiva, para todo abierto no vacío $U \subset X$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(U) \cap \{x\} \neq \emptyset.$$

En particular, existe $z_0 \in U$ tal que $f^n(z_0) = x$.

Por otra parte, como $\{x\}$ es un abierto no vacío y f es topológicamente transitiva, para todo abierto no vacío $V \subset X$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^m(\{x\}) \cap V \neq \emptyset,$$

lo que implica que la órbita de x es densa en X . Es decir, x es un punto transitivo.

Además, como $z_0 \in U$ verifica $f^n(z_0) = x$, entonces la órbita de z_0 contiene a la órbita de x , por lo tanto también es densa en X . En consecuencia, z_0 es un punto transitivo.

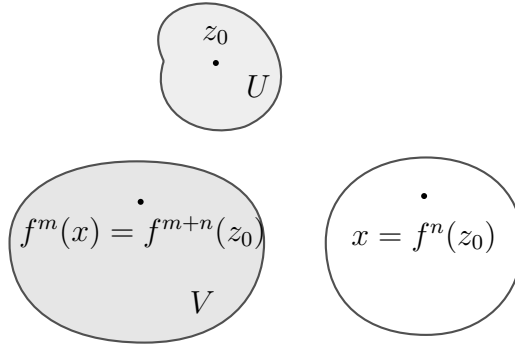


Figura 2: Interpretación geométrica del teorema.

Como esto vale para todo abierto no vacío $U \subset X$, se deduce que el conjunto de puntos transitivos es denso en X .

□

El comportamiento dinámico de una función depende, entre otras cosas, de las propiedades globales del espacio sobre el que actúa. En particular, la compacidad impone fuertes restricciones sobre la recurrencia y la estructura de las órbitas, favoreciendo en ocasiones una descripción más intuitiva del sistema.

En espacios no compactos como $\mathbb{R}$, estas restricciones desaparecen y pueden aparecer comportamientos dinámicos que resultan difíciles de anticipar a partir de la intuición geométrica habitual. El siguiente ejemplo ilustra este fenómeno de manera explícita.

Ejemplo 3.6. El espacio $\mathbb{R}$, con la topología usual, es un espacio métrico completo, sin puntos aislados y con base numerable. Consideramos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 8n + 2, & \text{si } 2n \leq x \leq 2n + 1, \\ 5x - 8n + 2, & \text{si } 2n - 1 \leq x \leq 2n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La función f es continua en $\mathbb{R}$. En particular, nos encontramos en las condiciones de la proposición anterior, por lo que en este contexto ser transitiva es equivalente a ser topológicamente transitiva.

Veamos entonces que f es topológicamente transitiva. Sean $U, V \subset \mathbb{R}$ abiertos no vacíos. Como los únicos puntos donde f no es derivable son los enteros, podemos elegir un subintervalo abierto $I \subset U$ tal que, durante un número finito de iteraciones, las imágenes de I permanezcan contenidas en un único tramo de definición de f . En particular, mientras esto ocurre, las longitudes de los intervalos como mínimo

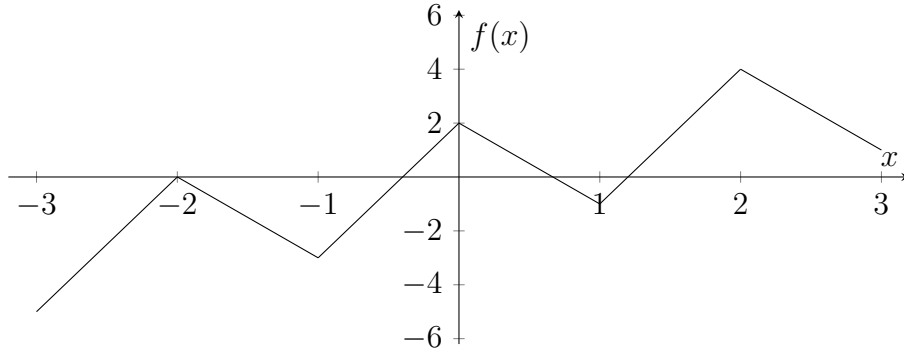


Figura 3: Gráfica de f en varios intervalos consecutivos.

se triplica en cada iteración. De esta forma alcanzará un intervalo que contenga al menos un entero. Además, una vez que esto ocurre, las iteradas siguientes siguen conteniendo al menos un entero. En efecto, si un intervalo J contiene un entero j , entonces $f(J)$ contiene a $f(j)$, y como $f(j) \in \mathbb{Z}$, se deduce que $f(J)$ también contiene un entero. Supongamos que tenemos un intervalo de la forma

$$J = (j - \varepsilon, j + \delta),$$

donde $j \in \mathbb{Z}$ y $\varepsilon, \delta > 0$, y que j es el único entero contenido en dicho intervalo.

Como f es afín en cada uno de los tramos adyacentes a j y es continua en j , la imagen $f(J)$ es nuevamente un intervalo cuya longitud puede calcularse explícitamente. Dependiendo de la paridad de j , se obtiene

$$|f(J)| = \max\{5\varepsilon, 3\delta\} \quad \text{o bien} \quad |f(J)| = \max\{5\delta, 3\varepsilon\}.$$

Denotando $|J| = \varepsilon + \delta$ la longitud del intervalo inicial, consideremos el cociente

$$\frac{|f(J)|}{|J|} = \frac{\max\{5\varepsilon, 3\delta\}}{\varepsilon + \delta} \quad (\text{el otro caso es análogo}).$$

El mínimo de esta expresión se alcanza cuando $5\varepsilon = 3\delta$. En tal situación,

$$\delta = \frac{5}{3}\varepsilon,$$

y por lo tanto

$$\frac{|f(J)|}{|J|} = \frac{5\varepsilon}{\varepsilon + \frac{5}{3}\varepsilon} = \frac{5}{\frac{8}{3}} = \frac{15}{8} > 1.$$

Se deduce entonces que, siempre que un intervalo iterado contenga exactamente un entero, su longitud aumenta al menos por un factor $\frac{15}{8}$ en la siguiente iteración.

En particular, tras un número finito de iteraciones, el intervalo resultante nece-

sariamente deja de contener un único entero; es decir, existen enteros consecutivos m y $m + 1$ tales que ambos pertenecen al intervalo iterado. En consecuencia, dicho intervalo contiene el segmento $[m, m + 1]$.

A partir de este punto se verifica directamente que

$$f([m, m + 1]) \supset [m - 1, m + 2],$$

Iterando esta inclusión, se obtiene que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$f^n([m, m + 1]) \supset [m - n, m + n + 1].$$

En particular, las imágenes del intervalo unidad terminan intersectando cualquier abierto no vacío de $\mathbb{R}$.

Por lo tanto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$, lo que prueba que f es topológicamente transitiva.

Por la proposición anterior, también es transitiva y, en consecuencia, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{\mathcal{O}(x)} = \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.7. Sea $f : S^1 \rightarrow S^1$ definida por $f(z) = z^2$.

El espacio S^1 , con la métrica usual, es un espacio métrico completo, sin puntos aislados y con base numerable, y la función f es continua. Por lo tanto, estamos en las condiciones de la proposición de equivalencia entre transitividad y transitividad topológica.

Sea $V \subset S^1$ un intervalo no vacío. Observamos que, al considerar un levantado de la función f , en cada iteración la dinámica multiplica por 2 la longitud de cualquier intervalo de $\mathbb{R}$. Por lo tanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(V) = S^1$. Esto prueba que f es topológicamente transitiva y, por la proposición anterior, también es transitiva.

Observación 3.8. *Para la equivalencia entre los conceptos, el ejemplo 2.17 muestra que la ausencia de puntos aislados es una hipótesis necesaria, pues esta función es transitiva y no es topológicamente transitiva. Asimismo, el ejemplo 2.18 pone de manifiesto que la condición de Baire para el espacio también es esencial, ya que sin ella la transitividad topológica no implica la existencia de puntos transitivos. A continuación se presenta un ejemplo que muestra que la continuidad de la función también es necesaria, pues se trata de una función topológicamente transitiva que no posee puntos transitivos.*

Ejemplo 3.9. Función topológicamente transitiva definida sobre un espacio métrico completo con base numerable que no posee puntos transitivos.

Consideramos el espacio $X = \mathbb{R}$ con la métrica usual. Sea la base numerable $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de todos los intervalos abiertos con extremos racionales.

Construimos la familia $\{x_{n,k}\}_{n,k \in \mathbb{N}}$ por inducción sobre n .

Para $n = 0$, elegimos para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$x_{0,k} \in B_k \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}),$$

de modo que los puntos $x_{0,k}$ sean todos distintos.

De esta manera vamos construyendo los conjuntos

$$D_0, D_1, \dots, D_n, \dots, \quad \text{donde } D_n = \{x_{n,k} : k \in \mathbb{N}\},$$

tomando $x_{n,k} \neq x_{m,\ell}$ si $(n,k) \neq (m,\ell)$,

Esta elección es posible porque cada $B_k \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ es no numerable, y al quitar un conjunto numerable, el conjunto resultante sigue siendo no vacío.

Por construcción, los conjuntos $D_n = \{x_{n,k} : k \in \mathbb{N}\}$ son dos a dos disjuntos. Además, cada D_n es denso en $\mathbb{R}$, ya que para todo abierto no vacío $U \subset \mathbb{R}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $B_k \subset U$, y entonces $x_{n,k} \in D_n \cap U$.

Sea ahora $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una enumeración de los números racionales. Definimos una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ del siguiente modo:

$$f(x) = \begin{cases} q_n, & \text{si } x \in D_n \\ q_0, & \text{si } x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n. \end{cases}$$

Dado un abierto no vacío $U \subset \mathbb{R}$, como U intersecta a cada uno de los conjuntos D_n , se obtiene

$$f(U) \supset \{q_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}.$$

En particular, si $V \subset \mathbb{R}$ es otro abierto no vacío, se tiene $f(U) \cap V \neq \emptyset$, lo que muestra que f es topológicamente transitiva.

Por otra parte, para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica que la órbita de x es un conjunto finito.

Si $x \in D_n$ con $n \neq 0$

$$\mathcal{O}(x) = \{x, q_n, q_0\},$$

Si $x \notin D_n$ o $x \in D_0$,

$$\mathcal{O}(x) = \{x, q_0\},$$

En consecuencia, ninguna órbita es densa en $\mathbb{R}$, y el sistema no posee puntos transitivos.

4. Sensibilidad y expansividad

Definición 4.1 (Sensibilidad a las condiciones iniciales). Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$. Decimos que f es *sensible a las condiciones iniciales* si existe $\delta > 0$, llamada *constante de sensibilidad*, tal que $\forall x \in X$ y $\forall U_x \subset X$, $\exists y \in U_x$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que

$$d(f^k(x), f^k(y)) > \delta.$$

Ejemplo 4.2. Retomamos el ejemplo 3.7. Mostramos ahora que f es sensible a las condiciones iniciales con constante de sensibilidad $\delta = \frac{1}{4}$. Sean $x \in S^1$ y el entorno V_x . Considerando un levantado de f , como se vio en el ejemplo 3.7, la dinámica duplica las distancias en cada iteración. En consecuencia, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{diam}(f^k(V_x)) > \frac{1}{4}.$$

Por lo tanto, f es sensible a las condiciones iniciales.

Definición 4.3 (Expansividad). Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ un homeomorfismo. Decimos que f es *expansivo* si existe $\alpha > 0$ tal que para todo par de puntos distintos $x, y \in X$ existe $n \in \mathbb{Z}$ con

$$d(f^n(x), f^n(y)) > \alpha.$$

Observación 4.4. *Conviene señalar algunas diferencias entre las nociones de sensibilidad a las condiciones iniciales y de expansividad. En primer lugar, ambas propiedades difieren en la forma en que se cuantifican los puntos del espacio. En la sensibilidad, para cada punto $x \in X$ y cada entorno U_x de x , basta con la existencia de un punto $y \in U_x$ cuya órbita se separe de la de x al menos una cantidad fija después de un cierto número de iteraciones. En cambio, la expansividad es una propiedad global que se formula para todo par de puntos distintos del espacio: exige que, para cada par $x \neq y$, exista una iteración en la cual las órbitas de ambos puntos se separen más que una constante fija.*

Por otra parte, las definiciones también difieren en el tipo de iteraciones consideradas. En la sensibilidad se trabaja únicamente con iteraciones positivas $n \in \mathbb{N}$, mientras que en la expansividad la condición se formula generalmente para iteraciones en $\mathbb{Z}$, lo cual requiere que la función sea un homeomorfismo. No obstante, también puede considerarse una versión unilateral de la expansividad, restringiendo las iteraciones a $\mathbb{N}$, en cuyo caso no es necesario pedir que f tenga inversa. En el siguiente ejemplo se trabaja bajo esta formulación de expansividad.

Ejemplo 4.5. Sensibilidad sin expansividad.

Sea $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ y consideremos la función:

$$f : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2, \quad f([x, y]) = [2x, y],$$

Veamos que f no es expansiva. En efecto, sea $\delta > 0$, tomamos dos puntos distintos del toro de la forma

$$p = [x, y], \quad q = [x, y + \varepsilon],$$

con $0 < |\varepsilon| < \delta$. Entonces, para todo $n \geq 0$,

$$f^n(p) = [2^n x, y], \quad f^n(q) = [2^n x, y + \varepsilon].$$

Como las órbitas difieren únicamente en la segunda coordenada, se tiene

$$d(f^n(p), f^n(q)) = |\varepsilon| < \delta \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Por lo tanto, no existe una constante de expansividad y f no es expansiva.

Mostramos ahora que f es sensible. Fijamos $\delta = \frac{1}{4}$.

Sea $p = [x, y] \in \mathbb{T}^2$ y sea U_p un entorno arbitrario de p . Dado que U_p es abierto, existe $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeño tal que

$$q = [x + \varepsilon, y] \in U_p.$$

Para cada $n \geq 0$ se cumple

$$f^n(p) = [2^n x, y], \quad f^n(q) = [2^n(x + \varepsilon), y].$$

Considerando un levantado de la función, la distancia en la primera coordenada se multiplica por 2^n en cada iteración. En consecuencia, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que la proyección en el toro satisface

$$d(f^n(p), f^n(q)) \geq \frac{1}{4}.$$

Dado que p y U_p fueron arbitrarios, se concluye que f es sensible a las condiciones iniciales.

Ejemplo 4.6. Expansividad sin sensibilidad.

Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x, y).$$

La función f es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$, con inversa dada por

$$f^{-1}(x, y) = 2(x, y).$$

Mostremos que f es expansiva. Sea $\alpha > 0$ fijo y sean $z, w \in \mathbb{R}^2$ con $z \neq w$. Observemos que, para $n \in \mathbb{Z}$,

$$d(f^n(z), f^n(w)) = 2^{-n} d(z, w)$$

En particular, tomando n negativo, de valor absoluto suficientemente grande, se obtiene

$$d(f^n(z), f^n(w)) > \alpha.$$

Por lo tanto, f es expansiva según la definición dada.

Veamos ahora que f no es sensible a las condiciones iniciales.

Sea $\delta > 0$ y sea $z \in \mathbb{R}^2$. Tomemos $B(z, \delta)$, para todo $w \in B(z, \delta)$ y todo $n \in \mathbb{N}$,

$$d(f^n(z), f^n(w)) = \left(\frac{1}{2}\right)^n d(z, w) < d(z, w) < \delta.$$

En particular, no existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^k(z), f^k(w)) > \delta$. Por lo tanto, f no es sensible a las condiciones iniciales.

Ejemplo 4.7. Expansividad sin sensibilidad en un compacto.

Tomaremos $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ con $x_0 = \frac{1}{2}$, y definimos, para $n > 0$,

$$x_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}},$$

y para $n < 0$,

$$x_n = \frac{1}{2^{-n+1}}.$$

Sea

$$X = \{0, 1\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

El conjunto X es compacto por ser cerrado en $[0, 1]$.

Definimos la función $f : X \rightarrow X$ por

$$f(x_n) = x_{n+1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

La función f es un homeomorfismo, cuya inversa está dada por

$$f^{-1}(x_n) = x_{n-1}, \quad f^{-1}(0) = 0, \quad f^{-1}(1) = 1.$$

Veamos que f es expansiva. Sea $\alpha < \frac{1}{4}$. Sean $x_n, x_m \in X$ con $n \neq m$ tales que

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{4}.$$

Aplicando f^{-n} se obtiene

$$f^{-n}(x_n) = x_0 = \frac{1}{2}, \quad f^{-n}(x_m) = x_{m-n}.$$

Como $x_{m-n} \neq x_0$, se tiene

$$d(f^{-n}(x_n), f^{-n}(x_m)) > \alpha.$$

Razonamientos análogos se aplican en los demás casos. Por lo tanto, f es expansiva.

Mostremos ahora que f no es sensible a las condiciones iniciales. Sea $\delta > 0$ y consideremos el entorno $U = \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Entonces, para todo $y \in U$ se tiene $y = \frac{1}{2}$, y por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$d(f^n(\frac{1}{2}), f^n(y)) = 0 < \delta.$$

En consecuencia, f no es sensible a las condiciones iniciales.

5. Caos en el sentido de Devaney

5.1. Definición de caos

La siguiente definición de caos fue introducida por Devaney.

Definición 5.1 (Función caótica). Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua, decimos que f es *caótica* si satisface las siguientes tres condiciones:

1. f es topológicamente transitiva.
2. El conjunto de puntos periódicos de f es denso en X .
3. f es sensible a las condiciones iniciales.

Hipótesis de trabajo sobre el espacio

Trabajaremos con X un conjunto infinito y sin puntos aislados.

Observamos que si X tiene un punto aislado, f es topológicamente transitiva y el conjunto de puntos periódicos de f es denso, entonces X es finito.

En efecto, sea $x \in X$ un punto aislado. Como el conjunto de puntos periódicos de f es denso en X , se tiene que $x \in \text{Per}(f)$. Por otra parte, dado que f es topológicamente transitiva, para todo abierto no vacío $U \subset X$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(x) \in U.$$

Esto implica que la órbita $\mathcal{O}(x)$ es densa en X .

Sin embargo, como x es periódico, su órbita es finita y, en particular, es un conjunto cerrado. Por lo tanto, $\overline{\mathcal{O}(x)} = \mathcal{O}(x)$.

De aquí se deduce que $\mathcal{O}(x) = X$, lo que implica que X es finito. Es por esta razón que no consideraremos espacios que tengan puntos aislados.

Ejemplo 5.2. Función caótica

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

como A es invertible y su inversa también tiene entradas enteras, induce un homeomorfismo del toro

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2, f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$$

por

$$f([x]) = [Ax],$$

donde $[x]$ denota la clase de $x \in \mathbb{R}^2$ módulo $\mathbb{Z}^2$.

Consideremos los puntos racionales de $\mathbb{T}^2$, es decir, clases $[x]$ con $x \in \mathbb{Q}^2$. Sea $x \in \mathbb{Q}^2$. Entonces existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $qx \in \mathbb{Z}^2$. Como A tiene entradas enteras, se tiene $qA^n x \in \mathbb{Z}^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, la órbita $\{[A^n x] : n \in \mathbb{N}\}$ queda contenida en el conjunto finito $(\frac{1}{q}\mathbb{Z}^2)/\mathbb{Z}^2$. Por lo tanto, existen $m > n$ tales que $[A^m x] = [A^n x]$, y entonces $[A^{m-n} x] = [x]$. Concluimos que todo punto racional es periódico. Como los puntos racionales son densos en $\mathbb{T}^2$, se sigue que los puntos periódicos de f son densos en $\mathbb{T}^2$.

Para demostrar que f es topológicamente transitiva, consideramos los autovalores de la matriz A . Uno de ellos es mayor que 1. Sea v_u un autovector asociado a ese autovalor λ . Al resolver la ecuación

$$Av = \lambda v,$$

se obtiene que puede tomarse un autovector de la forma

$$v_u = (1, \alpha),$$

donde α es irracional. Como la pendiente asociada a v_u es irracional, las curvas de T^2 tangentes a esta dirección son densas.

Sea ahora $U \subset T^2$ un abierto no vacío y $p \in U$. Como U es abierto, existe un pequeño arco I de una curva tangente a la dirección v_u , que pasa por p , tal que

$$I \subset U.$$

Al iterar por f , el arco I se expande en la dirección inestable, de modo que su longitud crece exponencialmente con razón λ_+^n .

Sea $V \subset T^2$ otro abierto no vacío. Dado que las curvas tangentes a la dirección v_u son densas en T^2 , para n suficientemente grande se tiene $f^n(I) \cap V \neq \emptyset$. En particular, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$,

Además, como $I \subset U$ es un arco no degenerado, existen puntos distintos $x, y \in I$. Como se observa en el levantado, si se toman estos puntos en la dirección inestable, la distancia entre sus iterados crece exponencialmente. En consecuencia, existe $\delta > 0$ tal que para algún $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$d(f^n(x), f^n(y)) > \delta,$$

lo que prueba que el sistema es sensible a las condiciones iniciales.

5.2. Comentario histórico y conceptual

La definición de caos introducida por Devaney aparece sistematizada en [D] y se consolidó como una definición de referencia en el estudio topológico de sistemas dinámicos discretos

Si bien en dicha definición las tres condiciones se presentan como parte de un mismo criterio, la independencia lógica entre ellas fue analizada posteriormente. En particular, Banks, Brooks, Cairns, Davis y Stacey en [B+] demostraron que, bajo determinadas hipótesis, concretamente, cuando X es un espacio métrico infinito y $f: X \rightarrow X$ es continua, la dependencia sensible a las condiciones iniciales no constituye una condición independiente, sino que se deduce de la transitividad topológica y de la densidad del conjunto de puntos periódicos y muestran que, en este marco, la tercera condición resulta redundante desde el punto de vista lógico, aunque continúa desempeñando un papel conceptual central en la caracterización del comportamiento caótico.

No obstante, este resultado depende de manera esencial de la continuidad de la función. En ausencia de dicha hipótesis, Vu Dong Tô en [T] demostró que, aun sin asumir continuidad, la sensibilidad a las condiciones iniciales se deduce de la transitividad topológica y de la densidad de los puntos periódicos siempre que el espacio métrico no sea totalmente acotado. Kulczycki demostró en [K] que la implicación anterior no es válida en espacios métricos totalmente acotados. En efecto, mostró que si X es un espacio métrico no vacío, sin puntos aislados y totalmente acotado, entonces existe una función $f: X \rightarrow X$ topológicamente transitiva, con puntos periódicos densos, que no es sensible a las condiciones iniciales.

5.3. Relación entre transitividad, periodicidad y sensibilidad

Teorema 5.3. *Sean (X, d) un espacio métrico y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Si f es topológicamente transitiva y el conjunto de puntos periódicos es denso en X , entonces f es sensible a las condiciones iniciales.*

Demostración. Como el conjunto de puntos periódicos de f es denso en X , podemos tomar dos puntos periódicos de órbita distinta.

Probaremos que si d es la distancia entre las órbitas de p_0 y p_1 (definida como el ínfimo de las distancias entre sus puntos) entonces $\delta = \frac{d}{8}$ es una constante de sensibilidad.

Sean $x \in X$ y un entorno U_x , debemos encontrar un punto $y \in U_x$ y un entero

$k \in \mathbb{N}$ tales que

$$d(f^k(x), f^k(y)) > \delta.$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que

$$d(x, \mathcal{O}(p_0)) \geq 4\delta.$$

Consideremos el abierto $B = U_x \cap B(x, \delta)$. Como el conjunto de puntos periódicos es denso, existe un punto periódico $q \in B$, llamemos m al período de q .

Definimos

$$B(\mathcal{O}(p_0), \delta) := \{z \in X : d(z, \mathcal{O}(p_0)) < \delta\}$$

y

$$V := \bigcap_{i=0}^{m-1} f^{-i}(B(\mathcal{O}(p_0), \delta))$$

Observemos que V es un conjunto abierto, contenido en $B(\mathcal{O}(p_0), \delta)$, y que satisface la siguiente propiedad: si $z \in V$, entonces $f^n(z) \in B(\mathcal{O}(p_0), \delta)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $0 \leq n < m$

Como f es topológicamente transitiva, existen $y \in B$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que

$$f^k(y) \in V.$$

Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$, con $0 \leq n_0 < m$, con $n_0 + k$ múltiplo de m , tal que

$$f^{n_0+k}(y) \in B(\mathcal{O}(p_0), \delta).$$

Por otra parte, como q es periódico de período m , se cumple que

$$f^{n_0+k}(q) = q \in B.$$

De esta forma, los puntos $f^{n_0+k}(q)$ y $f^{n_0+k}(y)$ se encuentran, respectivamente, en $B \subseteq B(x, \delta)$ y en $B(\mathcal{O}(p_0), \delta)$. Como $d(x, \mathcal{O}(p_0)) \geq 4\delta$, se deduce que

$$d(f^{n_0+k}(q), f^{n_0+k}(y)) > 2\delta.$$

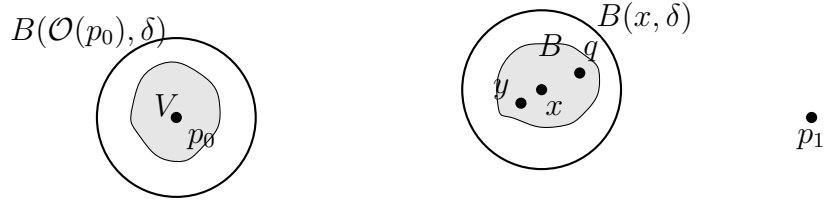


Figura 4: Interpretación geométrica del teorema.

Finalmente, si $f^{n_0+k}(x) \in B(x, 2\delta)$, entonces

$$d(f^{n_0+k}(x), f^{n_0+k}(y)) > \delta.$$

En caso contrario, se tiene

$$d(f^{n_0+k}(x), f^{n_0+k}(q)) > \delta.$$

□

Lema 5.4. Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ una función topológicamente transitiva con el conjunto de puntos periódicos denso en X . Si f no es sensible a las condiciones iniciales, entonces para todo $\delta > 0$ existe un punto periódico p de período n tal que

$$X \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} B(f^i(p), \delta).$$

En particular, el espacio X resulta totalmente acotado.

Demostración. Supongamos que f es topológicamente transitiva y densa de puntos periódicos, pero no es sensible a las condiciones iniciales.

La negación de la sensibilidad implica que para cada $\delta_0 > 0$ existe un abierto no vacío $U \subset X$ y un punto $x \in U$ tales que, para todo $y \in U$ y todo $k \in \mathbb{N}$,

$$d(f^k(x), f^k(y)) \leq \delta_0.$$

Fijemos $\delta > 0$ y definamos $\delta_0 = \delta/4$. Por la densidad de los puntos periódicos, podemos elegir un punto periódico $p \in U$. La desigualdad anterior aplicada a p permite concluir que

$$d(f^k(y), f^k(p)) \leq 2\delta_0 \quad \text{para todo } y \in U \text{ y todo } k.$$

En consecuencia,

$$f^k(U) \subset B(f^k(p), 3\delta_0) \quad \text{para todo } k \geq 0.$$

Sea n el período de p . Entonces se tiene

$$\bigcup_{k \geq 0} f^k(U) \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} B(f^i(p), 3\delta_0).$$

Por otro lado, la transitividad de f garantiza que para todo $z \in X$ el abierto $B(z, \delta_0)$ intersecta algún iterado de U . Combinando ambas inclusiones, existe $i \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que

$$B(z, \delta_0) \cap B(f^i(p), 3\delta_0) \neq \emptyset.$$

De aquí se deduce que

$$d(z, f^i(p)) < 4\delta_0 = \delta,$$

lo que muestra que z pertenece a una de las bolas $B(f^i(p), \delta)$.

Dado que z fue arbitrario, se obtiene que

$$X \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} B(f^i(p), \delta),$$

y por lo tanto X es totalmente acotado. □

Teorema 5.5. Sean (X, d) un espacio métrico no totalmente acotado y $f : X \rightarrow X$ una función topológicamente transitiva con puntos periódicos densos. Entonces f es sensible a las condiciones iniciales.

Demostración. Si f no fuera sensible, el lema anterior implicaría que el espacio X es totalmente acotado, en contradicción con la hipótesis. Por lo tanto, f debe ser sensible. □

El Lema 5.4 sugiere además que la ausencia de sensibilidad es incompatible con una cota uniforme sobre los períodos de los puntos periódicos. Motivada por esta observación, se presenta a continuación un criterio directo de sensibilidad en el caso de períodos uniformemente acotados.

Corolario 5.6. Sean (X, d) un espacio métrico totalmente acotado, sin puntos aislados y $f : X \rightarrow X$ una función tal que:

1. f es topológicamente transitiva;
2. el conjunto de puntos periódicos es denso en X ;
3. existe $N \in \mathbb{N}$ tal que todo punto periódico tiene período menor o igual que N .

Entonces f es sensible a las condiciones iniciales.

Demostración. Sea N una cota para los períodos de los puntos periódicos. Como X es totalmente acotado, para cada $\varepsilon > 0$ existe una familia finita de bolas abiertas de radio ε que cubre X .

Elegimos $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, de forma que exista una familia finita

$$\{B(x_1, \varepsilon), \dots, B(x_m, \varepsilon)\}$$

que cubre X , con $m > N$.

Demostremos que $\varepsilon/4$ es una constante de sensibilidad.

Sea $U \subset X$ un abierto no vacío. Como los puntos periódicos son densos, existe un punto periódico $p \in U$ de período $k \leq N$.

La órbita de p contiene k puntos, que denotamos $\{p, f(p), \dots, f^{k-1}(p)\}$.

Consideramos las bolas

$$B(f^i(p), \varepsilon), \quad i = 0, \dots, k-1.$$

Como $k \leq N$ y $m > N$, estas bolas no pueden cubrir todo X . Por lo tanto, el conjunto

$$B = X \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} \overline{B(f^i(p), \frac{\varepsilon}{2})}$$

es un abierto no vacío. Además, se cumple que

$$f^n(p) \notin B \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como f es topológicamente transitiva, existe $y \in U$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$f^{n_0}(y) \in B.$$

En consecuencia,

$$d(f^{n_0}(y), f^{n_0}(p)) > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dado que $p, y \in U$, se concluye que f es sensible a las condiciones iniciales con constante $\delta = \varepsilon/4$.

□

Ejemplo 5.7. El siguiente ejemplo satisface las hipótesis del Corolario 5.6

Identificamos S^1 con el conjunto de números complejos de módulo uno. Fijamos un número irracional α y definimos $f : S^1 \rightarrow S^1$ por

$$f(z) = \begin{cases} e^{2\pi i(x+\frac{1}{4})}, & \text{si } z = e^{2\pi ix} \text{ con } x \in \mathbb{Q}, \\ e^{2\pi i(x+\alpha)}, & \text{si } z = e^{2\pi ix} \text{ con } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Claramente f no es continua.

Como S^1 es compacto, es totalmente acotado.

Veamos que f es topológicamente transitiva. Sea $U \subset S^1$ un abierto no vacío y sea $V \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto cuya proyección esté contenida en U . Consideremos el conjunto

$$A = \bigcup_{n \geq 0} (\mathbb{Q} - n\alpha).$$

Como para cada $n \geq 0$ el conjunto $\mathbb{Q} - n\alpha$ es numerable, y la unión numerable de conjuntos numerables es numerable, el conjunto A es numerable. Como V es un intervalo abierto, no es numerable, existe $x \in V \setminus A$. En particular,

$$x + n\alpha \notin \mathbb{Q} \quad \forall n \geq 0,$$

Si definimos $z = e^{2\pi ix}$, entonces todos sus iterados permanecen en la rama irracional de la definición. Como la rotación de ángulo irracional tiene órbitas densas en S^1 , la órbita de z es densa. Como $z \in U$, todo abierto no vacío contiene un punto con órbita densa, entonces f es topológicamente transitiva.

Veamos ahora cuáles son los puntos periódicos de f . Si $z = e^{2\pi ix}$ con $x \in \mathbb{Q}$, entonces $f^4(z) = z$, de modo que todo punto racional es periódico, con período exactamente 4. Veamos que no existen puntos periódicos irracionales.

Sea $z = e^{2\pi ix}$ con $x \notin \mathbb{Q}$. Si la órbita de z nunca cae en un punto racional, no puede ser periódico.

Si en cambio existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x + m\alpha \in \mathbb{Q}$, entonces a partir de la iteración m la órbita entra en la rama racional de la definición y queda contenida en una órbita periódica de longitud 4. En ese caso, la órbita de z es eventualmente periódica, pero no periódica, pues una vez que alcanza un punto racional ya no puede volver al punto irracional inicial.

Se concluye que los únicos puntos periódicos de f son los racionales. Como éstos son densos en S^1 , el conjunto de puntos periódicos es denso y todos sus períodos son iguales a 4. En particular, están uniformemente acotados.

Por el Corolario 5.6, f es sensible a las condiciones iniciales.

Ejemplo 5.8. El siguiente ejemplo muestra que, para funciones no continuas topológicamente transitivas con conjunto de puntos periódicos denso definidas sobre

espacios métricos totalmente acotados, la acotación uniforme de los períodos no es una condición necesaria para la sensibilidad.

Sean

$$g(z) = z^2 \quad \text{y} \quad R_\alpha(z) = e^{2\pi i \alpha} z,$$

dos funciones definidas sobre S^1 , donde R_α es una rotación irracional.

Consideremos $P \subset S^1$ el conjunto de puntos periódicos de g .

Definimos $f : S^1 \rightarrow S^1$ por

$$f(z) = \begin{cases} z^2, & z \in P, \\ R_\alpha(z), & z \notin P. \end{cases}$$

La función no es continua.

Como S^1 es compacto, es totalmente acotado.

Además, como ya se observó en el ejemplo 3.7, los puntos periódicos de g son densos y sus períodos no están uniformemente acotados, lo que implica que el conjunto de puntos periódicos de f es denso y sus períodos no admiten una cota uniforme.

La demostración de que f es topológicamente transitiva puede realizarse de forma análoga a la del ejemplo anterior: usando la dinámica de la rotación irracional en los puntos cuya órbita evita P , se obtiene que todo abierto no vacío contiene un punto con órbita densa. En consecuencia, f es topológicamente transitiva.

Veamos que f es sensible a las condiciones iniciales.

Sea $x \in S^1$ y V_x un entorno de x , como P es denso, existen dos puntos distintos $p, q \in V_x \cap P$.

Como P es invariante, las órbitas de p y q permanecen en P , y sobre ellas la dinámica de f coincide con la del ejemplo 4.2.

Aplicando el mismo argumento usado allí, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f^n(p), f^n(q)) > \frac{1}{4},$$

esto prueba que f es sensible a las condiciones iniciales.

Ejemplo 5.9. El siguiente ejemplo muestra una función que es topológicamente transitiva y con puntos periódicos densos en un espacio totalmente acotado, pero que no es sensible a las condiciones iniciales.

Sean $X = \{1, 2, 3\}$ y $f : X \rightarrow X$ tal que

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 1.$$

Como X es un conjunto finito, es un espacio totalmente acotado. Todo punto

de X es periódico. Veamos que f es topológicamente transitiva. Sean $U, V \subset X$ abiertos no vacíos. Como la órbita de cualquier punto es

$$\mathcal{O}(x) = \{x, f(x), f^2(x)\} = X,$$

existe $n \in \{0, 1, 2\}$ tal que

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset,$$

y el sistema es topológicamente transitivo.

Finalmente, el sistema no es sensible a las condiciones iniciales. En efecto, como X es finito, cada punto es abierto, por lo tanto no existe ningún punto arbitrariamente cercano a x cuya órbita se separe de la órbita de x , y no se verifica la sensibilidad a las condiciones iniciales

Los ejemplos anteriores muestran que, en ausencia de continuidad, la relación entre transitividad topológica, densidad de puntos periódicos y sensibilidad a las condiciones iniciales es más sutil que en el contexto clásico de Banks et al. El ejemplo de Kulczycki en [K] concluye que esta implicación falla en general sobre espacios métricos totalmente acotados y sin puntos aislados. De este modo, queda completamente caracterizada la validez de la implicación entre estas propiedades en ausencia de continuidad.

6. Minimalidad en dinámica discreta

6.1. Definiciones y propiedades

Definición 6.1 (Conjunto minimal). Sean $f : X \rightarrow X$ y $M \subset X$ un subconjunto no vacío. Decimos que M es *minimal* para f si para todo $y \in M$ se cumple que

$$\overline{\mathcal{O}(y)} = M.$$

En particular, todo conjunto minimal es cerrado.

Definición 6.2 (Punto minimal). Sean $f : X \rightarrow X$ y $x \in X$. Decimos que x es un *punto minimal* si $\overline{\mathcal{O}(x)}$ es un conjunto minimal para f . Denotaremos por $\mathcal{M}$ al conjunto de todos los puntos minimales de f .

Definición 6.3 (Punto casi periódico). Sea $f : X \rightarrow X$ y sea $x \in X$. Decimos que x es un *punto casi periódico* si la clausura de su órbita $\overline{\mathcal{O}(x)}$ es un conjunto compacto y minimal. Denotaremos por $\mathcal{M}_c$ al conjunto de todos los puntos casi periódicos de f .

Observación 6.4. *Todo punto periódico y todo punto casi periódico son puntos minimales. Si el espacio es compacto todo punto minimal es casi periódico.*

Definición 6.5 (Función minimal). Sea $f : X \rightarrow X$, decimos que f es *minimal* si X es un conjunto minimal para f .

Ejemplo 6.6. La rotación irracional del círculo es un ejemplo de función minimal.

Observación 6.7. *Sea M un conjunto minimal para f y sea $M_1 \subset M$ un subconjunto cerrado tal que $f(M_1) \subset M_1$. Entonces $M_1 = M$.*

En efecto, si $x \in M_1$, se tiene $\mathcal{O}(x) \subset M_1$. Como M_1 es cerrado y $\overline{\mathcal{O}(x)} = M$, se deduce que $M \subset M_1$, y por lo tanto $M_1 = M$.

Si nos posicionamos en espacios métricos donde la transitividad topológica y la densidad del conjunto de puntos transitivos son nociones equivalentes, la compacidad del espacio y la no minimalidad de la función implican que el conjunto de puntos no transitivos también sea denso.

A continuación presentamos la formalización de esta propiedad, basada en el enfoque desarrollado por Akin, Auslander y Berg en [AAB].

Proposición 6.8. *Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua, con X un espacio métrico compacto y sin puntos aislados. Si f no es minimal, entonces el conjunto de puntos no transitivos es denso en X .*

Para demostrar este teorema se usará el siguiente lema:

Lema 6.9. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea $f: X \rightarrow X$ una función continua. Dado $x \in X$, son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. *x es un punto minimal.*
2. *Para todo entorno U de x existe un conjunto $\{n_0, n_1, \dots, n_m\} \subset \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, se cumple que $f^{k+n_i}(x) \in U$ para algún $i \in \{0, 1, \dots, m\}$.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que x es un punto minimal. Por definición, la clausura de su órbita es un conjunto minimal.

Sea U un entorno de x . Dado que $\overline{\mathcal{O}(x)}$ es minimal, para todo $y \in \overline{\mathcal{O}(x)}$ existe $n \geq 0$ tal que $f^n(y) \in U$. En consecuencia,

$$\overline{\mathcal{O}(x)} \subset \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(U).$$

Como f es continua, los conjuntos $f^{-n}(U)$ son abiertos, dado que $\overline{\mathcal{O}(x)}$ es compacto, existe un subrecubrimiento finito. Por lo tanto, existen enteros $n_0, \dots, n_m$ tales que

$$\overline{\mathcal{O}(x)} \subset \bigcup_{i=0}^m f^{-n_i}(U).$$

Sea ahora $k \in \mathbb{N}$. Como $f^k(x) \in \overline{\mathcal{O}(x)}$, existe $i \in \{0, \dots, m\}$ tal que

$$f^k(x) \in f^{-n_i}(U),$$

lo cual equivale a

$$f^{k+n_i}(x) \in U.$$

.

$(\Leftarrow)$ Supongamos ahora que se satisface la condición (2). Mostraremos que $\overline{\mathcal{O}(x)}$ es un conjunto minimal.

Sean $y \in \overline{\mathcal{O}(x)}$ y W un abierto tal que $W \cap \overline{\mathcal{O}(x)} \neq \emptyset$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^k(x) \in W.$$

Como W es abierto y f^k es continua, el conjunto $(f^k)^{-1}(W)$ es un abierto que contiene a x . Por lo tanto, existe un entorno U_x de x tal que

$$\overline{U_x} \subset (f^k)^{-1}(W).$$

Fijamos este entorno U_x . Por hipótesis, existen enteros $n_0, \dots, n_m$ tales que, para todo $t \in \mathbb{N}$, se cumple

$$f^{t+n_i}(x) \in U_x \quad \text{para algún } i \in \{0, \dots, m\}.$$

Como $y \in \overline{\mathcal{O}(x)}$, existe una sucesión $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ con $t_j \rightarrow \infty$ tal que $f^{t_j}(x) \rightarrow y$.

Por hipótesis, para cada j existe $i_j \in \{0, \dots, m\}$ tal que

$$f^{t_j+n_{i_j}}(x) \in U_x.$$

Como el conjunto $\{0, \dots, m\}$ es finito, existe $i \in \{0, \dots, m\}$ y una subsucesión (t_{j_k}) tal que

$$f^{t_{j_k}+n_i}(x) \in U_x \quad \text{para todo } k.$$

Dado que $f^{t_{j_k}}(x) \rightarrow y$ y f^{n_i} es continua, se tiene

$$f^{t_{j_k}+n_i}(x) = f^{n_i}(f^{t_{j_k}}(x)) \rightarrow f^{n_i}(y).$$

Como $f^{t_{j_k}+n_i}(x) \in U_x$ para todo k y $f^{t_{j_k}+n_i}(x) \rightarrow f^{n_i}(y)$, se deduce que

$$f^{n_i}(y) \in \overline{U_x}.$$

Como $\overline{U_x} \subset (f^k)^{-1}(W)$, se concluye que $f^{k+n_i}(y) \in W$.

Como W era un abierto no vacío arbitrario de $\overline{\mathcal{O}(x)}$, se deduce que la órbita de y es densa en $\overline{\mathcal{O}(x)}$, en consecuencia, x es un punto minimal.

□

Demostración. Proposición 6.8.

Sea $V \subset X$ un abierto no vacío. Veremos que V contiene un punto no transitivo.

Si no hay puntos transitivos se cumple la tesis, supongamos que hay un punto transitivo y por las condiciones de la hipótesis, de acuerdo a la proposición 3.4 el sistema es topológicamente transitivo y el conjunto de puntos transitivos es denso en X . En particular, existe $x \in V$ que es un punto transitivo. Dado que el sistema no es minimal, este punto x no es minimal.

Por el Lema 6.9, existe un entorno U de x para el cual falla la condición del conjunto finito de subíndices. Podemos además suponer, sin pérdida de generalidad, que $\overline{U} \subset V$.

La falla de dicha condición implica que para todo $N \in \mathbb{N}$ existe un entero $k_N \in \mathbb{N}$

tal que

$$f^{k_N}(x) \in U \quad \text{y} \quad f^{k_N+1}(x), f^{k_N+2}(x), \dots, f^{k_N+N}(x) \notin U. \quad (1)$$

Es decir, aunque la órbita de x entra en U (y lo hace infinitas veces por ser x transitivo), esas entradas pueden quedar seguidas por bloques arbitrariamente largos de iteraciones que permanecen fuera de U .

Como X es compacto y $f^{k_N}(x) \in U$ para todo N , existe una subsucesión (que seguimos denotando $\{k_N\}$) tal que

$$f^{k_N}(x) \longrightarrow y \quad \text{para algún } y \in \overline{\mathcal{O}(x)}.$$

Afirmamos ahora que el punto y satisface

$$f^n(y) \notin U \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

En efecto, supongamos por absurdo que existe $n_0 \geq 1$ tal que $f^{n_0}(y) \in U$. Por continuidad de f^{n_0} , existe un entorno W de y tal que $f^{n_0}(W) \subset U$.

Como $f^{k_N}(x) \rightarrow y$, existe N suficientemente grande, con $N \geq n_0$, tal que

$$f^{k_N}(x) \in W.$$

Entonces se obtiene $f^{k_N+n_0}(x) \in U$, lo cual contradice (1), ya que por construcción

$$f^{k_N+1}(x), f^{k_N+2}(x), \dots, f^{k_N+N}(x) \notin U \quad \text{y} \quad n_0 \leq N.$$

Esta contradicción prueba que y no es un punto transitivo.

Finalmente, como $y \in V$, hemos encontrado un punto no transitivo en el abierto arbitrario V . Esto prueba que el conjunto de puntos no transitivos es denso en X . $\square$

En relación con la *sensibilidad a las condiciones iniciales*, y en virtud de que pueden existir funciones sin puntos periódicos densos pero con puntos minimales densos, en [AAB] se obtiene una generalización del resultado enunciado en 5.3, sustituyendo la hipótesis de densidad de puntos periódicos por la densidad del conjunto de puntos minimales, trabajando en un espacio compacto. La demostración puede realizarse siguiendo las mismas ideas que las presentadas en el teorema 7.22, por lo que nos limitamos a enunciar el resultado.

Proposición 6.10. *Sea X un espacio métrico compacto, $f : X \rightarrow X$ una función continua, topológicamente transitiva y no minimal. Si el conjunto $\mathcal{M}$ de puntos*

minimales es denso en X , entonces f es sensible a las condiciones iniciales.

A continuación se presenta un ejemplo de una función que no posee puntos periódicos pero que el conjunto de puntos minimales es denso.

Ejemplo 6.11. Sea $f : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ definida por

$$f(z, y) = (z^2, R_I(y)),$$

donde $R_I : S^1 \rightarrow S^1$ es una rotación irracional del círculo.

Consideremos ahora la función $m : S^1 \rightarrow S^1$ dada por $m(z) = z^2$. Sea $p \in S^1$ un punto periódico de m de período k , entonces para todo $y \in S^1$ el punto (p, y) es un punto minimal para f , y el conjunto

$$M = \{p\} \times S^1 \cup \{m(p)\} \times S^1 \cup \dots \cup \{m^{k-1}(p)\} \times S^1$$

es un conjunto minimal. Como los puntos periódicos de $m(z) = z^2$ son densos en S^1 , se deduce que el conjunto de puntos minimales de f es denso en $S^1 \times S^1$.

Por otra parte, la función f no tiene puntos periódicos. En efecto, si existiera $(z, y) \in S^1 \times S^1$ y $k \geq 1$ tal que $f^k(z, y) = (z, y)$, entonces debería cumplirse simultáneamente

$$m^k(z) = z \quad \text{y} \quad R_I^k(y) = y.$$

Sin embargo, como R_I es una rotación irracional, no posee puntos periódicos.

Veamos que la función f es topológicamente transitiva. Sea $V \subset S^1 \times S^1$ un abierto no vacío. Entonces existen abiertos no vacíos $U_1, U_2 \subset S^1$ tales que

$$U_1 \times U_2 \subset V.$$

Por las características de la función $m(z) = z^2$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m^{n_1}(U_1) = S^1.$$

Además, para todo $n \geq n_1$ se tiene

$$m^n(U_1) = S^1.$$

Por otra parte, como R_I es una rotación irracional del círculo, es minimal. En particular, dado cualquier abierto no vacío $W \subset S^1$, existe $n \geq n_1$ tal que

$$R_I^n(U_2) \cap W \neq \emptyset.$$

Para tal n , se obtiene

$$f^n(U_1 \times U_2) = m^n(U_1) \times R_I^n(U_2) = S^1 \times R_I^n(U_2),$$

y por tanto

$$f^n(U_1 \times U_2) \cap (S^1 \times W) \neq \emptyset.$$

Como $U_1 \times U_2 \subset V$, se concluye que

$$f^n(V) \cap (S^1 \times W) \neq \emptyset.$$

Esto prueba que f es topológicamente transitiva.

6.2. Minimalidad en el círculo

Definición 6.12 (Conjunto perfecto). Un subconjunto M es un *conjunto perfecto* si es cerrado y todo punto de M es punto de acumulación de M .

Definición 6.13 (Conjunto de Cantor). Un subconjunto M es un *conjunto de Cantor* si es perfecto y tiene interior vacío.

El círculo S^1 constituye un escenario privilegiado para el estudio de la minimalidad. Por un lado, se trata de un espacio compacto, conexo y unidimensional, lo que permite una descripción más precisa de los subconjuntos invariantes. Por otro, la clase de funciones consideradas, en particular, los homeomorfismos, habilita una riqueza dinámica que conduce a una clasificación clara de los conjuntos minimales posibles:

Proposición 6.14. Sean $f : S^1 \rightarrow S^1$ un homeomorfismo y $M \subset S^1$ un conjunto minimal para f . Entonces ocurre exactamente una de las siguientes posibilidades:

1. M es una órbita periódica;
2. $M = S^1$;
3. M es un conjunto de Cantor.

La demostración de este enunciado se omitirá en este punto, ya que en la Sección 7.2 se presentará una demostración análoga en un contexto más amplio, correspondiente al estudio de acciones de grupos.

Ejemplo 6.15. Rotación racional.

Sea $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ la rotación de ángulo $\alpha \in \mathbb{Q}$. En este caso, todo punto del círculo es periódico y las órbitas son finitas. En particular, los conjuntos minimales asociados a R_α son órbitas finitas.

Ejemplo 6.16. Rotación irracional.

Sea $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ la rotación de ángulo $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En este caso, R_α es minimal: para todo $x \in S^1$, la órbita $\mathcal{O}(x)$ es densa en el círculo. En consecuencia, el único conjunto minimal es el propio espacio S^1 .

Ejemplo 6.17. Ejemplo de Denjoy.

Existen homeomorfismos del círculo con número de rotación irracional que no son conjugados a una rotación. En los ejemplos construidos por Denjoy, el conjunto minimal no coincide con todo el círculo, sino que es un conjunto perfecto con interior vacío, es decir, un conjunto de Cantor.

El siguiente ejemplo muestra cómo al abandonar la condición de homeomorfismo la clasificación descrita anteriormente no es válida.

Ejemplo 6.18. Ejemplo sin la hipótesis de homeomorfismo.

Sea $f : S^1 \rightarrow S^1$ un homeomorfismo de Denjoy y sea $K \subset S^1$ su conjunto minimal, que es un conjunto de Cantor. Sea $I = (a, b) \subset S^1 \setminus K$ un intervalo errante y, para cada $n \in \mathbb{Z}$, sea

$$I_n = f^n(I) = (a_n, b_n)$$

su iterado por f . Como I es errante, los intervalos I_n son disjuntos dos a dos.

Definimos una nueva función $g : S^1 \rightarrow S^1$ del siguiente modo. En el complemento de la unión de los intervalos errantes,

$$g(x) = f(x) \quad \text{si } x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n.$$

En cada intervalo I_n redefinimos la función de manera continua, coincidiendo con f en los extremos,

$$g(a_n) = f(a_n), \quad g(b_n) = f(b_n),$$

y de forma tal que la imagen de I_n recorra toda la circunferencia S^1 . En particular, esta definición garantiza la existencia de al menos un punto fijo de g en el interior de cada intervalo I_n .

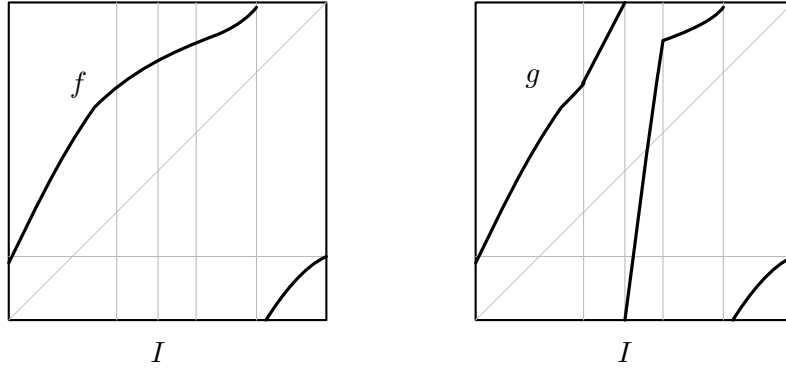


Figura 5: Interpretación gráfica de la función en un intervalo errante.

La función g así definida es continua en todo S^1 . Además, como $K \subset S^1 \setminus \bigcup I_n$, se tiene que $g|_K = f|_K$, por lo que K sigue siendo un conjunto minimal para g .

Por otro lado, la existencia de un punto fijo en cada intervalo I_n implica que g posee infinitos puntos periódicos, y por lo tanto infinitos conjuntos minimales finitos. En consecuencia, la dinámica de g presenta simultáneamente un conjunto minimal de tipo Cantor y una familia infinita de conjuntos minimales periódicos.

7. Transitividad, minimalidad y sensibilidad en acciones de semigrupos

En este capítulo (X, d) será un espacio métrico sin puntos aislados.

Definición 7.1 (Sistema dinámico). Llamamos *sistema dinámico* a toda terna (S, X, Φ) , donde S es un semigrupo topológico y $\Phi : S \times X \rightarrow X$ es una función continua tal que, para todo $s_1, s_2 \in S$ y todo $x \in X$,

$$\Phi(s_1, \Phi(s_2, x)) = \Phi(s_1 s_2, x),$$

y además existe un elemento neutro $e \in S$ tal que

$$\Phi(e, x) = x \quad \text{para todo } x \in X.$$

Para cada $s \in S$, escribiremos $\Phi_s(x) = \Phi(s, x)$.

Un ejemplo sencillo de sistema dinámico se obtiene tomando $S = \mathbb{N}$ y una función continua $f : X \rightarrow X$. En este caso, la acción viene dada por

$$\Phi(n, x) = f^n(x),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$. De este modo, se recupera la noción clásica de sistema dinámico discreto generado por una única función.

7.1. Nociones básicas

Sea (S, X, Φ) un sistema dinámico.

Definición 7.2 (Órbita). Para $x \in X$, se define la órbita de x como

$$\mathcal{O}(x) = \{\Phi_s(x) : s \in S\}.$$

Notación 7.3. Sea (S, X, Φ) un sistema dinámico y sea $A \subset X$. Denotamos por

$$A^{-1} := \bigcup_{s \in S} \Phi_s^{-1}(A),$$

donde

$$\Phi_s^{-1}(A) = \{x \in X : \Phi_s(x) \in A\}.$$

Definición 7.4 (Conjunto minimal). Un subconjunto $Y \subset X$ se dice *minimal* si para todo $y \in Y$ se cumple

$$\overline{\mathcal{O}(y)} = Y.$$

Definición 7.5 (Punto minimal y punto casi periódico). Un punto $x \in X$ se dice *minimal* si $\overline{\mathcal{O}(x)}$ es un conjunto minimal. Si además dicho conjunto es compacto, al punto x lo llamaremos *casi periódico*.

Al conjunto de puntos minimales lo llamaremos $\mathcal{M}$ y al conjunto de puntos casi periódicos lo llamaremos $\mathcal{M}_c$.

Definición 7.6 (Sistema minimal). Diremos que (S, X, Φ) es *minimal* si existe $x \in X$ punto minimal y

$$\overline{\mathcal{O}(x)} = X.$$

Definición 7.7 (Sistema punto transitivo). Diremos que (S, X, Φ) es *PT* si existe $x \in X$ tal que

$$\overline{\mathcal{O}(x)} = X.$$

Definición 7.8 (Sistema topológicamente transitivo). Diremos que (S, X, Φ) es *TT* si para cualquier par de abiertos $U, V \subset X$ no vacíos, existe $s \in S$ tal que

$$\Phi_s(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Definición 7.9 (Denso de puntos transitivos). Diremos que (S, X, Φ) es *DPT* si el conjunto de puntos transitivos es denso en X .

Definición 7.10 (Sensible a las condiciones iniciales). Diremos que (S, X, Φ) es *sensible a las condiciones iniciales* si existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ y $\forall U_x \subset X, \exists y \in U_x$ y $s \in S$ tales que

$$d(\Phi_s(x), \Phi_s(y)) > \delta.$$

Definición 7.11 (Invariante). Sea $M \subset X$. Diremos que M es *invariante* para (S, X, Φ) si

$$\Phi_s(M) \subset M \quad \text{para todo } s \in S.$$

Definición 7.12 (Sistemas dinámicos casi abiertos). Diremos que el sistema dinámico (S, X, Φ) es *casi abierto* si para todo abierto no vacío $U \subset X$ y para todo $s \in S$, se cumple que

$$\text{int}(\Phi_s(U)) \neq \emptyset.$$

Definición 7.13 (C -semigrupo). Sea S un semigrupo topológico y $s_0 \in S$. Denotamos por

$$Ss_0 = \{ss_0 : s \in S\}.$$

Decimos que S es un C -semigrupo si, para todo $s_0 \in S$, el conjunto $S \setminus Ss_0$ es relativamente compacto.

7.2. Generalización y limitaciones de resultados dinámicos al pasar de funciones a acciones de semigrupos

En esta sección analizamos en qué medida algunos resultados obtenidos para iteraciones de una función se extienden al contexto de acciones de semigrupos, o bajo qué hipótesis pueden recuperarse.

Como se vio en la Sección 6.2, la clasificación de los conjuntos minimales en el círculo requiere de hipótesis sobre las funciones consideradas, concretamente, que se trate de homeomorfismos del círculo. En ausencia de estas hipótesis, dicha clasificación no es válida en general.

Al considerar acciones de semigrupos, la situación es análoga.

Ejemplo 7.14. Conjunto minimal en una acción de semigrupo.

Consideremos un homeomorfismo

$$f: S^1 \rightarrow S^1$$

cuyo conjunto minimal es un conjunto de Cantor $C \subset S^1$.

Sea $p \in S^1$ un punto perteneciente a un intervalo errante de $S^1 \setminus C$, y definamos la función constante

$$g: S^1 \rightarrow S^1, \quad g(x) = p \text{ para todo } x \in S^1.$$

Sea S el semigrupo libre generado por dos elementos $\{a, b\}$, y sea

$$\Phi: S \times S^1 \rightarrow S^1$$

la acción definida por

$$\Phi_a = f, \quad \Phi_b = g.$$

Para describir el conjunto minimal asociado a un punto $x \in S^1$, observemos primero el comportamiento de las transformaciones que generan la acción.

Por hipótesis, $f : S^1 \rightarrow S^1$ posee como conjunto minimal un conjunto de Cantor

$$C \subset S^1$$

. Por otra parte, la transformación g es constante e igual a p , esto implica que el punto p pertenece a la órbita de todo punto bajo la acción del semigrupo.

A partir de p , al aplicar iteradamente f se obtiene su órbita

$$O(p) = \{f^n(p) : n \geq 0\}.$$

Como p pertenece a un intervalo errante contenido en $S^1 \setminus C$, esta órbita permanece fuera de C .

Sin embargo, debido a que C es el conjunto minimal de f , la clausura de las órbitas bajo la acción del semigrupo deben contener a C . Por lo tanto, el conjunto minimal asociado a cualquier punto $x \in S^1$ es $\overline{O(p)} = C \cup O(p)$. Este conjunto es infinito, pero no es un conjunto de Cantor, ya que los puntos de la $O(p)$ son aislados.

Si restringimos el análisis a acciones de grupos en S^1 , podemos obtener una clasificación análoga a la observada en la proposición 6.14.

La demostración del teorema de clasificación de los conjuntos minimales para acciones en el círculo que presentamos a continuación sigue el tratamiento desarrollado por Andrés Navas en [N].

Proposición 7.15. *Extensión de la Proposición 6.14 a acciones de grupos.*

Sea (S, S^1, Φ) un sistema dinámico tal que para todo $s \in S$,

$$\Phi_s : S^1 \rightarrow S^1$$

es un homeomorfismo que preserva orientación, entonces se verifica exactamente una de las siguientes afirmaciones:

1. *existe al menos una órbita finita*
2. *para todo $x \in S^1$, la órbita $\mathcal{O}(x)$ es densa en S^1 ;*
3. *existe un compacto S -invariante minimal $M \subset S^1$ homeomorfo a un conjunto de Cantor. En este caso, M es único y está contenido en la clausura $\overline{\mathcal{O}(x)}$ de toda órbita.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los subconjuntos $F \subset S^1$ que son cerrados, invariantes y no vacíos. Esta familia está parcialmente ordenada por inclusión. Si

$\{F_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{F}$ es una cadena, entonces

$$F = \bigcap_{i \in I} F_i$$

es cerrado e invariante. Como S^1 es compacto, la intersección de compactos encajados es no vacía, luego $F \neq \emptyset$. Por el lema de Zorn existe al menos un elemento minimal $M \in \mathcal{F}$. En particular, M es un compacto invariante minimal.

Denotemos por ∂M la frontera de M en S^1 y por M' el conjunto de puntos de acumulación de M . Como cada Φ_s es un homeomorfismo, se tiene

$$\Phi_s(\partial M) = \partial(\Phi_s(M)) \subset \partial M, \quad \Phi_s(M') \subset M',$$

por lo que ∂M y M' son cerrados e invariantes. Por la minimalidad de M , sólo pueden darse los siguientes tres casos.

Caso 1: $M' = \emptyset$. Entonces M no tiene puntos de acumulación y por lo tanto es finito, de donde se deduce que existe una órbita finita.

Caso 2: $\partial M = \emptyset$. Entonces M es abierto y cerrado en S^1 . Como el círculo es conexo, se concluye que $M = S^1$. Para cualquier $x \in S^1$, como $\overline{\mathcal{O}(x)}$ es un conjunto cerrado, no vacío e invariante, debe coincidir con S^1 . En consecuencia, toda órbita es densa.

Caso 3: $M = M' = \partial M$. En este caso M es un compacto perfecto y sin interior; por lo tanto es un conjunto de Cantor.

Veamos ahora que $M \subset \overline{\mathcal{O}(x)}$ para todo $x \in S^1$. Fijemos $x \in S^1$ y $y \in M$.

Si $x \in M$, como M es minimal e invariante, la órbita de x es densa en M , luego $y \in \overline{\mathcal{O}(x)}$.

Si $x \notin M$, como M es cerrado y tiene interior vacío, el complemento $S^1 \setminus M$ es unión disjunta de intervalos abiertos. Sea $I = (a, b)$ la componente conexa que contiene a x . Entonces $a, b \in M$ y $x \in I$. Como M es minimal y no tiene puntos aislados, existe una sucesión $(s_n) \subset S$ tal que

$$\Phi_{s_n}(a) \longrightarrow y \quad \text{y} \quad \Phi_{s_n}(I) \text{ son intervalos dos a dos disjuntos.}$$

De la disjunción se deduce que $|\Phi_{s_n}(I)| \rightarrow 0$. Como $\Phi_{s_n}(x) \in \Phi_{s_n}(I)$ y $\Phi_{s_n}(a) \rightarrow y$, concluimos que

$$\Phi_{s_n}(x) \longrightarrow y,$$

es decir, $y \in \overline{\mathcal{O}(x)}$. Como $y \in M$ era arbitrario, se obtiene

$$M \subset \overline{\mathcal{O}(x)} \quad \text{para todo } x \in S^1.$$

En esta demostración queda implícito que si el sistema tiene una órbita finita como minimal, todos los puntos tendrán un minimal finito. □

Se presenta a continuación un ejemplo de sistema dinámico, que pone de manifiesto que los resultados establecidos en las Proposiciones 3.4 y 6.8 no se generalizan a este contexto. En efecto, aun cuando se mantienen hipótesis análogas a las asumidas en dichos resultados, las equivalencias entre transitividad puntual, transitividad topológica, densidad de puntos transitivos, así como la densidad de los puntos no transitivos en el caso compacto, dejan de ser válidas para acciones de semigrupos. No obstante, en [IPa] se demuestra que, bajo modificaciones apropiadas de las hipótesis o de las conclusiones consideradas, pueden recuperarse resultados parciales que preservan algunas de las implicancias, lo cual también se incluye a continuación.

Ejemplo 7.16. Consideremos el plano complejo $\mathbb{C}$. Sea

$$S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \quad S_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| = 1\}$$

y

$$X = S_1 \cup S_2.$$

Definimos funciones $f, g, h: X \rightarrow X$ del siguiente modo:

- $f|_{S_1}$ es una rotación irracional y $f|_{S_2}$ es la identidad.
- $g|_{S_1}$ es la identidad y $g|_{S_2}$ es una rotación irracional.
- $h|_{S_1}$ es la identidad y $h(S_2) \subset S_1$.

Sean S el semigrupo libre generado por tres elementos $\{a, b, c\}$ y Φ la acción generada por

$$\Phi_a = f, \quad \Phi_b = g, \quad \Phi_c = h.$$

Se cumple que:

- El conjunto de puntos transitivos coincide con S_2 .

Demostración. Sean $U \subset X$ un abierto no vacío y $x \in S_2$. Debemos encontrar $s \in S$ tal que

$$\Phi_s(x) \in U.$$

Como $X = S_1 \cup S_2$, distinguimos dos casos.

Caso 1: $U \cap S_2 \neq \emptyset$.

En este caso, por definición de la acción, sobre S_2 se cumple

$$\Phi_b = g, \quad g|_{S_2} \text{ es una rotación irracional.}$$

Luego, la órbita $\{g^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en S_2 . Tomando $s = b^n$, para algún $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\Phi_s(x) \in U$.

Caso 2: $U \cap S_1 \neq \emptyset$.

En este caso, como $x \in S_2$ y $h(S_2) \subset S_1$, se tiene $\Phi_c(x) \in S_1$.

Además, sobre S_1 vale $\Phi_a = f$, $f|_{S_1}$ es una rotación irracional.

Por lo tanto, la órbita

$$\{f^m(h(x)) : m \in \mathbb{N}\}$$

es densa en S_1 . En particular, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(h(x)) \in U$.

Tomando $s = a^m c$, se obtiene

$$\Phi_s(x) = \Phi_{a^m}(\Phi_c(x)) \in U.$$

Como $U \subset X$ era un abierto arbitrario, en ambos casos encontramos $s \in S$ tal que $\Phi_s(x) \in U$. Por lo tanto, la órbita de x es densa en X , y x es un punto transitivo.

Sea $x \in S_1$, probaremos que no es un punto transitivo. Observemos primero que, por definición de los generadores de la acción, se cumple:

$$\Phi_a(S_1) \subset S_1, \quad \Phi_b(S_1) \subset S_1, \quad \Phi_c(S_1) \subset S_1.$$

Esto implica que

$$\Phi_s(S_1) \subset S_1 \quad \text{para todo } s \in S.$$

Por lo tanto, la órbita de x no puede ser densa en X .

Consecuentemente, el conjunto de puntos transitivos y no transitivos no son densos en X . □

- No es topológicamente transitiva

Demostración. Para cualquier par de abiertos $U \subset S_1$ y $V \subset S_2$, no existe $s \in S$ tal que

$$\Phi_s(U) \cap V \neq \emptyset.$$

□

Proposición 7.17. Si (S, X, Φ) es PT y $\mathcal{M}$ es denso en X , entonces (S, X, Φ) es TT.

Demostración. Sean U y V abiertos no vacíos de X . Como (S, X, Φ) es PT, existe $z \in X$ tal que

$$\overline{\mathcal{O}(z)} = X.$$

Por lo tanto, existen $s, s_1 \in S$ y un entorno W_z tales que,

$$\Phi_s(W_z) \subset U \quad \text{y} \quad \Phi_{s_1}(W_z) \subset V.$$

Dado que $\mathcal{M}$ es denso en X , existe $y \in \mathcal{M} \cap W_z$. En consecuencia,

$$\Phi_s(y) \in U \quad \text{y} \quad \Phi_{s_1}(y) \in V.$$

Como y es un punto minimal, sus iterados también son minimal, entonces existe $s_2 \in S$ tal que

$$\Phi_{s_2}(\Phi_s(y)) \in V.$$

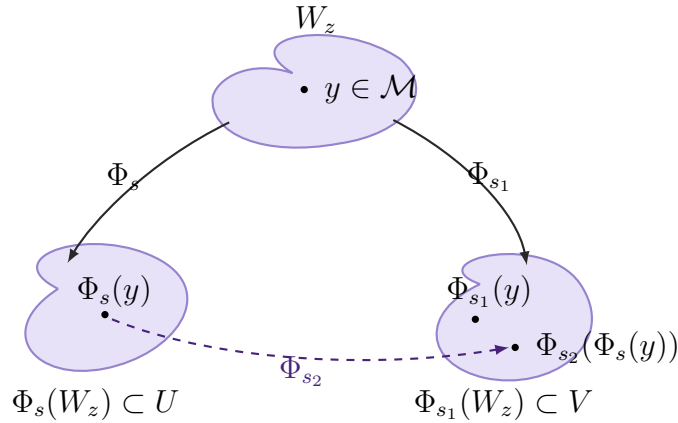


Figura 6: Bosquejo gráfico del argumento.

De este modo,

$$\Phi_{s_2}(U) \cap V \neq \emptyset.$$

□

En la misma línea de trabajo y bajo hipótesis sobre el espacio, Zhukova en [Z] establece la equivalencia entre la transitividad topológica y la densidad de puntos transitivos que presentamos a continuación.

Proposición 7.18. *Sea (S, X, Φ) un sistema dinámico. Si X es un espacio métrico de Baire con base numerable, entonces son equivalentes:*

1. (S, X, Φ) es topológicamente transitivo;
2. el conjunto de puntos transitivos de X es denso en X .

Demostración. (1.) $\Rightarrow$ (2.).

La demostración es análoga a la de la proposición 3.4. En efecto, si $\{W_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una base numerable de X . Como cada Φ_s es continua, W_k^{-1} es abierto para todo k , y la transitividad topológica implica que cada uno de estos conjuntos es denso. Dado que X es de Baire, la intersección numerable

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} W_k^{-1}$$

es densa en X , y todo punto de dicha intersección es transitivo.

(2) $\Rightarrow$ (1). Inmediato.

□

Corolario 7.19. Sea X un espacio métrico de Baire con base numerable. Si (S, X, Φ) es tal que el conjunto $\mathcal{M}$ es denso en X , entonces son equivalentes:

1. (S, X, Φ) es punto transitivo;
2. (S, X, Φ) es topológicamente transitivo;
3. (S, X, Φ) es denso de puntos transitivos.

Demostración. Por la proposición 7.17, (1) $\Rightarrow$ (2). Por la proposición 7.18, (2) $\Leftrightarrow$ (3). Además, (3) $\Rightarrow$ (1) es inmediato.

□

7.3. Condiciones que implican sensibilidad en sistemas dinámicos

A continuación se analizan condiciones que implican la sensibilidad para acciones de semigrupos sobre espacios métricos. Los resultados aquí presentados se basan

en los trabajos de Iglesias y Portela [IPb] [IPa] , en los que se estudia la relación entre transitividad, minimalidad y sensibilidad, tanto en contextos compactos como no compactos. El objetivo de esta sección es unificar y sistematizar dichas contribuciones, exponiendo las hipótesis bajo las cuales se obtiene sensibilidad, así como las ideas centrales de sus demostraciones y los ejemplos que ilustran el alcance y las limitaciones de los resultados. De este modo, se ofrece una visión integrada del papel que juegan la densidad de puntos minimales y la no minimalidad en la aparición de la condición de sensibilidad.

Lema 7.20. *Sean (S, X, Φ) un sistema dinámico y $x \in X$ un punto casi periódico. Si U_x es un entorno de x , entonces existen $s_1, \dots, s_{n_0} \in S$ tales que, para todo $z \in \overline{\mathcal{O}(x)}$, $\Phi_{s_i}(z) \in U_x$ para algún $s_i \in \{s_1, \dots, s_{n_0}\}$*

Demostración. Como x es minimal, dado $z_0 \in \overline{\mathcal{O}(x)}$ existe $s_{z_0} \in S$ tal que

$$\Phi_{s_{z_0}}(z_0) \in U_x.$$

Por la continuidad de $\Phi_{s_{z_0}}$, existe un entorno V_{z_0} de z_0 tal que

$$\Phi_{s_{z_0}}(V_{z_0}) \subset U_x.$$

Dado que esto se cumple para todo $z \in \overline{\mathcal{O}(x)}$, la familia $\{V_z : z \in \overline{\mathcal{O}(x)}\}$ es un recubrimiento abierto de $\overline{\mathcal{O}(x)}$. Como $\overline{\mathcal{O}(x)}$ es compacto, existe un subrecubrimiento finito

$$\overline{\mathcal{O}(x)} \subset V_{z_1} \cup V_{z_2} \cup \dots \cup V_{z_{n_0}}.$$

Para cada $i = 1, \dots, n_0$, se tiene $s_{z_i} \in S$ tal que

$$\Phi_{s_{z_i}}(V_{z_i}) \subset U_x.$$

Tomando $s_i := s_{z_i}$, se concluye la demostración. □

Este resultado puede considerarse análogo a la implicación directa del Lema 6.9, pero se reemplazó la noción de punto minimal en un espacio compacto por la de punto casi periódico en el contexto de acciones de semigrupos. Sin embargo, como se mostrará en el ejemplo siguiente, bajo estas hipótesis más generales dicha propiedad no caracteriza a los puntos casi periódicos: en particular, el recíproco deja de ser válido si no se impone la compacidad de la clausura de la órbita.

Ejemplo 7.21. Sean $X = \mathbb{R}$ con la métrica usual y S el semigrupo libre generado

por $\{a, b\}$. Definimos una acción

$$\Phi : S \times X \rightarrow X$$

determinada por los generadores $\Phi_a = f$, $\Phi_b = g$, donde

$$f(x) = 2x, \quad g(x) = 1.$$

Tomamos $x = 1$ y consideramos su órbita

Observamos que, para todo $y \in \mathbb{R}$, se tiene $\Phi_b(y) = 1$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\Phi_{a^n}(1) = f^n(1) = 2^n.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{O}(1) = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Como este conjunto no es acotado, su clausura no es compacta, en consecuencia, el punto $x = 1$ no es casi periódico.

Sin embargo, $x = 1$ satisface la propiedad de retorno finito: dado un entorno U_x de x , basta tomar el conjunto finito $\{b\} \subset S$, ya que para todo $z \in \overline{\mathcal{O}(1)}$ se cumple

$$\Phi_b(z) = 1 \in U_x.$$

Esto muestra que, la propiedad de retorno mediante un conjunto finito de elementos no implica que el punto sea casi periódico si no se supone la compacidad de la clausura de la órbita.

Teorema 7.22. *Sea (S, X, Φ) un sistema dinámico topológicamente transitivo y no minimal. Si el conjunto $\mathcal{M}_c$ (conjunto de puntos casi periódicos) es denso en X , entonces (S, X, Φ) es sensible a las condiciones iniciales.*

Demostración. Como (S, X, Φ) no es minimal y $\mathcal{M}_c$ es denso, existen M_1 y M_2 conjuntos minimales, con $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Sea $d = d(M_1, M_2)$. Demostraremos que el sistema es sensible a las condiciones iniciales con constante $\frac{d}{8} = \alpha$.

Sea $x \in X$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $d(M_1, x) \geq \frac{d}{2}$ y que $U_x \subset B(x, \alpha)$.

Como $\mathcal{M}_c$ es denso,

$$\exists y \in U_x \cap \mathcal{M}_c.$$

Fijado y tomamos $\varepsilon > 0$ tal que $B(y, \varepsilon) \subset B(x, \alpha)$.

Por el Lema 7.20, existen $s_1, \dots, s_{n_0} \in S$ tales que para todo $z \in \overline{\mathcal{O}(y)}$ existe

$i \in \{1, \dots, n_0\}$ con $\Phi_{s_i}(z) \in B(y, \varepsilon)$.

Tomamos un entorno W de M_1 tal que

$$d\left(\Phi_{s_i}(W), B(x, \frac{d}{4})\right) > \alpha \quad \text{para todo } i \in \{1, \dots, n_0\}.$$

Como por la proposición 7.17 el sistema es TT, existe $s \in S$ tal que

$$\Phi_s(U_x) \cap W \neq \emptyset.$$

Luego existe $w \in U_x$ tal que $\Phi_s(w) \in W$.

En particular, para cada i se tiene $\Phi_{s_i}(\Phi_s(w)) \in \Phi_{s_i}(W)$, y por la elección de W ,

$$d\left(\Phi_{s_i}(\Phi_s(w)), B(x, \frac{d}{4})\right) > \alpha.$$

Por otro lado, eligiendo i tal que $\Phi_{s_i}(\Phi_s(y)) \in B(y, \varepsilon)$ se tiene,

$$d\left(\Phi_{s_i}(\Phi_s(w)), \Phi_{s_i}(\Phi_s(y))\right) > 2\alpha.$$

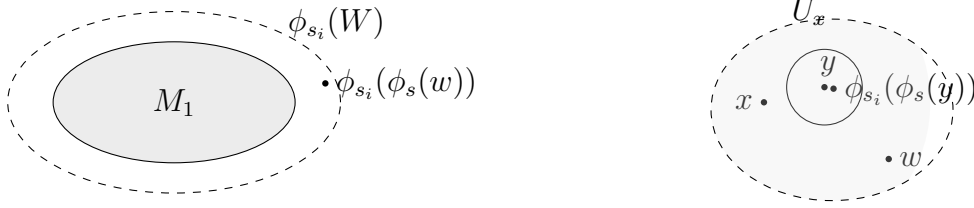


Figura 7: Bosquejo geométrico del argumento.

Finalmente, si $\Phi_{s_i}(\Phi_s(x)) \in B(x, \frac{d}{4})$, $d\left(\Phi_{s_i}(\Phi_s(x)), \Phi_{s_i}(\Phi_s(w))\right) > \alpha$ y si $\Phi_{s_i}(\Phi_s(x)) \notin B(x, \frac{d}{4})$, $d\left(\Phi_{s_i}(\Phi_s(x)), \Phi_{s_i}(\Phi_s(y))\right) > \alpha$.

□

Corolario 7.23. Bajo las hipótesis del teorema 7.22, la conclusión sigue siendo válida si se reemplaza la hipótesis de transitividad topológica por transitividad puntual.

Demostración. Bajo transitividad puntual y densidad de $\mathcal{M}_c$, por la proposición 7.17 el sistema es topológicamente transitivo, y aplica el teorema 7.22.

□

El siguiente teorema no se incluye en los materiales citados pero fue proporcionado por sus autores.

Teorema 7.24. Sea (S, X, Φ) un sistema dinámico casi abierto y TT, con $A \subset X$ un conjunto invariante. Si $\bar{A} \neq X$ y A^{-1} es denso en X , entonces (S, X, Φ) es sensible a las condiciones iniciales.

Demostración. Tomemos $x_0 \in X$ tal que $x_0 \notin \bar{A}$ y $d = d(x_0, A)$.

Probaremos que el sistema es sensible a las condiciones iniciales con constante de sensibilidad $\alpha = \frac{d}{4}$.

Sean $x \in X$ y U_x un entorno de x . Como A^{-1} es denso, existen $y \in U_x \cap A^{-1}$ y $s \in S$ tal que $\Phi_s(y) \in A$.

Como el sistema es casi abierto, existe un abierto no vacío

$$V \subset \Phi_s(U_x).$$

Además, como el sistema es TT, existen $v \in V$ y $s_1 \in S$ tales que

$$\Phi_{s_1}(v) \in B(x_0, \alpha).$$

Como $v = \Phi_s(z)$ para algún $z \in U_x$, se tiene

$$\Phi_{s_1}(v) = \Phi_{s_1}(\Phi_s(z)).$$

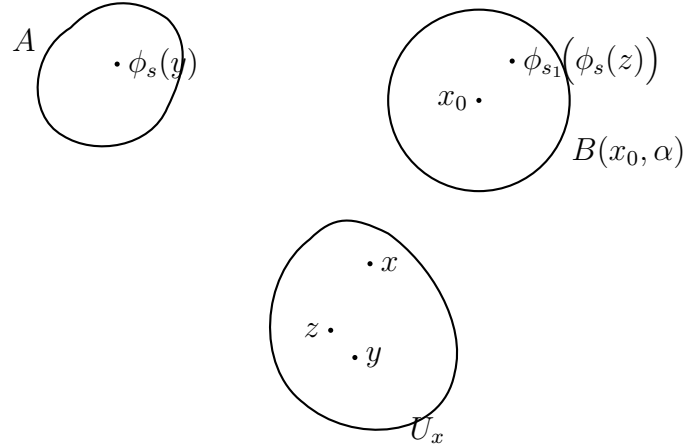


Figura 8: Bosquejo gráfico del argumento.

Observemos ahora que $\Phi_{s_1}(\Phi_s(y)) \in A$ por ser invariante.

Consideramos entonces el punto $\Phi_{s_1}(\Phi_s(x))$ y se presentan dos posibilidades:

1. Si $d(\Phi_{s_1}(\Phi_s(x)), B(x_0, \alpha)) \leq 2\alpha$, entonces $d(\Phi_{s_1}(\Phi_s(x)), A) > \alpha$, y en particular

$$d(\Phi_{s_1}(\Phi_s(x)), \Phi_{s_1}(\Phi_s(y))) > \alpha.$$

2. Si $d(\Phi_{s_1}(\Phi_s(x)), B(x_0, \alpha)) > 2\alpha$, entonces, como $\Phi_{s_1}(\Phi_s(z)) \in B(x_0, \alpha)$, se obtiene

$$d(\Phi_{s_1}(\Phi_s(x)), \Phi_{s_1}(\Phi_s(z))) > \alpha.$$

□

Corolario 7.25. Sea (S, X, Φ) un sistema dinámico casi abierto, TT y no minimal. Si $\mathcal{M}_c^{-1}$ es denso en X , entonces (S, X, Φ) es sensible a las condiciones iniciales.

Demostración. Sea (S, X, Φ) un sistema que satisface las hipótesis, distinguimos dos casos según la densidad del conjunto $\mathcal{M}_c$.

Caso 1. Supongamos que $\mathcal{M}_c$ no es denso, al ser un conjunto invariante estamos en las condiciones del teorema anterior, por lo que el sistema es sensible a las condiciones iniciales.

Caso 2. Supongamos que $\mathcal{M}_c$ es denso, entonces nos encontramos en las condiciones del teorema 7.22, por lo que el sistema es sensible a las condiciones iniciales.

□

El ejemplo que se presenta a continuación muestra que, aun cuando un sistema sea topológicamente transitivo, no minimal y con el conjunto $\mathcal{M}^{-1}$ denso, la sensibilidad a las condiciones iniciales puede fallar si no se impone la hipótesis de casi abierto.

Ejemplo 7.26. Sean $X = [0, 1]$ y las funciones $f_1, f_2, f_3 : X \rightarrow X$ definidas por

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = \frac{x}{2}, \quad f_3(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, & \frac{1}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

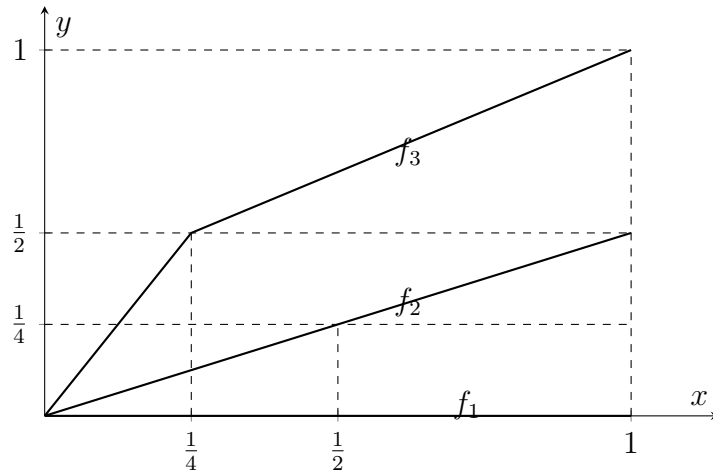


Figura 9: Gráficas de f_1 , f_2 y f_3 .

Se considera S el grupo libre generado por tres elementos a, b, c y sea Φ la acción de S sobre X generada por

$$\Phi_a = f_1, \quad \Phi_b = f_2, \quad \Phi_c = f_3.$$

El sistema dinámico (S, X, Φ) verifica las siguientes propiedades:

1. (S, X, Φ) es topológicamente transitivo;
2. (S, X, Φ) no es minimal;
3. el conjunto $\mathcal{M}^{-1}$ es denso en X ;
4. (S, X, Φ) no es sensible a las condiciones iniciales.

Primero se demostrará que todo punto distinto de 0 es transitivo.

Tomamos $x \in (0, 1]$ y supongamos, por absurdo, que la órbita $\mathcal{O}(x)$ no es densa en $[0, 1]$. Entonces el complemento

$$[0, 1] \setminus \overline{\mathcal{O}(x)}$$

es un abierto no vacío y puede escribirse como unión disjunta de intervalos abiertos. Sea I una componente conexa de dicho conjunto cuya longitud sea máxima. Por definición de I , ningún punto de la órbita de x pertenece a I . En particular, para toda función f generadora del sistema, la preimagen $f^{-1}(I)$ tampoco puede intersectar la órbita, ya que si existiera

$$y \in \mathcal{O}(x) \cap f^{-1}(I),$$

entonces $f(y) \in I$, contradiciendo que la órbita no intersecta I . Por lo tanto, toda preimagen no vacía de I por alguno de los generadores tiene que quedar contenida en el complemento de $\mathcal{O}(x)$. Consideremos ahora las funciones f_2 y f_3 . Si $I \subset [0, 1/2]$, entonces $f_2^{-1}(I) \neq \emptyset$ y, como $f_2(x) = x/2$ contrae, la preimagen de un intervalo tiene longitud estrictamente mayor que la del intervalo original; en particular,

$$|f_2^{-1}(I)| = 2|I| > |I|.$$

Si en cambio $I \subset (1/2, 1]$, entonces utilizamos f_3 , se tiene $f_3^{-1}(I) \neq \emptyset$ y además

$$|f_3^{-1}(I)| = \frac{3}{2}|I| > |I|.$$

En ambos casos se obtiene un intervalo contenido en el complemento de $\mathcal{O}(x)$ cuya longitud es estrictamente mayor que la de I , contradiciendo la maximalidad de I . Resta considerar el caso en que I intersecta ambos intervalos $[0, 1/2]$ y $(1/2, 1]$. En tal situación, puede verificarse que la preimagen de I mediante la composición $f_3 \circ f_2$ tiene longitud estrictamente mayor que $|I|$, lo que nuevamente contradice la maximalidad de I . En consecuencia, al ser denso de puntos transitivos el sistema es topológicamente transitivo.

Ahora observemos que 0 es punto fijo para cada generador:

$$f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = 0.$$

En consecuencia, $\{0\}$ es un conjunto cerrado e invariante. Además, para todo $x \in X$ se cumple $0 \in \mathcal{O}(x)$, pues $\Phi_a(x) = f_1(x) = 0$. Esto implica que la clausura de la órbita de cualquier punto contiene a 0.

Por otra parte, dos conjuntos minimales distintos son disjuntos, por lo tanto, el único conjunto minimal del sistema es $\{0\}$, y el conjunto de puntos minimales satisface

$$\mathcal{M} = \{0\}.$$

En particular, el sistema no es minimal.

Observemos que:

$$X = f_1^{-1}(\{0\}) \subset f_1^{-1}(\mathcal{M}) \subset \bigcup_{s \in S} \Phi_s^{-1}(\mathcal{M}) =: \mathcal{M}^{-1}.$$

Concluyendo que $\mathcal{M}^{-1}$ es denso en X .

Para probar que el sistema dinámico (S, X, Φ) no es sensible a las condiciones iniciales, tomamos $\delta > 0$ y elegimos un intervalo abierto $U \subset (1/2, 1)$ y $\text{diam}(U) < \delta$. Mostraremos que para todo $s \in S$ se cumple

$$\text{diam}(\Phi_s(U)) \leq \text{diam}(U).$$

Para ello analizamos el efecto de los generadores sobre intervalos. Sea $J \subset [0, 1]$ un intervalo cualquiera.

- f_1 es constante, luego

$$\text{diam}(f_1(J)) = 0.$$

- $f_2(x) = x/2$ satisface

$$\text{diam}(f_2(J)) = \frac{1}{2} \text{diam}(J).$$

- f_3 es afín por tramos: si $J \subset [1/4, 1]$, entonces f_3 tiene pendiente $2/3$ y

$$\text{diam}(f_3(J)) = \frac{2}{3} \text{diam}(J);$$

si $J \subset [0, 1/4]$, entonces $f_3(x) = 2x$ y

$$\text{diam}(f_3(J)) = 2 \text{diam}(J).$$

El único caso expansivo es, por lo tanto, cuando un intervalo queda contenido en $[0, 1/4]$ y se aplica f_3 . Observamos ahora que, partiendo de un intervalo $U \subset (1/2, 1)$, para que una imagen intermedia quede contenida en $[0, 1/4]$ es necesario aplicar previamente la función f_2 al menos dos veces. En consecuencia, toda vez que una palabra $s \in S$ produce una etapa intermedia en la que un intervalo queda dentro de $[0, 1/4]$, dicho intervalo proviene de al menos dos iteraciones previas de f_2 , lo que implica una contracción acumulada del diámetro por un factor $1/4$.

Si en ese punto se aplica f_3 , teniendo presente que en ese intervalo es la inversa de f_2 , aun cuando f_3 actúe en su tramo expansivo, dicha expansión queda dominada por la contracción previa necesaria para alcanzar ese tramo. En particular, el diámetro nunca supera el del intervalo original.

En el trabajo de Zhukova [Z] se demuestra el siguiente resultado:

Teorema 7.27. *Sean X un espacio métrico localmente compacto con base numerable y (S, X, Φ) un sistema dinámico, donde S es un c -semigrupo o bien es casi abierto. Si el sistema es topológicamente transitivo y al menos uno de los siguientes conjuntos es un subconjunto propio y denso de X :*

- (a) *la unión de los conjuntos minimales;*
- (b) *la unión de los puntos que tienen órbitas cerradas;*

entonces (S, X, Φ) es sensible a las condiciones iniciales.

En la demostración correspondiente a la condición (a) no se utiliza la hipótesis de que S sea un c -semigrupo o casi abierto; la prueba depende únicamente de la transitividad topológica y de la estructura de los conjuntos minimales. En el trabajo de Iglesias y Portela [IPb] se toma este resultado y se generaliza pudiendo sustituir la transitividad topológica por transitividad puntual dadas las condiciones del espacio. Por otra parte, en la demostración basada en la condición (b), las hipótesis de c -semigrupo o casi abierto y de transitividad topológica se reformulan por la de

punto transitivo, junto con la exigencia de que los puntos de la órbita considerada sean también transitivos. Esto conduce a un resultado formulado desde un enfoque diferente, sin que sea inmediato establecer una relación de implicancia entre ambos criterios. A continuación se presentan ambos teoremas.

Teorema 7.28. *Sea X un espacio métrico localmente compacto con base numerable. Si (S, X, Φ) es un sistema dinámico no minimal, PT y $\mathcal{M}$ denso en X , entonces (S, X, Φ) es sensible a las condiciones iniciales.*

Demostración. Supongamos por absurdo que:

para todo $\alpha > 0$ existe un conjunto abierto no vacío $V \subset X$, con diámetro suficientemente pequeño, tal que para todo $s \in S$ se cumple

$$\text{diam}(\Phi_s(V)) \leq \alpha.$$

Con este supuesto llegaremos a que todo $x \in X$ es transitivo y por lo tanto, el sistema es minimal, lo que contradice la hipótesis.

Fijemos $r > 0$ arbitrario y $V \subset X$ tal que

$$\text{diam}(\Phi_s(V)) \leq \frac{r}{4} \quad \text{para todo } s \in S.$$

Como, por las características de X , de acuerdo a la corolario 7.19, el sistema (S, X, Φ) es DPT, existe $z \in V$ tal que

$$\overline{\mathcal{O}(z)} = X.$$

En particular, para todo $x \in X$ existe una sucesión $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ tal que

$$\Phi_{s_n}(z) \longrightarrow x.$$

Fijemos ahora $w \in X$, $s_0 \in S$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$B(z, \varepsilon) \subset V \quad \text{y} \quad \Phi_{s_0}(B(z, \varepsilon)) \subset B\left(w, \frac{r}{4}\right).$$

Tomemos $y \in \mathcal{M} \cap B(z, \varepsilon)$. Como X es localmente compacto, la sucesión $\{\Phi_{s_n}(y)\}$ admite una subsucesión convergente; la denotamos $\Phi_{s'_n}(y) \rightarrow y_0$. Dado que y es un punto minimal, también lo es y_0 , entonces existe $s_1 \in S$ tal que

$$\Phi_{s_1}(y_0) \in B(z, \varepsilon).$$

Observemos ahora que

$$d(\Phi_{s_0}\Phi_{s_1}(x), \Phi_{s_0}\Phi_{s_1}(y_0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\Phi_{s_0}\Phi_{s_1}(\Phi_{s'_n}(z)), \Phi_{s_0}\Phi_{s_1}(\Phi_{s'_n}(y))) \leq \frac{r}{4},$$

ya que $z, y \in V$ y, por hipótesis, $\text{diam}(\Phi_s(V)) \leq r/4$ para todo $s \in S$.

Por otra parte,

$$d(w, \Phi_{s_0}\Phi_{s_1}(y_0)) < \frac{r}{4},$$

y por la desigualdad triangular se obtiene $d(w, \Phi_{s_0}\Phi_{s_1}(x)) < r$.

Dado que w y r son arbitrarios, esto implica que $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$.

Como $x \in X$ también es arbitrario, el sistema sería minimal, lo cual contradice la hipótesis. □

Teorema 7.29. *Sean X un espacio métrico localmente compacto y (S, X, Φ) un sistema dinámico no minimal.*

Si se cumplen las siguientes condiciones:

- (1) *$\text{Trans}(X)^* \neq \emptyset$, donde $\text{Trans}(X)^*$ representa el conjunto de puntos transitivos tales que todo punto de su órbita es también transitivo;*
- (2) *F es un subconjunto denso de X , donde F representa la unión de los puntos que tienen órbitas cerradas;*

entonces (S, X, Φ) es sensible a las condiciones iniciales.

Demostración. Nuevamente, supondremos por absurdo que el sistema no es sensible a las condiciones iniciales.

Tomemos $r > 0$ y entonces existe un abierto $V \subset X$ tal que

$$\text{diam}(\Phi_s(V)) \leq \frac{r}{4} \text{ para todo } s \in S.$$

Por hipótesis sabemos que el sistema no es minimal, entonces podemos tomar $x \in X$ tal que $\overline{\mathcal{O}(x)} \neq X$.

Sea $z \in \text{Trans}(X)^* \cap V$, como z es un punto transitivo, existe una sucesión $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ tal que

$$\Phi_{s_n}(z) \rightarrow x.$$

Sea $y \in F \cap V$, como

$$d(\Phi_{s_n}(y), \Phi_{s_n}(z)) \leq \frac{r}{4} \text{ para todo } n,$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, se cumple que $\Phi_{s_n}(y) \in B(x, r)$, dado que el espacio es localmente compacto, existe una subsucesión $\{s'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\Phi_{s'_n}(y) \rightarrow y_0 \in \overline{\mathcal{O}(y)} = \mathcal{O}(y).$$

En particular, existe $s_0 \in S$ tal que $\Phi_{s_0}(y) = y_0$.

Fijemos además $w \in X$. Como todo punto de la órbita de z es transitivo, existe $s_1 \in S$ tal que

$$\Phi_{s_1} \Phi_{s_0}(z) \in B\left(w, \frac{r}{4}\right).$$

Dado que $y, z \in V$, se tiene

$$d\left(\Phi_{s_1} \Phi_{s_0}(y), \Phi_{s_1} \Phi_{s_0}(z)\right) \leq \frac{r}{4}.$$

Como $\Phi_{s_0}(y) = y_0$, resulta

$$d\left(\Phi_{s_1}(y_0), w\right) \leq \frac{r}{2}.$$

Por otra parte, como $\Phi_{s_n}(z) \rightarrow x$, se tiene

$$d\left(\Phi_{s_1} \Phi_{s'_n}(y), \Phi_{s_1} \Phi_{s'_n}(z)\right) \longrightarrow d\left(\Phi_{s_1}(y_0), \Phi_{s_1}(x)\right) \leq \frac{r}{4}.$$

De aquí se concluye que

$$d\left(w, \Phi_{s_1}(x)\right) \leq r.$$

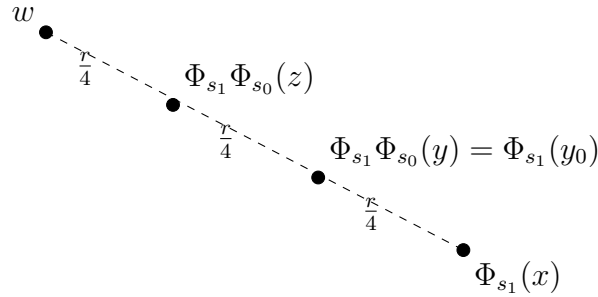


Figura 10: Bosquejo gráfico del argumento.

Esto implica que

$$\overline{\mathcal{O}(x)} = X,$$

lo cual contradice la hipótesis inicial. Este absurdo prueba que el sistema es sensible a las condiciones iniciales.

□

Observación 7.30. El ejemplo 7.26 muestra que la transitividad topológica no es equivalente a la condición $\text{Trans}(X)^* \neq \emptyset$. En efecto, en dicho ejemplo el sistema es topológicamente transitivo, pero no existen puntos transitivos cuya órbita esté formada por puntos transitivos. Esto pone de manifiesto que la condición $\text{Trans}(X)^* \neq \emptyset$ es estrictamente más fuerte que la transitividad topológica. Obsérvese también que no es casi abierto.

Por otra parte, el ejemplo 7.16 muestra que podemos tener sistemas con la condición de casi abierto y $\text{Trans}(X)^* = \emptyset$. En este caso este ejemplo no es TT. Asimismo, el ejemplo que se presenta a continuación muestra que existen sistemas con $\text{Trans}(X)^* \neq \emptyset$ que no son ni casi abiertos ni c-semigrupos, pero no se encuentra bajo las hipótesis de los teoremas anteriores, pues corresponde a un sistema minimal.

Ejemplo 7.31. Sea $X = \mathbb{T}^2$ y sea $f : X \rightarrow X$ la función definida en el ejemplo 5.2.

Tomamos $x_0 \in X$ un punto no periódico cuya órbita por f es densa en X , cuya existencia se deduce de la transitividad topológica de f .

Definimos la función $g : X \rightarrow X$ dada por $g(x) = x_0$ para todo $x \in X$.

Sea S el semigrupo libre generado por dos elementos $\{a, b\}$ y sea $\Phi : S \times X \rightarrow X$ la acción definida por $\Phi_a = f$, $\Phi_b = g$.

Observamos que todo punto de X es transitivo. En efecto, sea $x \in X$. Se tiene

$$\Phi_b(x) = x_0,$$

y por lo tanto, para todo $n \geq 0$, $\Phi_{a^n b}(x) = f^n(x_0)$.

Como la órbita de x_0 es densa en X , se deduce que la órbita de x es densa en X .

Además, si $y \in O(x)$, entonces

$$\Phi_b(y) = x_0,$$

y por lo tanto la órbita de y contiene la órbita de x_0 , que es densa en X . En consecuencia, todo punto de la órbita de x es transitivo.

Por otra parte, el sistema no es casi abierto. En efecto, si $U \subset X$ es un abierto no vacío, entonces

$$\Phi_b(U) = \{x_0\},$$

y por lo tanto $\text{int}(\Phi_b(U)) = \emptyset$.

Finalmente, el semigrupo S no es un c-semigrupo. En efecto, si $s_0 = a$, el conjunto

$$Ss_0 = \{wa : w \in S\}$$

está formado por las palabras que terminan en a , mientras que su complemento

contiene todas las palabras que terminan en b , el cual es infinito. Como S es discreto, esto implica que $S \setminus Ss_0$ no es relativamente compacto.

Observación 7.32. *Los ejemplos anteriores muestran que las hipótesis consideradas en los resultados de Zhukova y en los de Iglesias–Portela no son comparables de manera inmediata. Sin embargo, no permiten concluir que ambos resultados cubran contextos esencialmente distintos, pues no se dispone aquí de ejemplos, bajo las hipótesis de los respectivos teoremas, que separen estrictamente ambos marcos.*

En este sentido, la proposición siguiente puede interpretarse como una reformulación del teorema 7.24. En efecto, mientras allí la sensibilidad se obtiene suponiendo que el sistema es casi abierto y topológicamente transitivo, en la proposición siguiente esas hipótesis son sustituidas por la existencia de un punto transitivo cuya órbita está formada por puntos transitivos.

De este modo se refuerza la idea de que, aunque las hipótesis involucradas no sean directamente comparables, subyace en ambos criterios un mismo mecanismo que conduce a sensibilidad.

Proposición 7.33. *Sean X un espacio métrico y (S, X, Φ) un sistema dinámico. Si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. $\text{Trans}(X)^* \neq \emptyset$;
2. *existe un subconjunto invariante no denso $M \subset X$ tal que M^{-1} es denso en X .*

entonces (S, X, Φ) es sensible a las condiciones iniciales.

Demostración. Como M no es denso, existe $w \in X$ y $r > 0$ tales que

$$M \cap B(w, r) = \emptyset.$$

Probaremos que el sistema dinámico (S, X, Φ) es sensible a las condiciones iniciales con constante $\delta = r/4$.

Sean $x \in X$ y un entorno U_x . Como M^{-1} es denso en X , existe $y \in M^{-1} \cap U_x$ y $s_0 \in S$ tales que

$$\Phi_{s_0}(y) \in M.$$

Sea ahora $z \in \text{Trans}(X)^* \cap U_x$, existe $s_1 \in S$ tal que

$$\Phi_{s_1} \Phi_{s_0}(z) \in B\left(w, \frac{r}{2}\right).$$

Como

$$\Phi_{s_1} \Phi_{s_0}(y) \in M,$$

se tiene

$$d(\Phi_{s_1} \Phi_{s_0}(y), \Phi_{s_1} \Phi_{s_0}(z)) > \frac{r}{2} > \delta.$$

□

Corolario 7.34. Sean X un espacio métrico localmente compacto con base numerable y (S, X, Φ) un sistema dinámico no minimal. Si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\text{Trans}(X)^* \neq \emptyset$;
2. $\mathcal{M}^{-1}$ es denso en X , donde $\mathcal{M}$ representa el conjunto de puntos minimales.

entonces (S, X, Φ) es sensible a las condiciones iniciales.

Demostración. Sea (S, X, Φ) un sistema que satisface las hipótesis, distinguimos dos casos según la densidad del conjunto $\mathcal{M}$.

Caso 1: $\mathcal{M}$ es denso en X .

Por la hipótesis (1), se tiene $\text{Trans}(X)^* \neq \emptyset$, luego (S, X, Φ) es PT. Como además $\mathcal{M}$ es denso y por hipótesis el sistema no es minimal, se verifican todas las hipótesis del Teorema 7.28. Por lo tanto, (S, X, Φ) es sensible a las condiciones iniciales.

Caso 2: $\mathcal{M}$ no es denso en X .

El conjunto $\mathcal{M}$ es invariante y por la hipótesis (2), $\mathcal{M}^{-1}$, es denso en X . Además, por la hipótesis (1), se tiene $\text{Trans}(X)^* \neq \emptyset$. Como $\mathcal{M}$ no es denso, se satisfacen todas las hipótesis de la Proposición 7.33. Por lo tanto, (S, X, Φ) es sensible a las condiciones iniciales.

□

Los resultados anteriores permiten obtener los siguientes corolarios, que reúnen distintos criterios suficientes para garantizar sensibilidad a las condiciones iniciales:

Corolario 7.35. Sean X un espacio métrico localmente compacto y (S, X, Φ) un sistema dinámico no minimal.

Si se cumplen las siguientes condiciones:

- (1) $\text{Trans}(X)^* \neq \emptyset$.
- (2) F^{-1} es un subconjunto denso de X , donde F representa la unión de los puntos que tienen órbitas cerradas;

entonces (S, X, Φ) es sensible a las condiciones iniciales.

Demostración. Si F es denso estamos en las condiciones del teorema 7.29 Si F no es denso estamos en las condiciones del teorema 7.33. $\square$

Corolario 7.36. Sean X un espacio métrico localmente compacto con base numerable y (S, X, Φ) un sistema dinámico no minimal. Si se cumplen las siguientes condiciones:

1. El sistema es TT y casi abierto;
2. $\mathcal{M}^{-1}$ es denso en X , donde $\mathcal{M}$ representa el conjunto de puntos minimales.

entonces (S, X, Φ) es sensible a las condiciones iniciales.

Demostración. Si $\mathcal{M}$ no es denso estamos en las condiciones del teorema 7.24 Si $\mathcal{M}$ es denso estamos en las condiciones de equivalencia entre TT y PT entonces estamos en las condiciones del teorema 7.28 $\square$

Corolario 7.37. Sea (S, X, Φ) un sistema dinámico no minimal y $\text{Trans}(X)^* \neq \emptyset$. Si $\mathcal{M}_c^{-1}$ es denso en X , entonces (S, X, Φ) es sensible a las condiciones iniciales.

Demostración. Si $\mathcal{M}_c$ no es denso, estamos en las condiciones del teorema 7.33 y si $\mathcal{M}_c$ es denso, como $\text{Trans}(X)^* \neq \emptyset$ implica ser TT estamos en las condiciones del teorema 7.22 $\square$

Reflexión final

El desarrollo de este trabajo permitió profundizar en las relaciones entre transitividad, minimalidad y sensibilidad, mostrando cómo muchas de estas relaciones dependen de manera esencial de las hipótesis impuestas sobre el espacio o sobre la dinámica considerada.

En ese recorrido, el teorema de Vu Dong Tô motivó particularmente el estudio de la relación entre transitividad topológica, densidad de puntos periódicos y sensibilidad a las condiciones iniciales en ausencia de continuidad. En esa dirección se incluyó un corolario y diversos ejemplos orientados a analizar el caso de espacios totalmente acotados y a explorar el alcance de dicha implicación. A la luz del resultado de Kulczycki [K], estos ejemplos contribuyen a ilustrar algunas de las particularidades que presenta dicho contexto.

Del mismo modo, en la parte final del trabajo quedó planteada una inquietud en torno a la relación entre los contextos considerados por Zhukova y por Iglesias–Portela. Aunque aquí no se obtuvo una respuesta concluyente acerca de si uno de esos marcos incluye al otro o si se trata de enfoques esencialmente distintos, el análisis sugiere una pregunta natural que podría merecer un estudio más profundo.

En este sentido, quedan abiertas cuestiones que surgieron de manera natural durante el desarrollo de la tesis y que aparecen como posibles líneas para continuar pensando.

Referencias

- [AAB] E. Akin, J. Auslander y K. Berg. «When is a transitive map chaotic?» En: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 12.1 (1992), págs. 1-13.
- [B+] J. Banks et al. «On Devaney's Definition of Chaos». En: *The American Mathematical Monthly* 99 (1992), págs. 332-334.
- [D] R. L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. 2.^a ed. Addison-Wesley, 1989.
- [IPa] J. Iglesias y A. Portela. «A simple proof of a theorem of sensitivity». En: *Journal of Dynamical and Control Systems* 28.4 (2022), págs. 945-949.
- [IPb] J. Iglesias y A. Portela. *Sensitive actions in non-compact spaces*. arXiv:2405.12323v2 (24 Jul 2025). 2025.
- [K] Marcin Kulczycki. «Noncontinuous Maps and Devaney's Chaos». En: *Regular and Chaotic Dynamics* 13.2 (2008), págs. 81-84. DOI: [10 . 1134 / S1560354708020020](https://doi.org/10.1134/S1560354708020020).
- [N] A. Navas. *Grupos de difeomorfismos del círculo*. Vol. 13. Ensaios Matemáticos. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.
- [T] V. D. Tô. «A Note on Devaney's Definition of Chaos». En: *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories* 2 (2004), págs. 23-26.
- [Z] N. I. Zhukova. «Sensitivity and chaoticity of some classes of semigroup actions». En: *Regular and Chaotic Dynamics* 29.1 (2024), págs. 174-189.