

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

La conjetura de Böcherer paramodular

Tesis de maestría

Daniel Mejail

Director: Gonzalo Tornaría

Índice de contenidos

I	Formas paramodulares	5
1	Funciones en el semiplano de Siegel	5
1.1	Matrices simplécticas	5
1.2	Formas modulares de Siegel	6
1.3	Ejemplos	8
1.4	Subgrupos de congruencia	9
2	Operadores de Hecke y series L	12
2.1	El anillo de Hecke en abstracto	12
2.2	El anillo de Hecke del grupo paramodular	13
2.3	Formas nuevas	16
3	La conjetura de Böcherer paramodular	16
3.1	La conjetura para formas de Siegel	16
3.2	Valores centrales de funciones L de formas paramodulares	17
II	Modelos de Bessel	21
4	Formas de Siegel como formas automorfas	21
4.1	La función adélica asociada a una forma paramodular	21
4.2	Operadores locales	22
4.3	La representación asociada a una forma paramodular	25
5	Períodos de Bessel y su aplicación a la conjetura de Böcherer	25
5.1	El modelo de Bessel asociado a una representación	25
5.2	La demostración de la conjetura de Böcherer para formas de Siegel	27
5.3	Aplicación a la conjetura de Böcherer paramodular	30
III	Cálculo de algunas integrales locales	34
6	Introducción	34
6.1	El grupo	34
6.2	El cuerpo base	34
6.3	La extensión cuadrática	35
6.4	El toro	35
6.5	La integral	36
7	Un conjunto de representantes	38
8	La integral local	42
8.1	Simplificación de $J_0^{(k)}(\Phi, t_K^m)$	42
	Referencias	47

Introducción

En 1986, Böcherer formuló una conjetura que relaciona los coeficientes de Fourier de una forma modular de Siegel con los valores centrales de su función L spin torcida por caracteres cuadráticos. Böcherer demostró su conjetura para un caso especial, cuando la forma de Siegel es un lift de Saito-Kurokawa, relacionándola con la fórmula de Waldspurger.

Las formas de Siegel clásicas son funciones holomorfas en el llamado espacio de Siegel que satisfacen una ecuación funcional particular. En términos de representaciones automorfas, estas funciones corresponden a representaciones del grupo $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A})$, conformado por matrices invertibles de tamaño 4×4 que preservan cierta forma bilineal antisimétrica.

Las formas paramodulares son un tipo diferente de formas automorfas en las que se sustituye el grupo de Siegel por el grupo paramodular de nivel N . Estas formas han cobrado notoriedad recientemente por su conexión con superficies abelianas, predicha por la Conjetura de paramodularidad [7, 8, 31]. En [37], se propone un análogo de la conjetura de Böcherer para formas paramodulares de nivel primo y, en [38], se la generaliza y se da evidencia numérica.

Recientemente, se han obtenido avances a través del estudio de las conjeturas de Gan-Gross-Prasad, que culminan con una demostración de la conjetura de Böcherer para formas modulares de Siegel [9, 14]. De particular interés es el preprint [16], en donde se demuestra una fórmula general para representaciones automorfas que es utilizada para demostrar la conjetura de Böcherer para formas de Siegel de nivel impar libre de cuadrados. La demostración consiste en conjugar dicha fórmula con los cálculos de períodos de Bessel locales para representaciones local de $\mathrm{GSp}(4)$ —específicamente, aquellas de tipo IIIa— llevados a cabo en [9].

Es posible que estas ideas se puedan adaptar al contexto de formas paramodulares y dar lugar a una demostración de la conjetura planteada en [38]. Teniendo en cuenta esta posibilidad, hemos explorado un poco en esa dirección. El resultado parcial obtenido parece ser alentador y nos motiva a seguir adelante con este trabajo en el futuro.

Resumen En la Parte I, introducimos los espacios de formas de Siegel y de formas paramodulares y los operadores de doble coclase que actúan en estos espacios. Definimos los espacios (paramodulares) de formas viejas y formas nuevas y asociamos, a una autoforma de Hecke, su función L spin. Por último, mencionamos los resultados recientes sobre la conjetura de Böcherer para formas de Siegel, describimos, con respecto al caso paramodular, algunos resultados computacionales y cómo éstos motivaron la formulación de la conjetura de Böcherer paramodular.

En la Parte II, pasamos del punto de vista clásico sobre formas paramodulares a la visión automorfa. Definimos el álgebra de Hecke en este contexto y la relacionamos con el álgebra de Hecke clásica. Enunciamos la conjetura de Böcherer en su versión para formas de Siegel y establecemos la conexión con las conjeturas GGP. La conexión está determinada por los modelos de Bessel. Hacemos mención de la bibliografía relevante

y de algunos resultados conocidos y cómo éstos se conjugan para dar una solución a la conjetura de Böcherer. Concluimos esta parte buscando enmarcar la conjetura de Böcherer paramodular a través de esta teoría. Describimos cuáles pensamos que deberían ser los pasos a seguir para poder adaptar las ideas utilizadas en el caso de formas de Siegel.

En la Parte III, exploramos las ideas de la Parte II. En particular, nos concentramos en estudiar las integrales locales en $\mathrm{GSp}(4, F)$, F un cuerpo local no arquimedeano, que son parte esencial de la relación entre los períodos de Bessel y los valores centrales de funciones L de una forma paramodular. Dichas integrales locales son integrales sobre el subgrupo de Bessel de funciones invariantes por la acción del grupo paramodular (local). Determinamos un sistema de representantes dentro del subgrupo de Bessel, lo que nos permite hallar una *fórmula cerrada* para los períodos de Bessel locales en este caso, en el sentido de que basta con evaluar la función en una cantidad finita de elementos del grupo para conocer su período.

En particular, si $X \in \Gamma_g$, entonces

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^tD & -{}^tB \\ -{}^tC & {}^tA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g & \\ & I_g \end{bmatrix},$$

lo que muestra que X es invertible con inversa (a ambos lados) dada por $X^{-1} = \begin{bmatrix} {}^tD & -{}^tB \\ -{}^tC & {}^tA \end{bmatrix}$ y, en consecuencia, que también se verifican las relaciones

$${}^tDA - {}^tBC = {}^tAD - {}^tCB = I_g, \quad {}^tDB = {}^tBD \quad \text{y} \quad {}^tAC = {}^tCA,$$

o sea ${}^tXJX = J$, también.

Un poco más en general, una matriz $M \in \text{Mat}_{2g \times 2g}(\mathbb{C})$ es *simpléctica*, si verifica:

$$MJ {}^tM = \lambda(M) J,$$

para cierto escalar invertible $\lambda(M)$. Si $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ es simpléctica y

$$M' = \begin{bmatrix} {}^tD & -{}^tB \\ -{}^tC & {}^tA \end{bmatrix}, \quad (3)$$

entonces $MM' = M'M = \lambda(M) I_{2g}$. Las matrices simplécticas con coordenadas reales forman un grupo que denotamos $\text{GSp}_{2g}(\mathbb{R})$ y $\lambda : \text{GSp}_{2g}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^\times$ es un morfismo de grupos. El grupo modular de Siegel está contenido en el subgrupo

$$\text{GSp}_{2g}(\mathbb{R})^+ = \left\{ M \in \text{GSp}_{2g}(\mathbb{R}) : \lambda(M) > 0 \right\},$$

de aquellas matrices simplécticas reales cuyo factor $\lambda(M)$ es positivo. A modo de ejemplo, las matrices

$$\begin{bmatrix} U & \\ & {}^tU^{-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_g & X \\ & I_g \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad J = \begin{bmatrix} & -I_g \\ I_g & \end{bmatrix} \quad (4)$$

son simplécticas con factor $\lambda = 1$, si $U \in \text{GL}_g(\mathbb{Z})$ y ${}^tX = X$.

1.2 Formas modulares de Siegel

El *semiplano de Siegel* (de género g) es el conjunto conformado por las matrices simétricas, de tamaño $g \times g$ y de coordenadas complejas, cuya parte imaginaria es definida positiva:

$$\mathfrak{H}_g = \left\{ Z = X + iY \in \text{Mat}_{g \times g}(\mathbb{C}) : {}^tZ = Z, Y > 0 \right\}.$$

El semiplano de Siegel es un abierto convexo dentro del espacio de matrices complejas simétricas; es una variedad compleja y su dimensión es $g(g+1)/2$. El grupo $\text{GSp}_{2g}(\mathbb{R})^+$ actúa en \mathfrak{H}_g vía:

$$M \langle Z \rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \quad (5)$$

para cada $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})^+$ y $Z \in \mathfrak{H}_g$; la acción es transitiva y cada M induce una transformación biholomorfa cuya inversa está dada por (3). Las matrices (4) actúan por:

$$Z \mapsto UZ {}^tU \quad , \quad Z \mapsto Z + X \quad \text{y} \quad Z \mapsto -Z^{-1} . \quad (6)$$

Una *forma modular (de Siegel) de género g y peso k con respecto al grupo Γ_g* es una función holomorfa³ $F : \mathfrak{H}_g \rightarrow \mathbb{C}$ que cumple

$$F(M\langle Z \rangle) = \det(CZ + D)^k F(Z) , \quad (7)$$

para toda $M \in \Gamma_g$ y $Z \in \mathfrak{H}_g$. Si $g = 1$, en verdad, es necesario incluir una condición de regularidad “en infinito”; si $g > 1$, toda forma modular es automáticamente holomorfa en infinito (principio de Koecher; ver [24, Ch.II, § 4, Thm. 1]). Las formas modulares de Siegel de peso k constituyen un espacio vectorial de dimensión finita [24, Ch. II, § 4, Thm.2], que denotamos $\mathcal{M}_k(\Gamma_g)$. De (7), se deducen las siguientes reglas de transformación para una forma modular F :

- $F(UZ {}^tU) = \det(U)^k F(Z)$, si $U \in \mathrm{GL}_g(\mathbb{Z})$;
- $F(Z + X) = F(Z)$, si ${}^tX = X \in \mathrm{Mat}_{g \times g}(\mathbb{Z})$;
- $F(-Z^{-1}) = \det(Z)^k F(Z)$.

De esto se deduce, por ejemplo, que, si $kg \not\equiv 0 \pmod{2}$, entonces $\mathcal{M}_k(\Gamma_g) = 0$. Además, si $g > 1$, toda forma modular admite un desarrollo en serie de Fourier del tipo:

$$F(Z) = \sum_{\substack{{}^tT=T \geq 0 \\ 2T \text{ par}}} a(T) e^{2\pi i \mathrm{Tr}(TZ)} . \quad (8)$$

La sumatoria se realiza sobre las matrices simétricas semidefinidas positivas $T = [t_{ij}]_{ij}$ tales que $2T$ es *par*, es decir, sus coordenadas son enteras y, además, son pares en la diagonal; si $g = 1$, la existencia de dicha serie equivale a la condición de holomorfía en las cúspides de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Si $g = 2$, $Z = \begin{bmatrix} \tau & z \\ z & \tau' \end{bmatrix}$ pertenece a \mathfrak{H}_2 , si y sólo si $\tau, z, \tau' \in \mathbb{C}$,

$$\mathrm{Im}(\tau), \mathrm{Im}(\tau') > 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z)^2 < \mathrm{Im}(\tau) \mathrm{Im}(\tau') .$$

Por otro lado, $T = \begin{bmatrix} n & r/2 \\ r/2 & m \end{bmatrix}$ es una de las matrices en (8), si y sólo si $n, r, m \in \mathbb{Z}$,

$$n, m \geq 0 \quad \text{y} \quad r^2 \leq 4nm .$$

Usando estas coordenadas, podemos reescribir la expansión de Fourier de una forma de Siegel F de la siguiente manera:

$$F(\tau, z, \tau') = \sum_{\substack{n, r, m \in \mathbb{Z} \\ n, m, 4nm - r^2 \geq 0}} a(n, r, m) e^{2\pi i (n\tau + rz + m\tau')} . \quad (9)$$

³ Una función en varias variables complejas es holomorfa, si localmente admite un desarrollo en serie de potencias; equivalentemente, dicha función es holomorfa en su dominio de definición, si es holomorfa en cada variable por separado [21].

Si agrupamos los términos en función de $m \geq 0$,

$$F(\tau, z, \tau') = \sum_{m \geq 0} f_m(\tau, z) e^{2\pi i m \tau'} . \quad (10)$$

Las funciones f_m son *formas de Jacobi de índice m* y la expresión (10) se conoce como la *expansión de Fourier-Jacobi de F* [10].

La condición (7) introduce relaciones entre los coeficientes de Fourier en (8). Sea $T[U] = {}^tUTU$. Si $T \geq 0$ y $U \in \mathrm{SL}_g(\mathbb{Z})$,

$$a(T[U]) = a(T) , \quad (11)$$

En particular, el coeficiente $a(T)$ depende únicamente de la clase de equivalencia de la forma cuadrática que T representa con respecto a la acción del grupo $\mathrm{SL}_g(\mathbb{Z})$. Análogamente, podríamos considerar relaciones inducidas por subgrupos de $\mathrm{SL}_g(\mathbb{Z})$.

El *operador de Siegel*, es una transformación lineal que relaciona espacios de formas modulares de distintos grados. Dada $F \in \mathcal{M}_k(\Gamma_g)$, consideramos

$$\Phi F(Z') := \lim_{t \rightarrow \infty} F\left(\begin{bmatrix} Z' & \\ & it \end{bmatrix}\right) \quad (Z' \in \mathfrak{H}_{g-1}, t > 0) . \quad (12)$$

La serie de Fourier (8) converge absoluta y uniformemente en regiones de la forma $\{Y \geq Y_0\}$, si $Y_0 > 0$. De esto se deduce que el límite (12) existe y, más aun, ΦF admite un desarrollo en serie de Fourier, que se expresa en términos del de F . Decimos que $F \in \mathcal{M}_k(\Gamma_g)$ es *cuspidal*, si $\Phi F = 0$; equivalentemente, en términos de los coeficientes de Fourier, F es cuspidal si cumple con:

$$a(T) \neq 0 \quad \text{implica} \quad T > 0 .$$

1.3 Ejemplos

Sean $l \geq 1$ un entero positivo y sea $B \in \mathrm{Mat}_{l \times l}(\mathbb{Q})$ una matriz simétrica, definida positiva y tal que $2B$ es par. Es decir, B es la matriz de la forma bilineal asociada a la forma cuadrática definida positiva

$$Q(x) = x \cdot B x = {}^t x B x ;$$

las coordenadas de B cumple $b_{ii} \in \mathbb{Z}$ y $b_{ij} = b_{ji} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, si $i \neq j$. Dado otro entero positivo $g \geq 1$, definimos, para cada matriz $T \in \mathrm{Mat}_{g \times g}(\mathbb{Q})$,

$$r_Q(T) = \#\left\{X \in \mathrm{Mat}_{l \times g}(\mathbb{Z}) : {}^t X B X = T\right\} ,$$

el *número de representaciones de T por Q* (o por B). Como B es definida positiva y la bola de radio 1 es compacta en \mathbb{R}^l , B es coercitiva: existe $c > 0$ tal que $Q(x) \geq c(x \cdot x)$,

de lo que se deduce que $r_Q(T) < \infty$; si $r_Q(T) > 0$, necesariamente, T es simétrica, semidefinida positiva y $2T$ es par. A la forma cuadrática Q le asociamos la *serie zeta*:

$$\Theta_Q^{(g)}(Z) = \sum_{\substack{tT=T \geq 0 \\ 2T \text{ par}}} r_Q(T) e^{2\pi i \text{Tr}(TZ)} \quad (Z \in \mathfrak{H}_g). \quad (13)$$

Bajo ciertas condiciones, Θ_Q es una forma modular de Siegel.⁴

Si $g = 2$ y $k > 0$ es par, existe una manera de conseguir formas cuspidales para $\Gamma_2 = \text{Sp}_4(\mathbb{Z})$ a partir de formas cuspidales para $\Gamma_1 = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Este método depende del isomorfismo

$$\mathcal{S}_{2k-2}(\text{SL}_2(\mathbb{Z})) \simeq \mathcal{S}_{k-1/2}^+(\Gamma_0(4)),$$

donde $\mathcal{S}_{k-1/2}^+(\Gamma_0(4))$ denota el subespacio de formas cuspidales de peso $k - 1/2$ para $\Gamma_0(4)$ cuyos coeficientes n -ésimos se anulan, si $(-1)^{k-1} n \equiv 2, 3 \pmod{4}$. En primer lugar, a una forma $f \in \mathcal{S}_{2k-2}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$, se le asocia una forma $g \in \mathcal{S}_{k-1/2}^+(\Gamma_0(4))$ de peso medio entero. Sean $\{c(n)\}_n$ los coeficientes de Fourier de g . Dada $T = \begin{bmatrix} n & r/2 \\ r/2 & m \end{bmatrix}$ tal que $n, m, 4nm - r^2 \geq 0$, se define

$$a(T) = a(n, r, m) := \sum_d c\left(\frac{4nm - r^2}{d^2}\right) d^{k-1}, \quad (14)$$

donde d recorre los divisores comunes de n, r y m . Si $F_f : \mathfrak{H}_2 \rightarrow \mathbb{C}$ está definida por la serie de Fourier con coeficientes $a(T)$, entonces $F_f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_2)$ y $F_f \neq 0$, si $f \neq 0$. Estas formas cuspidales se denominan *lifts de Saito-Kurokawa* y están caracterizadas por la siguiente relación entre sus coeficientes:

$$a(n, r, m) = \sum_d a\left(\frac{nm}{d^2}, \frac{r}{d}, 1\right) d^{k-1}.$$

1.4 Subgrupos de congruencia

Dado un número natural $N \geq 1$, el *subgrupo principal de congruencia de nivel N* es el siguiente subgrupo del grupo modular:

$$\Gamma(N) = \left\{ M \in \Gamma_g : M \equiv I_g \pmod{N} \right\}.$$

Este subgrupo es el núcleo del morfismo $\Gamma_g \rightarrow \text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ dado por reducir las coordenadas módulo N ; es un subgrupo normal de índice finito. Un *subgrupo de congruencia* es un subgrupo $K \leq \text{GSp}_{2g}(\mathbb{R})^+$ que cumple con:

- ser *conmensurable con Γ_g* , es decir, $K \cap \Gamma_g$ tiene índice finito en Γ_g y en K , y

⁴ Si l es par y el *nivel* de Q es 1; si estas condiciones no se cumplen, la serie theta es una forma modular en un sentido más general. El *nivel* de Q (o de B) es el menor entero positivo $N \geq 1$ tal que $N(2B)^{-1}$ es par, o sea, tal que NB^{-1} representa una forma cuadrática con coeficientes enteros. Ver [11, Satz A 2.8] o [24, Ch. IV, § 8, Prop. 1].

- contener un subgrupo principal de congruencia.

Por ejemplo, si $g = 2$, los subgrupos

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \Gamma_2 : C \equiv 0 \pmod{N} \right\} = \Gamma_2 \cap \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{bmatrix} \quad \text{y}$$

$$\Gamma^{\text{para}}(N) := \text{Sp}_4(\mathbb{Q}) \cap \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \frac{1}{N}\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$$

son subgrupos de congruencia. El grupo $\Gamma_0(N)$ se conoce como *grupo de congruencia de Siegel de nivel N* ; el grupo $\Gamma^{\text{para}}(N)$ es el *grupo paramodular de nivel N* . Los subgrupos

$$Q(N) := \Gamma_2 \cap \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{bmatrix} = \Gamma_2 \cap \Gamma^{\text{para}}(N) \quad \text{y}$$

$$B(N) := \Gamma_2 \cap \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ N\mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & N\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{bmatrix} = \Gamma_0(N) \cap Q(N) ,$$

el *subgrupo de congruencia de Klingen* y el *subgrupo de congruencia de Borel*, respectivamente, también son subgrupos de congruencia. Todos estos grupos contienen al subgrupo principal de nivel N .

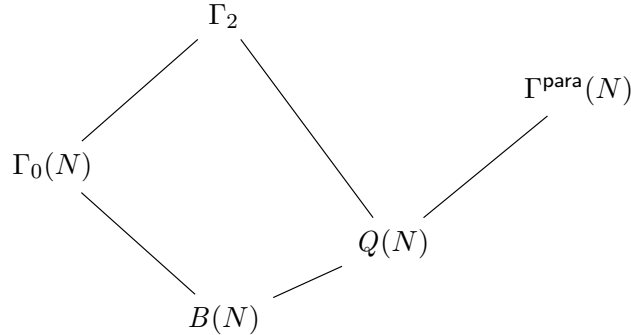


Figura 1: Diagrama de las relaciones de inclusión entre los subgrupos de congruencia.

Los subgrupos de congruencia admiten una noción de forma modular; la definición es análoga a la de formas de Siegel para el grupo Γ_g . Si $k \in \mathbb{Z}$, el *operador de peso k* está definido por:

$$F[M]_k(Z) = \lambda(M)^{kg/2} \det(CZ + D)^{-k} F(M(Z)) , \quad (15)$$

para $F : \mathfrak{H}_g \rightarrow \mathbb{C}$, $Z \in \mathfrak{H}_g$ y $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})^+$.⁵ Si K es un subgrupo de congruencia, una *forma modular (de Siegel) de peso k y género g con respecto a K* es una función holomorfa $F : \mathfrak{H}_g \rightarrow \mathbb{C}$ que verifica:

$$F[M]_k = F(Z) , \quad (16)$$

para toda $M \in K$.⁶ Al espacio de formas modulares que verifican (16) lo denotamos $\mathcal{M}_k(K)$. Usando el operador de peso k , podemos también definir formas cuspidales [2, Lemma 1.29]: una forma $F \in \mathcal{M}_k(K)$ es *cuspidal*, si para toda $M \in \Gamma_g$,

$$\Phi F[M]_k = 0 . \quad (17)$$

Toda forma modular F admite un desarrollo en serie de Fourier. Para describirlo introducimos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} V_g(\mathbb{Q}) &= \left\{ X \in \mathrm{Mat}_{g \times g}(\mathbb{Q}) : {}^t X = X \right\} \\ P_{g,\mathrm{semi}}(\mathbb{Q}) &= \left\{ X \in V_g(\mathbb{Q}) : X \geq 0 \right\} \\ P_g(\mathbb{Q}) &= \left\{ X \in V_g(\mathbb{Q}) : X > 0 \right\} \\ \mathcal{X}_{g,\mathrm{semi}} &= \left\{ T \in P_{g,\mathrm{semi}}(\mathbb{Q}) : 2T \text{ es par} \right\} \\ \mathcal{X}_g &= \left\{ T \in P_g(\mathbb{Q}) : 2T \text{ es par} \right\} \\ n(X) &= \begin{bmatrix} I_g & X \\ & I_g \end{bmatrix} \quad (n : V_g(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Q})) \\ u(U) &= \begin{bmatrix} U & \\ & {}^t U^{-1} \end{bmatrix} \quad (u : \mathrm{GL}_g(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Q})) \end{aligned}$$

Las matrices simétricas constituyen un espacio vectorial, V_g ; las matrices definidas positivas y semidefinidas positivas, P_g y $P_{g,\mathrm{semi}}$ son conos en V_g . Los subconjuntos \mathcal{X}_g y $\mathcal{X}_{g,\mathrm{semi}}$ están conformados por aquellas matrices que representan formas cuadráticas enteras, definidas positivas y semidefinidas positivas, respectivamente; son retículos en los respectivos conos. Las aplicaciones $X \mapsto n(X)$ y $U \mapsto u(U)$ son morfismos de grupos.

Con esta notación, podemos expresar el desarrollo en serie de una forma de Siegel para Γ_g de la siguiente manera:

$$F(Z) = \sum_{T \in \mathcal{X}_{g,\mathrm{semi}}} a(T) e^{2\pi i \mathrm{Tr}(TZ)} ;$$

⁵ Es también común definir el operador de peso k de la siguiente manera:

$$F[M]_k(Z) = \lambda(M)^{kg - \frac{g(g+1)}{2}} \det(CZ + D)^{-k} F(M\langle Z \rangle) .$$

Ambas definiciones se relacionan por:

$$F[M]_k = \lambda(M)^{kg/2 - \frac{g(g+1)}{2}} F[M]_k .$$

Una diferencia entre ambas definiciones es que, vía (15), las matrices escalares actúan trivialmente.

⁶ Como con formas para Γ_g , si $g = 1$, el principio de Koecher no aplica y es necesario incluir una condición de regularidad.

si F es cuspidal, indexamos sobre \mathcal{X}_g . En general, si $F \in \mathcal{M}_k(K)$,

$$F(Z) = \sum_{T \in R^\vee \cap P_{g,\text{semi}}} a(T) e^{2\pi i \text{Tr}(TZ)}, \quad (18)$$

donde R^\vee denota el retículo dual con respecto a la forma traza en V_g del retículo

$$R := R(K) = \{X \in V_g : n(X) \in K\}.$$

Por ejemplo, si $g = 2$, con respecto a los subgrupos de congruencia mencionados,

- $R(\Gamma_0(N)) = V_2(\mathbb{Q}) \cap \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$ y $R^\vee \cap P_{2,\text{semi}} = \mathcal{X}_{2,\text{semi}}$;
- $R(Q(N)) = R(B(N)) = R(\Gamma_0(N))$;
- $R(\Gamma^{\text{para}}(N)) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c/N \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ y $R^\vee = \left\{ \begin{bmatrix} n & r/2 \\ r/2 & m \end{bmatrix} : n, r, m \in \mathbb{Z}, N|m \right\}$.

En este último caso, escribimos $\mathcal{X}_{2,\text{semi}}^N := R^\vee \cap P_{2,\text{semi}}$; es el conjunto de formas cuadráticas enteras semidefinidas positivas $nx^2 + rxy + my^2$ con $m \in N\mathbb{Z}$.

Las transformaciones $u(U)$ vinculan los varios coeficientes de Fourier. Si $F \in \mathcal{M}_k(K)$, entonces

$$a(T[U]) = \det(U)^k a(T), \quad (19)$$

para toda $U \in \text{GL}_g(\mathbb{Q})$ tal que $u(U) \in K$. Por ejemplo,

- $u(U) \in \Gamma_0(N)$, si y sólo si $U \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$;
- $u(U) \in \Gamma^{\text{para}}(N)$, si y sólo si $U \in \langle \Gamma_0(N), \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \rangle$.⁷

2 Operadores de Hecke y series L

2.1 El anillo de Hecke en abstracto

Sea G un grupo abstracto. Si $K \triangleleft \Delta \leq G$ son subgrupos de G con K normal en Δ , se define el anillo del grupo cociente $K \backslash \Delta$ como el \mathbb{Z} -módulo libre con base las coclases a derecha $K\delta \subset \Delta$ y el producto definido por

$$K\delta \cdot K\delta_1 = K\delta\delta_1.$$

En general, si K no es normal e incluso si Δ sólo es cerrado por el producto en G , es decir, $\Delta \cdot \Delta \subset \Delta$, existe el anillo de Hecke.

Dos subgrupos $H, K \leq G$ son *commensurables*, si la intersección $H \cap K$ es un subgrupo de índice finito en H y en K . La relación de dos grupos de ser commensurables es una relación de equivalencia y escribimos $H \approx K$ para indicar que H y K son commensurables. Si $K \leq G$, el subconjunto

$$\tilde{K} = \{g \in G : g^{-1}Kg \approx K\}$$

⁷ Aquí, $\Gamma_0(N)$ denota el subgrupo de congruencia de nivel N en $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$.

es un subgrupo de G que contiene a K . Si $H \approx K$, entonces $\tilde{H} = \tilde{K}$ y, en ese caso, si $g \in \tilde{H}$, entonces

$$HgK = \bigsqcup_i Hgk_i = \bigsqcup_j h_jgK ,$$

donde $\{k_i\}_i$ recorre un sistema de representantes de las coclases en $(K \cap g^{-1}Hg) \backslash K$ y $\{h_j\}_j$ recorre un sistema de representantes de las coclases en $H/(H \cap gKg^{-1})$. La conmensurabilidad implica que ambas uniones son finitas.

Dados un subgrupo $K \leq G$ y un subconjunto $\Delta \subset G$ que verifica $K \subset \Delta \subset \tilde{K}$, definimos $M := \mathbb{Z}[K \backslash \Delta]$ como el \mathbb{Z} -módulo libre con base las coclases a derecha Kg contenidas en Δ . Como Δ es cerrado por el producto, K permuta las coclases $Kg \subset \Delta$ y, por lo tanto, M es un K -módulo a derecha; el submódulo fijo por esta acción de K se denota M^K . Los elementos de M^K son combinaciones lineales finitas de coclases dobles: si $KgK = \bigsqcup_i Kg_i$, definimos

$$[KgK] = \sum_i Kg_i \in M^K . \quad (20)$$

Estos elementos son invariantes por K y, necesariamente, todo elemento invariante es una combinación lineal de ellos. Los elementos de M^K se combinan de manera natural: si $Kg'K = \bigsqcup_i Kg'_i$ y $Kg''K = \bigsqcup_j Kg''_j$,

$$[Kg'K] \cdot [Kg''K] = \sum_g c_g [KgK] , \quad (21)$$

donde $c_g := \#\{(i, j) : Kg'_i g''_j = Kg\}$. Extendiendo linealmente, (21) define una estructura de anillo en M^K ; éste es el *anillo de Hecke del par* (Δ, K) y se denota $\mathcal{H}(\Delta, K)$.

2.2 El anillo de Hecke del grupo paramodular

Si $M \in \mathbb{R}^\times \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q})^+$, el conjugado de un subgrupo de congruencia $\Gamma(N)$ por M contiene un subgrupo de congruencia. De esto se deduce que $\Gamma_g \approx M\Gamma_g M^{-1}$ para toda matriz M de este tipo. En general, si $K \leq \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})^+$ es un subgrupo conmensurable con Γ_g y $M \in \mathbb{R}^\times \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q})^+$ el conjugado MKM^{-1} también lo es, y si K contiene algún subgrupo principal de congruencia, el conjugado también.

Supongamos que $K \subset \mathrm{Mat}_{2g \times 2g}(\mathbb{Q})$. Definimos el *anillo de Hecke de K* como el anillo de dobles coclases $\mathcal{H}(\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q})^+, K)$. Las coclases dobles KMK , $M \in \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q})^+$ definen operadores en el espacio de formas modulares: si $KMK = \bigsqcup_i KM_i$, el *operador de doble coclase de peso k* está dado por:

$$F[KMK]_k = \sum_i F[M_i]_k . \quad (22)$$

Si $F \in \mathcal{M}_k(K)$, (22) define una forma modular de peso k con respecto a K ; si $F \in \mathcal{S}_k(K)$, entonces $F[KMK]_k \in \mathcal{S}_k(K)$. Dado que las matrices escalares actúan trivialmente vía (15), será suficiente considerar M en

$$\Delta = \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q})^+ \cap \mathrm{Mat}_{2g \times 2g}(\mathbb{Z}) .$$

Nos enfocamos en el caso de género $g = 2$ y en los subgrupos paramodulares $K = \Gamma^{\text{para}}(N) \subset \text{Sp}_4(\mathbb{Q})$. Escribimos $\mathcal{M}_k(N)$ y $\mathcal{S}_k(N)$ en lugar de $\mathcal{M}_k(\Gamma^{\text{para}}(N))$ y $\mathcal{S}_k(\Gamma^{\text{para}}(N))$, respectivamente. El álgebra de Hecke paramodular (clásica) de nivel N es

$$\mathcal{H}^{\text{para}}(N) := \mathcal{H}(\text{GSp}_4(\mathbb{Q})^+, \Gamma^{\text{para}}(N)) .$$

Este álgebra tiene una descripción local. Para cada primo introducimos los operadores

$$T_p F = F[\Gamma^{\text{para}}(N)\delta'_p\Gamma^{\text{para}}(N)]_k \quad \text{y} \quad T_{p^2} F = F[\Gamma^{\text{para}}(N)\delta'_{p^2}\Gamma^{\text{para}}(N)]_k . \quad (23)$$

donde

$$\delta'_p = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & p & \\ & & & p \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \delta'_{p^2} = \begin{bmatrix} p & & & \\ & 1 & & \\ & & p & \\ & & & p^2 \end{bmatrix} . \quad (24)$$

Para primos que dividen al nivel, necesitaremos operadores que den cuenta de las formas provenientes de niveles más bajos; necesitamos una teoría de formas viejas y formas nuevas. Nos basamos en [34, 35].

Involuciones de Atkin-Lehner globales Para cada primo $p \mid N$, si $p^j \parallel N$, elegimos $\gamma_{p,j} \in \Gamma_2$ que verifique:

$$\gamma_{p,j} \equiv \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & \end{bmatrix} \pmod{p^j} \quad \text{y} \quad \gamma_{p,j} \equiv \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \pmod{Np^{-j}}$$

y definimos

$$u_{p,j} = \gamma_{p,j} \begin{bmatrix} p^j & & & \\ & p^j & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} . \quad (25)$$

La matriz (25) está determinada módulo multiplicar por elementos del subgrupo principal de congruencia $\Gamma(N)$ a izquierda, normaliza $\Gamma^{\text{para}}(N)$ y verifica $p^{-j} u_{p,j}^2 \in \Gamma^{\text{para}}(N)$. El operador correspondiente a la coclase doble de $u_{p,j}$ se denomina *involución de Atkin-Lehner* y lo denotamos por $u_{p,j}$; no depende de la elección de $\gamma_{p,j}$. Dado que

$$\Gamma^{\text{para}}(N)u_{p,j}\Gamma^{\text{para}}(N) = \Gamma^{\text{para}}(N)u_{p,j} = u_{p,j}\Gamma^{\text{para}}(N) ,$$

si $F \in \mathcal{M}_k(N)$, entonces

$$u_{p,j} F = F[u_{p,j}]_k . \quad (26)$$

Además, $u_{p,j}^2 F = F$, de lo que se deduce que los espacios $\mathcal{M}_k(N)$ y $\mathcal{S}_k(N)$ se descomponen como suma directa de autoespacios para $u_{p,j}$, correspondientes a los autovalores ± 1 . Notamos que, aunque la notación no lo refleje, el operador $u_{p,j}$ y la matriz $u_{p,j}$ dependen tanto de p como del nivel N .

Operadores de subida de nivel globales Dado $p \mid N$, elegimos la matriz

$$\eta_p = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & p^{-1} & & \\ & & 1 & \\ & & & p \end{bmatrix} \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Q})$$

y definimos, para $F \in \mathcal{M}_k(N)$,⁸

$$\eta_p F = F[\eta_p^{-1}]_k. \quad (27)$$

Dado que $\eta_p \Gamma^{\mathrm{para}}(N) \eta_p^{-1} \supset \Gamma^{\mathrm{para}}(Np^2)$, se cumple que $\eta_p F \in \mathcal{M}_k(Np^2)$. Los operadores η_p y $u_{p,j}$ conmutan:

$$u_{p,j+2} \circ \eta_p = \eta_p \circ u_{p,j}. \quad (28)$$

Para subir de a una la potencia del primo p , se define

$$\theta_p F = \sum_{\gamma \in \Gamma_0(p) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} F \left[\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & p^{-1} & \\ & & & p^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ & & 1 \end{bmatrix} \right]_k \quad \left(\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right). \quad (29)$$

Se comprueba que $\theta_p F$ es una forma de nivel Np , que es cuspidal, si F lo es. El *dual* de θ_p es

$$\theta'_p = u_{p,j+1} \circ \theta_p \circ u_{p,j}.$$

En términos del operador de peso k ,

$$\theta'_p F = \eta_p F + \sum_{c \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} F \left[\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & cp^{-1}N^{-1} \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \right]_k. \quad (30)$$

Estos tres operadores, η_p , θ_p y θ'_p , conmutan entre sí y tienen análogos actuando en formas automorfas. En particular, para distintos primos, los operadores conmutan. Si \mathcal{A} es el álgebra de operadores en $\mathcal{M}_k(\Gamma^{\mathrm{para}}) := \bigoplus_N \mathcal{M}_k(N)$ generada por estos operadores para todo primo p , entonces \mathcal{A} es un álgebra conmutativa; si $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{A}$ es el ideal que generan, definimos:

$$\mathcal{M}_k(\Gamma^{\mathrm{para}})^{\mathrm{old}} = \mathcal{I} \mathcal{M}_k(\Gamma^{\mathrm{para}}) \quad \text{y} \quad \mathcal{M}_k(N)^{\mathrm{old}} = \mathcal{M}_k(\Gamma^{\mathrm{para}})^{\mathrm{old}} \cap \mathcal{M}_k(N).$$

El *espacio de formas viejas* con respecto al grupo paramodular $\Gamma^{\mathrm{para}}(N)$ es el subespacio de formas cuspidales:

$$\mathcal{S}_k(N)^{\mathrm{old}} = \mathcal{S}_k(N) \cap \mathcal{M}_k(N)^{\mathrm{old}}.$$

⁸ La razón de usar el inverso, es la compatibilidad con formas automorfas.

2.3 Formas nuevas

Dadas $G \in \mathcal{M}_k(N)$ y $F \in \mathcal{S}_k(N)$, la integral

$$\int_{\Gamma^{\text{para}}(N) \backslash \mathfrak{H}_2} F(Z) \overline{G(Z)} \det(Y)^{k-3} dX dY \quad (31)$$

converge y define un producto interno (*Producto interno de Petersson*) en el espacio de formas cuspidales. El *espacio de formas nuevas* con respecto al grupo paramodular es el complemento de $\mathcal{S}_k(N)^{\text{old}}$ con respecto al producto interno de Petersson; lo denotamos $\mathcal{S}_k(N)^{\text{new}}$. El espacio de formas nuevas también está caracterizado como el núcleo de ciertos operadores [41, Remark 3.3.11].

Una *autoforma de Hecke* es una forma en el espacio de formas nuevas que es autofunción para los operadores T_p, T_{p^2} para todo p . Si F es una autofunción para los operadores T_q ($q = p$ y $q = p^2$ coprimo con el nivel) y $T_q F = \lambda_q F$, asociamos a F el factor L local definido por:

$$L_p(F, x)^{-1} = 1 - p^{-3/2} \lambda_p x + (p^{-2} \lambda_{p^2} + 1 + p^{-2}) x^2 - p^{-3/2} \lambda_p x^3 + x^4. \quad (32)$$

Si F es, además, una autofunción para los operadores $u_{p,j}$ (p que divide al nivel) y $u_{p,j} F = \varepsilon_p F$, entonces también se define un factor en p . El grado de este factor es menor que 4, pero la fórmula exacta depende del tipo de la representación automorfa asociada a F . Si F es una autoforma de Hecke, la *función L spin* asociada a F es

$$L(F, s) = L(F, \text{spin}, s) = \prod_p L_p(F, p^{-s}).$$

En el caso que nos interesará, el factor L local en un primo p que divide *exactamente* al nivel está dado por

$$L_p(F, x)^{-1} = 1 - p^{-3/2} (\lambda_p + \varepsilon_p) x + (p^{-2} \lambda_{p^2} + 1) x^2 + \varepsilon_p p^{-1/2} x^3. \quad (33)$$

Si $p^2 \mid N$, el factor también se conoce [35, Thm. 7.5.3].⁹

3 La conjetura de Böcherer paramodular

3.1 La conjetura para formas de Siegel

Si $F \in \mathcal{S}_k(\Gamma_2)$, sabemos que F admite una expansión de Fourier $F = \sum_{T \in \mathcal{X}_2} a(F; T) q^T$, donde $q^T = e^{2\pi i \text{Tr}(TZ)}$ y T recorre las matrices $T = \begin{bmatrix} n & r/2 \\ r/2 & m \end{bmatrix}$ con $n, m, r \in \mathbb{Z}$, $n, m > 0$ y $\text{disc}(T) = r^2 - 4mn < 0$. Sabemos, también, que los coeficientes de Fourier $a(F; T)$ satisfacen la relación (11) y que, en particular, $a(F; T)$ sólo depende de la órbita de T

⁹ Asumiendo que la representación asociada, $\pi_{F,p}$, es *genérica*, es decir, admite un modelo de Whittaker.

respecto de la acción $T \mapsto T[U]$, $U \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. A cada discriminante fundamental $D < 0$, le asociamos la suma

$$R(F; D) := \sum_{\substack{T/\sim \\ \mathrm{disc}(F)=D}} a(F; T) . \quad (34)$$

En [4], Böcherer conjeturó una conexión general entre sumas de coeficientes de Fourier y los valores centrales de una función L asociada a formas de Siegel, demostrándolo en el caso particular de lifts de Saito-Kurokawa.

Teorema I.1 ([4]). *Sea $F \in \mathcal{S}_k(\Gamma_2)$ una autoforma de Hecke de peso par. Dado un discriminante fundamental $D < 0$, sea $R(F; D)$ la suma (34). Si F es un lift de Saito-Kurokawa, entonces, para cierta constante c_F que sólo depende de F , se cumple*

$$|R(F; D)|^2 = c_F w(D)^2 |D|^{k-1} L(F \otimes \chi_D, 1/2) . \quad (35)$$

En (35), $w(D)$ denota la cantidad de raíces de la unidad en el cuerpo cuadrático imaginario $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $\chi_D = \left(\frac{D}{\cdot}\right)$ denota el símbolo de Kronecker en D y $L(F \otimes \chi_D, s)$ es la función L de F torcida por el carácter χ_D , es decir, si $L(F, s) = \sum_{n \geq 1} c(n) n^{-s}$,

$$L(F \otimes \chi_D, s) = \sum_{n \geq 1} \chi_D(n) c(n) n^{-s} . \quad (36)$$

El problema de determinar la validez de (35) para formas ortogonales al espacio de lifts fue resuelto finalmente en [14]. La dificultad del problema radicaba en parte en determinar un valor preciso para la constante c_F .

Teorema I.2 ([14, Thm. 2]). *Sea $F \in \mathcal{S}_k(\Gamma_2)$ una autoforma de Hecke de peso par. Dado un discriminante fundamental $D < 0$, sea $R(F; D)$ la suma (34). Entonces, si F no es un lift de Saito-Kurokawa, se cumple (35) con*

$$c_F = \frac{2^{2k-4} \pi^{2k+1}}{(2k-2)!} \frac{L(F, 1/2)}{L_{\mathrm{fin}}(\pi_F, \mathrm{Ad}, 1)} \langle F, F \rangle . \quad (37)$$

En (37), $\langle F, F \rangle$ denota el cuadrado de la norma de F respecto del producto interno de Petersson y $L(\pi_F, \mathrm{Ad}, s)$ es la función L adjunta.

Observación I.3. Una consecuencia de (37) es que $c_F = 0 \Leftrightarrow L(F, 1/2) = 0$.

3.2 Valores centrales de funciones L de formas paramodulares

El enunciado del Teorema I.2 se puede generalizar de varias maneras. En [9], se estudia el problema en el contexto de formas de nivel libre de cuadrados para el subgrupo de Siegel $\Gamma_0(N)$. El Teorema I.4 es un resultado en esta dirección.

Teorema I.4 ([9, Thm. 1.13]). *Sea $N \geq 1$ un entero impar libre de cuadrados y sea $F \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$ una autoforma de Hecke de peso $k > 2$ que no es un lift de Saito-Kurokawa. Si el discriminante fundamental $D < 0$ cumple $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$ para todo primo $p \mid N$, entonces vale (35) con*

$$c_F = \frac{2^{2k-s} \pi^{2k+1}}{(2k-2)!} \frac{L(F, 1/2)}{L_{\text{fin}}(\pi_F, \text{Ad}, 1)} \langle F, F \rangle \prod_{p \mid N} J_p .$$

Observación I.5. El exponente s es igual a 4 o 5 y los factores locales J_p son conocidos en función de los tipos de representaciones locales $\pi_{F,p}$; en algunos casos, pueden ser nulos. La condición $k > 2$ significa que la parte arquimedea de la representación automorfa asociada a F pertenece a la serie discreta y ésta es una de las condiciones necesarias para poder aplicar los resultados de [14].

Nuestro objetivo es estudiar el problema cuando cambiamos el grupo modular Γ_2 por un subgrupo paramodular $\Gamma^{\text{para}}(N)$. Para empezar, la serie de Fourier de $F \in \mathcal{S}_k(\Gamma^{\text{para}}(N))$ está, ahora, indexada por matrices $T \in \mathcal{X}_2^N$ y los coeficientes $a(F; T)$ están relacionados por (19). En particular, $a(F; T[U]) = a(F; T)$, si $U \in \Gamma_0(N)$. Teniendo esto en cuenta, introducimos, para un discriminante fundamental $D < 0$ y una forma F , el promedio

$$A_F(D) := \frac{1}{2} \sum_{\substack{T/\sim \\ \text{disc}(T)=D}} \frac{a(F; T)}{\varepsilon(T)} , \quad (38)$$

donde $T \sim T_1$, si existe $U \in \Gamma_0(N)$ tal que $T = T_1[U]$ y

$$\varepsilon(T) = \#\{U \in \Gamma_0(N)/\{\pm 1\} : T[U] = T\} .$$

Por otra parte, al igual que con formas de Siegel, si F es una autoforma de Hecke, podemos considerar las series $L(L(F \otimes \chi_D, s))$, definidas como en (36). Para formas paramodulares de nivel primo, la relación conjetural entre los promedios $A_F(D)$ y los valores centrales de funciones L es la siguiente.

Conjetura I.6 (Conjetura de Böcherer paramodular [37],[38, Conjecture A]). *Sea $F \in \mathcal{S}_k(\Gamma^{\text{para}}(p))^+$ una autoforma de Hecke de peso par, nivel primo y autovalor +1 con respecto a la involución de Atkin-Lehner. Si $D < 0$ es un discriminante fundamental, entonces*

$$* A_F(D)^2 = c_F |D|^{k-1} L(F \otimes \chi_D, 1/2) , \quad (39)$$

donde $c_F \geq 0$ es una constante independiente de D y $*$ = 1 o $*$ = 2, si $p \nmid D$ o $p \mid D$, respectivamente. Además,

- si F es un lift de Gritsenko, $c_F > 0$;
- si F no es un lift de Gritsenko, $c_F = 0 \Leftrightarrow L(F, 1/2) = 0$.

El resultado para lifts fue demostrado en [37] y el caso de autoformas que no son lifts fue estudiado en [37, 38], proporcionando evidencia computacional a favor de (39).

Observación I.7. La evidencia a favor de la Conjetura I.6 es indirecta. Es computacionalmente muy costoso calcular suficientes autovalores de Hecke como para demostrar (39) para una forma F particular. Lo que se puede hacer –si se trata de explorar– es apelar a la Conjetura de paramodularidad [7, 8] y estudiar la serie L de Hasse-Weil de una superficie abeliana asociada a F , como sustituto de la serie L de la forma paramodular; esto último es mucho más manejable, al tratarse de contar puntos sobre cuerpos finitos.

Se puede demostrar (ver [37, § 4] o [38, Lemma 2.1]) que, si $F \in \mathcal{S}_k(\Gamma^{\text{para}}(p))^-$ es una forma nueva con autovalor -1 para Atkin-Lehner,¹⁰ entonces $A_F(D) = 0$ y el lado izquierdo en (39) es automáticamente cero. En cuanto al lado derecho, si $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$, entonces el signo de la ecuación funcional pasa a ser -1 y $L(F \otimes \chi_D, 1/2) = 0$,¹¹ con lo cual, (39) es trivialmente cierta, en este caso. Si, en cambio, $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$, entonces $A_F(D) = 0$, trivialmente (no hay formas de discriminante D en \mathcal{X}_2^p). Sin embargo, $L(F \otimes \chi_D, 1/2)$ podría no ser cero [37, § 4].

Estas consideraciones condujeron [38] a una versión de la Conjetura I.6 que no especifica el signo de Atkin-Lehner. Para formularla, serán necesarias algunas definiciones adicionales. Dada $T = \begin{bmatrix} n & r/2 \\ r/2 & m \end{bmatrix} \in \mathcal{X}_2^N$, notemos que $\text{disc}(T) \equiv r^2 \pmod{4N}$. Fijados N y D , definimos conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{N,D} &= \{T \in \mathcal{X}_2^N : \text{disc}(T) = D\} , \\ R_{N,D} &= \{\rho \pmod{2N} : \rho^2 \equiv D \pmod{4N}\} \quad \text{y} \\ \mathcal{Q}_{N,D,\rho} &= \{T = \begin{bmatrix} n & r/2 \\ r/2 & m \end{bmatrix} \in \mathcal{Q}_{N,D} : r \equiv \rho \pmod{2N}\} . \end{aligned}$$

Se verifica que

$$\mathcal{Q}_{N,D} = \bigsqcup_{\rho \in R_{N,D}} \mathcal{Q}_{N,D,\rho} .$$

Para cada discriminante fundamental l tal que $l \mid D$ y $D/l \equiv 0, 1 \pmod{4}$, definimos un carácter de género ψ_l : si $T \in \mathcal{Q}_{N,D}$,

$$\psi_l(T) = \begin{cases} \left(\frac{l}{x}\right) & , \text{ si } T \text{ representa un entero } x \text{ coprimo con } l , \\ 0 & , \text{ si no.} \end{cases} \quad (40)$$

¹⁰ En este caso, el signo de la ecuación funcional coincide con el autovalor de Atkin-Lehner.

¹¹ El signo cambia por $\left(\frac{D}{p}\right)$ [38, Lemma 1.1].

A cada discriminante l como arriba, le asociamos el siguiente promedio refinado de los coeficientes de Fourier de F :

$$B_{l,F}(D, \rho) = 2^{\nu_N(l:D/l)} \sum_{T \in \mathcal{Q}_{N,D,\rho}/\Gamma_0(N)} \psi_l(T) \frac{a(F;T)}{\varepsilon(T)}, \quad (41)$$

donde $\nu_N(x) = \#\{p : \text{primo}, p \mid (N : x)\}$. El valor absoluto $|B_{l,F}(D, \rho)|$ no depende de ρ , con lo que

$$B_{l,F}(D) := |B_{l,F}(D, \rho)| \quad (42)$$

está bien definido. La gracia de (42) es la flexibilidad de contar con el discriminante auxiliar l ; si D no es un cuadrado módulo $4N$, entonces $B_{l,F}(D) = 0$, pero, dado un discriminante fundamental d , siempre es posible hallar l tal que $D = ld$ sea un cuadrado módulo $4N$. Los promedios $2A_F(D)$ se recuperan eligiendo $l = 1$ y sumando sobre $\rho \in R_{N,D}$.

Conjetura I.8 ([38, Conjecture B]). *Sea N un entero libre de cuadrados y sea $F \in \mathcal{S}_k(\Gamma^{\text{para}}(N))$ una autoforma de Hecke. Dados discriminantes fundamentales l, d tales que $ld < 0$ y ld es un cuadrado módulo $4N$, sea $B_{l,F}(ld)$ la suma (42). Entonces, si F no es un lift de Gritsenko,*

$$B_{l,F}(ld)^2 = c_{l,F} 2^{\nu_N(d)} |d|^{k-1} L(F \otimes \chi_d, 1/2), \quad (43)$$

donde $c_{l,F} \geq 0$ es independiente de d . Además, $c_{l,F} = 0 \Leftrightarrow L(F \otimes \chi_l, 1/2) = 0$.

En cuanto al caso de lifts, vale lo siguiente.

Teorema I.9 ([38, Thm. 4.1]). *Sea N un entero libre de cuadrados y sea $F \in \mathcal{S}_k(\Gamma^{\text{para}}(N))$ una autoforma de Hecke. Dado un discriminante fundamental $D < 0$ tal que D es un cuadrado módulo $4N$, sea $B_F(D) = B_{1,F}(D)$ la suma (42) con $l = 1$. Entonces, si F es un lift de Gritsenko,*

$$B_F(D)^2 = c_F 2^{\nu_N(D)} |D|^{k-1} L(F \otimes \chi_D, 1/2), \quad (44)$$

donde $c_F > 0$ es una constante positiva independiente de D .

Para terminar, mencionamos una versión de la Conjetura I.8 en donde se especifica cómo debería depender el valor de $c_{l,F}$ de la forma F y del parámetro l .

Conjetura I.10 ([38, Main Conjecture]). *Sea N un entero libre de cuadrados y sea $F \in \mathcal{S}_k(\Gamma^{\text{para}}(N))$ una autoforma de Hecke. Dados discriminantes fundamentales l, d tales que $ld < 0$ y ld es un cuadrado módulo $4N$, sea $B_{l,F}(ld)$ la suma (42). Entonces, si F no es un lift de Gritsenko,*

$$B_{l,F}(ld)^2 = k_F \left\{ 2^{\nu_N(l)} |l|^{k-1} L(F \otimes \chi_l, 1/2) \right\} \left\{ 2^{\nu_N(d)} |d|^{k-1} L(F \otimes \chi_d, 1/2) \right\}, \quad (45)$$

donde $k_F > 0$ es una constante positiva independiente de l y de d .

Parte II

Modelos de Bessel

4 Formas de Siegel como formas automorfas

4.1 La función adélica asociada a una forma paramodular

Una forma paramodular de peso k y nivel N es una función holomorfa $F : \mathfrak{H}_2 \rightarrow \mathbb{C}$ que verifica

$$F[M]_k(Z) = F(Z) \quad (Z \in \mathfrak{H}_2), \quad (46)$$

para toda $M \in \Gamma^{\text{para}}(N)$, donde

$$F[M]_k(Z) = \lambda(M)^k j(M, Z)^{-k} F(M\langle Z \rangle) \quad (j(M, Z) = \det(CZ + D)). \quad (47)$$

A una forma modular F asociamos una función adélica $\phi_F : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$. Las propiedades de invarianza y de regularidad de F se traducen en propiedades de la función asociada ϕ_F .

Denotamos por $\text{GL}(4)$ el grupo de matrices invertibles de tamaño 4×4 y por J el elemento

$$J = \begin{bmatrix} & I_2 \\ -I_2 & \end{bmatrix}.$$

Escribimos G para denota el grupo algebraico $\text{GSp}(4)$ que, en un anillo conmutativo R , definimos por:

$$\text{GSp}(4, R) = \left\{ g \in \text{GL}(4, R) : gJ^t g = \lambda(g)J, \lambda(g) \in R^\times \right\}.$$

Necesitaremos introducir grupos locales análogos de los subgrupos de congruencia. Si F es un cuerpo local no arquimediano, \mathfrak{o} su anillo de enteros y \mathfrak{p} su ideal maximal, definimos el *subgrupo paramodular de nivel \mathfrak{p}^n* (o, simplemente, *de nivel n*) como

$$K(\mathfrak{p}^n) = \left\{ g \in G(F) : g \in \begin{bmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{p}^n & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{p}^{-n} \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{p}^n & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p}^n & \mathfrak{p}^n & \mathfrak{p}^n & \mathfrak{o} \end{bmatrix}, \lambda(g) \in \mathfrak{o}^\times \right\}.$$

Los grupos $K(\mathfrak{p}^n)$ son compactos. Si $n = 0$, entonces el grupo paramodular coincide con

$$G(\mathfrak{o}) = \left\{ g \in G(F) : g \in \begin{bmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \end{bmatrix}, \lambda(g) \in \mathfrak{o}^\times \right\}.$$

La relación entre estos grupos y el grupo paramodular es:

$$\Gamma^{\text{para}}(N) = G(\mathbb{Q}) \cap \left(G(\mathbb{R})^+ \prod_p K(p^{v_p} \mathbb{Z}_p) \right), \quad (48)$$

si v_p denota la valuación de N en p . Definimos $K_N = \prod_p K(p^{v_p}\mathbb{Z}_p)$. Ahora bien, por aproximación fuerte para $\mathrm{Sp}(4)$ [25] y el hecho de que $\lambda : K(p^{v_p}\mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ es sobreyectivo para todo primo no arquimediano (y que $\lambda = -1$ tiene preimagen en $G(\mathbb{Q})$), el grupo $G(\mathbb{A})$ se descompone de la siguiente manera:

$$G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{Q}) G(\mathbb{R})^+ K_N . \quad (49)$$

Por otro lado, la aplicación $h \in G(\mathbb{R})^+ \mapsto h\langle i I_2 \rangle$ induce una correspondencia

$$\mathfrak{H}_2 \simeq G(\mathbb{R})^+ / (\mathbb{R}^\times U) ,$$

donde $U \subset G(\mathbb{R})^+$ denota el estabilizador del punto $i I_2$.¹² Dada $F \in \mathcal{M}_k(N)$, definimos

$$\phi_F(\rho h \kappa) = F[h]_k(i I_2) \quad (\rho \in G(\mathbb{Q}), h \in G(\mathbb{R})^+, \kappa \in K_N) . \quad (50)$$

La relación entre F y su función asociada ϕ_F se resume de la siguiente manera.

Teorema II.1 ([3, Thm. 1]). *La aplicación $F \mapsto \phi_F$ definida por (50) es una isometría del espacio de formas cuspidales $\mathcal{S}_k(N)$ con respecto al grupo paramodular de nivel N y el subespacio de $L^2(Z(\mathbb{A})G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}))$ conformado por aquellas funciones continuas $\phi : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ que verifican:*

- $\phi(\rho g) = \phi(g)$, si $\rho \in G(\mathbb{Q})$;
- $\phi(g \kappa) = \phi(g)$, si $\kappa \in K_N$;
- $\phi(gu) = j(u, i I_2)^{-k} \phi(g)$, si $u \in U$;
- ϕ es suave como función en $G(\mathbb{R})^+$ y pertenece al núcleo de ciertos operadores diferenciales;
- ϕ es cuspidal.

4.2 Operadores locales

Las operaciones del lado clásico también tienen análogos del lado adélico. Sea p un primo.

El álgebra de Hecke local El subgrupo $K(p^n\mathbb{Z}_p)$ de $G(\mathbb{Q}_p)$ actúa en el espacio de funciones $f : G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathbb{C}$ por traslaciones. Aquellas funciones de soporte compacto e invariantes con respecto a traslaciones a izquierda y a derecha forman un álgebra con respecto al producto de convolución

$$(T * T')(x) = \int_{G(\mathbb{Q}_p)} T(xy^{-1}) T'(y) dy . \quad (51)$$

¹² Se puede ver que $U = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} \right\} \cap \mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$ y que es isomorfo a $\mathrm{U}(2)$, el grupo de matrices unitarias. En particular, es un grupo compacto.

(dy medida de Haar en $G(\mathbb{Q}_p)$). Este álgebra está generada por las funciones características de las dobles coclases $K(p^n\mathbb{Z}_p)yK(p^n\mathbb{Z}_p)$, variando $y \in G(\mathbb{Q}_p)$, y actúa naturalmente en funciones adélicas vía:

$$(T\phi)(g) = \int_{G(\mathbb{Q}_p)} T(y) \phi(gy) dy . \quad (52)$$

Si $K(p^n\mathbb{Z}_p)yK(p^n\mathbb{Z}_p) = \bigsqcup_i y_iK(p^n\mathbb{Z}_p)$ y T es la función característica de esta doble coclase, entonces, para ϕ invariante a derecha por $K(p^n\mathbb{Z}_p)$,

$$(T\phi)(g) = \sum_i \phi(gy_i) . \quad (53)$$

(dy elegida de manera que $K(p^n\mathbb{Z}_p)$ tenga volumen 1). El álgebra (51) es, simplemente, el álgebra de Hecke

$$\mathcal{H}_{p,n} := \mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p), K(p^n\mathbb{Z}_p)) .$$

Distinguimos dos elementos especiales en $\mathcal{H}_{p,n}$: si

$$\underline{\delta}_p = \begin{bmatrix} p & & & \\ & p & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \underline{\delta}_{p^2} = \begin{bmatrix} p & & & \\ & p^2 & & \\ & & p & \\ & & & 1 \end{bmatrix} ,$$

definimos

$$\begin{aligned} T_p &= \text{función característica de } K(p^n\mathbb{Z}_p) \underline{\delta}_p K(p^n\mathbb{Z}_p) \quad y \\ T_{p^2} &= \text{función característica de } K(p^n\mathbb{Z}_p) \underline{\delta}_{p^2} K(p^n\mathbb{Z}_p) . \end{aligned}$$

Denotamos los operadores correspondientes también por T_p y T_{p^2} .

Relación con el álgebra clásica Se puede ver que, por aproximación fuerte, para todo primo p y natural $n \geq 0$, existe una correspondencia entre dobles coclases

$$\Gamma^{\text{para}}(p^n) \backslash G(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])^+ / \Gamma^{\text{para}}(p^n) \simeq K(p^n\mathbb{Z}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p) / K(p^n\mathbb{Z}_p) ,$$

inducida por la inclusión de $G(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])^+$ en $G(\mathbb{Q}_p)$. Esta inclusión también induce una correspondencia a nivel de las coclases simples y, por lo tanto, determina un isomorfismo

$$\mathcal{H}(G(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])^+, \Gamma^{\text{para}}(p^n)) \simeq \mathcal{H}_{p,n} .$$

De manera similar, si $N \geq 1$, dado un múltiplo N_1 de N , la inclusión diagonal de $G(\mathbb{Z}[\frac{1}{N_1}])^+$ en $\prod_{p|N_1} G(\mathbb{Q}_p)$ induce una correspondencia entre coclases dobles (simples) en $G(\mathbb{Z}[\frac{1}{N_1}])^+$ respecto de $\Gamma^{\text{para}}(N)$ y coclases dobles (respectivamente, simples) en $\prod_{p|N_1} G(\mathbb{Q}_p)$ respecto de $\prod_{p|N_1, p^n||N} K(p^n\mathbb{Z}_p)$.¹³ Esta correspondencia determina un isomorfismo

$$\mathcal{H}(G(\mathbb{Z}[\frac{1}{N_1}])^+, \Gamma^{\text{para}}(N)) \simeq \mathcal{H}\left(\prod_{p|N_1} G(\mathbb{Q}_p), \prod_{\substack{p|N_1 \\ p^n||N}} K(p^n\mathbb{Z}_p)\right) = \bigotimes_{\substack{p|N_1 \\ p^n||N}} \mathcal{H}_{p,n}$$

¹³ Si $p | N_1$, pero $p \nmid N$, estamos tomando el compacto $G(\mathbb{Z}_p)$.

Entre un álgebra de Hecke de un lado y un producto tensorial (finito) de álgebras de Hecke locales, del otro. Tomando límite, se ve que queda determinado un isomorfismo

$$\mathcal{H}^{\text{para}}(N) = \mathcal{H}(G(\mathbb{Q})^+, \Gamma^{\text{para}}(N)) \simeq \bigotimes_{p^n || N} ' \mathcal{H}_{p,n} =: \mathcal{H}(N). \quad (54)$$

En particular, las acciones de $\mathcal{H}^{\text{para}}(N)$ en formas paramodulares y de $\mathcal{H}(N)$ en funciones adélicas son compatibles en el siguiente sentido. Sea

$$M' = \begin{bmatrix} {}^t D & -{}^t B \\ -{}^t C & {}^t A \end{bmatrix} = \lambda(M) M^{-1} \quad (M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}).$$

Entonces, si $K(p^n \mathbb{Z}_p)MK(p^n \mathbb{Z}_p) = \bigsqcup_i M_i K(p^n \mathbb{Z}_p)$ y T denota su función característica,

$$(T \phi_F)(h) = (T' F)[h]_k(i I_2) = \phi_{T' F}(h),$$

para toda $h \in G(\mathbb{R})^+$, donde T' denota la función característica de la coclase de M' . Se puede verificar que, con respecto a los operadores definidos en (23),

$$T_p \phi_F = \phi_{T_p F} \quad \text{y que} \quad T_{p^2} \phi_F = \phi_{T_{p^2} F}.$$

Observación II.2. Si $p \nmid N$, entonces el álgebra $\mathcal{H}_{p,0}$ ($n = 0$) es (isomorfa a) el álgebra de Hecke *no ramificada* $\mathcal{H}_p := \mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p), G(\mathbb{Z}_p))$.

Involución de Atkin-Lehner local Dado $n \geq 0$, definimos

$$u_{p,n} = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & p^n & & \\ p^n & & & \end{bmatrix} \in G(\mathbb{Q}_p).$$

Si $p^n || N$, introducimos el *operador de Atkin-Lehner (en p)*, actuando en funciones $\phi : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ invariantes a derecha por el subgrupo K_N , vía

$$u_{p,n} \phi(g) = \phi(g u_{p,n}).$$

Esta definición es compatible con (26):

$$u_{p,n} \phi_F = \phi_{u_{p,n} F}.$$

Operadores de subida de nivel locales Para introducir los operadores de subida de nivel, definimos matrices en $G(\mathbb{Q}_p)$:

$$\eta_p = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & p^{-1} & & \\ & & 1 & \\ & & & p \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \delta'_p = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & p & \\ & & & p \end{bmatrix}$$

Los operadores locales correspondientes están dados por:

$$\begin{aligned}\eta_p \phi(g) &= \phi(g \underline{\eta}_p) , \\ \theta_p \phi(g) &= \sum_{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p) / \Gamma_0(p)} \phi \left(g \begin{bmatrix} a & b & & \\ & 1 & & \\ c & & d & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta'_p \\ \\ \\ 1 \end{matrix} \right) , \\ \theta'_p \phi(g) &= \sum_{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p) / \Gamma_0(p)} \phi \left(g \begin{bmatrix} a & b & & \\ & 1 & & \\ c & & d & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta'_p \\ \\ \\ 1 \end{matrix} \right) = u_{p, n+1} \circ \theta_p \circ u_{p, n} \phi(g) .\end{aligned}$$

Aquí, $\Gamma_0(p) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p) : c \in p\mathbb{Z}_p \right\}$. Con estas definiciones,

$$\begin{aligned}\eta_p \phi_F &= \phi_{\eta_p F} , \\ \theta_p \phi_F &= \phi_{\theta_p F} \quad \text{y} \\ \theta'_p \phi_F &= \phi_{\theta'_p F} .\end{aligned}$$

4.3 La representación asociada a una forma paramodular

Sea, ahora, $F \in \mathcal{S}_k(N)$ una autoforma de Hecke¹⁴ y sea ϕ_F la función asociada por (50). Definimos V_F como el espacio de generado por los trasladados de ϕ_F :

$$g \mapsto \phi_F(gg_1) \quad (g_1 \in G(\mathbb{A})) .$$

y llamamos π_F a la correspondiente representación. La representación π_F se descompone como suma directa de finitas representaciones automorfas cuspidales irreducibles. Si π es una de dichas componentes irreducibles, entonces se factoriza como producto restringido $\pi = \bigotimes_p' \pi_p$, donde cada π_p es una representación irreducible admisible del grupo $G(\mathbb{Q}_p)$. Para p que no divide al nivel, π_p es *esférica*, es decir, admite un vector no nulo invariante por el compacto maximal $G(\mathbb{Z}_p)$, y, en consecuencia, su clase está determinada por sus parámetros de Satake (a su vez determinados por los autovalores de F con respecto a los operadores T_p y T_{p^2}).

5 Períodos de Bessel y su aplicación a la conjetura de Böcherer

5.1 El modelo de Bessel asociado a una representación

Un modelo de Bessel global para una representación automorfa consiste en un espacio de funciones adélicas. A continuación describimos cómo se definen estos espacios.

Sea $S = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$ una matriz simétrica y anisotrópica y sea $d = \mathrm{disc}(S) = b^2 - 4ac = -4 \det(S)$. En particular, d no es un cuadrado en \mathbb{Q} . Si $\xi =$

¹⁴ En particular, asumimos que F pertenece al espacio de formas nuevas.

$\begin{bmatrix} b/2 & c \\ -a & -b/2 \end{bmatrix}$, entonces $(2\xi)^2 = d$ y $\mathbb{Q}(\xi)$ es una extensión cuadrática de \mathbb{Q} que identificamos con $L := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ vía:

$$x + y\xi \mapsto x + y\frac{\sqrt{d}}{2}.$$

El subgrupo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ definido por

$$T_S(\mathbb{Q}) = \left\{ g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) : {}^t g S g = \det(g) S \right\}$$

coincide con el grupo $\mathbb{Q}(\xi)^\times$ y se identifica, entonces, con L^\times . Dada una \mathbb{Q} -álgebra R , definimos $T_S(R)$ de manera análoga. Podemos incluir $\mathrm{GL}(2, R)$ en $\mathrm{GSp}(4, R)$ de la siguiente manera:

$$g \mapsto \begin{bmatrix} g & \\ & {}^t \mathrm{adj}(g) \end{bmatrix},$$

donde $\mathrm{adj}(g) = \det(g) g^{-1}$. El subgrupo

$$N(R) = \left\{ n(X) = \begin{bmatrix} I_2 & X \\ & I_2 \end{bmatrix} : {}^t X = X \in \mathrm{Mat}_{2 \times 2}(R) \right\},$$

es normalizado por $T_S(R)$ y el producto $H(R) := T_S(R)N(R)$ es un subgrupo de $\mathrm{GSp}(4, R)$.

Por otro lado, elegimos un carácter aditivo no trivial $\psi : \mathbb{Q} \backslash \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ y definimos un carácter de $N(\mathbb{A})$ por

$$\theta_S(n(X)) = \psi(\mathrm{Tr}(SX)) = \psi(ax + by + cz) \quad \left(X = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \right).$$

Fijamos, también, un carácter $\Lambda : L^\times \backslash \mathbb{J}_L \rightarrow \mathbb{C}^\times$ y llamamos $\Lambda \otimes \theta_S$ al carácter de $H(\mathbb{A})$ definido por

$$(\Lambda \otimes \theta_S)(tn) = \Lambda(t) \theta_S(n).$$

Implícitamente, estamos identificando $T_S(\mathbb{Q})$ con L^\times y $T_S(\mathbb{A})$ con el grupo de idèles \mathbb{J}_L .

Supongamos fijados datos (S, Λ, ψ) y (π, V_π) , una representación automorfa cuspidal irreducible de $G(\mathbb{A})$ cuyo carácter central es trivial. Supongamos, además, que son compatibles, en el sentido de que $\Lambda|_{\mathbb{J}} = 1$.¹⁵

Definición II.3 ([36, § 2]). Decimos que la representación π admite una funcional de Bessel (de tipo (S, Λ, ψ)), si¹⁶

$$\mathrm{Hom}_H(V_\pi, \mathbb{C}_{\Lambda \otimes \theta_S}) \neq 0.$$

Una funcional de Bessel de tipo (S, Λ, ψ) para la representación π es un elemento no nulo de $\mathrm{Hom}_H(V_\pi, \mathbb{C}_{\Lambda \otimes \theta_S})$.

¹⁵ En general, debería coincidir con el carácter central de la representación.

¹⁶ Pensamos π restringida a $H(\mathbb{A})$ y el carácter $\Lambda \otimes \theta_S$ como representación unidimensional de $H(\mathbb{A})$.

Si B es una funcional de Bessel para π , definimos, para cada $\phi \in V_\pi$, una función $B_\phi : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ por:

$$B_\phi(g) = B(\pi(g)\phi) . \quad (55)$$

De esta manera, se obtiene un modelo de π que consiste en funciones $B : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ con la propiedad de que

$$B(hg) = (\Lambda \otimes \theta_S)(h) B(g) , \quad (56)$$

si $h \in H(\mathbb{A})$. El grupo $G(\mathbb{A})$ actúa por traslaciones y se verifica que $g \cdot B_\phi = B_{\pi(g)\phi}$.

Definición II.4 ([16, Def. 1.1]). Si $\phi \in V_\pi$, el *período de Bessel (global) de tipo (S, Λ, ψ)* de ϕ es el valor:¹⁷

$$B(\phi; \Lambda) = \int_{\mathbb{J}L \times \mathbb{J}L} \Lambda(t)^{-1} \int_{N(\mathbb{Q}) \backslash N(\mathbb{A})} \theta_S^{-1}(n) \phi(tn) dn dt . \quad (57)$$

La expresión $B(\phi; \Lambda)$ definida en (57), verifica

$$B(\pi(h)\phi; \Lambda) = (\Lambda \otimes \theta_S)(h) B(\phi; \Lambda) ,$$

para toda $h \in H(\mathbb{A})$. En particular, si definimos $B_\phi(g)$ como en (55), a partir de $B = B(-; \Lambda)$, explícitamente,

$$B_\phi(g) = \int_{\mathbb{J}L \times \mathbb{J}L} \Lambda(t)^{-1} \int_{N(\mathbb{Q}) \backslash N(\mathbb{A})} \theta_S^{-1}(n) \phi(tng) dn dt . \quad (58)$$

Los períodos de Bessel (57) se recuperan evaluando estas funciones en $g = 1$. Llamamos $\mathcal{B}(S, \Lambda, \psi)$ al espacio de funciones

$$\mathcal{B}(S, \Lambda, \psi) = \langle B_\phi : \phi \in V_\pi \rangle .$$

5.2 La demostración de la conjetura de Böcherer para formas de Siegel

Las conjeturas globales de Gan-Gross-Prasad [17, §§ 24–26] relacionan la anulación de períodos de Bessel asociados a una representación con la anulación del valor central de una serie L asociada. En el caso de $\mathrm{GSp}(4)/\mathbb{Q}$, la relación se puede expresar de la siguiente manera [9, Conjecture 1.9]. Una representación local se dice *genérica*, si admite un modelo de Whittaker [35, p. 34]. Denotamos por $\mathcal{AI}(\Lambda^{-1})$ la representación automorfa de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ que se obtiene por inducción automorfa a partir de Λ^{-1} como representación de $\mathbb{J}L$.

Conjetura II.5 (Caso particular de GGP). *Sea (π, V_π) una representación automorfa cuspidal de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A})$ con carácter central trivial y tal que las representaciones locales π_p son genéricas para casi todo p . Sean $d \in \mathbb{Q}^\times$ no un cuadrado, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ y $\Lambda : L^\times \backslash \mathbb{J}L \rightarrow \mathbb{C}^\times$ un carácter tal que $\Lambda|_{\mathbb{J}} = 1$. Si existe una forma automorfa $\phi \in V_\pi$ tal que $B(\phi; \Lambda) \neq 0$, entonces $L(\pi \times \mathcal{AI}(\Lambda^{-1}), 1/2) \neq 0$.*

¹⁷ La dependencia de los parámetros S y ψ se puede encontrar en [13]; allí se estudia el caso de los *períodos especiales*, es decir, $\Lambda = 1$.

En [27], Liu proporciona una versión refinada de las conjeturas; allí se enuncia una fórmula precisa que relaciona valores centrales con períodos de Bessel.

Conjetura II.6 ([27]). ¹⁸ Si π , d y Λ son como en la Conjetura II.5 y $\phi = \otimes_v \phi_v \in V_\pi$, entonces

$$\frac{|B(\phi; \Lambda)|^2}{\langle \phi, \phi \rangle} = \frac{C_T}{S_\pi} \frac{\zeta_{\mathbb{Q}}(2) \zeta_{\mathbb{Q}}(4) L(\pi \times \mathcal{AI}(\Lambda^{-1}), 1/2)}{L(\pi, \mathbf{Ad}, 1) L(\chi_d, 1)} \prod_v J_v(\phi_v) . \quad (59)$$

En (59), $\chi_d = \left(\frac{d}{\cdot}\right)$ denota el símbolo de Kronecker, $L(\pi, \mathbf{Ad}, s)$ la función L adjunta y $\zeta_{\mathbb{Q}}$ la función ζ completada. Además, S_π es una constante igual a 2 o a 4, dependiendo de cómo factorice $L(\pi, s)$, y $C_T > 0$ es un constante de normalización que depende de la elección de ciertas medidas. Localmente, elegimos medidas dn_v en $N(\mathbb{Q}_v)$ y dt_v en $T_S(\mathbb{Q}_v)$ de manera que dn_v sea la medida aditiva estándar y dt_v dé volumen 1 a $T_S(\mathbb{Z}_p) = T_S(\mathbb{Q}_p) \cap G(\mathbb{Z}_p)$ para casi todo p . Globalmente, dn y dt denotan las medidas de Tamagawa correspondientes:

$$dn = \prod_v dn_v \quad \text{y} \quad dt = C_T \prod_v dt_v .$$

Por último, los factores locales $J_v(\phi_v)$ se definen como

$$J_v(\phi_v) = \frac{L(\pi_v, \mathbf{Ad}, 1) L(\chi_{d,v}, 1)}{\zeta_{\mathbb{Q}_v}(2) \zeta_{\mathbb{Q}_v}(4) L(\pi_v \times \mathcal{AI}(\Lambda_v^{-1}), 1/2)} \int_{\mathbb{Q}_v^\times \backslash T_S(\mathbb{Q}_v)} \Lambda_v^{-1}(t_v) \int_{N(\mathbb{Q}_v)} \theta_S^{-1}(n_v) \frac{\langle \pi_v(t_v n_v) \phi_v, \phi_v \rangle}{\langle \phi_v, \phi_v \rangle} dn_v dt_v , \quad (60)$$

siempre y cuando la integral converja.¹⁹

En la situación de la Conjetura II.6, se cumple para casi todo lugar v , que $J_v(\phi_v) = 1$ [9, p. 256]. Cualitativamente, la relación entre los períodos de Bessel $B(\phi; \Lambda)$ y el valor central $L(\pi \times \mathcal{AI}(\Lambda^{-1}), 1/2)$ está determinado por unos pocos valores especiales (globales) y un producto de una cantidad finita de factores locales. El resultado, en un caso particular, fue demostrado en [14].

Observación II.7. Si $\Lambda = 1$ es el carácter trivial en $L^\times \backslash \mathbb{J}_J$, entonces

$$L(\pi \times \mathcal{AI}(1), s) = L(\pi, s) L(\pi \times \chi_d, s) .$$

Teorema II.8 ([14, Thm. 1]). Sean π y d como en la Conjetura II.5 (y $\Lambda = 1$). Si, además,

- π es temperada y π_∞ pertenece a la serie discreta y

¹⁸ Ver también [9, Conjecture 1.12].

¹⁹ En general, se define $J_v(\phi_v)$ “por regularización” [27, p. 138], [9, § 2].

- $B(\phi; 1)$ no es idénticamente cero en V_π ,²⁰

entonces, para $\phi = \otimes_v \phi_v \in V_\pi$,

$$\frac{|B(\phi; 1)|^2}{\langle \phi, \phi \rangle} = \frac{C_T}{S_\pi} \frac{\zeta_{\mathbb{Q}}(2) \zeta_{\mathbb{Q}}(4) L(\pi, 1/2) L(\pi \times \chi_d, 1/2)}{L(\pi, \text{Ad}, 1) L(\chi_d, 1)} \prod_v J_v(\phi_v) . \quad (61)$$

Dada una forma cuspidal de Siegel $F \in \mathcal{S}_k(\Gamma_2)$ y un discriminante fundamental, hemos definimos la suma

$$R(F; D) = \sum_{\substack{S/\sim \\ \text{disc}(S)=D}} a(F; S) .$$

A través de la correspondencia entre formas cuadráticas de discriminante D y el grupo de clases de ideales Cl_L ($L = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$),

$$a(F; S) = a(F; c) ,$$

donde $c \in \text{Cl}_L$ es la clase correspondiente a la clase de S . Dado un carácter $\Lambda : \text{Cl}_L \rightarrow \mathbb{C}$ definimos

$$R(F; \Lambda) = R(F; D, \Lambda) = \sum_c \Lambda^{-1}(c) a(F; c) . \quad (62)$$

Si pensamos en Λ como carácter en $L^\times \backslash \mathbb{J}_L$, se puede demostrar [12, pp. 208, 209] que

$$B(\phi_F; \Lambda) = e^{2\pi i \text{Tr}(S)} R(F; \Lambda) . \quad (63)$$

De esta manera, se completa la conexión entre la conjetura de Böcherer y GGP en su versión refinada por Liu.

Observación II.9. Generalizando la Observación II.7, si $\Lambda = \psi_l$ es un carácter de género como en (40), entonces

$$L(\pi \times \mathcal{AI}(\Lambda^{-1}), s) = L(\pi \times \chi_l, s) L(\pi \times \chi_d, s) .$$

Usando el Teorema II.8 y los cálculos de los *períodos locales* llevados a cabo en [9], Furusawa y Morimoto logran demostrar la conjetura de Böcherer para formas de Siegel que no son lifts. Éste es el Teorema I.2, mencionado en 3.1.

Teorema II.10 ([14, Thm. 2]). *Sea $F \in \mathcal{S}_k(\Gamma_2)$ una autoforma de Hecke de peso par y sea $D < 0$ un discriminante fundamental. Si F no es un lift de Saito-Kurokawa,*

$$\frac{|R(F; D)|^2}{\langle F, F \rangle} = 2^{2k-4} w(D)^2 |D|^{k-1} \frac{L(\pi_F, 1/2) L(\pi_F \times \chi_D, 1/2)}{L(\pi_F, \text{Ad}, 1)} . \quad (64)$$

²⁰ Es decir, si $\phi \mapsto B(\phi; 1)$ es una funcional de Bessel para π .

Observación II.11. Las hipótesis del Teorema II.10 no presuponen que $R(F; D) \neq 0$, con lo cual, es imprescindible garantizar que

$$R(F; D) = 0 \quad \text{implica} \quad L(\pi_F, 1/2) L(\pi_F \times \chi_D, 1/2) = 0 .$$

Esto también fue demostrado por Furusawa y Morimoto en [13, Thm. 5]. Allí, en realidad, demuestran la equivalencia de ambas afirmaciones. Sin embargo, como mencionan en su demostración del Teorema II.10, la otra dirección no es parte esencial del argumento; de hecho, se puede ver como una consecuencia del teorema.

A modo de referencia, transcribimos la demostración de [14].

Demostración. Eligiendo S adecuadamente,²¹ $R(F; D) = B(\phi_F; \Lambda)$, por (63). Como F no es un lift, π_F es temperada. Por otro lado,

$$R(F; D) \neq 0 \quad \text{si y sólo si} \quad L(\pi_F, 1/2) L(\pi_F \times \chi_D, 1/2) \neq 0 . \quad (65)$$

Si k es impar, $L(\pi_F, 1/2) = 0$ y, por (65), $R(F; D) = 0$ (también se puede ver de la definición de $R(F; D)$, sin apelar a la equivalencia). Si k es par y $R(F; D) = 0$, entonces (ahora sí), por (65), el producto de los valores centrales es cero y vale (64); si $R(F; D) \neq 0$, entonces, $\phi \mapsto B(\phi; \Lambda)$ es una funcional de Bessel para π_F y se verifican las condiciones del Teorema II.8. Finalmente, por (61) y los cálculos de los períodos locales $J_v(\phi_v)$ (para $v = p$ no arquimediano y para $v = \infty$) realizados en [9], se verifica (64). \square

El trabajo reciente [16] parece indicar que las restricciones impuestas en el Teorema II.8 se puedan levantar. Específicamente, esto querría decir que el Teorema I.4 es cierto, incluso para formas de peso $k = 2$.

5.3 Aplicación a la conjetura de Böcherer paramodular

Las ideas y los resultados que aparecen en la demostración del Teorema II.10 parecen poder acomodarse para enmarcar, también, la conjetura de Böcherer paramodular (I.6, I.8). Como mencionamos en § 3.2, llevando a cabo los cálculos locales correspondientes y teniendo en cuenta las restricciones propias del Teorema II.8, en [9] se demuestra la conjetura de Böcherer para el grupo de Siegel de nivel libre de cuadrados; algo similar parece ser posible en este caso.

Supongamos que $F \in \mathcal{S}_k(N)$ es una autoforma de Hecke. Sean ϕ_F la función adélica asociada y π_F la representación automorfa generada por ϕ_F . Suponemos, además, que π_F es irreducible. Asumiendo que esta representación está en las condiciones de II.8, para obtener una fórmula explícita que relacione los promedios $A_F(D)$ –definidos en (38)–, o bien $B_{l,F}(D)$, con valores centrales, deberíamos poder:

²¹ Si $D \equiv 0 \pmod{4}$, $S = \begin{bmatrix} -D & \\ & 1 \end{bmatrix}$; si $D \equiv 1 \pmod{4}$, $S = \begin{bmatrix} \frac{1-D}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$. Así, $\text{disc}(S) = D$ y $2S$ es par.

- relacionar $A_F(D)$ con un período de Bessel (posiblemente, $B(\phi_F; 1)$) y, más en general, $B_{l,F}(D)$ con $B(\phi_F; \Lambda)$, donde $\Lambda : \text{Cl}_L \rightarrow \mathbb{C}^\times$ es el carácter de género (40),
- determinar los valores de las constantes C_T y S_π y los valores $L(\pi_F, \text{Ad}, 1)$ y $L(\chi_D, 1)$, o, al menos, obtener información acerca de su anulación o su signo,
- calcular los períodos de Bessel locales $J_v(\phi_{F,v})$.

Este último punto involucra, por un lado, estudiar los períodos para $v = p$, un primo no arquimedeano, y, por otro, el período $J_\infty(\phi_{F,\infty})$. En cuanto a los $J_p(\phi_{F,p})$, independientemente de que estemos considerando el grupo paramodular, juegan un rol fundamental la clasificación de las representaciones locales de $\text{GSp}(4)$ [35, 40].

Observación II.12. Si $F \in \mathcal{S}_k(N)^{\text{new}}$ es una forma cuspidal en el espacio de formas nuevas con respecto al grupo paramodular de nivel $N > 1$ libre de cuadrados y $\pi = \pi_F$ es irreducible, entonces, por [35, Thm. 7.5.1],

- si $p \nmid N$, π_p admite, salvo múltiplos, un único vector fijo por el compacto maximal $\text{GSp}(4, \mathbb{Z}_p)$;
- si $p \mid N$,²² π_p admite, salvo múltiplos, un único vector fijo por el compacto maximal $K(p\mathbb{Z}_p)$ y no admite vectores fijos por $\text{GSp}(4, \mathbb{Z}_p)$.

De [35, Table A.13], se deduce que

- si $p \nmid N$, entonces π_p es de tipo I, IIb, IIIb, IVd, Vd o VIc;
- si $p \mid N$, entonces π_p es de tipo IIa, IVc, Vb/c o VIc.

Si asumimos, además, que π_p es *genérica* en p o que es *temperada* en p , entonces concluimos, de [35, Table A.1], que

- si $p \nmid N$, π_p es una representación de tipo I: es una representación irreducible definida por inducción parabólica a partir de un carácter de la forma

$$\begin{bmatrix} a & * & * \\ * & b & * \\ & c/a & * \\ & & c/b \end{bmatrix} \mapsto \chi_1(a) \chi_2(b) \sigma(c) \quad (a, b, c \in \mathbb{Q}_p^\times)$$

del *subgrupo parabólico de Borel* de $\text{GSp}(4, \mathbb{Q}_p)$;

- si $p \mid N$, π_p es una representación de tipo IIa: es una representación (irreducible) definida por inducción parabólica a partir de un carácter de la forma

$$\begin{bmatrix} A & * \\ \lambda & {}^t A^{-1} \end{bmatrix} \mapsto \chi(\det(A)) \text{St}(A) \sigma(\lambda) \quad (A \in \text{GL}(2, \mathbb{Q}_p), \lambda \in \mathbb{Q}_p^\times)$$

del *subgrupo parabólico de Siegel*.

²² Estamos asumiendo que divide exactamente.

En el primer caso, escribimos $\pi = \chi_1 \times \chi_2 \rtimes \sigma$; en el segundo, $\pi = \chi \text{St} \rtimes \sigma$.

Observación II.13. Si la forma F no es un lift, se espera que la representación (irreducible) asociada, π , satisfaga alguna de estas condiciones [9, pp. 258, 283].

En las tablas [35, Tables A.8, A.9] podemos encontrar los factores L correspondientes a cada representación expresados en términos de factores L asociados a los parámetros que inducen la representación;

- si $\pi = \chi_1 \times \chi_2 \rtimes \sigma$ es una representación de tipo I,

$$L(\pi, s) = L(\chi_1 \chi_2 \sigma, s) L(\sigma, s) L(\chi_1 \sigma, s) L(\chi_2 \sigma, s) , \quad (66)$$

- si $\pi = \chi \text{St} \rtimes \sigma$ es de tipo IIa,

$$L(\pi, s) = L(\chi^2 \sigma, s) L(\sigma, s) L(\nu^{1/2} \chi \sigma, s) , \quad (67)$$

donde $\nu = |\cdot|$.

Si π es una representación local, el *nivel paramodular de π* es el menor entero $n \geq 0$ tal que π posee un vector invariante por la acción de $K(p^n \mathbb{Z}_p)$; se denota por N_π . Si $F \in \mathcal{S}_k(N)$, el nivel paramodular de π_F es j , donde $p^j \parallel N$ es la potencia del primo p que divide exactamente a N . El siguiente resultado relaciona los factores L con los autovalores de los operadores de Hecke y de Atkin-Lehner para representaciones sobre cuerpos locales no arquimedeanos. Lo enunciamos en el caso $F = \mathbb{Q}_p$. Para $N_\pi = 0, 1$, éstos son precisamente los factores definidos en (32), si $p \nmid N$, y en (33), si $p \mid N$.

Teorema II.14 ([35, Thm. 7.5.3]). *Sea (π, V_π) una representación genérica, irreducible y admisible de $\text{GSp}(4, \mathbb{Q}_p)$ con carácter central trivial. Sea $W \in V_\pi$ una forma nueva –es decir, un vector no nulo, invariante por $K(p^{N_\pi} \mathbb{Z}_p)$ – que cumple*

$$T_p W = \lambda_p W \quad \text{y} \quad T_{p^2} W = \lambda_{p^2} W .$$

- Si $N_\pi = 0$,

$$L(\pi, s)^{-1} = 1 - p^{-3/2} \lambda_p p^{-s} + (p^{-2} \lambda_{p^2} + 1 + p^{-2}) p^{-2s} - p^{-3/2} \lambda_p p^{-3s} + p^{-4s} .$$

- Si $N_\pi = 1$ y W es autovector para el operador de Atkin-Lehner, con autovalor ε_p , entonces

$$L(\pi, s)^{-1} = 1 - p^{-3/2} (\lambda_p + \varepsilon_p) p^{-s} + (p^{-2} \lambda_{p^2} + 1) p^{-2s} + \varepsilon_p p^{-1/2} p^{-3s} .$$

- Si $N_\pi \geq 2$, entonces

$$L(\pi, s)^{-1} = 1 - p^{-3/2} \lambda_p p^{-s} + (p^{-2} \lambda_{p^2} + 1) p^{-2s} .$$

En [35, Tables A.12, A.14], encontramos la relación entre los autovalores de los operadores de Hecke y de Atkin-Lehner con los caracteres que inducen la representación. Para simplificar, suponemos que $F = \mathbb{Q}_p$, que π es de tipo I o IIa y *que los caracteres son no ramificados*. Entonces,

- si $\pi = \chi_1 \times \chi_2 \rtimes \sigma$ es de tipo I,

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= 1, \\ \lambda_p &= p^{3/2} \sigma(p) (1 + \chi_1(p) + \chi_2(p) + \chi_1(p) \chi_2(p)) \quad y \\ \lambda_{p^2} &= p^2 (\chi_1(p) + \chi_2(p) + \chi_1(p)^{-1} + \chi_2(p)^{-1} + 1 - p^{-2}), \end{aligned}$$

- si $\pi = \chi \text{St} \rtimes \sigma$ es de tipo IIa,

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= -(\chi\sigma)(p), \\ \lambda_p &= p^{3/2} (\sigma(p) + \sigma(p)^{-1}) + (p+1) (\chi\sigma)(p) \quad y \\ \lambda_{p^2} &= p^{3/2} (\chi(p) + \chi(p)^{-1}). \end{aligned}$$

Parte III

Cálculo de algunas integrales locales

6 Introducción

Para comodidad al momento de hacer las cuentas en las §§ 7 y 8, preferimos usar otra realización del grupo simpléctico. Dado que esto hace que las definiciones sean un poco distintas, empezamos fijando la notación redefiniendo algunos objetos, definiendo otros y haciendo algunas observaciones.

6.1 El grupo

Sea $\mathrm{GL}(4)$ el grupo de matrices invertibles de tamaño 4×4 y sea J el elemento:

$$J = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & \end{bmatrix}.$$

Escribimos G para denotar el grupo algebraico $\mathrm{GSp}(4)$, que, en un anillo conmutativo R , definimos como:

$$G(R) = \mathrm{GSp}(4, R) = \left\{ g \in \mathrm{GL}(4, R) : gJ {}^t g = \lambda(g) J, \lambda(g) \in R^\times \right\}.$$

Identificamos el grupo de matrices invertibles $\mathrm{GL}(2, R)$ con un subgrupo de $G(R)$ vía:

$$g \mapsto \begin{bmatrix} g' & \\ & {}^t \mathrm{adj}(g) \end{bmatrix}, \quad (68)$$

donde $g' = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} g \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$ y $\mathrm{adj}(g) = \det(g) g^{-1}$ es la matriz adjunta de g . Sea N el subgrupo de G dado por:

$$N(U) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & y & z \\ & 1 & x & y \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} : x, y, z \in U \right\},$$

donde U es un grupo abeliano.

6.2 El cuerpo base

Sea F un cuerpo local no arquimedeano de característica 0, \mathfrak{o} su anillo de enteros y \mathfrak{p} su ideal maximal. Fijamos un uniformizador $\pi \in \mathfrak{p}$ y escribimos $q := |\mathfrak{o}/\mathfrak{p}|$ para denotar el cardinal del cuerpo residual. Si $x \in F$, $v(x)$ y $|x|$ indican, respectivamente, la valuación y el valor absoluto normalizado de x . Fijamos también, de ahora en más, un carácter aditivo no trivial de F con conductor \mathfrak{o} , ψ .

6.3 La extensión cuadrática

Dados $a, b, c \in F$, sea $d = b^2 - 4ac$ y sea K la extensión de grado 2

$$K = \begin{cases} F(\sqrt{d}), & \text{si } d \notin (F^\times)^2, \\ F \times F, & \text{si } d \in (F^\times)^2. \end{cases}$$

La extensión K/F puede escindir o no, dependiendo de si d es o no un cuadrado en F^\times . En el caso de que no escinda, K/F es una extensión de cuerpos –la cual puede ser ramificada o no ramificada– y denotamos su anillo de enteros por \mathfrak{o}_K y elegimos un uniformizador π_K . Si K/F escinde, definimos $\pi_K = (\pi, 1)$. En ambos casos, la F -álgebra K se realiza como una subálgebra de $\text{Mat}_{2 \times 2}(F)$ y, de esta manera, K^\times se puede ver como un subgrupo de $G(F)$.

6.4 El toro

Para ver esto, sea

$$S = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$$

y sea $A = A_S$ el subconjunto de $\text{Mat}_{2 \times 2}(F)$ conformado por aquellas matrices g tales que ${}^t g S = S \text{adj}(g)$. Dado que a, b y c no son todos cero, A es una subálgebra de dimensión 2 cuyos elementos son de la forma

$$g = \begin{bmatrix} u + vb/2 & vc \\ -va & u - vb \end{bmatrix}.$$

Sea $\sqrt{d/4}$ una raíz cuadrada de $d/4$ en alguna clausura algebraica de F . Si d no es un cuadrado en F^\times , definimos $\Delta := \sqrt{d/4}$; en otro caso, si d es un cuadrado en F , definimos $\Delta := (-\sqrt{d/4}, \sqrt{d/4})$. La aplicación $g \mapsto x + y\Delta$, define un isomorfismo de F -álgebras entre A y K . Denotamos por $T = T_S$ el grupo de unidades de A . El isomorfismo $A \simeq K$ induce un isomorfismo $T \simeq K^\times$. Más en general, definimos, para cada F -álgebra R ,

$$A_S(R) = \left\{ g \in \text{Mat}_{2 \times 2}(R) : {}^t g S g = \det(g) S \right\}$$

y el grupo de elementos invertibles $T_S(R) := \text{GL}(2, R) \cap A_S(R)$. Incluimos T_S dentro de G vía (68).

Observación III.1. El subgrupo N de G es normalizado por T_S . Definimos un carácter θ_S de $N(F)$ por:

$$\theta_S \left(\begin{bmatrix} 1 & y & z \\ & 1 & y \\ & & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \right) = \psi(ax + by + cz) = \psi \left(\text{tr} \left(S \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \right) \right) \quad (69)$$

y notamos que $\theta_S(tnt^{-1}) = \theta_S(n)$, para toda $t \in T$ y toda $n \in N$.

Fijamos una matriz simétrica S , $d := b^2 - 4ac$ y K la correspondiente F -álgebra. Denotamos $\chi_{K/F}$ el carácter cuadrático asociado a la extensión:

$$\chi_{K/F}(\pi) = \begin{cases} -1, & \text{si } K/F \text{ es una extensión de cuerpos no ramificada,} \\ 0, & \text{si } K/F \text{ es una extensión de cuerpos ramificada,} \\ 1, & \text{si } K/F \text{ escinde.} \end{cases}$$

Escribiremos T y A en lugar de T_S y A_S , respectivamente. El hecho de que K escinda o no se ve reflejado en que lo mismo ocurra con el toro T , el cual consiste, o bien en los elementos no nulos del cuerpo K , o bien es isomorfo a $F^\times \times F^\times$. Por último, elegimos un carácter Λ de K^\times tal que $\Lambda|_{F^\times} = 1$.

Observación III.2. Dado Λ y $\theta = \theta_S$ como arriba, la aplicación $tn \mapsto \Lambda(t)\theta(n)$ define un carácter del *subgrupo de Bessel* TN de G , que denotamos $\Lambda \otimes \theta$. Dada una representación admisible irreducible (ρ, V) de $G(F)$, un *modelo de Bessel* para ρ es, si existe, una realización de V como subrepresentación del espacio de todas las funciones localmente constantes $f : G(F) \rightarrow \mathbb{C}$ que verifican la regla de transformación siguiente:

$$f(tng) = \Lambda(t)\theta(n)f(g),$$

para toda $g \in G(F)$, $t \in T(F)$ y $n \in N(F)$. Este modelo depende del carácter $\Lambda \otimes \theta$ o, equivalentemente, de Λ y de la matriz simétrica S . Para hacer cálculos explícitos, es necesario un modelo concreto. Diremos que *se satisfacen las hipótesis estándares*,²³ si se cumple lo siguiente:

- si $d \notin (F^\times)^2$, entonces $a, b, c \in \mathfrak{o}$ y, más aun, $c \in \mathfrak{o}^\times$;
- si $d \in (F^\times)^2$, entonces $a = c = 0$ y $b = 1$;
- en ambos casos, d genera el discriminante de K sobre F .

Eventualmente, asumiremos que se satisfacen estas hipótesis.

Dado que T está definido “sobre \mathfrak{o} ”, tiene sentido la noción de \mathfrak{o} -punto de T .

$$T(\mathfrak{o}) = T(F) \cap \mathrm{GL}(2, \mathfrak{o}) = \begin{cases} \mathfrak{o}_K^\times & , \text{ si } K = F(\sqrt{d}), \\ \mathfrak{o}^\times \times \mathfrak{o}^\times & , \text{ si } K = F \times F. \end{cases}$$

6.5 La integral

Sean dn y dt medidas de Haar en N y en T , respectivamente. Dada una función continua a valores complejos $\Phi : G(F) \rightarrow \mathbb{C}$ y un elemento $t \in T$, definimos la integral

$$J_0^{(k)}(\Phi, t) = \int_{N(\mathfrak{p}^{-k})} \Phi(nt)\theta_S(n)^{-1} dn, \quad (70)$$

²³ “the standard set of assumptions” [30, § 2].

para cada entero k . Asumimos que Φ es tal que estas integrales se estabilizan con k tendiendo a ∞ y definimos $J_0(\Phi, t)$ como su límite. Si suponemos, además, que Φ es $Z(F)$ -invariante, se define

$$J_0(\Phi, \Lambda) = \int_{F^\times \setminus T} J_0(\Phi, t) \Lambda(t)^{-1} dt, \quad (71)$$

siempre que la integral converja.

Deseamos calcular la integral (71) bajo ciertas condiciones sobre Φ y sobre el modelo (Λ, θ) . Para poder hacer esto, escribimos el cociente $F^\times \setminus T$ como una unión disjunta de coclases.

Observación III.3. El grupo F^\times se descompone como una unión disjunta de la siguiente manera: $F^\times = \bigsqcup_{m \in \mathbb{Z}} \pi^m \mathfrak{o}^\times$. Similarmente, cuando K es un cuerpo,

$$K^\times = \bigsqcup_{m \in \mathbb{Z}} \pi_K^m \mathfrak{o}_K^\times.$$

Si K/F es no ramificada, $\pi_K \in \pi \mathfrak{o}_K^\times$ y podemos elegir $\pi_K = \pi$; si K/F es ramificada, entonces $\pi_K \notin \pi \mathfrak{o}_K^\times$ pero $\pi_K^2 \in \pi \mathfrak{o}_K^\times$. Cuando K/F escinde, tenemos una descomposición análoga:

$$K^\times = \bigsqcup_{m, n \in \mathbb{Z}} (\pi^m, \pi^n) (\mathfrak{o}^\times \times \mathfrak{o}^\times).$$

Notamos que, puesto que en este caso habíamos definido $\pi_K = (\pi, 1)$,

$$(\pi^m, \pi^n) = \pi^n (\pi^{m-n}, 1) \in F^\times \pi_K^{m-n} (\mathfrak{o}^\times \times \mathfrak{o}^\times).$$

Sea $t_K \in T$ un elemento correspondiente a $\pi_K \in K$ a través del isomorfismo de § 6.4. Entonces,

$$F^\times \setminus T(F) = \begin{cases} \mathfrak{o}^\times \setminus T(\mathfrak{o}), & \text{si } K/F \text{ es no ramificada,} \\ \mathfrak{o}^\times \setminus T(\mathfrak{o}) \sqcup \mathfrak{o}^\times \setminus t_K T(\mathfrak{o}), & \text{si } K/F \text{ es ramificada,} \\ \bigsqcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathfrak{o}^\times \setminus t_K^m T(\mathfrak{o}), & \text{si } K/F \text{ escinde.} \end{cases} \quad (72)$$

Proposición III.4. Siempre que la integral (71) converja y Φ sea invariante a derecha por $T(\mathfrak{o})$, su valor estará determinado por

$$J_0(\Phi, \Lambda) = \begin{cases} J_0(\Phi, 1) \\ J_0(\Phi, 1) + \Lambda(\pi_K)^{-1} J_0(\Phi, t_K) \\ \sum_{m \in \mathbb{Z}} \Lambda(\pi_K)^{-m} J_0(\Phi, t_K^m) \end{cases}$$

normalizando la medida de Haar dt de manera que $\text{vol}(\mathfrak{o}^\times \setminus T(\mathfrak{o})) = 1$.

Nos interesa calcular $J_0(\Phi, \Lambda)$ en el siguiente caso: (ρ, V) es una representación de $G(F)$,²⁴ que admite un vector paramodular, es decir, existe $\phi \in V$ fijo por el subgrupo paramodular de nivel \mathfrak{p} , $K(\mathfrak{p})$, y Φ está dada por

$$\Phi(g) = \frac{\langle \rho(g)\phi, \phi \rangle}{\langle \phi, \phi \rangle},$$

con g en un modelo escindido.

Observación III.5. Asumiendo que se satisfacen las hipótesis estándares, la invarianza a derecha de Φ por $T(\mathfrak{o})$ está garantizada, si Φ es invariante por el subgrupo

$$G(\mathfrak{o}) \cap \begin{bmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & & \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & & \\ & & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ & & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \end{bmatrix} \quad (73)$$

de $G(F)$. Notamos que este subgrupo no está contenido en el subgrupo paramodular de nivel \mathfrak{p}^n , si $n \geq 1$. Por lo tanto, invarianza por $K(\mathfrak{p}^n)$ no implica, *a priori*, invarianza por $T(\mathfrak{o})$. De todas maneras, en el caso escindido, $T(\mathfrak{o})$ es un subgrupo de las matrices diagonales en $G(\mathfrak{o})$, que sí está contenido en los subgrupos paramodulares. Así, en el caso, escindido, ser invariante por la acción de $K(\mathfrak{p}^n)$ es suficiente para ser invariante por la acción de $T(\mathfrak{o})$.

7 Un conjunto de representantes

Deseamos calcular la siguiente integral:²⁵

$$J_0^{(k)}(\Phi, t_K^m) = \int_{x,y,z \in \mathfrak{p}^{-k}} \Phi \left(\begin{bmatrix} \pi^m & \pi^m y & z \\ & 1 & \pi^m x & y \\ & & \pi^m & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \right) \psi(y) dx dy dz, \quad (74)$$

o, al menos, dar una descripción de $J_0^{(k)}(\Phi, t_K^m)$ que involucre finitos términos. . .

Para poder hacer esto, buscaremos, para cada elemento

$$B(x, y, z, \pi^m) := \begin{bmatrix} \pi^m & \pi^m y & z \\ & 1 & \pi^m x & y \\ & & \pi^m & \\ & & & 1 \end{bmatrix},$$

un representante apropiado con respecto a “ I -equivalencia”, es decir, una matriz que difiera de $B(x, y, z, \pi^m)$ por multiplicación a izquierda y a derecha por elementos del

²⁴ unitaria, admisible y con carácter central trivial

²⁵ Recordamos que, asumiendo que se satisfacen las hipótesis estándares, $a = c = 0$ y $b = 1$.

subgrupo de Iwahori

$$I = G(\mathfrak{o}) \cap \begin{bmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{p} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{p} & \mathfrak{p} & \mathfrak{o} \end{bmatrix}$$

de matrices triangulares superiores módulo \mathfrak{p} . Dado que, en última instancia, nos interesan los grupos paramodulares, $K(\mathfrak{p}^n)$, revisaremos la lista de representantes para determinar cómo cambia, si (sólo) está permitido multiplicar por elementos de $K(\mathfrak{p}^n)$.

El conjunto de representantes con respecto a I está relacionado con el grupo de Weyl de $G(F)$. Las dos matrices siguientes generan el grupo de Weyl y aparecerán más adelante en la descomposición de (74):

$$s_1 = \begin{bmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad s_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

La lista que se encuentra más abajo, muestra, para cada $B(x, y, z, \pi^m)$, una matriz I -equivalente, la cual depende de la relación entre m y las valuaciones $v(x)$, $v(y)$, $v(z)$ y $v(y^2 - xz)$. Para simplificar la notación definimos $D := y^2 - xz$ y

$$\langle a, b, c \rangle := \begin{bmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & \frac{c}{b} & \\ & & & \frac{c}{a} \end{bmatrix}.$$

Notamos que, dependiendo de m , algunos casos pueden resultar ser vacíos; algunos otros simplemente no ocurren, de manera que los correspondientes elementos del grupo de Weyl no aparecen en la descripción de (74).²⁶

- $v(y) \geq 0$
 - $v(x) \geq \min\{-m, 0\}$ y $v(z) \geq \min\{0, m\}$

$$\langle \pi^m, 1, \pi^m \rangle$$
 - $v(x) \geq \min\{-m, 0\}$ y $v(z) < \min\{0, m\}$

$$\langle z, 1, \pi^m \rangle (s_1 s_2 s_1)$$
 - $v(x) < \min\{-m, 0\}$ y $v(z) \geq \min\{0, m\}$

$$\langle \pi^m, \pi^m x, \pi^m \rangle s_2$$

²⁶ Esto es una consecuencia del modelo.

$$- v(x) < \min\{-m, 0\} \text{ y } v(z) < \min\{0, m\}$$

$$\langle z, \pi^m x, \pi^m \rangle (s_1 s_2)^2$$

$$\bullet v(y) < 0$$

$$- v(x) \leq \{-m, 0\} + v(y)$$

$$* v(D/x) \geq \min\{0, m\}$$

$$\langle \pi^m, \pi^m x, \pi^m \rangle s_2$$

$$* v(D/x) < \min\{0, m\}$$

$$\langle \frac{D}{x}, \pi^m x, \pi^m \rangle (s_1 s_2)^2$$

$$- v(z) < \{0, m\} + v(y)$$

$$* v(D/z) \geq \min\{-m, 0\}$$

$$\langle z, 1, \pi^m \rangle (s_1 s_2 s_1)$$

$$* v(D/z) < \min\{-m, 0\}$$

$$\langle z, \frac{\pi^m D}{z}, \pi^m \rangle (s_1 s_2)^2$$

$$- v(x) > v(y) \text{ y } v(z) \geq v(y)$$

$$* v(x) \geq \min\{0, v(D) - m + 1\} \text{ y } v(z) \geq \min\{0, v(D) + m + 1\}$$

$$\langle \pi^m y, \frac{D}{y}, \pi^m \rangle (s_2 s_1 s_2)$$

$$* v(x) \geq \min\{0, v(D) - m + 1\} \text{ y } v(z) < \min\{0, v(D) + m + 1\}$$

$$\langle \frac{zy}{D}, \frac{D}{y}, \pi^m \rangle (s_2 s_1)$$

$$* v(x) < \min\{0, v(D) - m + 1\} \text{ y } v(z) \geq \min\{0, v(D) + m + 1\}$$

$$\langle \pi^m y, \frac{\pi^m x}{y}, \pi^m \rangle (s_1 s_2)$$

$$* v(x) < \min\{0, v(D) - m + 1\} \text{ y } v(z) < \min\{0, v(D) + m + 1\}$$

$$\langle \frac{zy}{D}, \frac{\pi^m x}{y}, \pi^m \rangle s_1$$

$$- v(x) > v(y) \text{ y } v(z) \geq v(y) + m$$

$$* v(x) \geq 0 \text{ y } v(z) \geq m$$

$$\langle \pi^m y, y, \pi^m \rangle (s_2 s_1 s_2)$$

$$* v(D) < \min\{v(x) + m, v(z)\}$$

$$\langle \pi^m y, \frac{D}{y}, \pi^m \rangle (s_2 s_1 s_2)$$

$$\begin{aligned}
& * v(x) < 0 \text{ y } v(D) \geq \min\{v(x) + m, v(z)\} \\
& \qquad \qquad \qquad \langle \pi^m y, \frac{\pi^m x}{y}, \pi^m \rangle (s_1 s_2) \\
& * v(z) < m \text{ y } v(D) \geq \min\{v(x) + m, v(z)\} \\
& \qquad \qquad \qquad \langle \pi^m y, \frac{\pi^m y}{z}, \pi^m \rangle (s_1 s_2) \\
- & v(x) > v(y) - m \text{ y } v(z) \geq v(y) \\
& * v(x) \geq -m \text{ y } v(z) \geq 0 \\
& \qquad \qquad \qquad \langle \pi^m y, y, \pi^m \rangle (s_2 s_1 s_2) \\
& * v(D) < \min\{v(x), v(z) - m\} \\
& \qquad \qquad \qquad \langle \frac{\pi^m D}{y}, y, \pi^m \rangle (s_2 s_1 s_2) \\
& * v(x) < -m \text{ y } v(D) \geq \min\{v(x), v(z) - m\} \\
& \qquad \qquad \qquad \langle \frac{y}{x}, y, \pi^m \rangle (s_2 s_1) \\
& * v(z) < 0 \text{ y } v(D) \geq \min\{v(x), v(z) - m\} \\
& \qquad \qquad \qquad \langle \frac{z}{y}, y, \pi^m \rangle (s_2 s_1) \\
- & v(x) > v(y) - m \text{ y } v(z) \geq v(y) + m \\
& * v(x) \geq \min\{-m, v(D) + 1\} \text{ y } v(z) \geq \min\{0, v(D) + 1\} \\
& \qquad \qquad \qquad \langle \frac{\pi^m D}{y}, y, \pi^m \rangle (s_2 s_1 s_2) \\
& * v(x) \geq \min\{-m, v(D) + 1\} \text{ y } v(z) < \min\{0, v(D) + 1\} \\
& \qquad \qquad \qquad \langle \frac{\pi^m D}{y}, \frac{\pi^m D}{zy}, \pi^m \rangle (s_1 s_2) \\
& * v(x) < \min\{-m, v(D) + 1\} \text{ y } v(z) \geq \min\{0, v(D) + 1\} \\
& \qquad \qquad \qquad \langle \frac{y}{x}, y, \pi^m \rangle (s_2 s_1) \\
& * v(x) < \min\{-m, v(D) + 1\} \text{ y } v(z) < \min\{-m, v(D) + 1\} \\
& \qquad \qquad \qquad \langle \frac{y}{x}, \frac{\pi^m D}{zy}, \pi^m \rangle s_1
\end{aligned}$$

Observación III.6. En la lista de representantes, podemos reemplazar x , y y z por cualquier elemento de F que tenga igual valuación, multiplicando por una matriz diagonal apropiada $\langle u, v, w \rangle$, $u, v, w \in \mathfrak{o}^\times$. Si $v(xz) \neq 2v(y)$, podemos también reemplazar D por cualquier otro elemento de valuación $v(D)$. Si, en cambio, $v(xz) = 2v(y)$, entonces $v(D)$ no es independiente de x , y y z .

8 La integral local

8.1 Simplificación de $J_0^{(k)}(\Phi, t_K^m)$

Teniendo a disposición un conjunto de representantes, procedemos como en la demostración de [9, Proposition 2.8]. Teniendo en cuenta la lista de § 7, definimos:

$$u_0 := \min\{-m, 0\} \quad , \quad v_0 := 0 \quad \text{y} \quad w_0 := \min\{0, m\} .$$

Para enteros $u \leq u_0$, $v \leq v_0$ y $w \leq w_0$, definimos los conjuntos:

$$\begin{aligned} \Pi_u &:= \begin{cases} \pi^{u_0} \mathfrak{o} , & \text{si } u = u_0 , \\ \pi^u \mathfrak{o}^\times , & \text{si } u < u_0 , \end{cases} & \Pi'_v &:= \begin{cases} \pi^{v_0} \mathfrak{o} , & \text{si } v = v_0 , \\ \pi^v \mathfrak{o}^\times , & \text{si } v < v_0 \end{cases} \text{ y} \\ & & \Pi''_w &:= \begin{cases} \pi^{w_0} \mathfrak{o} , & \text{si } w = w_0 , \\ \pi^w \mathfrak{o}^\times , & \text{si } w < w_0 , \end{cases} \end{aligned}$$

y constantes:

$$C_u := \text{vol}(\Pi_u) \quad , \quad C'_v := \text{vol}(\Pi'_v) \quad \text{y} \quad C''_w := \text{vol}(\Pi''_w) .$$

Por último, definimos

$$I(u, v, w) := \int_{x \in \Pi_u} \int_{y \in \Pi'_v} \int_{z \in \Pi''_w} \Phi(B(x, y, z, \pi^m)) \psi(y) dx dy dz . \quad (75)$$

Si $k \geq 0$ es suficientemente grande, entonces

$$J_0^{(k)}(\Phi, t_K^m) = \sum_{u, v, w \geq -k} I(u, v, w) . \quad (76)$$

Aunque u , v y w no son exactamente $v(x)$, $v(y)$ y $v(z)$, teniendo en cuenta la Observación III.6, separaremos (76) en $u + w \neq 2v$ y $u + w = 2v$. Sean $x \in \Pi_u$, $y \in \Pi'_v$ y $z \in \Pi''_w$.

Lema III.7. *Si $v \leq -2$, entonces $I(u, v, w) = 0$.*

Demostración. Si $u + w \neq 2v$, entonces, mirando la lista en § 7,

$$\Phi(B(x, y, z, \pi^m)) = \Phi(\langle \pi^\lambda, \pi^\mu, 1 \rangle \tau^m \sigma) ,$$

donde $\tau = \langle \pi^\alpha, \pi^\beta, \pi^\gamma \rangle$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$ y

$$\sigma \in \{1, s_2, s_1 s_2 s_1, (s_1 s_2)^2, s_1, s_1 s_2, s_2 s_1, s_2 s_1 s_2\} .$$

Las matrices τ y σ y los valores de λ y de μ dependen solamente de u , v y de w . Así, en este caso,

$$I(u, v, w) = \Phi(\langle \pi^\lambda, \pi^\mu, 1 \rangle \tau^m \sigma) C_u C'_v C''_w \int_{y \in \Pi'_v} \psi(y) dy . \quad (77)$$

Dado que estamos asumiendo que el conductor del carácter ψ es \mathfrak{o} ,

$$\int_{y \in \Pi'_v} \psi = \begin{cases} \text{vol}(\mathfrak{o}) , & \text{si } v = 0 , \\ -\text{vol}(\mathfrak{o}) , & \text{si } v = -1 , \\ 0 , & \text{si } v \leq -2 . \end{cases} \quad (78)$$

Pasamos, ahora, al caso $u + w = 2v$. Dado $\lambda \in \mathfrak{o}^\times$,

$$\begin{aligned} \Phi(B(x, y, z, \pi^m)) &= \Phi(\langle 1, 1, \lambda \rangle B(x, y, z, \pi^m) \langle 1, 1, \lambda^{-1} \rangle) \\ &= \Phi(B(\lambda^{-1}x, \lambda^{-1}y, \lambda^{-1}z, \pi^m)) . \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $(x, y, z) \mapsto (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ en (75), llegamos a

$$I(u, v, w) = \int_{x \in \Pi_u} \int_{y \in \Pi'_v} \int_{z \in \Pi''_w} \Phi(B(x, y, z, \pi^m)) \psi(\lambda y) dx dy dz .$$

Eligiendo $\lambda = 1 + \pi \mu$, $\mu \in \mathfrak{o}$, e integrando ambos lados con respecto a μ , intercambiando integrales y recordando que ψ es aditivo, conseguimos $I(u, v, w) \text{vol}(\mathfrak{o})$ del lado izquierdo y

$$\int_{x \in \Pi_u} \int_{y \in \Pi'_v} \int_{z \in \Pi''_w} \Phi(B(x, y, z, \pi^m)) \psi(y) \left(\int_{\mu \in \mathfrak{o}} \psi(\pi \mu y) d\mu \right) dx dy dz$$

del lado derecho. La integral interior es cero, si y sólo si $v \leq -2$, y, en consecuencia, $I(u, v, w) = 0$, en esos casos. \square

Lema III.8. *Para cada $m \in \mathbb{Z}$, si $u \leq u_0$ y $w \leq w_0$, entonces*

$$I(u, 0, w) = \Phi(h) C \text{vol}(\mathfrak{o})^3 ,$$

donde h y C están dados como en la Tabla 1

	$u = u_0, w = w_0$	$u = u_0, w < w_0$	$u < u_0, w = w_0$	$u < u_0, w < w_0$
h	$\langle \pi^m, 1, \pi^m \rangle$	$\langle \pi^w, 1, \pi^m \rangle (s_1 s_2 s_1)$	$\langle \pi^m, \pi^{m+u}, \pi^m \rangle s_2$	$\langle \pi^w, \pi^{m+u}, \pi^m \rangle (s_1 s_2)^2$
C	$q^{-u_0-w_0}$	$(q-1) q^{-u_0-w-1}$	$(q-1) q^{-u-w_0-1}$	$(q-1)^2 q^{-u-w-2}$

Tabla 1: Coeficientes en el caso $v = v_0 = 0$

Demostración. Mirar la lista en § 7. Dado que $v = 0$, $v(y) \geq 0$. Usar la invarianza de Φ , la fórmula

$$C_u = \begin{cases} q^{-u_0} \text{vol}(\mathfrak{o}) , & \text{si } u = u_0 , \\ q^{-u-1} (q-1) \text{vol}(\mathfrak{o}) , & \text{si } u < u_0 , \end{cases}$$

y las fórmulas análogas para C'_v y para C''_w . Cada uno de los cuatro casos corresponde a una de las entradas de la tabla. \square

Con respecto a $I(u, -1, w)$, hay una distinción dependiendo del signo del parámetro m .

Lema III.9. Para cada $m \in \mathbb{Z}$, $u \leq u_0$ y $w \leq w_0$,

$$I(u, -1, w) = \Phi(h) C (-\text{vol}(\mathfrak{o})^3) ,$$

donde h y C están dados como en las Tablas 2 y 3, con la excepción del caso $m = 0$ y $u = w = -1$. Si $m = 0$,

$$I(-1, -1, -1) = \left((q-1) \Phi(\langle 1, \pi^{-1}, 1 \rangle s_2) + (q^2 - 3q + 2) \Phi(\langle \pi^{-1}, \pi^{-1}, 1 \rangle (s_1 s_2)^2) \right) (-\text{vol}(\mathfrak{o})^3) .$$

	$u = u_0, w \leq w_0 - 2$	$u \leq u_0 - 1, w = w_0$	$u \leq u_0 - 1, w \leq w_0 - 1$
h	$\langle \pi^w, 1, \pi^m \rangle (s_1 s_2 s_1)$	$\langle \pi^m, \pi^{m+u}, \pi^m \rangle s_2$	$\langle \pi^w, \pi^{m+u}, \pi^m \rangle (s_1 s_2)^2$
C	$(q-1) q^{-u_0-w-1}$	$(q-1) q^{-w_0-u-1}$	$(q-1)^2 q^{-u-w-2}$
	$u = u_0, w = w_0$	$u = u_0, w = w_0 - 1$	
h	$\langle \pi^{m-1}, 1, \pi^m \rangle (s_2 s_1 s_2)$	$\langle 1, \pi^{-1}, \pi^m \rangle (s_2 s_1) \quad m > 0$	
C	$q^{-u_0-w_0}$	$\langle \pi^{m-1}, 1, \pi^m \rangle (s_1 s_2) \quad m < 0$	
		$(q-1) q^{-u_0-w-1}$	

Tabla 2: Coeficientes en el caso $v = -1$, $m \neq 0$

Demostración. El argumento es análogo al del Lema III.8. Exceptuando el caso en que $m = 0$ y $(u, w) = (-1, -1)$, el representante h está determinado por los valores de u y de w , mirando la lista en § 7. La constante C está determinada por los volúmenes

	$u = 0, w \leq -2$	$u \leq -2, w = 0$	$u \leq -1, w \leq -1$ (no ambos -1)
h	$\langle \pi^w, 1, 1 \rangle (s_1 s_2 s_1)$	$\langle 1, \pi^u, 1 \rangle s_2$	$\langle \pi^w, \pi^u, 1 \rangle (s_1 s_2)^2$
C	$(q-1) q^{-w-1}$	$(q-1) q^{-u-1}$	$(q-1)^2 q^{-u-w-2}$
	$u = 0, w = 0$	$u = 0, w = -1$	$u = -1, w = 0$
h	$\langle \pi^{-1}, \pi^{-1}, 1 \rangle (s_2 s_1 s_2)$	$\langle \pi^{-1}, \pi^{-1}, 1 \rangle (s_2 s_1 s_2)$	$\langle \pi^{-1}, \pi^{-1}, 1 \rangle (s_1 s_2)^2$
C	1	$q-1$	$q-1$

Tabla 3: Coeficientes en el caso $v = -1$, $m = 0$, excepto $u = w = -1$

correspondientes C_u y C_w'' . Con respecto al caso restante, si $m = 0$,

$$I(-1, -1, -1) = \int_{\substack{v(x)=v(y) \\ =v(z)=-1}} \Phi \left(\begin{bmatrix} 1 & y & z \\ & 1 & x & y \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \right) \psi(y) dx dy dz .$$

El representante matricial depende del valor de $v(D)$, que es al menos -2 . Si $v(D) = -2$, entonces $B(x, y, z, 1)$ es equivalente a

$$\langle \pi^{-1}, \pi^{-1}, 1 \rangle (s_1 s_2)^2 ,$$

pero, si $v(D) \geq -1$, entonces es equivalente a

$$\langle 1, \pi^{-1}, 1 \rangle s_2 .$$

De esta manera, $I(-1, -1, -1)$ es igual a

$$\begin{aligned} & \Phi \left(\langle 1, \pi^{-1}, 1 \rangle s_2 \right) \int_{v(D) \geq -1} \psi(y) dx dy dz \\ & + \Phi \left(\langle \pi^{-1}, \pi^{-1}, 1 \rangle (s_1 s_2)^2 \right) \int_{v(D) = -2} \psi(y) dx dy dz , \end{aligned}$$

donde cada integral está restringida al conjunto $v(x) = v(y) = v(z) = -1$. Ahora,

$$\int_{\substack{v(x)=v(y) \\ =v(z)=-1}} \psi(y) dx dy dz = (q-1)^2 (-\text{vol}(\mathfrak{o})^3) ,$$

y $v(D) \geq -1$, si y sólo si $xz - y^2 \in \mathfrak{o}$, lo que implica

$$\begin{aligned} \int_{v(D) \geq -1} \psi(y) dx dy dz &= \text{vol}(\mathfrak{o}) \int_{v(y)=v(z)=-1} \psi(y) dy dz \\ &= \text{vol}(\mathfrak{o})^2 (q-1) \int_{v(y)=-1} \psi(y) dy = (q-1) (-\text{vol}(\mathfrak{o})^3) \end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$\int_{v(D) = -2} \psi(y) dx dy dz = (q^2 - 3q + 2) (-\text{vol}(\mathfrak{o})^3) ,$$

demostrando la expresión para $I(-1, -1, -1)$. □

Juntando los Lemas III.7, III.8 y III.9, obtenemos el siguiente resultado, donde estamos asumiendo que $\text{vol}(\mathfrak{o}) = 1$.

Proposición III.10. Para $k \geq 0$ suficientemente grande, la integral $J_0^{(k)}(\Phi, t_K^m)$ es igual a una suma finita. Si $m > 0$,

$$J_0^{(k)}(\Phi, t_K^m) = q^m \Phi(\langle \pi^m, 1, \pi^m \rangle) + (q-1)q^m \Phi(\langle \pi^{-1}, 1, \pi^m \rangle s_1 s_2 s_1) \\ - q^m \Phi(\langle \pi^{m-1}, 1, \pi^m \rangle s_2 s_1 s_2) - (q-1)q^m \Phi(\langle 1, \pi^{-1}, \pi^m \rangle s_2 s_1) ;$$

si $m < 0$,

$$J_0^{(k)}(\Phi, t_K^m) = q^{-m} \Phi(\langle \pi^m, 1, \pi^m \rangle) + (q-1)q^{-m} \Phi(\langle \pi^{m-1}, 1, \pi^m \rangle s_1 s_2 s_1) \\ - q^{-m} \Phi(\langle \pi^{m-1}, 1, \pi^m \rangle s_2 s_1 s_2) - (q-1)q^{-m} \Phi(\langle \pi^{m-1}, 1, \pi^m \rangle s_1 s_2) ;$$

si $m = 0$, entonces

$$J_0^{(k)}(\Phi, 1) = \Phi(1) + (q-1)\Phi(\langle \pi^{-1}, 1, 1 \rangle s_1 s_2 s_1) - q\Phi(\langle \pi^{-1}, \pi^{-1}, 1 \rangle s_2 s_1 s_2) .$$

Referencias

- [1] A. N. Andrianov. “Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus 2”. *Russ. Math. Surv.* 29.3 (1974), pp. 45–116.
- [2] A. Andrianov. *Introduction to Siegel Modular Forms and Dirichlet Series*. Universitext. New York, NY: Springer, 2009.
- [3] M. Asgari and R. Schmidt. “Siegel modular forms and representations”. *Manuscr. Math.* 104.2 (2001), pp. 173–200.
- [4] S. Böcherer. *Bemerkungen über die Dirichletreihen von Koecher und Maaß. (Remarks on the Dirichlet series of Koecher and Maaß)*. Math. Gottingensis, Schriftenr. Sonderforschungsbereichs Geom. Anal. 68, 36 S. (1986). 1986.
- [5] S. Böcherer and R. Schulze-Pillot. “The Dirichlet series of Koecher and Maaß and modular forms of weight $3/2$ ”. *Math. Z.* 209.2 (1992), pp. 273–287.
- [6] G. Boxer et al. “Abelian surfaces over totally real fields are potentially modular”. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* 134 (2021), pp. 153–501.
- [7] A. Brumer and K. Kramer. “Paramodular abelian varieties of odd conductor”. *Trans. Am. Math. Soc.* 366.5 (2014), pp. 2463–2516.
- [8] A. Brumer and K. Kramer. “Corrigendum to “Paramodular abelian varieties of odd conductor””. *Trans. Am. Math. Soc.* 372.3 (2019), pp. 2251–2254.
- [9] M. Dickson et al. “Explicit refinements of Böcherer’s conjecture for Siegel modular forms of squarefree level”. *J. Math. Soc. Japan* 72.1 (2020), pp. 251–301.
- [10] M. Eichler and D. Zagier. *The Theory of Jacobi Forms*. Vol. 55. Prog. Math. Birkhäuser, Cham, 1985.
- [11] E. Freitag. *Siegelsche Modulfunktionen*. Vol. 254. Grundlehren Math. Wiss. Springer, Cham, 1983.
- [12] M. Furusawa. “On L -functions for $\mathrm{GSp}(4) \times \mathrm{GL}(2)$ and their special values”. *J. Reine Angew. Math.* 438 (1993), pp. 187–218.
- [13] M. Furusawa and K. Morimoto. “On special Bessel periods and the Gross-Prasad conjecture for $\mathrm{SO}(2n+1) \times \mathrm{SO}(2)$ ”. *Math. Ann.* 368.1-2 (2017), pp. 561–586.
- [14] M. Furusawa and K. Morimoto. “Refined global Gross-Prasad conjecture on special Bessel periods and Böcherer’s conjecture”. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 23.4 (2021), pp. 1295–1331.
- [15] M. Furusawa and K. Morimoto. *On the Gan-Gross-Prasad conjecture and its refinement for $(\mathrm{U}(2n), \mathrm{U}(1))$* . 2022. arXiv: 2205.09471 [math.NT].
- [16] M. Furusawa and K. Morimoto. *On the Gross-Prasad conjecture with its refinement for $(\mathrm{SO}(5), \mathrm{SO}(2))$ and the generalized Böcherer conjecture*. 2022. arXiv: 2205.09503 [math.NT].

- [17] W. T. Gan, B. H. Gross, and D. Prasad. “Symplectic local root numbers, central critical L -values, and restriction problems in the representation theory of classical groups”. In: *Sur les conjectures de Gross et Prasad. I*. Paris: Société Mathématique de France (SMF), 2012, pp. 1–109.
- [18] G. van der Geer. “Siegel modular forms and their applications”. In: *The 1-2-3 of Modular Forms*. Berlin: Springer, 2008, pp. 181–245. URL: pure.uva.nl/ws/files/2755382/59743_292906.pdf.
- [19] B. Gross, W. Kohnen, and D. Zagier. “Heegner points and derivatives of L -series. II”. *Math. Ann.* 278 (1987), pp. 497–562.
- [20] B. H. Gross and D. B. Zagier. “Heegner points and derivatives of L -series”. *Invent. Math.* 84 (1986), pp. 225–320.
- [21] R. C. Gunning. *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables*. Vol. I: Function theory. Florence, KY: Wadsworth &— Brooks/Cole Advanced Books &— Software, 1990.
- [22] T. Ibukiyama. “On symplectic Euler factors of genus two”. *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I A* 30 (1984), pp. 587–614.
- [23] J. Johnson-Leung, B. Roberts, and R. Schmidt. *Stable Klingen Vectors and Paramodular Newforms*. Vol. 2342. Lect. Notes Math. Cham: Springer, 2023.
- [24] H. Klingen. *Introductory Lectures on Siegel Modular Forms*. Vol. 20. Camb. Stud. Adv. Math. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [25] M. Kneser. *Strong approximation*. Proc. Sympos. Pure Math. 9, 187–196 (1966). 1966.
- [26] A. Knightly and C. Li. “On the distribution of Satake parameters for Siegel modular forms”. *Doc. Math.* 24 (2019), pp. 677–747.
- [27] Y. Liu. “Refined global Gan-Gross-Prasad conjecture for Bessel periods”. *J. Reine Angew. Math.* 717 (2016), pp. 133–194.
- [28] M. Newman. *Integral Matrices*. Vol. 45. Pure Appl. Math., Academic Press. Academic Press, New York, NY, 1972.
- [29] A. Pitale. *Siegel Modular Forms. A classical and representation-theoretic approach*. Vol. 2240. Lect. Notes Math. Cham: Springer, 2019.
- [30] A. Pitale and R. Schmidt. “Bessel models for $\mathrm{GSp}(4)$: Siegel vectors of square-free level”. *J. Number Theory* 136 (2014), pp. 134–164.
- [31] C. Poor and D. S. Yuen. “Paramodular cusp forms”. *Math. Comput.* 84.293 (2015), pp. 1401–1438.
- [32] D. Prasad and R. Takloo-Bighash. “Bessel models for $\mathrm{GSp}(4)$ ”. *J. Reine Angew. Math.* 655 (2011), pp. 189–243.
- [33] Y. Qiu. *The Bessel Period Functional on $SO(5)$: The Nontempered Case*. 2021. arXiv: 1312.5793 [math.NT].

- [34] B. Roberts and R. Schmidt. “On modular forms for the paramodular groups”. In: *Automorphic forms and zeta functions. In memory of Tsuneo Arakawa. Proceedings of the conference, Rikkyo University, Tokyo, Japan, September 4–7, 2004*. Hackensack, NJ: World Scientific, 2006, pp. 334–364.
- [35] B. Roberts and R. Schmidt. *Local Newforms for $GSp(4)$* . Vol. 1918. Lect. Notes Math. Berlin: Springer, 2007.
- [36] B. Roberts and R. Schmidt. “Some results on Bessel functionals for $GSp(4)$ ”. *Doc. Math.* 21 (2016), pp. 467–553.
- [37] N. C. Ryan and G. Tornaría. “A Böcherer-type conjecture for paramodular forms”. *Int. J. Number Theory* 7.5 (2011), pp. 1395–1411.
- [38] N. C. Ryan and G. Tornaría. “Formulas for central values of twisted spin L -functions attached to paramodular forms. With an appendix by Ralf Schmidt”. *Math. Comput.* 85.298 (2016), pp. 907–929.
- [39] A. Saha. “ L -functions for holomorphic forms on $GSp(4) \times GL(2)$ and their special values”. *Int. Math. Res. Not.* 2009.10 (2009), pp. 1773–1837.
- [40] P. J. j. Sally and M. Tadić. “Induced representations and classifications for $GSp(2, F)$ and $Sp(2, F)$ ”. *Mém. Soc. Math. Fr., Nouv. Sér.* 52 (1993), pp. 75–133.
- [41] R. Schmidt. “Iwahori-spherical representations of $GSp(4)$ and Siegel modular forms of degree 2 with square-free level”. *J. Math. Soc. Japan* 57.1 (2005), pp. 259–293.
- [42] T. Sugano. “On holomorphic cusp forms on quaternion unitary groups of degree 2”. *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I A* 31 (1984), pp. 521–568.