

TESIS DE
MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

PEDECIBA

CURE MALDONADO, URUGUAY
2026

**Grupos lineales y rango lineal: vínculos entre
aritmética, geometría y dinámica.**

Juan Píriz

Orientador y co-orientador:

Rafael Potrie y Joaquín Brum

Facultad de ciencias- Facultad de ingeniería
Universidad de la República

Resumen

Esta tesis se enmarca en el estudio del rango lineal de un grupo, es decir, en el estudio de los posibles encajes del mismo en grupos de matrices y grupos de Lie. En particular, se analizan los posibles encajes del grupo $\Gamma = \pi_1(M)$, con M una 3-variedad hiperbólica compacta, en los grupos $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ y $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Se prueba que toda representación inyectiva de Γ en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tiene imagen densa, y que en el caso de existir un encaje discreto en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ las proyecciones en cada factor son densas, dando lugar a un subgrupo irreducible. Estos resultados se vinculan con conjeturas sobre la estructura de subgrupos discretos irreducibles en grupos semisimples, en particular, mostramos que tal encaje sería un contraejemplo a una conjetura que dice que todo subgrupo irreducible de un grupo de Lie semisimple es necesariamente un lattice. En una segunda parte, se estudia la posibilidad de construir contraejemplos a tal conjetura basándonos en las dinámicas de tipo ping-pong, mostrando que ciertos enfoques basados en aritmética y valores absolutos no-arquimedianos por un lado y representaciones de grupos de Lie reales por otro no producen nuevos ejemplos.

Abstract

This thesis focuses on the study of the linear rank of a group, that is, the study of its possible embeddings into matrix groups and Lie groups. In particular, it analyzes the possible embeddings of the group $\Gamma = \pi_1(M)$, for M a compact hyperbolic 3-manifold, into the groups $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ and $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. It is proven that every injective representation of Γ in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ has a dense image, and that in the case of a discrete embedding in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, the projections onto each factor are dense, resulting in an irreducible subgroup. These results are linked to conjectures about the structure of irreducible discrete subgroups in semisimple groups. In particular, we show that such a fit would be a counterexample to an conjecture stating that every irreducible subgroup of a semisimple Lie group is necessarily a lattice. In a second part, we explore the possibility of constructing counterexamples to this conjecture using ping-pong dynamics, showing that certain approaches based on arithmetic and non-Archimedean absolute values, on the one hand, and representations of real Lie groups on the other, do not produce new examples.

Índice general

1. Introducción	5
2. Preliminares	9
2.1. Cuerpos de números y valores absolutos	9
2.2. $SL_2(\mathbb{R})$ como grupo de Lie	14
2.2.1. Álgebra de Lie y mapa exponencial de grupos lineales	14
2.2.2. Subgrupos lineales cerrados como grupos de Lie	17
2.2.3. Subgrupos cerrados de $SL_2(\mathbb{R})$	18
2.2.4. Morfismos de grupos de Lie	21
2.3. Conceptos básicos de geometría hiperbólica y subgrupos discretos de $PSL_2(\mathbb{R})$ y $PSL_2(\mathbb{C})$	21
2.3.1. Isometrías del espacio hiperbólico	22
2.3.2. Subgrupos discretos de isometrías y borde de Gromov	26
3. Generalidades sobre grupos lineales	31
3.1. Ejemplos de grupos lineales	31
3.1.1. Grupos finitos	31
3.1.2. Grupos fundamentales de variedades	32
3.2. Superrigidez y grupos aritméticos	32
3.3. Propiedades de los grupos lineales y algunos grupos no lineales	33
3.3.1. Dos teoremas sobre grupos lineales	33
3.3.2. Un grupo que no cumple el Lema de Selberg	34
3.3.3. Un grupo que no verifica la alternativa de Tits	35
3.4. Rango lineal	36
4. Representaciones de grupos de variedades y conjeturas sobre grupos irreducibles	37
4.1. Representaciones de grupos de 3-variedad hiperbólica compacta	37
4.1.1. $PSL_2(\mathbb{R})$	38
4.1.2. $PSL_2(\mathbb{R}) \times PSL_2(\mathbb{R})$	38
4.2. Subgrupos discretos irreducibles y conjeturas	41
4.2.1. Más contraejemplos	42
5. Ping-pong y grupos libres	45
5.1. Ping-Pong abstracto	46
5.2. Dinámica de Schottky y elementos proximales	46
5.2.1. Grupos de Schottky en $PSL_2(\mathbb{C})$	46

5.2.2.	Ping-pong proximal	48
5.2.3.	Ping-Pong p-ádico para matrices reales	50
5.2.4.	Grupos libres que no vienen de un ping-pong proximal.	50
5.3.	Ping-pong p-ádico en grupos aritméticos	51
5.3.1.	Álgebras de cuaterniones y subgrupos aritméticos	52
5.4.	Representaciones de $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$ y Ping-pong	56
5.4.1.	Representaciones irreducibles, suma y producto tensorial de representaciones	56
5.4.2.	Representaciones de $SL_2(\mathbb{R})$ y $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$	58
5.5.	Comentarios finales	59
A.	Alternativa de Tits	63
A.1.	Preliminares	63
A.1.1.	Topología de Zariski	63
A.1.2.	Lema de Selberg y Teorema de Engel	66
A.1.3.	Elementos proximales	66
A.2.	Condición suficiente para la existencia de un grupo libre	67
A.3.	Prueba de la Alternativa de Tits	69
B.	Pesos maximales de una representación	71
C.	Cálculo de normalizadores	75

Capítulo 1

Introducción

Diversos problemas en distintas áreas de la matemática pasan por entender la estructura e invariantes de ciertos grupos. En particular, en el estudio de superficies y, más en general, de variedades, una primera etapa fundamental consiste en comprender su topología y en especial su grupo fundamental. Gracias a la teoría de cubrimientos, cuando una variedad está provista de una métrica adecuada, su grupo fundamental se identifica con un subgrupo discreto del grupo de isometrías de su cubrimiento universal. En muchos casos, dichos grupos de isometrías poseen además una estructura diferenciable compatible, de modo que forman grupos de Lie y el grupo fundamental de la variedad se realiza entonces como un subgrupo discreto de un grupo de Lie, muchas veces un grupo de matrices.

Este hecho motiva el estudio de los grupos lineales, es decir, aquellos que admiten una representación fiel como subgrupos de grupos de matrices. Estos grupos constituyen una clase de especial interés, ya que su estructura algebraica impone fuertes restricciones. Resultados clásicos como el Lema de Selberg o la alternativa de Tits muestran que la linealidad proporciona herramientas para analizar un grupo y, al mismo tiempo, permite detectar obstrucciones a la existencia de representaciones fieles. Más aún, mediante la acción de grupos lineales sobre espacios geométricos naturales, como los espacios simétricos asociados a grupos de Lie, es posible traducir problemas algebraicos en términos geométricos y dinámicos.

Un ejemplo de esta interacción entre geometría y teoría de grupos es el caso del grupo fundamental de una 3-variedad hiperbólica compacta M . En efecto, el grupo $\Gamma := \pi_1(M)$ se realiza como un subgrupo discreto y cocompacto de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{SO}_0(3, 1)$, que se identifica con el grupo de isometrías que preservan la orientación del espacio hiperbólico $\mathbb{H}^3$. A la hora de estudiar posibles representaciones de Γ en otros grupos de Lie, una posible primera etapa consiste en considerar los grupos $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ y $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. La razón principal de considerar estos grupos es por su vínculo con la geometría hiperbólica, ya que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ se identifica con el grupo de isometrías que preservan la orientación de $\mathbb{H}^2$, y sus subgrupos discretos corresponden a grupos fundamentales de superficies u orbifolds. Desde el punto de vista estructural, estos grupos constituyen ejemplos fundamentales de grupos de Lie de rango real uno y dos, respectivamente.

La primer parte de nuestro trabajo se centra en esto, de manera que consideraremos $\Gamma = \pi_1(M)$ para M una 3-variedad hiperbólica compacta (las cuales siempre serán sin borde) y analizaremos la naturaleza de sus posibles encajes en los grupos $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ y

$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Valiéndonos por un lado de técnicas de la teoría geométrica de grupos, que nos permite argumentar que Γ no es isomorfo a un subgrupo discreto de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, y por otro lado de la teoría de grupos de Lie, que nos permite clasificar los subgrupos cerrados de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, logramos probar el siguiente resultado.

Proposición (Proposición 4.2). Sea $\Gamma = \pi_1(M)$ donde M es una 3-variedad hiperbólica compacta. Supongamos que existe $\varphi: \Gamma \hookrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ morfismo inyectivo. Entonces $\varphi(\Gamma)$ es denso en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Es posible construir ejemplos de variedades M que admitan un tal encaje, a partir de argumentos que involucran la aritmética del cuerpo generado por las trazas de las matrices en un tal Γ . En este punto podemos preguntarnos si existe alguna 3-variedad hiperbólica compacta M que *no* admita tal encaje, lo cual parece ser un problema abierto.

Posteriormente, gracias a la estructura algebraica de Γ pudimos mostrar que en caso de existir un encaje en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, el mismo deberá tener proyecciones inyectivas en cada factor $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Combinando esto y el anterior resultado se obtiene el siguiente enunciado.

Teorema (Teorema 4.11). Sea $\Gamma = \pi_1(M)$ donde M es una 3-variedad hiperbólica compacta y sea $\rho: \Gamma \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ un morfismo inyectivo de imagen discreta. Entonces $\rho(\Gamma)$ es un subgrupo irreducible, es decir, de proyecciones densas e inyectivas.

Notamos que solamente pudimos determinar la naturaleza de un tal encaje, restando entender si siquiera es posible para 3-variedades M específicas. Los ejemplos conocidos de encajes fieles en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ están vinculados a la existencia de lugares reales para el cuerpo de trazas de la variedad (ver [22]) y sólo sabemos construir tales encajes para variedades no aritméticas¹. Estos argumentos que conocemos para garantizar la existencia de dichos encajes dependen esencialmente de esta no-aritmeticidad. Esto sugiere que podría ser interesante considerar la clase de las 3-variedades hiperbólicas aritméticas como posibles candidatas a no admitir tales encajes, aunque este problema permanece abierto.

Los subgrupos discretos irreducibles de grupos de Lie semisimples (con al menos dos factores simples), como $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, han sido objeto de extenso estudio y formulación de conjeturas. En particular mencionamos el siguiente enunciado (ver [8] donde aparece como el Problema 3.5) que es un enunciado más fuerte que la pregunta atribuida a Benoist sobre la existencia de grupos libres y grupos de superficie discretos irreducibles en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Conjetura (Conjetura 1). Sea G un grupo de Lie semisimple de centro finito, sin factores compactos, con al menos dos factores simples. Entonces todo subgrupo $\Gamma < G$ discreto irreducible es un lattice.

A partir de comparar la estructura conocida de los lattices de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ con la de $\pi_1(M)$, pudimos determinar el siguiente vínculo con nuestro anterior resultado.

Teorema (Corolario 4.14). Sea $\Gamma = \pi_1(M)$ para M una 3-variedad hiperbólica compacta. Supongamos que existe $\rho: \Gamma \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ morfismo inyectivo de imagen discreta. Entonces $\rho(\Gamma)$ sería un contraejemplo a la Conjetura 1.

¹Agradecemos a Alan Reid por enviarnos ejemplos explícitos encontrados con SnapPy realizando cirugías de Dehn explícitas en algunos nudos en S^3 .

Más aún, ciertos subgrupos de superficie y subgrupos libres de Γ también serían subgrupos irreducibles de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ a través del encaje ρ . La existencia de un tal ejemplo ha sido intensamente estudiado. Mencionamos el vínculo con la Pregunta 1.1 en [17], donde además se establece el vínculo de la existencia de un encaje como el de Teorema 4.11 y la ergodicidad de la acción en $S^1 \times S^1$ de subgrupos irreducibles de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

El hecho de que Γ presente una mayor estructura, da la idea de que esto se debería traducir en más restricciones para la existencia de un tal encaje discreto, sin embargo este camino sigue inconcluso y queda abierto para trabajos futuros.

Por otro lado, podemos intentar construir un contraejemplo explícito a la conjetura anterior. Esto constituye la segunda parte de nuestro trabajo.

Para esto, fijamos un ejemplo conocido de un subgrupo irreducible de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ e intentamos encontrar en el un subgrupo libre que continúe siendo irreducible. Concretamente, nos basamos en las dinámicas de “ping-pong” para matrices proximales, las cuales garantizan que ciertos grupos son libres. Para esto, dado un cuerpo $\mathbb{K}$ y fijado un valor absoluto en el mismo, considerando la acción de matrices en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ en las rectas de $\mathbb{K}^n$ podremos definir que dos matrices estén en *posición ping-pong*, lo cual implicará que (a menos de tomar potencias) las mismas generan un grupo libre. Estas ideas surgen de la prueba de la alternativa de Tits, en la cual esto es una herramienta clave.

En primer lugar, buscamos entender la posibilidad de, dado un grupo de cuaterniones (ver definición en el Capítulo 5) en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^r \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})^s$ (o más en general un subgrupo aritmético), encontrar un valor absoluto en el cuerpo $\mathbb{K}$ generado por los coeficientes de las matrices en este grupo, distinto del usual, que nos permita encontrar dos matrices en posición ping-pong. Vimos que esto no es posible, dado que la posición ping-pong depende de que las matrices involucradas tengan valores propios con norma distinta de 1 para este valor absoluto. De aquí obtenemos el siguiente enunciado.

Teorema (Teorema 5.19). Dados $r, s \in \mathbb{N}$, sea $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^r \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})^s$ un subgrupo de cuaterniones. Sea $\mathbb{K}$ el cuerpo de números generado por los coeficientes de las matrices en Γ . Entonces, al identificar a Γ como un subgrupo de $\mathrm{SL}_{2r+2s}(\mathbb{K})$ de manera natural, dado λ valor propio de una matriz de Γ y $|\cdot|_*$ valor absoluto no arquimediano en el cuerpo $\mathbb{K}[\lambda]$, tenemos que $|\lambda|_* = 1$.

Otra posible estrategia para construir un contraejemplo a la conjetura, consiste en dado un subgrupo aritmético Γ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, encontrar un morfismo $\rho: \Gamma \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ para cierto espacio vectorial real V . Gracias al Teorema de Superrigidez de Margulis aplicado a este grupo, esto es equivalente a encontrar un morfismo de grupos de Lie de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ en $\mathrm{GL}(V)$. A partir de lograr determinar que podemos restringir nuestra atención a las representaciones irreducibles, para posteriormente analizar la clasificación de las mismas, obtuvimos el siguiente resultado.

Teorema (Teorema 5.41). Sea $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación. Consideremos $g_1 = (x_1, y_1)$ y $g_2 = (x_2, y_2)$ tales que x_1, x_2 no están en posición ping-pong en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y y_1, y_2 tampoco. Entonces $\rho(g_1)$ y $\rho(g_2)$ **no** están en posición ping-pong.

Posteriormente, analizamos dos posibles estrategias más. En primer lugar, la posibilidad de considerar una combinación de las dos anteriores ideas: explícitamente, considerar

un morfismo de grupos de Lie $\rho: \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ y posteriormente analizar los posibles valores absolutos en el cuerpo generado por los coeficientes de $\rho(\Gamma)$. Notamos que esto tampoco produce nuevos grupos libres. En segundo lugar, considerar las dinámicas de "ping-pong" en espacios de banderas, las cuales requieren una condición menos restrictiva que la proximalidad de las matrices involucradas. Nuevamente, esto no produce nuevos ejemplos gracias al encaje de Plucker, el cual establece que dadas dos matrices en posición ping-pong para su dinámica en un espacio de banderas, produce un morfismo en el que la imagen de las mismas admite una dinámica de ping-pong proximal, contradiciendo el teorema anterior.

De esta manera, probamos que las técnicas basadas en estas ideas no permiten encontrar contraejemplos a la Conjetura 1.

Estructura del documento

En el Capítulo 2 se exponen los objetos y ciertos resultados independientes en los que se apoya todo el análisis posterior.

En el Capítulo 3 se mencionan ciertas clases de grupos que motivan el estudio de los grupos lineales y resultados sobre la estructura de éstos últimos. Además se dan ejemplos de grupos no lineales, basandonos en el Lema de Selberg y la alternativa de Tits

En el Capítulo 4 se aborda la pregunta sobre los encajes del grupo fundamental de una 3-variedad hiperbólica compacta en los grupos $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ y $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ y se establece su vínculo con conjeturas en el área.

En el Capítulo 5 estudiamos el conocido "ping-pong proximal" para un par de matrices y analizamos posibles adaptaciones de este concepto para construir un contra ejemplo a la conjetura mencionada en el capítulo 4.

El Apéndice A expone una prueba autocontenida, basada en las notas de Benoist [4], de la Alternativa de Tits. Se optó por hacer una exposición mas detallada de la misma, apuntando a un público no-especialista, que además permite observar las técnicas que inspiran en gran medida el contenido del Capítulo 5.

El Apéndice B recorre brevemente la teoría de pesos de una representación de un grupo de Lie, la cual nos permite asegurar que cierta lista de representaciones del grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ recorre en su totalidad a las posibles representaciones irreducibles del mismo.

El Apéndice C no es más que el cálculo explícito de ciertos normalizadores de subgrupos de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ necesarios para el trabajo, que optamos por exponer aparte para una más fácil comprensión de ciertos resultados.

Capítulo 2

Preliminares

Estos preliminares explorarán los objetos y técnicas necesarias para el estudio que se realizará en los capítulos 4 y 5. En primer lugar, introduciremos los cuerpos de números y como éstos dan lugar a una familia de valores absolutos que dotan a los mismos de distintas métricas, que posteriormente nos servirá para estudiar grupos de matrices cuyas entradas viven en estos cuerpos de números (Nos basamos en [15], [16], [11]). Posteriormente, introduciremos los grupos de matrices centrales para este trabajo, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, entendiendo en una primera instancia su estructura diferenciable y como ésta nos permite entender y clasificar a sus subgrupos cerrados (Nos basamos en [20]). Luego estudiaremos sus subgrupos discretos a partir de su identificación como grupos de isometrías de ciertos espacios métricos especiales, con lo que diversas técnicas de la teoría geométrica de grupos les otorgarán invariantes geométricos intrínsecos a estos grupos (Nos basamos en [18],[27],[7],[2]).

2.1. Cuerpos de números y valores absolutos

El objetivo de esta sección es probar el Lema 2.9 y posteriormente la Observación 2.18, los cuales son partes clave en la prueba del Teorema 5.19.

Un *cuerpo de números* $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ es una extensión de dimensión finita sobre $\mathbb{Q}$, es decir, un subcuerpo de $\mathbb{C}$ de dimensión finita al ser visto como un $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial. En particular, es una *extensión algebraica*: todo elemento de $\mathbb{K}$ es raíz de un polinomio no nulo de coeficientes racionales. En este contexto se define $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ el *anillo de enteros* de $\mathbb{K}$ como el anillo de todos los enteros algebraicos en $\mathbb{K}$, es decir, los elementos de $\mathbb{K}$ que son raíces de algún polinomio mónico con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Se puede probar (ver por ejemplo [15, Theorem 5, chapter 1]) que $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ es finitamente generado como $\mathbb{Z}$ -módulo y tiene una base de cardinal $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$. Dado un cuerpo de números $\mathbb{K}$ con anillo de enteros $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, llamamos *unidad del anillo de enteros* a un $0 \neq \lambda \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ tal que $\lambda^{-1} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ y dan lugar al grupo $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}$.

Ejemplo 2.1. Estos conceptos extienden el concepto de unidad y entero usuales en $\mathbb{Q}$. Basta recordar el criterio de Gauss para raíces racionales que dice que si un racional $\lambda = \frac{p}{q}$ es raíz de un polinomio de coeficientes enteros $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ entonces p divide a a_0 y q divide a a_n , de manera que si el polinomio es mónico es $q = 1$ y resulta $x \in \mathbb{Z}$. Además, las unidades de $\mathbb{Z}$ son solamente 1 y -1 .

Observación 2.2. Dado un morfismo de cuerpos $\sigma: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$, tenemos que $\sigma(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{L}}$. Basta notar que si $\lambda \in \mathbb{K}$ es raíz de $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ con $a_i \in \mathbb{Z}$, entonces $\sigma(\lambda)$ es raíz del polinomio $\sigma(a_n)x^n + \cdots + \sigma(a_1)x + \sigma(a_0)$ el cual nuevamente es de coeficientes enteros pues todo morfismo de cuerpos es la identidad al identificar las copias de $\mathbb{Z}$ en cada cuerpo.

Lema 2.3. Dado $\alpha \in \mathbb{K}$, podemos escribir $\alpha = \frac{x}{m}$ para $x \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ y $m \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{K}$, como la extensión $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$ es algebraica podemos considerar $p \in \mathbb{Q}[x]$ polinomio mónico con $p(\alpha) = 0$. Luego, tomando $m \in \mathbb{Z}$ el común denominador de los coeficientes de p , tenemos que el polinomio dado por $q(x) = m^{\deg(p)} p(\frac{x}{m})$ es nuevamente mónico y ahora de coeficientes enteros, además $q(m\alpha) = 0$ con lo que $m\alpha$ es un entero algebraico y es $m\alpha \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. Por lo tanto la igualdad $\alpha = \frac{m\alpha}{m}$ es la expresión que buscábamos. $\square$

Definición 2.4. Dado un cuerpo $\mathbb{K}$, un *valor absoluto* es un mapa $|\cdot|: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ tal que

- $|x| = 0 \iff x = 0$,
- $|xy| = |x||y|$ para todos $x, y \in \mathbb{K}$, y
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ para todos $x, y \in \mathbb{K}$.

Vamos ahora a describir una familia de ejemplos de valores absolutos central para este trabajo. Observamos que en particular, el Lema 2.3 nos dice que podemos pensar a $\mathbb{K}$ como el cuerpo de fracciones de su anillo de enteros. Recordamos que un ideal $\mathfrak{a}$ en un anillo A se dice *primo* si dados $x, y \in A$ con $xy \in \mathfrak{a}$ entonces $x \in \mathfrak{a}$ o $y \in \mathfrak{a}$ y que además dados dos ideales $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, se define su producto como

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \left\{ \sum_i a_i b_i : a_i \in \mathfrak{a}, b_i \in \mathfrak{b} \right\}$$

donde la suma es en finitos términos.

Dado un ideal primo $\mathcal{P} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ y un número real $c > 1$ podemos definir el *valor absoluto $\mathcal{P}$ -ádico* $|\cdot|_{\mathcal{P}}$. Para eso procedemos como sigue: dado $x \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ distinto de cero definimos $|x|_{\mathcal{P}} = c^{-\text{ord}_{\mathcal{P}}(x)}$ donde $\text{ord}_{\mathcal{P}}(x) \in \mathbb{Z}$ es el mayor entero k tal que $x \in \mathcal{P}^k$ (por convención es $\mathcal{P}^0 = \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ y observamos que $\mathcal{P}^{k+1} \subset \mathcal{P}^k$, ver debajo la definición de producto de ideales), para cero definimos $|0|_{\mathcal{P}} = 0$. Notamos que esto es equivalente a considerar el mayor entero k tal que $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} \cdot x \subset \mathcal{P}^k$. Luego, como $\mathbb{K}$ es el cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ y $|\cdot|_{\mathcal{P}}$ es multiplicativa en el anillo de enteros (para esta propiedad es necesario considerar ideales primos, ver el Corolario 2.13 debajo) podemos extenderla a $\mathbb{K}$ como $|x/y|_{\mathcal{P}} = |x|_{\mathcal{P}}/|y|_{\mathcal{P}}$. Distintas elecciones de c dan lugar a valores absolutos equivalentes, donde dos valores absolutos $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_2$ se dicen equivalentes si existe un real positivo r tal que $|\cdot|_1 = (|\cdot|_2)^r$, de manera que esta elección particular será ignorada.

Observación 2.5. Dado $\lambda \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, es equivalente que λ sea una unidad del anillo a que su ideal generado $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} \cdot \lambda$ coincida con $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, que claramente es equivalente a que el orden de λ sea cero para todo ideal primo $\mathcal{P} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$.

Ejemplo 2.6. Notamos que en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, es $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}$ y todo ideal primo es de la forma $\mathcal{P} = p\mathbb{Z} = \{pn : n \in \mathbb{Z}\}$ para p un número primo. Observamos que $(p\mathbb{Z})^k = p^k\mathbb{Z}$. De esta manera, la construcción anterior no es mas que la usual de valores absolutos p -ádicos para p número primo, dado que la condición $x \in \mathcal{P}^k$ es equivalente a que p^k divida a x con lo que su valor absoluto p -ádico es c^{-k} (es usual en estos casos tomar $c = p$).

Los anteriores ejemplos se conocen como valores absolutos *no-arquimedianos*, pues cumplen una versión más fuerte de la desigualdad triangular. Concretamente

$$|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$$

Los valores absolutos que **no** son no-arquimedianos se conocen como arquimedianos.

Por otro lado, podemos construir una familia de valores absolutos arquimedianos en un cuerpo de números $\mathbb{K}$ a partir de sus encajes complejos. Sea $\sigma: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{C}$ un tal encaje, definimos $|x|_{\sigma} = |\sigma x|_{\infty}$ donde $|\cdot|_{\infty}$ es el valor absoluto usual en los complejos.

Recordamos que un polinomio $f \in \mathbb{K}[x]$ es irreducible si no se descompone como producto de dos polinomios no constantes en $\mathbb{K}[x]$.

Observación 2.7. Consideremos un cuerpo de números de la forma $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha)$ donde α es un número algebraico de grado n , es decir, tal que su polinomio irreducible sobre $\mathbb{Q}$ es de grado n . Si notamos por $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ las raíces de este polinomio en $\mathbb{C}$, es fácil ver que todo posible encaje $\sigma: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{C}$ está dado por $\sigma(\alpha) = \alpha_i$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$ y extender linealmente a $\mathbb{K}$.

Sorprendentemente, estos ejemplos constituyen una lista completa de los valores absolutos posibles en este contexto, como se ve a continuación.

Proposición 2.8. [22, Theorem 0.6.6] Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo de números. Entonces:

- Todo valor absoluto no-arquimediano $|\cdot|_*$ es equivalente a un valor absoluto $\mathcal{P}$ -ádico $|\cdot|_{\mathcal{P}}$, donde $\mathcal{P}$ es un ideal primo de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$.
- Todo valor absoluto arquimediano es equivalente a uno de la forma $|\cdot|_{\sigma}$ donde σ es un encaje de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{C}$.

Lo anterior nos permite enunciar el siguiente lema clave y posterior teorema clásico:

Lema 2.9. Sea λ en un cuerpo de números $\mathbb{K}$. Entonces $|\lambda|_{\mathcal{P}} = 1$ para todo valor absoluto no-arquimediano en el cuerpo si y sólo si $\lambda \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}$.

Para probar este lema es necesario entender mejor la aritmética de los ideales primos en $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ y su rol a la hora de descomponer ideales del anillo, lo que recupera una estructura similar a la conocida para los números naturales y los números primos.

Los siguientes resultados se pueden encontrar en [15] Sección 1 como los Teoremas 7, 10 y 9 respectivamente. Decimos que un ideal es no trivial cuando no es ni $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ ni $\{0\}$.

Teorema 2.10. Todo ideal de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ no trivial se puede escribir de manera única (a menos de orden) como un producto de ideales primos.

Proposición 2.11. Sean $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}$ ideales no triviales, entonces existe un ideal $\mathfrak{b}$ tal que $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$.

Proposición 2.12. Sea $\mathfrak{c} \neq \{0\}$. Si para $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ideales no triviales se cumple que $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ entonces $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Un cálculo elemental (que mimetiza al conocido para los números naturales) nos permite deducir el siguiente resultado (muchas veces encontrado como la definición de orden de un entero según un ideal primo).

Corolario 2.13. Sea $x \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ tal que $x \notin \mathcal{U}_{\mathbb{K}}$. Entonces el ideal generado por x es no trivial y podemos escribir

$$\mathcal{O}_{\mathbb{K}} \cdot x = \prod_{i=1}^k \mathcal{P}_i^{\text{ord}_{\mathcal{P}_i}(x)}$$

donde $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ son ideales primos y son exactamente los ideales primos tales que $\text{ord}_{\mathcal{P}}(x) > 0$.

Demostración del Lema 2.9. Por la Proposición 2.8 podemos asumir que los valores absolutos no-arquimedianos son de la forma $|\cdot|_{\mathcal{P}}$ para $\mathcal{P}$ ideal primo de los enteros del cuerpo.

Para el recíproco, dado $\lambda \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}$ notamos que $\lambda \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ y $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} \cdot \lambda = \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ de manera que dado $\mathcal{P}$ ideal primo es $\text{ord}_{\mathcal{P}}(\lambda) = 0$ y $|\lambda|_{\mathcal{P}} = c^0 = 1$.

Veamos el directo. Dado $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda|_{\mathcal{P}} = 1$ para todo ideal primo $\mathcal{P}$ del anillo de enteros $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. Gracias al Lema 2.3 podemos escribir $\lambda = x/m$ para $x \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ y $m \in \mathbb{Z}$. De esta manera es $|x|_{\mathcal{P}} = |m|_{\mathcal{P}}$ y en particular $\text{ord}_{\mathcal{P}}(x) = \text{ord}_{\mathcal{P}}(m)$ para todo ideal primo $\mathcal{P}$.

Supongamos ahora que $x \notin \mathcal{U}_{\mathbb{K}}$ y $m \notin \mathcal{U}_{\mathbb{K}}$. A partir del Corolario 2.13 anterior y de que $\text{ord}_{\mathcal{P}}(x) = \text{ord}_{\mathcal{P}}(m)$ para todo ideal primo $\mathcal{P}$ observamos que es

$$\mathcal{O}_{\mathbb{K}} \cdot x = \prod_i \mathcal{P}_i^{\text{ord}_{\mathcal{P}_i}(x)} = \prod_i \mathcal{P}_i^{\text{ord}_{\mathcal{P}_i}(m)} = \mathcal{O}_{\mathbb{K}} \cdot m$$

Se deduce que $x = um$ para $u \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}$. Para esto basta con notar que como $m \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}} \cdot x$, existe $b \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ tal que $m = bx$, de la misma manera existe $u \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ con $x = um$, luego $ub = 1$ y $u^{-1} = b \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ y $u \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}$ de manera que $\lambda = x/m = u \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}$.

Para concluir, si alguno de los x o m está en $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}$, tenemos que el otro también gracias a la Observación 2.5 y el corolario 2.13, de manera que $\lambda = x/m \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}$. □

Teorema 2.14. Sea λ en un cuerpo de números $\mathbb{K}$. Entonces $|\lambda| = 1$ para todo valor absoluto en el cuerpo si y sólo si λ es raíz de la unidad.

Para esta prueba necesitamos el concepto de una *extensión de Galois* y de *cuerpo de descomposición* de un polinomio. Dada una extensión de cuerpos $\mathbb{F} \supset \mathbb{K}$, podemos considerar el grupo de automorfismos de cuerpo de $\mathbb{F}$ que fijan $\mathbb{K}$ elemento a elemento:

$$\mathbf{Gal}_{\mathbb{K}}(\mathbb{F}) = \{\theta \in \text{Aut}(\mathbb{F}) : \theta(x) = x \forall x \in \mathbb{K}\}$$

El anterior se conoce como el grupo de Galois de la extensión. Este grupo actúa en los polinomios con coeficientes en el cuerpo de la manera usual: dado $p \in \mathbb{K}[x]$ de la forma $\sum_{i=0}^n a_i x^i$ y $\sigma \in \mathbf{Gal}_{\mathbb{K}}(\mathbb{F})$ es $\sigma(p) = \sum_{i=0}^n \sigma(a_i) x^i$. Decimos que la extensión es de Galois si además

$$\text{Fix}_{\mathbb{F}}(\mathbf{Gal}_{\mathbb{K}}(\mathbb{F})) = \{x \in \mathbb{F} : \theta(x) = x \forall \theta \in \mathbf{Gal}_{\mathbb{K}}(\mathbb{F})\}$$

es exactamente $\mathbb{K}$, por ejemplo $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Dado $f \in \mathbb{K}[x]$ de grado positivo, decimos que una extensión $\mathbb{F} \supset \mathbb{K}$ es un cuerpo de descomposición de f si en $\mathbb{F}[x]$ el polinomio f se descompone como

$$f(x) = u_0(x - u_1) \cdots (x - u_n)$$

con $u_i \in \mathbb{F}$ y $\mathbb{F} = \mathbb{K}(u_1, \dots, u_n)$.

Un polinomio $f \in \mathbb{K}[x]$ es *separable* si es irreducible y además en algún cuerpo de descomposición de f todas sus raíces son simples. Notamos que al considerar $\mathbb{K}$ un cuerpo de números, todo polinomio irreducible es separable pues el cuerpo es en particular de característica cero (ver [16] página 261).

Podemos ahora enunciar el siguiente teorema:

Teorema 2.15. [16, Theorem 3.11]

Sea $\mathbb{F} \supset \mathbb{K}$ una extensión de cuerpos. Entonces es equivalente:

- La extensión es algebraica y de Galois.
- $\mathbb{F}$ es el cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{K}$ de un conjunto de polinomios separables de $\mathbb{K}[x]$.

Demostración del Teorema 2.14. Para el recíproco simplemente notamos que si $\lambda^n = 1$ para un n natural entonces $1 = |\lambda^n| = |\lambda|^n$, de lo cual deducimos que $|\lambda| = 1$.

Para el directo, a partir del Lema anterior sabemos que $\lambda \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}$, veamos el rol de los valores absolutos arquimedianos. Si llamamos p al polinomio irreducible de λ sobre $\mathbb{Q}$ y $\lambda_1 = \lambda, \dots, \lambda_n$ a sus raíces (conjugados de Galois), a partir de la Observación 2.7 y la Proposición 2.8 la hipótesis se traduce en que $|\lambda_1| = \dots = |\lambda_n| = 1$ para el valor absoluto usual de $\mathbb{C}$.

Sea $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ el cuerpo de descomposición de p . Tenemos que es una extensión de Galois de $\mathbb{Q}$ de manera que los únicos elementos fijos por el grupo de automorfismos de $\mathbb{F}$ son los racionales. Tenemos que $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{F})$ actúa en $\mathbb{F}[x]$ permutando los λ_i , de manera que por la Observación 2.2 todos los λ_i son enteros algebraicos, además como es $p(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$ deducimos que $\sigma(p) = p$. Con esto, los coeficientes de p son fijados por el grupo de Galois de la extensión, de manera que son racionales. Por otro lado, son enteros algebraicos pues son una expresión algebraica en los λ_i . Como ya vimos en el ejemplo 2.1, esto nos permite deducir que los coeficientes de p son enteros.

Si ahora definimos $p_k(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i^k)$, los mismos argumentos prueban que los coeficientes de p_k son enteros. Para concluir, si llamamos a_i^k al coeficiente de grado i de p_k , notamos que por ser $|\lambda_i^k| = |\lambda_i|^k = 1^k = 1$ al expandir la expresión de p_k como producto es $|a_i^k| \leq \binom{n}{i}$ (independiente de k). De esta manera, en la lista de los p_k solo aparecen finitos polinomios, entonces las raíces de los p_k son un conjunto finito formado precisamente por las potencias de los λ_i . Deducimos que λ_i es raíz de la unidad para todo i . $\square$

La siguiente herramienta será clave para notar que ciertos elementos son enteros algebraicos.

Proposición 2.16. [15, Theorem 3, chapter 1] Dado p un polinomio de coeficientes enteros algebraicos, toda raíz de p es también entero algebraico.

Con esto estamos en condiciones de enunciar lo siguiente.

Proposición 2.17. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo de números y $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. Consideramos λ tal que $\lambda^2 - \alpha\lambda + 1 = 0$. Entonces, para cualquier valor absoluto no-archimédiano $|\cdot|_*$ en $\mathbb{K}[\lambda]$ es $|\lambda|_* = 1$.

Demostración. A partir de la Proposición 2.16 tenemos que λ es un entero algebraico. Por otro lado, notamos que $\lambda(\alpha - \lambda) = 1$ de manera que λ es invertible con $\lambda^{-1} = \alpha - \lambda$ y su inverso también es un entero algebraico en este cuerpo. Concluimos que es una unidad y a partir del Lema 2.9 tenemos el resultado. $\square$

Una primer aplicación de lo anterior que lo vincula con el resto del trabajo es la siguiente.

Observación 2.18. Dado λ valor propio de una matriz $A \in \mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$, observamos que es un entero algebraico. Como λ^{-1} es valor propio de $A^{-1} \in \mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ también es un entero algebraico. Deducimos que dado un cuerpo de números $\mathbb{K}$ tal que $\lambda \in \mathbb{K}$, λ es una unidad en este cuerpo, de manera que para todo valor absoluto $\mathcal{P}$ -ádico $|\cdot|_*$ que construyamos es $|\lambda|_* = 1$. Un argumento idéntico vale para matrices en $\mathrm{SL}_d(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ para $\mathbb{K}$ cuerpo de números, gracias a la Proposición 2.16.

2.2. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ como grupo de Lie

El objetivo de esta sección es entender la estructura diferenciable de este grupo. En particular, entender los subgrupos a un parámetro y los subgrupos cerrados de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, notando que un subgrupo cerrado propio de este grupo es un grupo de Lie, para luego clasificarlos y notar que, además, es soluble, lo cual será central para el análisis en secciones posteriores.

Nos basamos en el capítulo introductorio de [20].

2.2.1. Álgebra de Lie y mapa exponencial de grupos lineales

Notamos por $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ al *grupo general lineal*, que consiste de las matrices invertibles $n \times n$ de entradas reales, con el producto dado por el producto de matrices. Al identificarlo como un subconjunto de $\mathbb{R}^{n^2}$, este espacio obtiene una topología; además, notamos que este grupo es un abierto del espacio euclídeo, pues es el subconjunto donde la función polinomial $\det$ es distinta de cero. Notamos que el producto y la inversión son funciones continuas para esta topología, pues están dadas por polinomios en las entradas de las matrices y división por la función $\det$. De esta manera, tenemos que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es un grupo topológico.

Nos referiremos a un subgrupo cerrado de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ como un *grupo lineal cerrado*. Todo grupo cerrado hereda una topología como subespacio de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, lo que lo convierte en un grupo topológico.

Ejemplo 2.19. A continuación ejemplos de grupos lineales cerrados:

$$\begin{aligned}\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) &= \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(x) = 1\} \\ \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) &= \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : xx^t = Id \text{ y } \det(x) = 1\} \\ A &= \{x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) : x = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}\} \\ N &= \{x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) : x = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\} \\ P = AN &= \{x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) : x = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\}\end{aligned}$$

Los primeros dos son el *grupo especial lineal* y el *grupo ortogonal*, los siguientes tres serán los grupos que mas nos interesa entender. Todos estos ejemplos son subgrupos cerrados, pues se pueden ver como definidos a partir de ecuaciones polinomiales en las entradas de las matrices.

El estudio de estos grupos se basa en dos herramientas clave y su interlocución: el álgebra de Lie de un tal grupo y el mapa exponencial. Dado $G < \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ grupo lineal cerrado, podemos considerar las curvas suaves $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow G$, es decir, curvas C^∞ en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tal que su imagen está contenida en G . Nos interesaremos particularmente en las que además cumplen que $\gamma(0) = Id$. De esta manera, podemos definir el siguiente objeto,

$$\mathfrak{g} := \{\gamma'(0) : \gamma \text{ es una curva suave en } G \text{ y } \gamma(0) = Id\}.$$

Notamos que, en el caso de que el grupo G fuese una variedad diferenciable a priori, esto no es mas que su tangente en la identidad. Un hecho central, que se deduce a partir de herramientas posteriores (nuevamente, ver [20]) es que $\mathfrak{g}$ es no trivial siempre que el grupo G no sea discreto. Este conjunto consiste de matrices del mismo tamaño que el grupo subyacente, pero que no necesariamente son invertibles ni forman un grupo con el producto matricial.

A partir de técnicas elementales de cálculo de derivadas (ver [20][Introduction]) podemos ver que $\mathfrak{g}$ goza de cierta estructura. En primer lugar, podemos notar que es un espacio vectorial real y que es cerrado bajo el mapa dado por el *corchete de Lie* dado por

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Este corchete cumple dos propiedades clave:

- $[X, X] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ (equivalentemente $[X, Y] = -[Y, X]$).
- Se cumple la identidad de Jacobi:

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

Un espacio vectorial munido de una operación $[\cdot, \cdot]$ lineal en cada variable que cumple con las dos propiedades anteriores se conoce como un *álgebra de Lie*.

En este punto, se vuelve clave buscar alguna fórmula que nos permita entender el vínculo entre la diferenciación de curvas y el mapa $\det$ para determinar las álgebras de

Lie de los grupos que mencionamos anteriormente. Tenemos lo siguiente: si γ es una curva suave de matrices tal que $\gamma(0) = Id$, entonces vale (ver ecuación 0.10 y la posterior prueba en [20])

$$\det(\gamma(t))'(0) = \text{tr}(\gamma'(0))$$

A partir de esto, es inmediato notar que para el grupo $G = \text{SL}_n(\mathbb{R})$, su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ cumple que $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$, donde lo segundo es el espacio de matrices de traza nula (pues la función determinante es constante en el grupo subyacente). Para ver la igualdad, es necesario definir la exponencial de matrices.

Nuestro objetivo ahora es construir un mapa en la dirección inversa, de $\mathfrak{g}$ a G . Para esto, mimetizando la fórmula de la exponencial usual, dada $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ definimos

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

Notamos que trivialmente es $g(\exp A)g^{-1} = \exp gAg^{-1}$.

Tenemos la siguiente proposición,

Proposición 2.20. [20, Proposition 0.11] Dada A matriz $n \times n$ real (o compleja), $\exp A$ está dada por una serie convergente (entrada a entrada). Más aún, vale:

- $\exp X \exp Y = \exp(X + Y)$ si X e Y conmutan.
- $\exp X$ es invertible para toda X .
- El mapa $t \mapsto \exp(tX)$ es una curva suave en $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ que es Id en $t = 0$.
- $(\exp tX)' = X \exp(tX)$.
- $\det(\exp X) = \exp \text{tr}(X)$.
- El mapa $X \mapsto \exp X$ es un mapa C^∞ de $M_n(\mathbb{R})$ en si mismo.

A partir de lo anterior, es inmediato notar que dado $X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$, la curva dada por $t \mapsto e^{tX}$ es una curva suave en $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ tal que es la identidad en $t = 0$ y su derivada es X en $t = 0$, de manera que X está en el álgebra de Lie de $\text{SL}_n(\mathbb{R})$. Esto y lo comentado anteriormente muestran que el álgebra de Lie de $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ es $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$.

Para el caso de un grupo lineal cerrado G , el mismo fenómeno sucede y tenemos la siguiente caracterización de su álgebra de Lie. Notemos $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ al espacio de matrices reales $n \times n$ usual.

Proposición 2.21. ([20][Proposition 0.14]) Si G es un grupo lineal cerrado y X está en su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, entonces $\exp(X)$ pertenece a G . De esta manera

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) : \exp(tX) \in G \ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Ejemplo 2.22. A partir de la igualdad $\det(\exp X) = \exp \text{tr}(X)$ y la proposición anterior tenemos que el álgebra de Lie un subgrupo cerrado de $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ está incluida en el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ de las matrices de traza nula.

2.2.2. Subgrupos lineales cerrados como grupos de Lie

Se denomina *grupo de Lie*, a un grupo topológico G con la estructura extra de que su topología es la de un espacio métrico separable y además es una variedad diferenciable de manera compatible a su topología en cuanto a que los mapas definidos a partir de la multiplicación y la inversión son diferenciables. Para esto se entiende a la multiplicación del grupo como un mapa de $G \times G$ en G y se toma en $G \times G$ la estructura de variedad producto, donde las cartas son los productos de cartas de G . Un primer fascinante resultado que se puede probar a partir de la maquinaria anterior es el siguiente, que nos permite saber exactamente la dimensión de las álgebras que tenemos que entender.

Teorema 2.23. [20, Theorem 0.15] Si G es un grupo lineal cerrado no discreto, entonces G con la topología relativa es un grupo de Lie de dimensión positiva.

Más aún, la dimensión de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ coincide con la dimensión de G . Además, existen entornos abiertos U de 0 en $\mathfrak{g}$ y V de Id en G tal que $\exp: U \rightarrow V$ es un homeomorfismo y $(V, \exp^{-1})$ es una carta compatible.

Además, de este teorema se deduce el siguiente corolario, donde G_0 denota la componente conexa de la identidad en G .

Corolario 2.24. ([20][Corollary 0.20]) Si G es un grupo lineal cerrado y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie, entonces $\exp(\mathfrak{g})$ genera la componente conexa de la identidad G_0 .

Notamos, que en el caso de un grupo conexo (como los vistos en ejemplos anteriores), el corolario anterior se traduce en que nuestro grupo es exactamente el grupo generado por la imagen de la exponencial restringida a su álgebra de Lie. De esta manera, si por ejemplo el álgebra de Lie consiste en matrices diagonales, el grupo también, lo mismo para matrices triangulares superiores e inferiores.

Además, en el entorno V del enunciado anterior, es cierto que todo elemento forma parte de un subgrupo a un parámetro (en particular abeliano). Simplemente, notamos que dado $g \in V \subset G$, existe $X \in U \subset \mathfrak{g}$ con $\exp X = g$, de manera que la curva $t \mapsto \exp tX$ cumple que contiene a g y es un subgrupo a un parámetro.

En vista de lo anterior, enunciamos dos resultados que serán de utilidad.

Lema 2.25. La componente conexa de la identidad G_0 de un grupo de Lie G es normal en G .

Demostración. La conjugación por un elemento $g \in G$ es un homeomorfismo, de manera que lleva componentes conexas en componentes conexas. Como además fijan al elemento $Id \in G_0$, deducimos que dejan invariante a G_0 y tenemos el resultado. $\square$

Dados dos grupos $\Gamma \subset G$, notamos $N_G(\Gamma)$ al normalizador en G de Γ , es decir

$$N_G(\Gamma) = \{g \in G : g\gamma g^{-1} \in \Gamma \quad \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

Corolario 2.26. Sean $H \subset G$ un subgrupo cerrado de un grupo de Lie. Entonces

$$H \subset N_G(H_0).$$

2.2.3. Subgrupos cerrados de $SL_2(\mathbb{R})$

El objetivo de esta sección es mostrar el siguiente resultado:

Lema 2.27. Sea G un subgrupo cerrado de $SL_2(\mathbb{R})$ no discreto, distinto de $SL_2(\mathbb{R})$. Entonces G es soluble.

La utilidad principal para este trabajo reside en que un grupo libre no es soluble, y los subgrupos de un grupo soluble son también solubles. Luego si un subgrupo libre de $SL_2(\mathbb{R})$ no es discreto, su clausura es un subgrupo de Lie del grupo ambiente que no puede ser soluble.

Resumimos lo anterior en el siguiente resultado:

Corolario 2.28. Sea $\Gamma < SL_2(\mathbb{R})$ subgrupo libre (o solamente no soluble). Entonces Γ es discreto o denso en $SL_2(\mathbb{R})$

Nuestro argumento para el Lema 2.27 consiste en mirar las posibles álgebras de Lie de estos grupos y notar que dan lugar o bien a grupos conjugados al grupo P de matrices triangulares superiores, el cual es soluble, o bien a grupos abelianos como componente conexa de la clausura de Γ . Luego analizaremos el normalizador de tal componente conexa (el cual contiene a la clausura de Γ) para concluir la prueba del Lema.

Digresión sobre grupos solubles.

Dado un grupo G , podemos considerar su serie derivada:

$$G = G^{(0)} \supset G^{(1)} \supset \dots \supset G^{(n)} \supset \dots$$

donde $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$ y $[A, B]$ es el subgrupo generado por los conmutadores $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ para $a \in A$, $b \in B$.

Decimos entonces que G es *soluble* si existe n tal que $G^{(n)} = \{Id\}$.

Notamos que para un grupo abeliano el primer término en su serie derivada es trivial, de manera que es soluble. Un ejemplo de grupo soluble no abeliano es el grupo P del ejemplo 2.19. Además, la imagen por un homomorfismo de un grupo soluble es soluble, en particular, dado $H \subset G$ subgrupo soluble, sus conjugados por cualquier elemento del grupo ambiente son solubles. Mencionamos además que claramente un subgrupo de un grupo soluble es soluble.

Ejemplo 2.29. ■ Sea B_n , el grupo de matrices triangulares superiores en $GL_n(\mathbb{K})$ para $\mathbb{K}$ cualquier cuerpo es soluble, entonces B_n es soluble. Un cálculo directo nos permite ver que si $A, B \in B_n$, $(AB)_{ii} = A_i B_i$ de manera que $[A, B]_{ii} = 1$, entonces si U es el subgrupo de matrices triangulares superiores con 1 en la diagonal tenemos que $[B_n, B_n] = U$. Al considerar los subgrupos

$$U_k = \{u \in U : u_{ij} = 0 \text{ si } j - i < k\}$$

tenemos que

$$U = U_1 > U_2 > \dots > U_n = \{Id\}$$

y además

$$[U_k, U_l] \subset U_{k+l}$$

lo que muestra que U es soluble y por lo tanto B_n también.

En particular, cualquier grupo formado por matrices triangulares superiores es soluble, por ser un subgrupo de este.

- El grupo de rotaciones $\mathrm{SO}(2)$ en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ es soluble, más aun es abeliano.
- El grupo

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^\times \right\}$$

es soluble.

Para ver esto, consideramos los grupos

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^\times \right\}, \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^\times \right\}.$$

donde un cálculo directo muestra que

$$[H, H] = A, \quad H^{(2)} = [H^{(1)}, H^{(1)}] = [A, A] = \{\mathrm{Id}\},$$

y H es soluble.

Observación 2.30. Dado $n \geq 2$, F_n el grupo libre de rango n , no es soluble.

Demostración. Como F_n es no abeliano, tenemos que $[F_n, F_n]$ es no trivial. Además, tampoco es abeliano pues tomando dos elementos a, b del generador es inmediato observar que $[a, b]$ y $[a, b^2]$ no conmutan. Con esto, a partir del teorema de Nielsen–Schreier (ver sección 2.2.4 de [26]) que dice que todo subgrupo de un grupo libre es libre o cíclico, deducimos que $[F_n, F_n]$ es nuevamente un grupo libre (ahora de rango infinito). Iterando este razonamiento, tenemos que la serie derivada de F_n nunca se estabiliza en el grupo trivial. $\square$

Comentamos algo que será de utilidad en secciones posteriores.

Observación 2.31. Dado un grupo P soluble, su imagen por cualquier morfismo de grupos es soluble. En particular **no** contiene un grupo libre no abeliano.

Demostración del Lema 2.27

Fijemos G subgrupo cerrado, no-discreto de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Notamos que $0 < \dim \mathfrak{g} \leq 3$.

Dividiremos nuestro análisis en dos casos.

$\dim \mathfrak{g} = 1$

Comenzamos notando que un elemento $X \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ es de uno de tres tipos, diferenciados por el signo de $\det X$. Para ver esto, notamos que el polinomio característico de X está dado por $p_X(\lambda) = \lambda^2 + \det X$, de manera que distinguimos 3 casos:

- Caso elíptico: $\det X > 0$ de manera que X tiene valores propios complejos y es conjugada a $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$.
- Caso hiperbólico: $\det X < 0$ de manera que X es diagonalizable y por lo tanto conjugada a $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$.
- Caso parabólico (nilpotente): $\det X = 0$, de manera que X es nilpotente pues su polinomio característico es X^2 y es conjugada a $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Por el Teorema 2.23 y el Corolario 2.24, tenemos que la dimensión de G es 1 y $G_0 = \langle \exp \mathfrak{g} \rangle$. La clasificación anterior nos permite asegurar entonces que a menos de conjugación G_0 consiste entonces de uno de tres grupos: el grupo de matrices ortogonales $SO(2)$, el grupo A de matrices diagonales o el grupo U de matrices unipotentes triangulares superiores. Gracias al Corolario 2.26, tenemos que entonces G está en el normalizador de uno de estos tres grupos, los cuales calculamos en el Apéndice C y son exactamente los vistos en el Ejemplo 2.29, los cuales son todos solubles, de manera que G es soluble por ser un subgrupo de los mismos.

$\dim \mathfrak{g} = 2$

Veamos que $\mathfrak{g}$ no puede ser un álgebra abeliana. Sean X, Y una base de $\mathfrak{g}$. La condición $[X, Y] = 0$ nos permite ver que X e Y son del mismo tipo y ambas simultáneamente conjugadas a una de las 3 formas explícitas anteriores. Con esto deducimos que existe un real α tal que $X = \alpha Y$, de manera que deduciríamos $\dim \mathfrak{g} = 1$, absurdo.

Dicho lo anterior, tenemos que dada $\{X, Y\}$ una base de $\mathfrak{g}$, la subálgebra $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ está generada por $[X, Y] \neq 0$ de manera que es de dimensión 1. Luego renombrando podemos considerar un X en $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ y completarlo a una base $\{X, Y\}$ de manera que a menos de re escalar el segundo elemento es $[X, Y] = X$ (esta idea es clásica y se puede ver por ejemplo en [12][Theorem 3.1]).

Si notamos

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$[X, Y] = \begin{pmatrix} bz - cy & 2ay - 2bx \\ 2cx - 2az & cy - bz \end{pmatrix}$$

De manera que $[X, Y] = X$ se traduce en el sistema

$$\begin{cases} bz - cy = a \\ 2ay - 2bx = b \\ 2cx - 2az = c \end{cases}$$

A partir de asumir alguno de los a, b, c distinto de cero (o considerar el tipo de X y tomar su forma explícita en cierta base), en los tres casos deducimos $\det(X) = -a^2 - bc = 0$,

de manera que existe una matriz $h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$hXh^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde $c' = 0$ se deduce por la invarianza de la traza.

Por ultimo, renombrando X, Y a hXh^{-1} y hYh^{-1} , tenemos que $[X, Y] = X$ se traduce en

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = X = [X, Y] = \begin{pmatrix} bz & -2bx \\ 0 & -bz \end{pmatrix}$$

de donde resulta $z = 0$ y $x = -1/2$ y por lo tanto

$$Y = \begin{pmatrix} -1/2 & y \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Con esto, logramos conjugar las matrices X e Y en matrices triangulares superiores, lo cual se mantiene al tomar la exponencial, mapa que además es sobreyectivo sobre este grupo. En otras palabras, $hG_0h^{-1} = B$. Con esto, tenemos que a menos de conjugar es $G \subset N_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}(B) = B$ de manera que es soluble por lo comentado en el Ejemplo 2.29, donde la última igualdad se prueba en el Apéndice C.

2.2.4. Morfismos de grupos de Lie

Supongamos que tenemos un morfismo de grupos de Lie $\rho: G \rightarrow H$. Recordando que el tangente en la identidad de estos grupos se identifica con sus álgebras de Lie, podemos entonces considerar el diferencial del morfismo $d\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$. Es central para la teoría que $d\rho$ resulta un morfismo de álgebras de Lie. El siguiente resultado nos muestra que para entender ρ podemos apoyarnos en la relación entre ρ , $d\rho$ y el mapa exponencial de cada grupo.

Teorema 2.32. [20, Theorem 0.23] Si $\rho: G \rightarrow H$ es un morfismo de grupos de Lie y $d\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ su diferencial, entonces

$$\rho \circ \exp_{\mathfrak{g}} = \exp_{\mathfrak{h}} \circ d\rho$$

Con esto, el diferencial de un morfismo de grupos de Lie lo determina en la componente conexa de la identidad del grupo. De esta manera, para grupos conexos (como $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$) es suficiente clasificar los posibles morfismos de álgebras de Lie de sus respectivas álgebras de Lie para clasificar todo posible morfismo de grupo de Lie del grupo.

2.3. Conceptos básicos de geometría hiperbólica y subgrupos discretos de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ y $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$

Una de las fuentes principales de ejemplos de grupos de Lie, en particular de matrices, son los grupos de isometrías de variedades Riemannianas. A continuación describiremos dos casos particulares de lo anterior, que permiten una comprensión mucho mas completa de la geometría de los espacios y la estructura de los grupos involucrados.

2.3.1. Isometrías del espacio hiperbólico

La exposición a continuación se basa fuertemente en [18].

Transformaciones de Möebius

Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, podemos definir su *transformación de Möebius* $T_g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a partir de la fórmula

$$g_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Las transformaciones de Möebius forman un grupo con la composición y el mapa T que a cada matriz le asigna su transformación correspondiente es un morfismo de grupos. Observamos que dada una transformación, existen dos matrices de determinante 1 que la representan, opuestas. Luego, el grupo de las transformaciones de Möebius es isomorfo al cociente $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm Id\} = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Podemos observar que si consideramos el subgrupo de transformaciones de Möebius de coeficientes reales, isomorfo a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm Id\}$, que el mismo deja invariante a la recta real y preserva el semiplano superior de $\mathbb{C}$, de manera que actúa en el mismo por homeomorfismos.

Plano hiperbólico y $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

Uno de los objetos centrales de estudio es el *plano hiperbólico* $\mathbb{H}^2$. Una forma de definirlo es a través del modelo del semiplano superior en $\mathbb{C}$ dado por $\mathbb{H}^2 = \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ dotado de la *métrica hiperbólica*

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}.$$

Observamos que dado $v \in T_{x+iy}\mathbb{H}^2$, si notamos $|v|_{x+iy}$ a su norma respecto a la métrica y $|v|$ a su norma como vector de $\mathbb{R}^2$, la definición de esta métrica no es más que la igualdad

$$|v|_{x+iy} = \frac{|v|}{y}$$

Con esto, por ejemplo, dada una curva $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ diferenciable a trozos tal que $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, su *largo hiperbólico* (o solamente *largo* cuando esto esté claro) está dado por

$$l(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt$$

y podemos definir la distancia entre dos puntos como el ínfimo de longitudes de curvas que los unen. Para este espacio, las *geodésicas* (curvas de longitud mínima respecto a esta métrica) son las semirectas y semicírculos ortogonales al eje real $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0\}$.

Al considerar las transformaciones de Möebius reales en $\mathbb{H}^2$, un cálculo directo (apoyándonos en que las transformaciones de Möebius son holomorfas), nos permite notar que dada $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ su diferencial $dg_z: T_z\mathbb{H}^2 \rightarrow T_{g(z)}\mathbb{H}^2$ se puede ver como la transformación

lineal dada por multiplicar por el número complejo $1/(cz + d)^2$. Luego, dado $v \in T_z\mathbb{H}^2$ para $z = x + iy$ es

$$|dg_z(v)|_{g(z)} = \frac{1}{\operatorname{Im}(g(v))} \left| \frac{v}{(cz + d)^2} \right| = \frac{|cz + d|^2}{y} \left| \frac{v}{(cz + d)^2} \right| = |v|/y = |v|_z.$$

Luego estas transformaciones dan lugar a isometrías de $\mathbb{H}^2$. Es claro que además, las mismas preservan orientación. Notando $\operatorname{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ al grupo de isometrías que preservan orientación y $\operatorname{Isom}(\mathbb{H}^2)$ al grupo completo de isometrías, tenemos lo siguiente.

Teorema 2.33. [18, Theorem 1.3.1] El grupo $\operatorname{Isom}(\mathbb{H}^2)$ es igual al grupo generado por las transformaciones de Möbius junto al mapa $z \mapsto -\bar{z}$, que revierte orientación. De esta manera tenemos el isomorfismo $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{R}) \simeq \operatorname{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$.

A partir de [18, Theorem 2.2.6] sabemos que es equivalente que un subgrupo $\Gamma < \operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$ sea discreto a que su acción en el plano hiperbólico sea propia (ver Definición 2.40). Más aún, es equivalente que el grupo sea discreto y sin torsión, a que su acción cumpla que todo punto tiene un entorno que se envía homeomórficamente al cociente $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$. Con esto, damos nuestra definición de *superficie hiperbólica*.

Definición 2.34. Llamaremos superficie hiperbólica a un cociente $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ donde $\Gamma < \operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$ es un subgrupo discreto y sin torsión.

La acción de $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$ sobre el plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ por transformaciones de Möbius es transitiva, y el estabilizador del punto $i \in \mathbb{H}^2$ es el subgrupo compacto $\operatorname{PSO}(2)$. En particular, $\mathbb{H}^2$ puede identificarse con el espacio homogéneo

$$\mathbb{H}^2 \simeq \operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})/\operatorname{PSO}(2).$$

Este es un caso particular de un hecho general: si un grupo de Lie G actúa transitivamente sobre una variedad X con estabilizador K , entonces X es naturalmente un espacio homogéneo de la forma G/K .

Más aún, bajo estas hipótesis, la acción de G se levanta de manera natural al fibrado tangente unitario T^1X , y dicho levantamiento es nuevamente transitivo. En el caso que nos ocupa, la acción de $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{H}^2$ induce una acción transitiva sobre el fibrado tangente unitario $T^1\mathbb{H}^2$, dada explícitamente por

$$g \cdot (z, v) = (g(z), dg_z(v)),$$

donde $z \in \mathbb{H}^2$ y $v \in T_z\mathbb{H}^2$ es un vector unitario. Recordemos que $T^1\mathbb{H}^2$ es un fibrado con fibra compacta S^1 , homeomorfo a $\mathbb{H}^2 \times S^1$.

En este contexto se obtiene la siguiente identificación fundamental.

Teorema 2.35. [18, Theorem 2.1.1] Existe un homeomorfismo entre $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$ y el fibrado tangente unitario $T^1\mathbb{H}^2$ tal que la acción de $\operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$ sobre sí mismo por multiplicación a izquierda se corresponde con la acción inducida en $T^1\mathbb{H}^2$ por transformaciones de Möbius.

Sea ahora $\Gamma < \operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$ un subgrupo discreto sin torsión. Consideramos el espacio homogéneo $\Gamma \backslash \operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$ de coclases a izquierda. Mediante la identificación anterior, este

espacio puede interpretarse como el cociente $\Gamma \backslash T^1 \mathbb{H}^2$. Si $D \subset \mathbb{H}^2$ es una región fundamental para la acción de Γ sobre $\mathbb{H}^2$, entonces $T^1 D$ es una región fundamental para la acción de Γ sobre $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Dado que la proyección natural

$$T^1(\Gamma \backslash \mathbb{H}^2) \longrightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$$

tiene fibra compacta, se deduce el siguiente principio general: el cociente $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ es compacto si y sólo si $\Gamma \backslash \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ es compacto. En consecuencia, al referirnos a un subgrupo discreto $\Gamma < \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ como cocompacto, no habrá ambigüedad entre estas dos nociones.

Espacio hiperbólico tridimensional y $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$

Con lo anterior en mente, vamos ahora a considerar el espacio $\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \times (0, +\infty)$ y extender la acción de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ en $\mathbb{C}$ por transformaciones de Möebius (ahora de coeficientes complejos) a una acción que todavía preserve orientación y ángulos en $\mathbb{H}^3$. Con este requisito, se puede probar que la extensión es única y da un modelo del espacio hiperbólico (de dimensión 3).

Para obtener una descripción explícita, podemos considerar los cuaterniones de Hamilton $\mathcal{H}$ (ver [2] para lo que sigue). Recordamos que estos consisten en los elementos de la forma $x_0 + \mathbf{i}x_1 + \mathbf{j}x_2 + \mathbf{k}x_3$ con $x_i \in \mathbb{R}$, donde además consideramos la estructura de espacio vectorial real donde $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ se transforma en una base y producto definido a partir de las identidades $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ y $\mathbf{k} = \mathbf{i}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{i}$ y extender linealmente. Esto hace a este espacio un álgebra asociativa (no-conmutativa). A partir de la operación de conjugación dada por

$$\overline{x_0 + \mathbf{i}x_1 + \mathbf{j}x_2 + \mathbf{k}x_3} = x_0 - \mathbf{i}x_1 - \mathbf{j}x_2 - \mathbf{k}x_3$$

podemos notar que $|q| := q\bar{q} \in \mathbb{R}$ de manera que para un cuaternión no nulo q es $q^{-1} = \bar{q}/|q|$.

Con esto, si identificamos el subespacio generado por $1, \mathbf{i}$ con $\mathbb{C}$ podemos escribir

$$\mathbb{H}^3 = \{z + \mathbf{j}t : z \in \mathbb{C}, t > 0\}$$

tenemos que la acción de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ está dada por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (z + \mathbf{j}t) = \frac{a(z + \mathbf{j}t) + b}{c(z + \mathbf{j}t) + d} = \frac{(az + b)\overline{(cz + d)} + a\bar{c}t^2 + \mathbf{j}t}{|cz + d|^2 + |c|^2t^2}$$

donde la división de cuaterniones es a derecha, es decir $\frac{X}{Y} = XY^{-1}$.

En este caso, la *métrica hiperbólica* está dada por

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dt^2}}{t}$$

es decir, la norma de un vector v en el tangente en $z + \mathbf{j}t$ es $|v|_{z+\mathbf{j}t} = \frac{|v|}{t}$ donde $|v|$ es la norma euclídea (o cuaterniónica) usual (ver por ejemplo el capítulo 1 de [22]).

Teorema 2.36. Con la fórmula definida anteriormente el grupo $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ actúa por isometrías en $\mathbb{H}^3$. Además, el grupo $\mathrm{PSU}(2)$ es el estabilizador del punto $\mathbf{j}$ y la acción natural en el tangente unitario $T^1\mathbb{H}^3$ es transitiva con estabilizador trivial en los marcos ortonormales de orientación positiva de $\mathbb{H}^3$.

Gracias a este resultado, nuevamente tenemos que dado un grupo discreto y sin torsión $\Gamma < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ el cociente $\Gamma \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ resulta compacto exactamente cuando el cociente $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$ resulta compacto. De esta manera, no hay ambigüedad al decir que un subgrupo discreto $\Gamma < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ es cocompacto y llamaremos 3-variedad hiperbólica compacta al cociente $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$.

Concluimos esta sección observando que, dada M una 3-variedad hiperbólica compacta al identificar $\pi_1(M) = \Gamma < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ tenemos que además de ser Γ un subgrupo discreto cocompacto sin torsión (por ser M una variedad), cumple que todo elemento $\gamma \in \Gamma$ es *loxodrómico*. Estos son las isometrías que dejan invariante una geodésica l_γ de $\mathbb{H}^3$, actuando como una traslación en la misma fijando dos puntos en el borde al infinito $\partial\mathbb{H}^3$ (ver [3, Lemma B.4.4]).

Comentarios sobre curvatura negativa

Al definir la métrica hiperbólica de $\mathbb{H}^2$, integrando obtenemos la definición de área hiperbólica $\mu(A)$ de un conjunto $A \subset \mathbb{H}^2$ como

$$\mu(A) = \int_A \frac{1}{y^2} dx dy$$

Observamos dos particularidades, en primer lugar esta definición de área se vuelve invariante para la acción de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ ([18, Theorem 1.4.1]), en segundo lugar, tenemos la fórmula de Gauss-Bonnet que nos dice que el área de un triángulo geodésico (es decir, cuyos lados son segmentos geodésicos) está determinada por sus ángulos.

Teorema 2.37. [18, Theorem 1.4.2] Sea A un triángulo geodésico hiperbólico con ángulos α, β, γ . Entonces $\mu(A) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$.

Por otro lado, a partir de la fórmula de Gauss-Bonnet que nos dice que dado un triángulo geodésico A con ángulos interiores α, β, γ en una superficie de curvatura Gaussiana K es

$$\int_A K(p) dp + (\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) = 2\pi$$

que se simplifica en $\int_A K(p) dp = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$. Luego tenemos la identidad

$$-1 = \frac{\int_A K(p) dp}{\mu(A)}$$

que por continuidad de la curvatura, tomando una sucesión de triángulos geodésicos con área tendiendo a cero y que todos contengan a un punto x , es $K(x) = -1$. Aplicando este razonamiento, deducimos que la curvatura es constante igual a -1 .

Como esta propiedad es local, tenemos que todo cociente de $\mathbb{H}^2$ por un subgrupo discreto de isometrías hereda tener curvatura constante -1 , por lo que se las llama superficies

hiperbólicas. En el sentido contrario, dada una superficie S de curvatura constante -1 , su cubrimiento universal será un espacio que hereda esta curvatura y es además completo y simplemente conexo. Es posible ver que estas características determinan el espacio a menos de isometría y resulta ser isométrico a $\mathbb{H}^2$ y el grupo fundamental de nuestra superficie se identifica con un subgrupo discreto de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. En resumen, toda superficie hiperbólica se realiza como un cociente de $\mathbb{H}^2$ por un subgrupo discreto de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Argumentos similares, nos permiten ver que el mismo fenómeno es cierto para variedades de dimensión 3, con curvatura seccional constante igual a -1 . En este caso, las realizaremos como los cocientes de $\mathbb{H}^3$ por subgrupos discretos de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ que ya describimos. Lo anterior (en toda su generalidad) se puede resumir en el siguiente resultado:

Teorema 2.38. [3, Theorem B.1.9] Si M es una n -variedad Riemanniana conexa con curvatura seccional constante igual a -1 , entonces M es el cociente de $\mathbb{H}^n$ por un grupo de isometrías que actúa libremente. En particular, M es una variedad hiperbólica.

Para un tratamiento más formal de lo anterior recomendamos la sección A.6 de [7].

Por último, citamos un resultado que comúnmente se menciona como “casi todas las superficies son hiperbólicas”, el clásico teorema del polígono de Poincaré. Es un caso particular del Teorema [18, Theorem 4.3.2] enunciado como el Corolario [18, Corollary 4.3.3]. Dada una superficie compacta orientable, se puede asociar a la misma un número natural g conocido como su *género*, el mismo es un invariante topológico que clasifica completamente a las mismas. Intuitivamente, es el número de “agujeros” de la superficie, siendo por ejemplo 0, 1 y 2 el género de la esfera, el toro y el bitoro respectivamente.

Teorema 2.39. Dado $g \geq 2$, existe un subgrupo discreto $\Gamma < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tal que la acción en el plano hiperbólico no tiene puntos fijos y $\mathbb{H}^2/\Gamma$ es homeomorfo a la superficie compacta orientable de género g .

2.3.2. Subgrupos discretos de isometrías y borde de Gromov

Un resultado central para nuestro trabajo será el, para nada trivial, hecho de que el grupo fundamental de una superficie hiperbólica compacta no es isomorfo al grupo fundamental de una 3-variedad hiperbólica compacta.

A partir de la sección anterior, identificamos a los grupos anteriores como subgrupos de isometrías de ciertos espacios métricos. Los mismos cumplen ser *espacios de longitudes* en la terminología de [7], es decir, un espacio en el que la distancia entre dos puntos cualesquiera es igual al ínfimo del largo de las curvas entre estos puntos, que además son hiperbólicos. Pasamos ahora a estudiar resultados y herramientas que se basan exclusivamente en esta caracterización, contextualizadas en la teoría geométrica de grupos.

Quasi-isometrías y Lema de Svarc-Milnor

Definición 2.40. Dado Γ grupo que actúa por isometrías en un espacio métrico propio X , decimos que la acción es *propia* si para cada $x \in X$ existe un número $r > 0$ tal que el conjunto $\{\gamma \in \Gamma : \gamma \cdot B(x, r) \cap B(x, r) \neq \emptyset\}$ es finito.

Notamos que para un grupo construido como el grupo de transformaciones de cubrimiento que dan lugar a una variedad, estos conjuntos no sólo son finitos, sino que

solamente poseen al elemento identidad. Esto no es más que el hecho de que todo elemento en el cubrimiento posee un entorno que se manda homeomórficamente al cociente.

Como comentamos, si asumimos que $\Gamma < \text{Isom}(X)$ es además discreto, tenemos que su acción es propia. Al suponer que más aún, la acción es cocompacta, es decir, el espacio métrico $\Gamma \backslash X$ es compacto, tenemos el siguiente resultado clásico, el Lema de Svarc-Milnor, cuya profundidad reside en que nos permite dotar al propio grupo de una geometría íntimamente relacionada con la geometría a gran escala del espacio en el que actúa.

Comentemos ciertos conceptos previos, que aparecen naturalmente como objetos de interés en sí mismos.

Supongamos que un grupo Γ es finitamente generado, esto se puede pensar ya como una condición geométrica intrínseca sobre el grupo. Si notamos S a un generador finito, podemos definir el largo de palabra de un elemento $|\gamma|_S = \min\{k \geq 0 : \gamma = s_1 \cdots s_k \text{ donde } s_i \in S \cup S^{-1}\}$ y luego definir una distancia como $d(\gamma, \eta) = |\gamma^{-1}\eta|_S$. Notamos que esta no es más que la métrica natural en el grafo de Cayley de este grupo construido a partir del generador S : para construir este grafo consideramos como conjunto de vértices los elementos de Γ y ponemos una arista entre pares de vértices de la forma $(\gamma, \gamma s)$ con $\gamma \in \Gamma, s \in S$ y la identificamos como un intervalo isométrico a $[0, 1]$. Claramente, distintas elecciones de conjunto generador dan lugar a distintas métricas en el grupo Γ , de manera que esta elección es no canónica a priori, sin embargo, logramos capturar una fuerte equivalencia a partir del concepto de quasi-isometría.

Definición 2.41. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos. Decimos que un mapa $f: X \rightarrow Y$ es una *quasi-isometría* (o una (λ, ϵ) -quasi-isometría para llevar cuenta de las constantes) si existen constantes $\lambda \geq 1, \epsilon \geq 0$ y $C \geq 0$ tales que para todo $x, z \in X$ es

$$\frac{1}{\lambda}d_X(x, z) - \epsilon \leq d_Y(f(x), f(z)) \leq \lambda d_X(x, z) + \epsilon$$

y además todo punto $y \in Y$ está en el C -entorno de un punto en la imagen de f . En el caso de que esto último no se cumpla, hablamos de un encaje quasi-isométrico.

El concepto de quasi-isometría es central para la "geometría a gran escala", donde interesan no las propiedades locales de un espacio, sino propiedades globales que se puedan lograr transformar en invariantes apropiados.

Tenemos entonces la siguiente observación:

Observación 2.42. Sean S y T dos generadores finitos de un grupo Γ . Entonces las métricas de palabra inducidas son quasi-isométricas, donde la quasi-isometría es el mapa identidad.

Es claro que dos grupos isomorfos son en particular quasi-isométricos, de manera que esta es una noción mas débil de equivalencia entre grupos.

Interesantemente, en nuestro caso, no necesitamos agregar la hipótesis de ser finitamente generado a nuestros grupos, dado que esto es una propiedad que se deduce de su acción a partir del siguiente teorema y su posterior corolario.

Teorema 2.43. [7, I.8, Theorem 8.10] Sea X un espacio topológico y Γ un grupo actuando en X por homeomorfismos. Supongamos que existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $X = \Gamma \cdot U$. Entonces

- Si X es conexo, el conjunto $S = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \cdot U \cap U \neq \emptyset\}$ genera Γ .
- Sea A_S el conjunto de símbolos a_s indexado en S . Si X y U son ambos conexos por caminos y X es simplemente conexo, entonces $\Gamma = \langle S, \mathcal{R} \rangle$ donde

$$\mathcal{R} = \{a_{s_1} a_{s_2} a_{s_3}^{-1} : s_i \in S; U \cap s_1 U \cap s_3 U \neq \emptyset; s_1 s_2 = s_3 \text{ en } \Gamma\}$$

Corolario 2.44. [7, I.8, Corollary 8.11] Un grupo es finitamente presentado si y sólo si actúa de manera propia y cocompacta por isometrías en un espacio geodésico simplemente conexo.

Pasamos a enunciar el resultado principal de esta sección, que nos permite identificar la geometría con la que acabamos de dotar a nuestros grupos.

Proposición 2.45 (Lema de Svarc-Milnor). [7, I.8, Proposition 8.19] Sea X un espacio de longitudes. Si Γ actúa de manera propia y cocompacta por isometrías en X , entonces Γ es finitamente generado y para cualquier elección de punto base $x_0 \in X$, el mapa orbital $\gamma \mapsto \gamma \cdot x_0$ es una quasi-isometría.

Con esto, estamos en condiciones de observar lo siguiente.

Observación 2.46. El grupo fundamental de una superficie hiperbólica compacta, al ser identificado con un subgrupo discreto y cocompacto de isometrías de $\mathbb{H}^2$, resulta finitamente generado y quasi-isométrico con la métrica de palabra inducida al propio $\mathbb{H}^2$. De la misma manera, tenemos que el grupo fundamental de una 3-variedad hiperbólica compacta es quasi-isométrico a $\mathbb{H}^3$.

Espacios δ -hiperbólicos y borde de Gromov

A la hora de caracterizar a los espacios hiperbólicos, numerosas definiciones aparecen. La sorprendentemente concisa (y general) definición a continuación (ver [7][Chapter III]) se atribuye popularmente a Gromov y se la conoce como espacios " δ -hiperbólicos". La utilidad central, es que ser hiperbólico en este sentido es un invariante de quasi-isometría, y es además suficiente para definir un borde al infinito en nuestros espacios, que será nuevamente un invariante de quasi-isometría.

Sea $\delta > 0$. Un triángulo geodésico en un espacio métrico X se dice δ -fino si cada lado está contenido en el δ -entorno de la unión de los lados restantes.

Definición 2.47. Un espacio geodésico X es δ -hiperbólico si todo triángulo geodésico en X es δ -fino.

Si existe algún δ tal que un espacio es δ -hiperbólico, simplemente diremos que el espacio es hiperbólico.

Observación 2.48. Los espacios hiperbólicos $\mathbb{H}^n$ son hiperbólicos en el sentido anterior. Una forma de verlo para $\mathbb{H}^2$, es a partir de Gauss-Bonnet deduciendo que el área de todo triángulo está acotada por π , de manera que hay una cota en el diámetro de un semicírculo inscrito en un triángulo geodésico. Para $\mathbb{H}^n$, podemos notar que todo triángulo geodésico vive en una copia isométrica de $\mathbb{H}^2$, de manera que el análisis anterior es suficiente.

Teorema 2.49. [7, III, Theorem 1.9] Sean X e Y espacios métricos geodésicos y $f: X \rightarrow Y$ una quasi-isometría. Entonces si Y es hiperbólico X también.

En otras palabras, si Y es δ -hiperbólico y f una (λ, ϵ) -quasi-isometría, entonces X es δ' hiperbólico para δ' que se expresa en función de δ, λ y ϵ . Intuitivamente, a menos de ajustes (cuantificables a partir de las constantes de quasi-isometría), un encaje quasi-isométrico envía un triángulo geodésico de X en un triángulo en Y que resulta δ -fino a partir de aproximarlos por un triángulo geodésico gracias al Lema de Morse, luego ajustando nuestro δ' deducimos la hiperbolicidad (se puede encontrar esta prueba en [7]).

Observación 2.50. Los grupos fundamentales de superficies y 3-variedades hiperbólicas compactas son δ -hiperbólicos. En la Observación 2.48 establecimos que $\mathbb{H}^2$ y $\mathbb{H}^3$ son espacios δ -hiperbólicos (con sus respectivos δ) de manera que el Lema de Svarc-Milnor 2.45 nos da una quasi-isometría entre estos espacios y los grupos fundamentales anteriores y concluimos con el Teorema 2.49.

Pasamos ahora a describir el borde de Gromov de un espacio δ -hiperbólico. La idea intuitiva es considerar los fines de rayos geodésicos, de manera que lo definiremos como clases de equivalencia apropiadas en los mismos. Dos rayos geodésicos $c, c': [0, \infty) \rightarrow X$ en un espacio métrico X se dicen asintóticos si $\sup_t d(c(t), c'(t))$ es finito, lo cual es equivalente a que la distancia de Hausdorff entre las imágenes sea finita. Para el análisis, es necesaria la siguiente definición:

Definición 2.51. Una (δ, ϵ) -quasi-geodésica en un espacio métrico X es un (δ, ϵ) -encaje quasi-isométrico $c: I \rightarrow X$ donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$, o en algunos casos de interés, la intersección de $\mathbb{Z}$ con un intervalo. Explícitamente,

$$\frac{1}{\delta}|t - t'| - \epsilon \leq d(c(t), c(t')) \leq \delta|t - t'| + \epsilon$$

para todo $t, t' \in I$. Si $I = [0, \infty)$, decimos que c es un rayo quasi-geodésico.

Definimos entonces que dos rayos quasi-geodésicos son *asintóticos* si la distancia de Hausdorff entre sus imágenes es finita. Esto resulta en una relación de equivalencia en los rayos quasi-geodésicos. A partir de esta definimos ∂X como las clases de equivalencia de rayos geodésicos y $\partial_q X$ como las clases de equivalencia de rayos quasi-geodésicos. En cada caso, inspirados por la idea intuitiva, notamos por $c(\infty)$ la clase de equivalencia de c . La necesidad de emplear quasi-geodésicas, reside en que dado un rayo geodésico c en un espacio X y una quasi-isometría $f: X \rightarrow Y$, el mapa $f \circ c: [0, \infty) \rightarrow Y$ resulta una quasi-geodésica (no hay razón para que sea un rayo geodésico, dado que las quasi-isometrías no son ni siquiera continuas a priori).

Este tecnicismo no genera grandes dificultades a partir del siguiente Lema. Recordamos que un espacio métrico es *propio* si toda bola cerrada es compacta.

Lema 2.52. [7][III, Lemma 3.1] Si X es un espacio δ -hiperbólico propio, entonces el mapa natural de ∂X en $\partial_q X$ es una biyección: para cada $p \in X$ y $\zeta \in \partial X$ existe un rayo geodésico $c: [0, \infty) \rightarrow X$ con $c(0) = p$ y $c(\infty) = \zeta$.

Es aquí donde la hiperbolicidad nuevamente juega un papel clave, pues este hecho, que se puede pensar como que toda quasi-geodésica es 'acompañada' por una geodésica (el Lema de Morse que ya mencionamos), es propio de los espacios hiperbólicos y está lejos de ser cierto en otros espacios.

Observación 2.53. El borde de Gromov de $\mathbb{H}^2$ es homeomorfo al círculo S^1 y el de $\mathbb{H}^3$ es homeomorfo a la esfera S^2 .

Para ver con más claridad el ejemplo anterior, recomendamos considerar los modelos del disco y bola de Poincaré para los espacios $\mathbb{H}^2$ y $\mathbb{H}^3$, donde se dan métricas en el disco y bola unidad que los hacen isométricos a los dados al inicio de esta sección, donde el hecho de que dos rayos geodésicos sean asintóticos para la métrica se corresponde a la convergencia al mismo punto en el círculo o esfera en el borde para la topología usual (ver [7]).

El siguiente resultado nos dice que el borde de Gromov es, a menos de homeomorfismo, un invariante de quasi-isometría.

Teorema 2.54. [7, III, Theorem 3.9] Sean X, Y espacios δ -hiperbólicos propios. Si $f: X \rightarrow Y$ es un encaje quasi-isométrico, entonces $c(\infty) \mapsto (f \circ c)(\infty)$ define un encaje topológico $f_\partial: \partial X \rightarrow \partial Y$. Si f es una quasi-isometría, f_∂ es un homeomorfismo.

Podemos ahora enunciar el resultado principal de esta sección, que nos dirá en particular que el grupo fundamental de una superficie compacta no es isomorfo al grupo fundamental de una 3-variedad hiperbólica compacta.

Proposición 2.55. El grupo fundamental de una superficie hiperbólica compacta no es quasi-isométrico a el grupo fundamental de una 3-variedad hiperbólica compacta. En particular, no son isomorfos.

Demostración. Si existiese una tal quasi-isometría, el Lema de Svarc-Milnor nos daría una quasi-isometría entre $\mathbb{H}^2$ y $\mathbb{H}^3$, lo cual es absurdo gracias a la Observación 2.53 y el Teorema 2.54. $\square$

Capítulo 3

Generalidades sobre grupos lineales

En este capítulo en primer lugar se exponen brevemente ciertas clases de grupos que verifican ser lineales: admiten representaciones fieles como grupos de matrices con coeficientes reales. Luego comentaremos un resultado fundamental en la teoría, el Teorema de superrigidez de Margulis. El mismo permite dar cotas inferiores a la hora de preguntarse por encajes que en particular sean discretos, para toda una clase de subgrupos particularmente interesante, los láttices aritméticos. Luego, veremos como la linealidad de un grupo implica ciertas restricciones en su estructura, lo cual a su vez permite dar ejemplos de grupos no-lineales, es decir, que no admiten ninguna representación fiel en un grupo de matrices.

Por último, comentaremos brevemente ciertas dificultades y distinciones que podemos hacer a la hora de definir una noción concreta de rango lineal y rango lineal discreto.

3.1. Ejemplos de grupos lineales

3.1.1. Grupos finitos

Una subclase de los grupos lineales son los grupos finitos. En efecto, dado un grupo finito G de cardinal $n \in \mathbb{N}$, el Teorema de Cayley nos dice que es isomorfo a un grupo de permutaciones de finitos elementos (los elementos de G). Para esto se considera la *representación regular*, donde a cada elemento $g \in G$ se le asocia el mapa $l_g: G \rightarrow G$ dado por $x \mapsto gx$ el cual es una biyección. De esta manera tenemos que $G \hookrightarrow \text{Sym}(G) \simeq S_n$ donde S_n es el grupo de permutaciones de n elementos.

Por su parte, el grupo S_n es lineal de una manera bastante sencilla. Si consideramos como conjunto de n elementos a la base canónica de $\mathbb{R}^n$ notada por $\{e_1, \dots, e_n\}$, tenemos que una permutación $\sigma \in S_n$ se identifica con el mapa $T_\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $T_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. La asignación $\sigma \mapsto T_\sigma$ permite encajar S_n en $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

Claramente, esta representación no es óptima en muchos casos. Si consideramos el grupo S_3 , por ejemplo, el argumento anterior nos asegura que es un subgrupo de $\text{GL}_6(\mathbb{R})$, pero claramente también se lo puede ver como un subgrupo de $\text{GL}_3(\mathbb{R})$. En general, el grupo S_n se puede representar dentro de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ a pesar de ser de cardinalidad $n!$, mostrando lo poco óptima que es esta cota. Otro ejemplo similar es el de un grupo cíclico de orden finito, el cual se puede representar dentro de $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ como un grupo de rotaciones, tomando el grupo generado por una rotación de ángulo $2\pi/n$ si el grupo es

isomorfo a $\mathbb{Z}_n$.

Determinar el mínimo n tal que existe esta representación es un problema clásico que ha demostrado ser de gran dificultad.

3.1.2. Grupos fundamentales de variedades

Motivados por el ejemplo de los grupos de 3-variedades hiperbólicas y el isomorfismo $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{SO}_0(3, 1)(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$, es natural la pregunta (atribuida a Thurston) de si todos los grupos fundamentales de 3-variedades admiten un morfismo inyectivo a $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$. Actualmente, la linealidad de estos grupos continúa siendo un problema abierto, restando solamente cierta clase de 3-variedades, las denominadas *graph* variedades que no poseen una métrica de curvatura negativa (ver introducción de [9]).

Aún asumiendo linealidad, uno puede preguntarse: ¿existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que todos los grupos de 3-variedades se encajan en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$? En [9] se prueba que este n , en caso de existir, es necesariamente mayor que 4, respondiendo negativamente la pregunta de Thurston. Concretamente, el autor construye una 3-variedad a partir de la suma conexa de dos fibrados por círculos tal que su grupo fundamental no se encaja en $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ para ningún cuerpo de característica cero, además descartando la posibilidad de utilizar otros cuerpos.

3.2. Superrigidez y grupos aritméticos

Consideremos el grupo $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$. Naturalmente es un subgrupo de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, que es además denso (recordar el Lema 2.27). Veamos que podemos realizarlo como un subgrupo discreto de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y cómo esta realización viene acompañada de una gran rigidez a la hora de considerar las representaciones de este grupo, conocida como la superrigidez de Margulis.

Sea $\sigma: \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ el automorfismo de Galois dado por $\sigma(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$. La idea central, es que el encaje $\phi: \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dado por $\phi(x) = (x, \sigma x)$ encaja el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ (denso en $\mathbb{R}$) de manera discreta en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Luego, dada $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\sqrt{2})$ si definimos

$$A^\sigma = \begin{pmatrix} \sigma a & \sigma b \\ \sigma c & \sigma d \end{pmatrix}$$

tenemos que el mapa dado por $A \mapsto (A, A^\sigma)$ tiene imagen discreta y es un caso particular de lo que se conoce como un *lattice aritmético*. Claramente, dado un morfismo inyectivo de grupos de Lie $\rho: \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ con V de dimensión finita, su restricción a Γ es un encaje discreto de este grupo en $\mathrm{GL}(V)$. El Teorema de superrigidez de Margulis muestra que esta es la única forma de construir un tal encaje. Luego, Γ tiene una cota inferior para la dimensión de sus encajes discretos que depende del grupo ambiente en el que es un *lattice*.

Recomendamos las notas de Benoist [5] sobre *lattices* de grupos de Lie donde aparece una versión mas general del siguiente teorema, el cual es un caso particular de el Teorema de Superrigidez de Margulis.

Teorema 3.1. Sea $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Sea Γ un láttice irreducible de G . Sea $\pi: \Gamma \rightarrow \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ un morfismo donde la imagen $\pi(\Gamma)$ es no acotada.

Entonces π se extiende a un morfismo continuo de G en $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Observación 3.2. En muchos casos se consideran morfismos ρ con codominio $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Esto no es mayor problema pues el mapa dado por $A \mapsto \rho(A)/\det(A)$ es nuevamente un morfismo, ahora con codominio $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, para el que por ejemplo aplica el teorema anterior.

3.3. Propiedades de los grupos lineales y algunos grupos no lineales

3.3.1. Dos teoremas sobre grupos lineales

Los siguientes resultados nos dan herramientas clave en la comprensión de los grupos lineales. Además de mostrarnos en sus pruebas el íntimo vínculo entre la teoría de números y los grupos lineales finitamente generados. Recordamos que decimos que un grupo verifica una propiedad *virtualmente* si tiene un subgrupo de índice finito que la verifica.

Lema 3.3 (Lema de Selberg). [4, Proposition 2.1] Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica cero. Todo grupo finitamente generado $\Gamma < \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ es virtualmente sin torsión.

Observación 3.4. La hipótesis de finitamente generado no puede ser removida. Tenemos por ejemplo el grupo de las rotaciones de ángulo $2\pi\frac{p}{q}$ para $p, q \in \mathbb{Z}$ en el plano, el cual se identifica con un subgrupo de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ a través del morfismo que envía el ángulo θ de la rotación a la matriz $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ de manera que el grupo es lineal. Sin embargo, todos los elementos de este grupo son de torsión (basta elevar el elemento al denominador q) y es infinito, de manera que no es virtualmente sin torsión. Por otro lado, se puede ver que todo subgrupo finitamente generado de este grupo es finito y cíclico, de manera que en particular no es finitamente generado.

Teorema 3.5 (Alternativa de Tits). [4, Theoreme 3.10] Dado un cuerpo de característica cero $\mathbb{K}$ y $\Gamma < \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, vale una de las siguientes afirmaciones:

- Γ es virtualmente soluble.
- Γ contiene un subgrupo libre en dos generadores.

Posponemos la prueba de este teorema al Apéndice A.

A la hora de trabajar con propiedades que se cumplen virtualmente, el siguiente lema será de gran utilidad.

Lema 3.6. Sea G un grupo, $G_0 < G$ un subgrupo de índice finito y $H < G$ cualquier subgrupo. Entonces $H_0 := H \cap G_0$ es de índice finito en H . Más precisamente tenemos que

$$[H : H_0] \leq [G : G_0] < \infty$$

Demostración. Consideramos $\varphi: H \rightarrow G/G_0$ dado por $h \mapsto hG_0$. Tenemos que $\ker(\varphi) = H_0 = H \cap G_0$. Por el primer teorema de isomorfismo es $H/(H \cap G_0) \simeq \text{Im}(\varphi) \subset G/G_0$, de esta manera es

$$[H : H \cap H_0] = |\text{Im}(\varphi)| \leq |G/G_0| = [G : G_0] < \infty$$

concluyendo la prueba. $\square$

Corolario 3.7. Sea G un grupo virtualmente soluble. Entonces todo subgrupo $H < G$ es virtualmente soluble.

Demostración. Es inmediato a partir de que un subgrupo de un grupo soluble es soluble y el Lema 3.6 anterior. $\square$

3.3.2. Un grupo que no cumple el Lema de Selberg

A continuación describiremos una construcción que produce grupos finitamente generados, infinitos, pero que no son virtualmente sin torsión, de manera que no son lineales a partir del Lema de Selberg.

Dados dos grupos G y H , definimos el *producto corona* notado como $H \wr G$ como el producto semidirecto $N \rtimes_{\sigma} G$ donde $N := \bigoplus_{g \in G} H$ y $\sigma: G \rightarrow \text{Aut}(N)$ está dada por la acción $g \cdot (h_x)_{x \in G} = (h_{g^{-1}x})_{x \in G}$. Explícitamente, el producto queda dado por la fórmula

$$((h_x)_{x \in G}, g) * ((l_x)_{x \in G}, k) = ((h_x l_{g^{-1}x})_{x \in G}, gk)$$

Notamos que, por la estructura de producto semidirecto, tenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow N \rightarrow H \wr G \rightarrow G \rightarrow 1$$

Es inmediato observar que si H es finito entonces N es de torsión; basta con, dado un $(h_x)_{x \in G}$, elevarlo al múltiplo de los órdenes de los finitos elementos distintos de la identidad. Además, si G es infinito, N también lo es.

Si asumimos G y H finitamente generados, $H \wr G$ también es finitamente generado: Dados $h_1, \dots, h_n$ generador de H y $g_1, \dots, g_m$ generador de G , definimos $h_i^e \in N$ a partir de $h_{ix}^e = h_i$ si $x = e_H$ y $h_{ix}^e = e_H$ en el resto de casos. Luego, tenemos que $\{(h_i^e, e_G) : i = 1, \dots, n\} \cup \{(e_H, g_i) : i = 1, \dots, m\}$ es un generador de $H \wr G$.

Para concluir, observamos lo siguiente:

Observación 3.8. Dado G grupo virtualmente sin torsión, todo $H < G$ es también virtualmente sin torsión.

Demostración. Sea $G_0 < G$ sin torsión de índice finito. Entonces $H_0 := H \cap G_0$ es sin torsión y cumple que $[H : H_0] = [H : H \cap G_0] < [G : G_0] < \infty$ por el Lema 3.6, de manera que H es virtualmente sin torsión. $\square$

Con esto tenemos nuestro primer ejemplo de grupo no-lineal:

Proposición 3.9. Dados grupos G finitamente generado infinito y H finito, el producto corona $H \wr G$ es finitamente generado y no es virtualmente sin torsión.

En particular no es lineal.

Demostración. Como $N = \bigoplus_{g \in G} H$ es infinito y todos sus elementos son de torsión, no es virtualmente sin torsión, luego por la Observación 3.8 el grupo $H \wr G$ no es virtualmente sin torsión. $\square$

Ejemplo 3.10. El grupo $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$, conocido como el "Lamplighter group", es entonces un ejemplo de grupo no-lineal.

3.3.3. Un grupo que no verifica la alternativa de Tits

A continuación, describiremos brevemente la construcción del grupo de Thompson F , el cual es un ejemplo de grupo no lineal gracias a que no verifica la alternativa de Tits 3.5. Nos basamos en la exposición [10] sobre los grupos de Thompson y sus diversos vínculos con preguntas en teoría geométrica de grupos.

Decimos que un racional es *diádico* si es de la forma $\frac{p}{2^k}$. Definimos F como el grupo de homeomorfismos lineales a trozos de $[0, 1]$, diferenciables salvo en finitos racionales diádicos y tal que las pendientes son todas potencias de 2. Notamos que como consiste de homeomorfismos crecientes, este grupo no tiene torsión de manera que verifica la tesis del Lema de Selberg.

Proposición 3.11. [10, Corollary 4.9] El grupo F no contiene un grupo libre.

Decimos que un grupo es *simple* si sus únicos subgrupos normales son F y el grupo trivial.

Proposición 3.12. [10, Theorem 4.5] El subgrupo conmutador $[F, F]$ es simple.

Además, se puede probar que $[F, F]$ consiste de los elementos que son iguales a la identidad en entornos de 0 y 1 y que dicho subgrupo no es abeliano. Para esto es suficiente encontrar dos elementos que no conmuten, para lo que podemos considerar dos funciones $f, g \in [F, F]$ tales que $f(\text{sop}(g)) \neq \text{sop}(g)$ donde $\text{sop}(g) = \{x \in [0, 1] : g(x) \neq x\}$.

La relevancia del anterior resultado es gracias a los siguientes lemas.

Lema 3.13. Si un grupo G simple es soluble, entonces es abeliano.

Demostración. A partir de la igualdad $g[a, b]g^{-1} = [gag^{-1}, gbg^{-1}]$ tenemos que el subgrupo $[G, G]$ es normal en G , de manera que es $[G, G] = G$ o $[G, G] = \{Id\}$, como el grupo es soluble es necesariamente la segunda posibilidad (sinó tendríamos que $G^{(i)} = G$ para todo $i \in \mathbb{N}$). Deducimos que G es abeliano. $\square$

Lema 3.14. Sea G un grupo simple no abeliano. Entonces G no es virtualmente soluble.

Demostración. Veamos primero que un grupo simple no puede tener subgrupos de índice finito (salvo el propio grupo). Razonando por absurdo, consideremos $H < G$ subgrupo de índice finito. Sea N el normalizado de H :

$$N = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$$

Este grupo es normal por construcción. Notamos que además es de índice finito en G . Esto se deduce a partir de que dados $g \in G$ y $h \in H$ es $(gh)H(gh)^{-1} = gHg^{-1}$, por lo que

en la definición de N hay solo finitos grupos distintos (uno por cada coclase de G/H), de esta manera N es la intersección de finitos subgrupos de índice finito, de manera que N lo es también.

Entonces, N es un subgrupo normal con $\{Id\} \neq N \neq G$ lo cual contradice que G es simple. Con esto, tenemos que un grupo simple virtualmente soluble sería soluble, de manera que deducimos el resultado gracias al Lema 3.14. $\square$

Teorema 3.15. El grupo F no verifica la alternativa de Tits. En particular no es lineal.

Demostración. Ya vimos en la Proposición 3.11 que F no tiene un grupo libre, veamos que no es virtualmente soluble. Si lo fuese, por el Corolario 3.7 tendríamos que $[F, F]$ también es virtualmente soluble, pero por la Proposición 3.12 sabemos que es además simple. Además, a partir del Teorema 4.1 y el Lema 4.4 de [10], tenemos que $[F, F]$ claramente no es abeliano. Lo anterior contradice el Lema 3.14 concluyendo el razonamiento. $\square$

3.4. Rango lineal

Una posible motivación de definir el *Rango Lineal* de un grupo abstracto es la de codificar a grandes rasgos su complejidad, al menos respecto a entender sus encajes en grupos de matrices. Ya en esta primer instancia surgen ambigüedades: podemos distinguir entre grupos de coeficientes reales, complejos u otros, distinguir entre grupos simples como $SL_n(\mathbb{R})$ o no simples como $GL_n(\mathbb{R})$ o más importante, dado el vínculo con preguntas sobre la dinámica y geometría del grupo, distinguir si la imagen del encaje es discreta o no en el grupo ambiente.

Otra gran sutileza, que aparece en este trabajo, es la distinción entre grupos que son "claramente de matrices" como $SL_2(\mathbb{R})$ y grupos como $PSL_2(\mathbb{R})$, que si bien se define como un cociente conserva una enorme cantidad de estructura lineal subyacente y gracias a su identificación como grupo de isometrías del plano hiperbólico se vuelve sumamente pertinente a las preguntas que nos plantearemos. Aquí podríamos ampliar nuestra noción e incluir grupos de Lie en general por ejemplo, tomando como tamaño su dimensión.

Más ambigüedades, que dificultan dar una definición globalmente satisfactoria, aparecen al considerar grupos como $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$ para el cual la dimensión no es suficiente por un lado, para reflejar el comportamiento dinámico de posibles subgrupos discretos del mismo, y por otro para efectivamente decir que "es mas pequeño que otro grupo", por ejemplo $SL_3(\mathbb{R})$ el cual tiene mayor dimensión pero no admite a $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$ como subgrupo.

De la anterior discusión surge la motivación de, fijado un grupo Γ , intentar clasificar todos los grupos de Lie en los que admite un encaje y en particular un encaje discreto. El caso $\Gamma = \pi_1(M)$ para M una 3-variedad hiperbólica compacta es el punto de partida del siguiente capítulo.

Capítulo 4

Representaciones de grupos de variedades y conjeturas sobre grupos irreducibles

En este capítulo centramos nuestra atención en el grupo fundamental de una 3-variedad hiperbólica compacta M . Tenemos que el mismo se puede ver como un subgrupo discreto de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. A continuación buscamos entender ciertos posibles encajes de este grupo en otros grupos de Lie.

Comenzaremos centrando nuestra atención en los grupos $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ y $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, por ser grupos con un estrecho vínculo a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ y ser ejemplos de grupos "pequeños". El rango real de un grupo de Lie real G se define como la dimensión de un subgrupo abeliano diagonalizable maximal (equivalente a la dimensión de un álgebra de Cartan de su álgebra de Lie), decimos que el grupo es de rango superior si su rango es mayor o igual a 2, de manera que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ es un grupo de Lie de rango superior.

Concluiremos con el vínculo de estos posibles encajes con preguntas centrales en el estudio de los subgrupos discretos de grupos de Lie.

4.1. Representaciones de grupos de 3-variedad hiperbólica compacta

Antes de comenzar el análisis, observamos el siguiente hecho clave.

Observación 4.1. El grupo fundamental de una 3-variedad hiperbólica compacta M no es soluble.

Demostración. Para eso basta notar que $\pi_1(M)$ contiene un grupo libre, pues un subgrupo de un grupo soluble es nuevamente soluble y recordamos que en la Observación 2.30 vimos que un grupo libre no es soluble.

Para encontrar este grupo libre, nos basamos en que de la compacidad de M se deduce que todos los elementos de $\pi_1(M)$, vistos como isometrías de $\mathbb{H}^3$, son isometrías de tipo hiperbólico, es decir, traslaciones respecto a una geodésica, fijando dos puntos de $\partial\mathbb{H}^3$ (ver [3, Lemma B.4.4]).

Como $\pi_1(M)$ no es cíclico, debemos tener al menos dos elementos cuyos puntos fijos en el borde son distintos, de manera que dan lugar a una dinámica de Schottky y generan un grupo libre por el Lema 5.6 de más adelante. $\square$

4.1.1. $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

Proposición 4.2. Sea $\Gamma = \pi_1(M)$ donde M es una 3-variedad hiperbólica compacta. Supongamos que existe $\varphi: \Gamma \hookrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ morfismo inyectivo. Entonces $\varphi(\Gamma)$ no es discreto. En particular es denso en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Demostración. Supongamos por absurdo que la imagen de φ es discreta. Como Γ no tiene torsión, esto induce una acción $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}^2$ por transformaciones de cubrimiento. Llamemos S a la superficie sin borde obtenida por el cociente de esta acción, de manera que $\pi_1(S) = \Gamma$. Si S fuese compacta tendríamos que Γ sería isomorfo al grupo fundamental de una superficie compacta, lo cual contradice la proposición 2.55. Por otro lado, si la superficie fuese no compacta, tendríamos que el grupo es libre, absurdo nuevamente (ver por ejemplo [26] páginas 142-144 donde se prueba este hecho).

De esta manera si notamos $P: \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ a la proyección en el cociente, es un morfismo de grupos y un homeomorfismo local, de manera que el grupo $P^{-1}(\varphi(\Gamma))$ es un subgrupo cerrado de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, no discreto pues el párrafo anterior garantiza que $\varphi(\Gamma)$ no lo es y no soluble por la Observación 4.1. De esta manera, el Corolario 2.28 garantiza que $P^{-1}(\varphi(\Gamma))$ es denso y $\varphi(\Gamma)$ también. $\square$

Ejemplos concretos de 3-variedades hiperbólicas compactas que admitan un encaje como en la proposición anterior fueron comunicados al autor por Alan Reid. En particular, las 3-variedades obtenidas por cirugía de Dehn de coeficientes $(1, 2)$ sobre los complementos de dos nudos, el nudo "figura ocho" y el nudo 5_2 . En el programa accedemos a la información de las mismas a partir de $\mathfrak{m}004(1, 2)$ y $\mathfrak{m}015(1, 2)$.

La cirugía de Dhen se basa en, a grandes rasgos, considerar 3-variedades hiperbólicas con borde homeomorfo al toro, y considerar un pegado de la misma con un toro sólido en este borde a través de un homeomorfismo que se describe a partir de dos coeficientes (a, b) . Recomendamos la sección 1,5 del libro [22] para una exposición concisa de esta construcción. Para nuestro trabajo, nos interesa que el álgebra de cuaterniones invariante de estos grupos admite un morfismo a $M_2(\mathbb{R})$, pues su cuerpo de base es el cuerpo de trazas invariante y se verifica explícitamente que admite un morfismo a $\mathbb{R}$ que nos permite tal construcción. Recomendamos el capítulo 3 del libro de Alan Reid y Colin Maclachlan [22] para todo lo referido al aspecto aritmético de esta construcción.

4.1.2. $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

En lo que sigue es $\Gamma = \pi_1(M)$ donde M es una 3-variedad hiperbólica compacta.

Pasamos ahora a analizar los posibles encajes discretos de Γ en $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, el cual es uno de los primeros ejemplos de grupo de Lie de rango superior. Sea $\rho: \Gamma \rightarrow G$ uno de estos posibles encajes y notemos por p_1 y p_2 las proyecciones de G en cada factor.

Lema 4.3. Γ no tiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}^2$.

Demostración. Sean $a, b \in \Gamma < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ tal que $\langle a, b \rangle \simeq \mathbb{Z}^2$. Al pensar a a y b como traslaciones respecto a un eje γ en $\mathbb{H}^3$ (al igual que en la prueba de la Observación 4.1), notamos que deben tener el mismo eje de traslación. Esto se deduce rápidamente de que si $a(\gamma) = \gamma$ entonces $ab(\gamma) = ba(\gamma) = b(\gamma)$ y es necesariamente $b(\gamma) = \gamma$ pues el eje preservado por a es único. Tomando una parametrización de γ tal que la acción de a y b se comporten como $a(r) = r + \alpha$ y $b(r) = r + \beta$ tenemos que $\alpha/\beta \notin \mathbb{Z}$ pues en tal caso $\langle a, b \rangle \not\simeq \mathbb{Z}^2$, de manera que generan un grupo no-discreto, absurdo. $\square$

Lema 4.4. Al restringir a $\rho(\Gamma)$, al menos una de las proyecciones p_1 o p_2 es inyectiva.

Demostración. Supongamos que ambas tienen núcleo no-trivial. Eso se traduce en que existen elementos $a = (g, Id)$ y $b = (Id, h)$ en Γ . Los mismos son de orden infinito (se piensan como traslaciones en $\mathbb{H}^3$ como en el Lema anterior), de manera que $\langle a, b \rangle \simeq \mathbb{Z}^2$, contradiciendo el lema anterior, absurdo. $\square$

Observamos que con esto, si suponemos que $p_1|_\Gamma$ es inyectiva, $p_1 \circ \rho$ es un encaje de Γ en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, de manera que por la Proposición 4.2 tiene imagen densa. Nuestro objetivo ahora es probar la inyectividad de p_2 . Para eso serán necesarios unos lemas previos sobre subgrupos de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

Lema 4.5. Dado $H < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ cerrado, su normalizador $N_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}(H)$ es cerrado.

Demostración. Sea n_i una sucesión de elementos del normalizador que converge a un $n \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, queremos ver que $nhn^{-1} \in H$ para todo $h \in H$. Escribiendo $nhn^{-1} = \lim_i n_i h n_i^{-1}$, como $n_i h n_i^{-1} \in H$ y H cerrado tenemos lo que queremos. $\square$

Dado $\Gamma < G$ su centralizador es $C_G(\Gamma) = \{x \in G : \gamma x = x\gamma \quad \forall \gamma \in \Gamma\}$ y el centralizador de un elemento de G consiste en todos los elementos que conmuten con el mismo. De esta manera, es claro que el centralizador de un grupo es la intersección de los centralizadores de sus elementos:

$$C_G(\Gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} C_G(\gamma).$$

Lema 4.6. Dado $H < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ discreto y sin centralizador en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, su normalizador es discreto.

Demostración. Por el Lema 4.5 anterior, el grupo $N = N_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}(H)$ es cerrado. Supongamos que no es discreto, de manera que es un grupo de Lie de dimensión positiva. Consideramos entonces un subgrupo a un parámetro n_t en N con $n_0 = e$. Tenemos que para $\gamma \in H$ arbitrario es $n_0 \gamma n_0^{-1} = \gamma$ y por normalidad $n_t \gamma n_t^{-1} \in H$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como H es discreto y el mapa $t \mapsto n_t$ continuo deducimos $n_t \gamma n_t^{-1} = \gamma$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Como γ era arbitrario resulta que $n := n_1 \neq e$ está en el centralizador de Γ , absurdo. $\square$

A partir de mirar el determinante (recordando el análisis que hicimos en la demostración del Lema 2.27), un elemento $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, es de uno de 3 tipos:

- Elíptico: conjugado a una matriz de $\mathrm{SO}(2)$, de manera que fija un único punto $x \in \mathbb{H}^2$, su centralizador es $C_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}(g) = \{h : h(x) = x\}$.

- Hiperbólico: conjugado a una matriz diagonal, de manera que fija dos puntos de $\partial\mathbb{H}^2$ (equivalentemente deja invariante una geodésica η de $\mathbb{H}^2$), su centralizador es $C_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}(g) = \{h : h(\eta) = \eta\}$.
- Parabólico: conjugado a una matriz triangular superior con unos en la diagonal, de manera que fija un único punto $x \in \partial\mathbb{H}^2$, su centralizador es $C_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}(g) = \{h : h(x) = x\}$.

Observamos entonces que para que un grupo $\Gamma < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tenga centralizador no trivial, sus elementos deben ser todos del mismo tipo y con el mismo conjunto de fijos. Lo cual a su vez implica Γ abeliano.

Deducimos lo siguiente

Lema 4.7. Si $H < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ no es abeliano, no tiene centralizador.

Corolario 4.8. Dado $H < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ no-abeliano discreto, su normalizador es discreto.

Antes de pasar a la proposición central de esta sección, necesitamos la siguiente proposición.

Proposición 4.9. Dada una 3-variedad hiperbólica compacta M , los subgrupos normales de $\Gamma = \pi_1(M)$ no son abelianos.

Demostración. Se deduce de dos hechos:

- Los únicos subgrupos abelianos son cíclicos.

Sea $\Lambda < \Gamma$ abeliano. Como Γ está formado por elementos hiperbólicos, se deduce que Λ es un subgrupo de isometrías de $\mathbb{H}^3$ que fijan una geodésica. Cada elemento actúa como una traslación en la misma, de manera que es isomorfo a un subgrupo de $\mathbb{R}$, luego por discretitud es cíclico (sea λ el largo de traslación mínimo, se tiene $\Lambda \simeq \lambda\mathbb{Z}$).

- Los subgrupos cíclicos no son normales.

Sea $L < \Gamma$ cíclico generado por g que deja invariante una geodésica $l \subset \mathbb{H}^3$. Tenemos que para $\gamma \in \Gamma$ $\gamma g \gamma^{-1}$ deja invariante la geodésica $\gamma(l)$, de manera que si L fuese normal en Γ sería $\gamma(l) = l$. Por la compacidad de M deducimos que esto no se cumple para todo $\gamma \in \Gamma = \pi_1(M)$ (un tal grupo sería abeliano como ya observamos).

□

Proposición 4.10. Sea $\rho: \Gamma \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ morfismo inyectivo de imagen discreta donde $\Gamma = \pi_1(M)$ para M una 3-variedad hiperbólica compacta. Supongamos además que $p_1|_\Gamma$ es inyectiva y $p_2|_\Gamma$ no es inyectiva.

Entonces $p_1(\Gamma)$ es discreto.

Demostración. Por abuso de notación notemos $\Gamma = \rho(\Gamma)$.

Sea $K = \mathrm{Ker}(p_2|_\Gamma)$. Tenemos que $p_1(K)$ es discreto, pues un punto de acumulación de $p_1(K)$ tiene como preimagen un punto de acumulación de Γ (pues la segunda coordenada es constante).

Por otro lado, como K es normal en Γ , tenemos que no es abeliano y por la inyectividad de $p_1|_\Gamma$ implica que $p_1(K)$ tampoco, de manera que por el Lema 4.7 deducimos que no tiene centralizador en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Luego por el Lema 4.6 resulta que $N_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}(p_1(K))$ es discreto. Concluimos notando que $p_1(K)$ es normal en $p_1(\Gamma)$, de manera que $p_1(\Gamma) < N_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}(p_1(K))$ y por ende es discreto. $\square$

En conjunto, los resultados anteriores nos permiten deducir el siguiente.

Teorema 4.11. Sea $\rho: \Gamma \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ morfismo inyectivo de imagen discreta donde $\Gamma = \pi_1(M)$ para M una 3-variedad hiperbólica compacta. Entonces las proyecciones de $\rho(\Gamma)$ en cada factor son inyectivas y por lo tanto de imagen densa.

4.2. Subgrupos discretos irreducibles y conjeturas

A la hora de estudiar subgrupos discretos de grupos de Lie semisimples (los anteriores son ejemplos) aparece la noción de grupo *irreducible*:

Definición 4.12. Dado $G = G_1 \times \cdots \times G_l$ donde cada G_i es simple (sin subgrupos normales conexos no-triviales) no-compacto, decimos que un subgrupo discreto $\Gamma < G$ es irreducible si su proyección en cada factor $G_{i_1} \times \cdots \times G_{i_k}$ es densa.

Esta noción captura el hecho de que un subgrupo discreto no sea construido a partir de otros.

Un ejemplo de grupo irreducible es un lattice aritmético en un grupo de rango superior, por ejemplo el encaje de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ que ya mencionamos en la sección 3.2. Existe una conjetura que establece que esta es la única forma de obtener ejemplos de grupos irreducibles.

Conjetura 1. Sea G un grupo de Lie semisimple de centro finito, sin factores compactos, con al menos dos factores simples. Entonces todo subgrupo $\Gamma < G$ discreto irreducible es un lattice.

Por un teorema de aritmetividad de Margulis, todo lattice irreducible en un grupo G como el de la conjetura es aritmético, lo cual hace que nuestra única fuente de ejemplos de grupos discretos irreducibles sea ésta. Podemos encontrar esta conjetura en la exposición [8] como el problema 3.5, que es un enunciado más fuerte que la pregunta atribuida a Benoist sobre la existencia de grupos libres y grupos de superficie discretos irreducibles en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. El autor agradece a Fanny Kassel por hacerle saber que esta pregunta y sus variantes fue formulada de forma informal alrededor de los años 2000.

Notamos que por el Teorema 4.11, en caso de existir un encaje inyectivo de imagen discreta de $\Gamma = \pi_1(M)$ en $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ donde M es una 3-variedad hiperbólica compacta, si la conjetura anterior fuese cierta tendríamos que la imagen del encaje es un lattice de G , el cual es un grupo de rango superior. Veamos que esto es imposible, de manera que la existencia de tal encaje sería un contraejemplo a la conjetura. El paso clave es el siguiente profundo resultado.

Teorema 4.13. [24, Corollary 2.9] Sea G un grupo de Lie semi-simple (posiblemente con factores compactos) y $\Gamma \subset G$ un lattice. Entonces Γ contiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}^r$ donde r es el rango de G .

Corolario 4.14. Sea $\Gamma = \pi_1(M)$ para M una 3-variedad hiperbólica compacta. Supongamos que existe $\rho: \Gamma \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ morfismo inyectivo de imagen discreta. Entonces $\rho(\Gamma)$ sería un contraejemplo a la Conjetura 1.

Demostración. Por el Teorema 4.11 tenemos que $\rho(\Gamma)$ es un subgrupo discreto irreducible de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Luego, recordando el Lema 4.3, donde vimos que $\pi_1(M)$ no tiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}^2$, tenemos que $\rho(\Gamma)$ no es un lattice, probando el corolario. $\square$

4.2.1. Más contraejemplos

A continuación, veremos que la existencia de un encaje como en el Teorema 4.11, implica la existencia de otros encajes de grupos que serían en sí mismos contra-ejemplos a la conjetura 1 y responderían las preguntas formuladas por Benoist.

La siguiente observación muestra que tendríamos en particular, un grupo de superficie discreto e irreducible en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Nos basamos en un resultado clásico de Thurston (ver [27] capítulo 5) que dice que dada una superficie hiperbólica S y un difeomorfismo pseudo-Anosov φ en la misma, la suspensión $M = S_\varphi$ es una 3-variedad hiperbólica. El grupo fundamental de una tal variedad admite naturalmente una estructura de la forma $\pi_1(M) = \pi_1(S) \rtimes \mathbb{Z}$. Más aún, Agol probó (ver [Theorem 9.2][1]) que toda 3-variedad hiperbólica compacta admite un cubrimiento de índice finito por una variedad de este tipo, que es equivalente a la existencia de un subgrupo de índice finito de la forma $\pi_1(S) \rtimes \mathbb{Z}$.

Observación 4.15. Supongamos que estamos en las hipótesis del Teorema 4.11 y que además Γ es de la forma $\Gamma = \pi_1(\Sigma) \rtimes \mathbb{Z}$, donde Σ es una superficie hiperbólica compacta. Entonces $p_1(\rho(\pi_1(\Sigma)))$ y $p_2(\rho(\pi_1(\Sigma)))$ son densos en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. En particular, $\rho|_{\pi_1(\Sigma)}$ sería un encaje de un grupo de superficie en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ con imagen discreta e irreducible.

Se deduce del hecho de que $p_1(\pi_1(\Sigma))$ es normal en $p_1(\Gamma)$ y no es un grupo abeliano, de manera que en caso de ser discreto por el Lema 4.6 y el Lema 4.7 deduciríamos que su normalizador (que contiene a $p_1(\Gamma)$) es discreto, contradiciendo el Teorema 4.11.

La siguiente observación muestra que tendríamos en particular, un grupo libre discreto e irreducible en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. La existencia de un tal ejemplo ha sido intensamente estudiada, mencionamos el vínculo con la Pregunta 1.1 en [17], donde además se establece su vínculo con el trabajo de este capítulo y la existencia de un encaje como el de Corolario 4.11.

Observación 4.16. Supongamos nuevamente que estamos en las hipótesis del Teorema 4.11. Gracias a la igualdad $\mathrm{tr}(-A) = -\mathrm{tr}(A)$ en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ tenemos que podemos definir el mapa continuo $P\mathrm{tr}: \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ dado por $[A] \mapsto |\mathrm{tr}(A)|$. La utilidad del mismo se ve en que las matrices elípticas (conjugadas a matrices en $\mathrm{PSO}(2)$) son exactamente el abierto $P\mathrm{tr}^{-1}([0, 2))$, gracias a esto y la densidad de las proyecciones, tanto $p_1(\rho(\Gamma))$ como $p_2(\rho(\Gamma))$ contienen elementos elípticos de puntos fijos distintos.

Sean $g_1, g_2 \in \rho(\Gamma)$ tales que $p_1(g_1)$ y $p_2(g_2)$ son elípticos y no están en el mismo subgrupo abeliano de Γ y $\Lambda = \langle g_1, g_2 \rangle$. Tenemos entonces que $p_1(\Lambda)$ no es discreto, pues como Γ no tiene torsión $p_1(g_1)$ es a menos de conjugar, una rotación en $\mathrm{PSO}(2)$ de ángulo necesariamente irracional, de manera que sus potencias acumulan en la identidad. Lo

mismo es cierto para $p_2(\Lambda)$. Veamos que Λ es nuevamente un subgrupo irreducible, a partir de probar que no es soluble y recordar el Corolario 2.28.

Para ver que no es soluble, basta notar que g_1 y g_2 pensados como isometrías de $\mathbb{H}^3$ son traslaciones respecto a distintas geodésicas (pues no conmutan) y repetir los argumentos de la Observación 4.1, de manera que Λ es un grupo libre.

Intentar (y fracasar en) construir un ejemplo concreto de un grupo libre discreto e irreducible en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ será el interés principal del siguiente capítulo.

Capítulo 5

Ping-pong y grupos libres

En el capítulo anterior vimos que la existencia de un encaje discreto del grupo fundamental de una 3-variedad hiperbólica compacta en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ implicaría la existencia de un grupo libre discreto e irreducible en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, el cual es un grupo de Lie semisimple, lo que sería un contraejemplo para la Conjetura 1. Ahora, pasamos a analizar una posible técnica alternativa para buscar un contraejemplo.

El objetivo que guía este capítulo es el de mostrar como algunas formas naturales de abordar la construcción explícita de un grupo libre discreto e irreducible en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, inspiradas en la prueba de la alternativa de Tits donde se construyen grupos libres, fallan.

Para dar un tal ejemplo, queremos encontrar pares de matrices $A = (A_1, A_2), B = (B_1, B_2)$ en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ con $\Lambda = \langle A, B \rangle$ libre y discreto de manera que tanto $\Lambda_1 = \langle A_1, B_1 \rangle$ como $\Lambda_2 = \langle A_2, B_2 \rangle$ sean grupos densos. La mayor dificultad reside en que, en vínculo con la Conjetura 1, los únicos ejemplos de grupos discretos irreducibles en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ conocidos son los grupos aritméticos construidos a partir del anillo de enteros de un cuerpo, por ejemplo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$. De esta manera, restringiremos nuestra atención a estos grupos. Si las matrices $A_1 \in p_1(\Lambda)$ y $B_2 \in p_2(\Lambda)$ son elípticas, las proyecciones $p_1(\Lambda)$ y $p_2(\Lambda)$ no serán discretas, luego gracias a que las proyecciones en cada factor de un grupo aritmético $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ son inyectivas y recordando el Corolario 2.28, en caso de ser Λ un grupo libre serán además densas.

Luego, todo nuestro esfuerzo se centrará en entender las dinámicas de "ping-pong", que garantizan que ciertos grupos son libres. En particular estudiaremos la acción de matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ en las rectas de $\mathbb{K}^n$, con una topología definida a partir de un valor absoluto en el cuerpo $\mathbb{K}$, que nos permitirá definir que dos matrices estén en *posición ping-pong*. Como esta construcción se basa explícitamente en la realización como grupo de matrices, analizaremos si al considerar morfismos a otros grupos de matrices podemos lograr que dos elementos resulten en posición ping-pong a pesar de no estarlo en un principio. Analizaremos morfismos definidos en subgrupos $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ en otros grupos definidos en primer lugar a partir encajes del cuerpo $\mathbb{K}$ generado por los coeficientes de las matrices de Γ que nos permitirán considerar otros valores absolutos. Posteriormente pasaremos a los morfismos de grupos de Lie para considerar otros posibles grupos ambiente.

En ambos casos probaremos que las técnicas no dan nuevos ejemplos:

Teorema. 5.19 Dados $r, s \in \mathbb{N}$, sea $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^r \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})^s$ un subgrupo de cuaterniones.

Sea $\mathbb{K}$ el cuerpo de números generado por los coeficientes de las matrices en Γ . Entonces, al identificar a Γ como un subgrupo de $\mathrm{SL}_{2r+2s}(\mathbb{K})$ de manera natural, dado λ valor propio de una matriz de Γ y $|\cdot|_*$ valor absoluto no arquimediano en $\mathbb{K}[\lambda]$, tenemos que $|\lambda|_* = 1$.

Teorema. 5.41 Sea $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación. Consideremos $g_1 = (x_1, y_1)$ y $g_2 = (x_2, y_2)$ tales que x_1, x_2 no están en posición ping-pong en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y y_1, y_2 tampoco. Entonces $\rho(g_1)$ y $\rho(g_2)$ **no** están en posición ping-pong.

Concluiremos comentando que otras posibles generalizaciones de estas técnicas tampoco permiten obtener nuevos grupos libres.

5.1. Ping-Pong abstracto

Nos basamos fuertemente (casi al pie de la letra) en las notas de Benoist sobre subgrupos discretos [4] para las definiciones y el análisis sobre elementos proximales y posición ping-pong. Luego trabajaremos con el "ping-pong" p -ádico, idea que surge de la prueba de la alternativa de Tits, la cual se encuentra en el Apéndice A.

Definición 5.1. Dado un grupo Γ que actúa en un espacio X , decimos que $g_1, \dots, g_n \in \Gamma$ actúan con *dinámica de ping-pong* si existen subconjuntos $X_i \subset X$ disjuntos dos a dos y un $x \in X$ con $x \notin X_i \forall i$, de manera que:

- Para todo $g \in \langle g_i \rangle \setminus \{Id\}$, es $g_i \cdot x \in X_i$.
- Para todo $g \in \langle g_i \rangle \setminus \{Id\}$, si $j \neq i$ es $g \cdot X_j \subset X_i$.

Ejemplo 5.2. Consideramos los siguientes homeomorfismos del círculo g y h . Sea g tal que consta de dos puntos fijos g^+ y g^- y entornos U^- de g^- y U^+ de g^+ tal que $g(S^1 \setminus U^-) \subset U^+$ y $g^{-1}(S^1 \setminus U^+) \subset U^-$. De la misma manera sea h con el mismo comportamiento para puntos y entornos $h^+ \in V^+$ y $h^- \in V^-$. Suponiendo que U^+, U^-, V^+, V^- son disjuntos dos a dos, tomando $X_1 = U^+ \cup U^-$ y $X_2 = V^+ \cup V^-$, vemos que g y h actúan con dinámica de ping-pong en S^1 .

Esto está representado en la Figura 5.1.

Lema 5.3 ([4, Lemme 3.1]). Sea Γ un grupo con generadores $g_1, \dots, g_n$. Supongamos además que Γ actúa en cierto espacio de manera que los generadores actúan con dinámica de ping-pong. Entonces Γ es isomorfo al producto libre de $\langle g_1 \rangle, \dots, \langle g_n \rangle$.

Demostración. La tesis es equivalente a que dados $h_k \in \langle g_{i_k} \rangle \setminus \{Id\}$ para $k = 1, \dots, m$ con $i_k \neq i_{k+1}$ tenemos que $h_1 \cdots h_m \neq Id$. Dados h_k como recién, la hipótesis se traduce en que $(h_1 \cdots h_m) \cdot x$ pertenece a X_{i_1} , de manera que es diferente de x . En particular el elemento $h_1 \cdots h_m$ es no-trivial, probando el resultado. □

5.2. Dinámica de Schottky y elementos proximales

5.2.1. Grupos de Schottky en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$

En esta sección el objetivo es mostrar como aplicar el Lema 5.3 anterior para ciertos subgrupos de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ a partir de su acción en $S^2 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ por transformaciones de

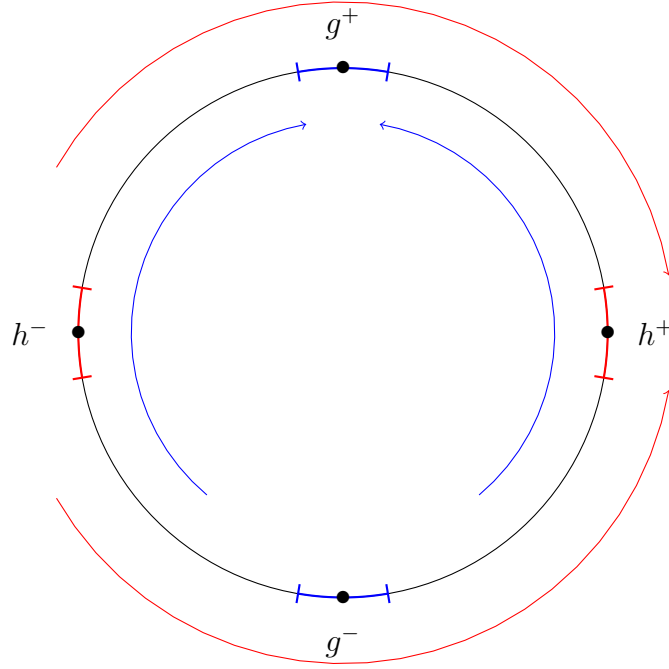


Figura 5.1: Ejemplo de dinámica de ping-pong para dos homeomorfismos g y h del círculo S^1

Möbius dadas por $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$. De la misma manera que en argumentos anteriores (recordar los argumentos previos al Lema 4.7), hay tres tipos de elementos distintos de la identidad:

- Elíptico: Conjugado a un elemento de la forma $\pm \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$. Tiene dos puntos fijos en S^2 , rodeados por círculos invariantes.
- Parabólico: Conjugado a un elemento de la forma $\pm \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tiene un sólo punto fijo en S^2 por el que pasa una familia de círculos invariantes.
- Loxodrómico: es conjugado a un elemento de la forma $\pm \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ con $|\lambda| \neq 1$.

Llamemos g a un tal elemento. El mismo consta de dos puntos fijos en S^2 , un atractor x_g^+ y un repulsor x_g^- , de manera que para todo $x \neq x_g^\pm$ cumple

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} g^n \cdot x = x_g^\pm$$

. En este caso se puede encontrar discos abiertos D^+ y D^- disjuntos tales que $g(S^2 - \overline{D^-}) = D^+$. Cuando λ es real, decimos que g es hiperbólico.

Definición 5.4. [4, Definition 3.2] Un *grupo de Schottky* Γ es un subgrupo de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ generado por elementos $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ tales que existen $2n$ discos abiertos disjuntos $\{D_i^\pm \subset S^2 : i = 1, \dots, n\}$ tales que, para todo i , se cumple

$$\gamma_i(S^2 - \overline{D_i^-}) = D_i^+ \quad \text{y} \quad \gamma_i^{-1}(S^2 - \overline{D_i^+}) = D_i^-$$

En particular tenemos $\gamma_j^{\pm 1} \cdot D_i^\pm \subset D_j^\pm$.

Observación 5.5. Notamos que en particular los elementos γ_i cumplen $\gamma_i^{\pm 1} \cdot D_i^{\pm} \subset D_i^{\pm}$. Luego, el Teorema del punto fijo de Brouwer y la clasificación anterior implican que son loxodrómicos.

El Lema 5.6 probará que fijados elementos $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ loxodrómicos en $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ con puntos fijos distintos, podemos entonces encontrar un m tal que $\gamma_1^m, \dots, \gamma_n^m$ generan un grupo de Schottky.

El siguiente lema es central en nuestro estudio.

Lema 5.6 ([4, Lemme 3.3]). Un grupo de Schottky es libre y discreto.

Demostración. Definiendo $X_i = D_i^- \cup D_i^+$ y tomando $x \in S^2$ en el complemento de la unión de la clausura de estos discos, el Lema 5.3 nos garantiza que el grupo es libre. La discretitud resulta de que la topología usual en $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ hace que la acción en S^2 sea continua. De esa manera, si w_n es una sucesión del grupo que converge a la identidad, tendríamos que $w_n \cdot x \rightarrow x$ pero $x_n = w_n \cdot x$ es una sucesión de puntos en los discos $D_i^{\pm}$, contradiciendo la elección de x . $\square$

5.2.2. Ping-pong proximal

Nos interesa ahora adaptar las técnicas anteriores de manera que podamos construir grupos libres sin que necesariamente sean discretos.

Dada una acción de un grupo Γ en un espacio métrico compacto X y $\gamma \in \Gamma$, decimos que un punto fijo $x_{\gamma}^+ \in X$ es *atractor* si existe un entorno U de x_{γ}^+ (al que llamaremos también atractor) tal que para todo otro entorno U' del punto existe N tal que $\gamma^n(U) \subset U'$ para todo $n > N$. Llamamos *cuenca de atracción* de x_{γ} al conjunto $B = \{x \in X / \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^n x = x_{\gamma}\}$.

Lema 5.7. Sea Γ un grupo que actúa en un espacio métrico compacto X . Sea $E := \{\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma_1^{-1}, \dots, \gamma_n^{-1}\} \subset \Gamma$ tal que

- para todo $g \in E$, g tiene un punto atractor $x_g \in X$ con cuenca de atracción B_g .
- los puntos x_g son distintos para cada g y la intersección de las cuencas de atracción B_g es no-vacía.
- dados $g, h \in E$ tales que $g \neq h^{-1}$, vale que $x_h \in B_g$.

Entonces existe $m > 0$ tal que el grupo generado por $\gamma_1^m, \dots, \gamma_n^m$ es libre.

Demostración. Consideremos x en la intersección de las B_g y entornos compactos disjuntos K_g de los puntos atractores x_g que no contienen a x , de manera que para $g \neq h^{-1}$ tenemos $K_h \subset B_g$. Sea L_g la unión de los K_h para $h \neq g^{-1}$. Tomemos N tal que para todo $g \in E$ vale que $g^m(L_g) \subset K_g$ y $g^m \cdot x \in K_g$ para todo $m > N$. Aplicando el Lema 5.3 tomando $X_j := K_{\gamma_j} \cup K_{\gamma_j^{-1}}$ obtenemos el resultado. $\square$

Observación 5.8. El lector puede asumir en una primer lectura que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ en lo que sigue, pero es de interés central para este trabajo considerar otros cuerpos con distintos valores absolutos, en particular los cuerpos de números. Referimos a la Sección 2.1 para el estudio de estos objetos.

Llamamos *cuerpo local* a un cuerpo $\mathbb{K}$ con un valor absoluto $|\cdot|$ tal que al considerar en $\mathbb{K}$ la topología definida por este valor absoluto el cuerpo resulta Hausdorff y localmente compacto y además las operaciones de producto y adición resultan continuas. Por ejemplo, podemos considerar la completación de un cuerpo de números respecto a un valor absoluto en el mismo.

Consideremos $\mathbb{K}$ un cuerpo local con un valor absoluto $|\cdot|$. Dado V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión finita m , podemos considerar $X = \mathbb{P}(V)$ el espacio proyectivo de V : el mismo consiste de las recetas por el origen de V . Dada una norma $\|\cdot\|$ en V compatible con el valor absoluto elegido (es decir tal que $\|av\| = |a|\|v\|$ para $a \in \mathbb{K}, v \in V$), podemos dotar a X de una distancia d definida por

$$d(x_1, x_2) = \inf\{\|v_1 - v_2\| : v_i \in x_i, \|v_i\| = 1, i = 1, 2\}$$

que hacen de X un espacio métrico compacto.

Dado $g \in \text{End}(V)$ para $\lambda > 0$ se define $V_\lambda = V_\lambda(g)$ como el mayor subespacio g -invariante de V tal que todos los valores propios α de g verifican $|\alpha| = \lambda$. En el caso de que los valores propios no estén en $\mathbb{K}$, se considera la única norma en la extensión finita por los valores propios que extiende a la existente en el cuerpo (ver [25] para el caso no arquimediano y [11, Theorem 2.3.17] donde se observa que los cuerpos locales arquimedianos son equivalentes a $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ de manera que basta considerar el valor absoluto complejo). Consideremos los valores propios $\alpha_i = \alpha_i(g)$ de g repetidos con multiplicidad ordenados de manera que su valor absoluto $\lambda_i = \lambda_i(g) := |\alpha_i|$ esté en orden decreciente $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_m$. Notamos $V_g^+ = V_{\lambda_1}$ donde V_λ es el subespacio invariante correspondiente al los valores propios de ese módulo, $m_g = \dim V_g^+$ y $V_g^- = \oplus_{\lambda \neq \lambda_1} V_\lambda(g)$.

Decimos que g es *proximal* en $\mathbb{P}(V)$ si $m_g = 1$, es decir, si $\lambda_1 > \lambda_2$.

Notamos que una proyección es proximal en $\mathbb{P}(V)$ si y solamente si es de rango 1.

La utilidad de los anteriores conceptos aparece a partir de los siguientes lemas.

Lema 5.9. Un elemento $g \in \text{Aut}(V)$ es proximal en $\mathbb{P}(V)$ si y sólo si su acción en $\mathbb{P}(V)$ tiene un punto fijo atractor g^+ . El punto fijo es la recta V_g^+ y el entorno atractor B_g^+ es el complemento del hiperplano $X_g^- := \mathbb{P}(V_g^-)$.

Demostración. Notamos que la acción de g y de λg en $\mathbb{P}(V)$ donde $\lambda \in \mathbb{K}$ es la misma, luego podemos observar la acción de las potencias de $\lambda_1(g)^{-1}g$. Considerando la forma de Jordan de esta transformación, podemos observar que la dirección $V^+(g)$ es invariante y en el resto los vectores se contraen salvo en la componente en $V^+(g)$, deduciendo el resultado. $\square$

Definición 5.10. Decimos que $g \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ es de *tipo hiperbólico* si tanto g como g^{-1} son proximales para su acción en $\mathbb{K}^n$ y notamos $g^- := V_{g^{-1}}^+$, $W_g = \oplus_{\lambda \notin \{\lambda_1, \lambda_m\}} V_\lambda(g)$. Además, dados $g, h \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, decimos que están en *posición ping-pong* si son de tipo hiperbólico y además g^+, g^-, h^+, h^- son distintos y $g^\pm \notin W_h \oplus h^\mp$ y $h^\pm \notin W_g \oplus g^\mp$.

Observación 5.11. Esta definición depende del valor absoluto que estemos considerando. Una matriz puede ser de tipo hiperbólico para una norma definida a partir de cierto valor absoluto, pero no para otro. Por ejemplo, basta considerar la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Q})$$

la cual es de tipo hiperbólico para el valor absoluto 2-ádico en $\mathbb{Q}$ (y el usual) pero no para el 3-ádico.

Proposición 5.12. Supongamos que $g, h \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ están en posición ping-pong.

Entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\langle g^n, h^n \rangle$ es un grupo libre.

Demostración. Es una aplicación de los Lemas 5.7 y 5.9. □

Notamos que en este caso, por la continuidad de la acción en el proyectivo, el grupo $\langle g^p, h^p \rangle$ será discreto en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ con la topología como subespacio de $\mathbb{K}^{n^2}$ (mismo argumento que para grupos de Schottky).

Observación 5.13. De la misma manera, podemos definir que un conjunto de m elementos $g_1, \dots, g_m$ estén en posición ping-pong y obtener que existe un $n \in \mathbb{N}$ de manera que el grupo generado por las potencias n -ésimas es libre.

5.2.3. Ping-Pong p-ádico para matrices reales

Es claro que si la imagen de un grupo por un morfismo inyectivo es libre, entonces el grupo es libre. Con esto en mente, notamos que dado $\Gamma < \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (o $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$) finitamente generado, si consideramos $\mathbb{K}$ el cuerpo generado sobre $\mathbb{Q}$ por las entradas de las matrices en un generador finito, tenemos que las entradas de todas las matrices del grupo viven en $\mathbb{K}$, de manera que podemos pensar $\Gamma < \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. A su vez, dado un morfismo de cuerpos $\varphi: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$, podemos construir un morfismo de grupos $\Phi_\varphi: \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{L})$ dado por

$$\Phi_\varphi \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(a_{11}) & \cdots & \varphi(a_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(a_{n1}) & \cdots & \varphi(a_{nn}) \end{pmatrix}.$$

Notamos que es inyectivo, a partir de que todo morfismo de cuerpos es inyectivo.

Con esto se deduce fácilmente lo siguiente, que se puede interpretar como: "para probar que un grupo es libre, alcanza con encontrar un cuerpo con un valor absoluto en el que las matrices jueguen al ping-pong". Para nosotros, el morfismo consistirá de simplemente considerar el mismo cuerpo base, con otro valor absoluto.

Proposición 5.14. Sean $a, b \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Consideramos $\mathbb{K}$ el cuerpo generado sobre $\mathbb{Q}$ por los coeficientes de a y b . Supongamos que existe un morfismo de cuerpos $\varphi: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$ donde en $\mathbb{L}$ consideramos un valor absoluto $|\cdot|_l$ tal que a y b resultan de tipo hiperbólico y más aún en posición ping-pong.

Entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\langle a^m, b^m \rangle$ es libre.

La anterior proposición es una de las herramientas clave en la prueba de la alternativa de Tits que damos en el apéndice A.

5.2.4. Grupos libres que no vienen de un ping-pong proximal.

Tristemente (o interesantemente), los argumentos a partir de matrices proximales no son la única razón por la que existen grupos libres; a continuación, damos un enunciado que permite obtener un grupo libre en el que los generadores son matrices con valores propios 1.

Proposición 5.15. [21] Si m y n son reales tal que $|mn| \geq 4$, entonces las matrices

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$$

generan un grupo libre.

Comentamos que los argumentos de la referencia nuevamente consisten en encontrar una dinámica tipo ping-pong, en donde se considera la acción de las mismas como transformaciones de Möbius en la recta extendida $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. La siguiente observación muestra cómo podemos obtener grupos libres a partir de consideraciones aritméticas.

Observación 5.16. Si $m, n \in \mathbb{R}$ son trascendentes sobre $\mathbb{Q}$, el grupo generado por A_n y B_m es libre.

Demostración. Basta notar que al considerar el producto de una palabra en A_n y B_m , el resultado es una matriz donde sus entradas consisten en polinomios con coeficientes enteros evaluados en las entradas de A_n y B_m . Gracias a la existencia de valores de n y m tales que el grupo $\langle A_n, B_m \rangle$ es libre, tenemos que para cada palabra estos polinomios no son simultáneamente iguales a 1 en la diagonal y cero en el resto de entradas, de manera que al evaluarlos en cualquier par de números trascendentes el resultado es una matriz distinta de la identidad, probando la observación. $\square$

Con esto, la pregunta de si el grupo $\langle A_n, B_m \rangle$ es libre queda abierta solamente para el caso $|nm| < 4$ con n y m números algebraicos, enfatizando nuevamente el rol de la aritmética en estas preguntas, a priori motivadas por sus consecuencias dinámicas.

5.3. Ping-pong p-ádico en grupos aritméticos

Consideremos el grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$ donde d es un natural positivo no cuadrado. Notemos por σ a la involución de Galois de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ dada por $\sigma(x + y\sqrt{d}) = x - y\sqrt{d}$ y definamos para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$

$$A^\sigma := \begin{pmatrix} \sigma(a) & \sigma(b) \\ \sigma(c) & \sigma(d) \end{pmatrix}.$$

Podemos observar que el encaje de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$ en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ dado por $A \mapsto (A, A^\sigma)$ tiene imagen discreta, gracias a que si un $x + y\sqrt{d}$ con $x, y \in \mathbb{Z}$ está cerca de cero en la norma usual su conjugado está lejos. Además, es irreducible.

Si queremos definir un grupo libre e irreducible en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ a partir de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$, la discusión de la introducción de este capítulo en este caso se traduce en encontrar $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$ tal que

- A es elíptica (necesariamente irracional) y B es hiperbólica.
- A^σ es hiperbólica y B^σ es elíptica.
- Existe un morfismo $\varphi: \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \rightarrow \mathbb{K}$ donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo local con un valor absoluto $|\cdot|_*$ tal que $\Phi_\varphi(A)$ y $\Phi_\varphi(B)$ están en posición ping-pong.

Notamos que el valor absoluto buscado es necesariamente uno de los no-arquimedianos, pues en $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ sólo hay dos valores absolutos arquimedianos, que son los que hacen a A elíptica y A^σ hiperbólica para el usual. Lo anterior falla por lo descrito a continuación.

Proposición 5.17. Sea $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ para d un natural no cuadrado y $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ el anillo de enteros de $\mathbb{K}$. Entonces dado λ valor propio de una matriz en $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ y $|\cdot|_*$ valor absoluto no arquimediano en $\mathbb{K}[\lambda]$, tenemos que $|\lambda|_* = 1$.

En particular, las matrices $A \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ **no** son de tipo hiperbólico para la acción inducida en $\mathbb{P}(\mathbb{K}[\lambda]^2)$ donde λ es un valor propio de A .

Demostración. Dado λ un valor propio de una matriz en $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$, entonces $\lambda^2 - \alpha\lambda + 1 = 0$ donde $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ es la traza de la matriz. Luego, por la Proposición 2.17, tenemos que $|\lambda|_* = 1$ para todo valor absoluto no arquimediano en $\mathbb{K}$. $\square$

El siguiente lema clásico permite ver que el resultado anterior aplica en particular a matrices en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$.

Lema 5.18. Si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ para d un natural no cuadrado, entonces $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ o $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$ dependiendo de si $d \not\equiv 1 \pmod{4}$ o no.

De la igualdad $a+b\sqrt{d} = a-b+2b(\frac{1+\sqrt{d}}{2})$ deducimos que en ambos casos $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] \subset \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$.

5.3.1. Álgebras de cuaterniones y subgrupos aritméticos

El encaje de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$ en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ recién descrito es un caso particular de los denominados subgrupos aritméticos y subgrupos de cuaterniones, donde trabajaremos con la definición de Vigneras en [23]. A continuación daremos las definiciones necesarias para para construir estos grupos y veremos como los mismos argumentos (apoyados en que las trazas de las matrices presentes son enteros algebraicos) se extienden a toda esta clase de subgrupos irreducibles de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ obteniendo el siguiente enunciado.

Teorema 5.19. Dados $r, s \in \mathbb{N}$, sea $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^r \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})^s$ un subgrupo de cuaterniones. Sea $\mathbb{K}$ el cuerpo de números generado por los coeficientes de las matrices en Γ . Entonces, al identificar a Γ como un subgrupo de $\mathrm{SL}_{2r+2s}(\mathbb{K})$ de manera natural, dado λ valor propio de una matriz de Γ y $|\cdot|_*$ valor absoluto no arquimediano en $\mathbb{K}[\lambda]$, tenemos que $|\lambda|_* = 1$.

Álgebras de cuaterniones y órdenes

La referencia principal para esta sección es [22], también recomendamos la referencia más clásica [23].

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo de números, con $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = n = r + 2s$, donde r es la cantidad de encajes reales de $\mathbb{K}$ y s la cantidad de pares de encajes complejos (donde cada par se constituye de un encaje σ y su conjugado $\bar{\sigma}$).

Dados $a, b \in \mathbb{K}^\times$, definimos el álgebra $A := (\frac{a}{\mathbb{K}})$ como el espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de base $\{1, i, j, k\}$ con producto obtenido a partir de las igualdades

$$i^2 = a, j^2 = b, k = ij = -ji, 1 \cdot l = l \ \forall l \in \mathbb{K}$$

y extender linealmente de manera que el producto resulta asociativo. Decimos que A es un álgebra de cuaterniones sobre $\mathbb{K}$ de símbolo $(\frac{a}{\mathbb{K}})$. Se define el *conjugado*, la *traza*

y la *norma* de un $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \in A$ como $\bar{x} = x_0 - x_1i - x_2j - x_3k$, $tr(x) = x + \bar{x} = 2x_0 \in \mathbb{K}$ y $n(x) = x\bar{x} = x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2 \in \mathbb{K}$.

Observación 5.20. Siempre podemos ver un álgebra $(\frac{ab}{\mathbb{K}})$ como una subálgebra de las matrices 2×2 con coeficientes en $\mathbb{K}$, en particular como una subálgebra de las matrices complejas fijando

$$i = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} \end{pmatrix} \quad y \quad j = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{b} \\ \sqrt{b} & 0 \end{pmatrix}$$

Notamos que la traza y norma definidas anteriormente coinciden con la traza y el determinante usual.

Dado un encaje $\sigma_i: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{C}$, podemos construir el álgebra de cuaterniones $A_i := (\frac{\sigma_i a \sigma_i b}{\mathbb{L}})$ de base $\{1, i_i, j_i, k_i\}$ y el encaje $\varphi_i: A \rightarrow A_i$ dado por

$$\varphi_i(x_0 + x_1i + x_2j + x_3k) = \sigma_i(x_0) + \sigma_i(x_1)i_i + \sigma_i(x_2)j_i + \sigma_i(x_3)k_i$$

donde $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ dependiendo de si σ_i es un encaje real o complejo.

Cuando el cuerpo es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, las clases de isomorfismo de álgebras de cuaterniones son pocas. Sean $\mathcal{H} = (\frac{-1-1}{\mathbb{R}})$ los cuaterniones de Hamilton usuales.

Proposición 5.21. ■ Todas las álgebras de cuaterniones sobre $\mathbb{C}$ son isomorfas a $M_2(\mathbb{C})$.

- Las álgebras de cuaterniones sobre $\mathbb{R}$ se dividen en dos clases, las isomorfas a $M_2(\mathbb{R})$ y las isomorfas a $\mathcal{H}$ (que se distinguen por ser $\mathcal{H}$ de división: todo elemento distinto de cero tiene inverso).

Dado $\sigma: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que A se *parte* en σ si $(\frac{\sigma a \sigma b}{\mathbb{R}}) \simeq M_2(\mathbb{R})$. Si en cambio es $(\frac{\sigma a \sigma b}{\mathbb{R}}) \simeq \mathcal{H}$ decimos que se *ramifica*.

A partir de la proposición anterior se obtiene un encaje

$$A \rightarrow \mathcal{H}^t \oplus M_2(\mathbb{R})^r \oplus M_2(\mathbb{C})^s$$

dado por

$$\varphi(a) = (\varphi_1(a), \dots, \varphi_n(a))$$

Este encaje es la herramienta central en la construcción de los grupos de cuaterniones. A partir de ahora centramos nuestra atención en conseguir obtener un objeto de "tipo discreto" que nos permita obtener un subgrupo discreto en la imagen de φ .

Definición 5.22. Un $a \in A$ se dice *integral* si su polinomio minimal (reducido) $x^2 - tr(a)x + n(a)$ tiene coeficientes en $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. Es decir, si su traza y su norma están en el anillo de enteros de $\mathbb{K}$.

Notamos que la propiedad de ser integral no se preserva por suma y producto (a diferencia de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$).

Definición 5.23. Dado V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, decimos que $L \subset V$ es un *retículo* en V si es un $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ -módulo finitamente generado contenido en V . Un retículo se dice *completo* si $L \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}} \mathbb{K} \simeq V$.

Dado un $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial, obtenemos ejemplos de retículos completos al considerar las sumas con coeficientes enteros de vectores en una base del mismo. En general, al considerar un espacio vectorial sobre un cuerpo de números $\mathbb{K}$, obtenemos retículos completos al considerar las sumas con coeficientes en $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ de vectores en una base del mismo.

Observación 5.24. [22, Lemma 2.2.4] Un $a \in A$ es integral si y sólo si $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[a]$ es un retículo en A .

Definición 5.25. Un *orden* $\mathcal{O} \subset A$ es un retículo completo en A que también es un subanillo de A .

Ejemplo 5.26. Los dos ejemplos centrales de órdenes son los siguientes:

- $M_2(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ en $M_2(\mathbb{K})$.
- Si $A = (\frac{ab}{\mathbb{K}})$ con $a, b \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, entonces $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[1, i, j, k]$ es un orden en A .

Encapsulamos lo que necesitamos de estas definiciones en la siguiente proposición.

Proposición 5.27. [22, Lemma 2.2.7] Un subanillo $\mathcal{O}$ es un orden en A si y sólo si está formado por elementos integrales, contiene a $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ y satisface $\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}} \mathbb{K} \simeq A$.

En particular, la traza de un elemento en un orden es un entero algebraico.

Construcción de láttices irreducibles en $SL_2(\mathbb{R})^r \times SL_2(\mathbb{C})^s$

Fijemos $G = SL_2(\mathbb{R})^r \times SL_2(\mathbb{C})^s$. Consideremos entonces $A = (\frac{ab}{\mathbb{K}})$ tal que s es el número de encajes complejos de $\mathbb{K}$ y r el número de encajes reales de $\mathbb{K}$ tal que A se parte, notemos además por t el número de encajes reales donde A ramifica. Dado un orden $\mathcal{O}$ de A se define

$$\mathcal{O}^1 := \{x \in \mathcal{O} : n(x) = 1\}.$$

Con esto obtenemos el subgrupo

$$\Gamma_0 := \varphi(\mathcal{O}^1) < \mathcal{H}^t \oplus SL_2(\mathbb{R})^r \oplus SL_2(\mathbb{C})^s$$

y al proyectar al complemento de $\mathcal{H}^t$ definimos finalmente

$$\Gamma < G = SL_2(\mathbb{R})^t \oplus SL_2(\mathbb{C})^s.$$

Llamamos a un grupo Γ construido de esta manera un *grupo de cuaterniones*.

Teorema 5.28. [23, Chapitre 4, Theoreme 1.1] Un grupo de cuaterniones Γ es un subgrupo irreducible (además lattice) de $SL_2(\mathbb{R})^t \oplus SL_2(\mathbb{C})^s$.

Ejemplo 5.29. Recordando la Observación 5.20, tenemos que podemos obtener el encaje del grupo $SL_2(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ en $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$ descrito en al comienzo de esta sección como el grupo de cuaterniones asociado al álgebra $A = (\frac{1,1}{\mathbb{Q}[\sqrt{2}]})$ y el orden obtenido al considerar las combinaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ de la base que define A .

Decimos que dos subgrupos Γ, Λ de un grupo G son *commensurables* si existe $g \in G$ tal que $\Gamma \cap g\Lambda g^{-1}$ es de índice finito en Γ y $g\Lambda g^{-1}$. Se puede probar (ver la referencia [23]) que un grupo Γ conjugado a un grupo commensurable a un grupo de cuaterniones de G es nuevamente un subgrupo discreto irreducible de G . Llamaremos *lattice aritmético* a un tal grupo.

Tenemos lo necesario para probar el teorema central de esta sección.

Demostración del Teorema 5.19

En primer lugar probaremos la tesis del teorema para grupos de cuaterniones. Consideremos entonces $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^r \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})^s$ un subgrupo de cuaterniones definido a partir de un orden $\mathcal{O} \subset A = (\frac{a}{\mathbb{K}})$ y un encaje $\varphi: A \rightarrow \mathcal{H}^t \oplus \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^r \oplus \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})^s$.

Sea $\gamma \in \Gamma$ con $\gamma = \varphi(a)$ para $a \in \mathcal{O}^1$. Notando $p_i: G \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{L})$ ($\mathbb{L} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) una de las proyecciones en los factores simples de G , obtenemos que

$$\mathrm{tr}(p_i(\gamma)) = \mathrm{tr}(\varphi_i(a)) = \sigma_i(\mathrm{tr}(a)) \in \mathcal{O}_{\sigma_i(\mathbb{K})}$$

Para ver la pertenencia final basta recordar la Observación 2.2 que nos dice que dado un morfismo de cuerpos $\sigma: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$ se tiene que $\sigma(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ y recordar que $\mathrm{tr}(a) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ por la Proposición 5.27.

Con esto, dado λ valor propio de $g := p_i(\gamma)$, es $\lambda^2 - \mathrm{tr}(g)\lambda + 1 = 0$, de manera que nuevamente por la Proposición 2.17 es $|\lambda|_* = 1$ para todo valor propio no-arquimediano. Como todo valor propio de γ es valor propio de $p_i(\gamma)$ para algún i , tenemos que $|\lambda|_* = 1$ para todo valor propio no arquimediano en $\mathbb{K}[\lambda]$.

Comentario sobre subgrupos aritméticos

Se puede definir una clase de subgrupos irreducibles de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^r \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})^s$ más grande a partir de considerar subgrupos conmensurables a grupos de cuaterniones. Para [23] estos son los *subgrupos aritméticos* de G .

Observación 5.30. Sean dos grupos conmensurables Γ y Λ en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Dado λ valor propio de $\gamma \in \Gamma$, tenemos que existe un k tal que λ^k es valor propio de un elemento en Λ .

La observación se deduce de que por un lado como existe $g \in G$ tal que $[\Gamma : \Gamma \cap g\Lambda g^{-1}] < \infty$, para todo elemento en Γ existe una potencia que pertenece a $g\Lambda g^{-1}$, y por otro lado de que si λ es valor propio de un γ se tiene que λ^k es valor propio de γ^k .

Corolario 5.31. Sea Γ un subgrupo aritmético de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^r \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})^s$. Dado λ valor propio de $\gamma \in \Gamma$, supongamos que existe un cuerpo de números $\mathbb{K}$ con $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces para todo valor absoluto no arquimediano $|\cdot|_*$ en $\mathbb{K}$ es $|\lambda|_* = 1$.

Demostración. Basta notar que nuestros argumentos anteriores se basan en que los valores propios de las matrices involucradas son enteros algebraicos, lo que se deduce a partir de que lo mismo es cierto para sus trazas. Como los valores propios y la traza son invariantes por conjugación, dado un grupo Γ conmensurable a un grupo formado por matrices con trazas y valores propios enteros algebraicos, tenemos que existe un subgrupo de índice finito $H < \Gamma$ donde lo mismo es cierto. Luego, dado un valor propio λ de un elemento $\gamma \in \Gamma$ y un cuerpo de números $\mathbb{K}$ con $\lambda \in \mathbb{K}$, tenemos que existe un natural n tal que λ^n es valor propio de una matriz en H , de manera que para todo valor absoluto no arquimediano $|\cdot|_*$ en $\mathbb{K}$ es $|\lambda^n|_* = 1$, deduciendo el resultado gracias a la igualdad $|\lambda|_*^n = |\lambda^n|_*$. $\square$

5.4. Representaciones de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y Ping-pong

La pregunta que motiva esta sección es la siguiente: Sea $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y $A = (A_1, A_2), B = (B_1, B_2) \in G$ que A_1, B_1 y A_2, B_2 **no** están en posición ping-pong para su acción inducida en el proyectivo de $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. ¿Existe algún espacio vectorial real V de dimensión finita y un morfismo de grupos de Lie $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ tal que $\rho(A)$ y $\rho(B)$ están en posición ping-pong?

Si la respuesta fuese afirmativa, tendríamos una manera de probar que dos matrices $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$ generan un grupo libre aunque alguna tenga una proyección elíptica en uno de los factores, permitiéndonos construir un contra ejemplo con la estrategia descrita al comienzo de este capítulo. Veamos que esto nuevamente no es posible, a partir de la teoría de representaciones de estos grupos.

Notamos que el teorema de superrigidez de Margulis aplicado a los láttices aritméticos de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (ver 3.1) nos dice que este análisis descarta la existencia de un morfismo definido solamente en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$ o un lattice aritmético en general.

5.4.1. Representaciones irreducibles, suma y producto tensorial de representaciones

Llamamos *representación* de un grupo de Lie G , a un morfismo de grupos $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ que además es diferenciable, donde V es un espacio vectorial real. En este trabajo consideraremos solamente representaciones donde V es de dimensión finita.

Dadas dos representaciones $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ y $\varphi: G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ podemos considerar la *representación suma* $\rho \oplus \varphi: G \rightarrow \mathrm{GL}(V \oplus W)$ dada por

$$(\rho \oplus \varphi)(g)(v + w) := \rho(g)v + \varphi(g)w$$

Notamos que para esta representación, los espacios V y W se ven como subespacios invariantes para la acción de G en $V \oplus W$. Decimos que una representación es *irreducible* si no existen subespacios no triviales invariantes para la acción.

Tenemos el siguiente resultado:

Proposición 5.32. [19, Corollary 2.2] Toda representación $\rho: \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ es suma de representaciones irreducibles.

Lo anterior se conoce como que las representaciones de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ son *completamente reducibles*, lo mismo es cierto para $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y en general grupos de Lie semisimples (ver [20, Lemma B.1] para álgebras de Lie semisimples y recordar el Teorema 2.32).

Nuestro interés en la completa reducibilidad de nuestras representaciones reside en el siguiente resultado, que nos permite centrar la atención en entender las representaciones irreducibles solamente.

Lema 5.33. Sea G grupo de Lie y $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación. Supongamos que es $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_l$ para $\rho_i: G \rightarrow \mathrm{GL}(V_i)$ con $V_i \subset V$. Si $g, h \in G$ cumplen que $\rho(g), \rho(h)$ están en posición ping-pong, entonces existe i_0 tal que $\rho_{i_0}(g)$ y $\rho_{i_0}(h)$ están en posición ping-pong.

Demostración. Como $\rho(g)$ es proximal, tenemos que el vector propio asociado a su valor propio de norma dominante $\rho(g)^+$ pertenece a uno de los V_i , digamos que pertenece a V_{i_0} . Deducimos que $\rho_{i_0}(g)$ es proximal. A partir de la descomposición en subespacios invariantes para la acción $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l$, notamos que $\bigoplus_{i \neq i_0} V_i$ es invariante para $\rho(k)$ para todo $k \in G$, de manera que los vectores en este subespacio no están en la cuenca de atracción de $\rho(g)^+$. La posición ping-pong de $\rho(g)$ y $\rho(h)$ nos permite deducir entonces que $\rho(h)^+$ y $\rho(h)^-$ pertenecen a V_{i_0} . Repitiendo el razonamiento para $\rho(h)^+$ deducimos que $\rho(g)^- \in V_{i_0}$. Con esto, tenemos que $\rho_{i_0}(g)$ y $\rho_{i_0}(h)$ son de tipo hiperbólico (recordar la Definición 5.10).

Gracias a que los valores propios de $\rho_{i_0}(g)$ son un subconjunto de los valores propios de $\rho(g)$ (y lo mismo para $\rho_{i_0}(h)$) tenemos que $W_{\rho_{i_0}(g)} \subset W_{\rho(g)}$ y $W_{\rho_{i_0}(h)} \subset W_{\rho(h)}$. Anteriormente probamos que $\rho_{i_0}(g)^\pm = \rho(g)^\pm$ y $\rho_{i_0}(h)^\pm = \rho(h)^\pm$, de manera que recordando que la posición ping-pong de $\rho(g)$ y $\rho(h)$ se traduce en que $\rho(g)^\pm \notin W_{\rho(h)} \oplus \rho(h)^\mp$ y $\rho(h)^\pm \notin W_{\rho(g)} \oplus \rho(g)^\mp$, deducimos que lo mismo es cierto para $\rho_{i_0}(g)$ y $\rho_{i_0}(h)$, probando el lema. $\square$

A la hora de entender las representaciones de un producto de grupos, la siguiente construcción nos da una gran familia de ejemplos a partir de conocer las representaciones de cada factor, que en muchos casos es una lista completa de las representaciones del producto.

Definición 5.34. Dados G y H grupos de Lie y sean $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\varphi : H \rightarrow \text{GL}(W)$ representaciones de G y H . Se define el *producto tensorial de las representaciones* $\rho \otimes \varphi : G \times H \rightarrow \text{GL}(V \otimes W)$ a partir de

$$(\rho \otimes \varphi)(g, h)(v \otimes w) := \rho(g)v \otimes \varphi(h)w$$

para todo $(g, h) \in G \times H$, $v \in V$ y $w \in W$, y extendiendo linealmente al producto tensorial. Esta aplicación es un homomorfismo de grupos de Lie, y por lo tanto define una representación de $G \times H$ en $V \otimes W$.

Dadas bases $D = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ de V y W respectivamente, tenemos que al considerar la base $D = \{v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, \dots, v_2 \otimes w_1, \dots, v_n \otimes w_m\}$ la matriz asociada a $\rho(g) \otimes \varphi(h)$ está dada por el producto de Kronecker de las matrices asociadas a $\rho(g)$ y $\varphi(h)$. Explícitamente, si llamamos $A = (a_{ij}) = [\rho(g)]_D$ y $B = [\varphi(h)]_C$ es

$$[\rho \otimes \varphi(g, h)]_D = A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces que $\rho \otimes \varphi(g, h) = \rho(g) \otimes \varphi(h)$

A partir de lo anterior, tenemos un hecho clave para nuestro interés:

Observación 5.35. Dado un producto tensorial de representaciones $\rho \otimes \varphi : G \times H \rightarrow \text{GL}(V \otimes W)$, los valores propios de $\rho(g) \otimes \varphi(h)$ están dados por los productos de valores propios de $\rho(g)$ y $\varphi(h)$.

Explícitamente, si notamos a los valores propios de $\rho(g)$ y $\varphi(h)$ como $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y $\mu_1, \dots, \mu_m$ respectivamente, los valores propios de $\rho(g) \otimes \varphi(h)$ están dados por $\lambda_i \mu_j$ con $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m$.

Por último damos la definición de que dos representaciones sean equivalentes.

Definición 5.36. Dadas $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ y $\varphi : G \rightarrow \text{GL}(W)$ dos representaciones de un grupo (o grupo de Lie) G , decimos que son *equivalentes* si existe un isomorfismo lineal $T : V \rightarrow W$ tal que

$$\rho(g) = T^{-1} \circ \varphi(g) \circ T \quad \forall g \in G$$

Notamos que lo anterior se puede resumir en que las representaciones coinciden a menos de un cambio de base.

5.4.2. Representaciones de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ y $\text{SL}_2(\mathbb{R}) \times \text{SL}_2(\mathbb{R})$

A continuación describiremos cuales son, a menos de equivalencia, las representaciones irreducibles de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ y $\text{SL}_2(\mathbb{R}) \times \text{SL}_2(\mathbb{R})$. A la vez veremos como esta clasificación permite probar que si dos elementos de estos grupos no están en posición ping-pong, sus imágenes por una representación tampoco.

Lema 5.37. Dado $n \in \mathbb{N}$, a menos de equivalencia existe una única representación irreducible de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ en $\text{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Para dimensión $n + 1$, podemos obtener una descripción explícita al considerar el espacio de polinomios homogéneos en 2 variables de grado n y definimos la representación $\rho_n : \text{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(V_n)$ a partir de

$$\left(\rho_n \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot p \right)(x, y) := p \left(\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \right)^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = p(dx - by, -cx + ay)$$

Notamos que para $n = 0$ obtenemos la representación trivial en $V_0 = \mathbb{R}$ y para $n = 1$ la representación identidad para la acción lineal en $\mathbb{R}^2$. El lema anterior y la descripción posterior son clásicos y se pueden encontrar en el Capítulo 2 de [19].

Observación 5.38. Al considerar la base usual de V_n dada por $\{x^n, x^{n-1}y, \dots, xy^{n-1}, y^n\}$ es inmediato notar que matrices triangulares van en matrices triangulares, particularmente triangulares con 1 en diagonal en triangulares con 1 en la diagonal y matrices ortogonales en matrices ortogonales (esto último también se puede deducir a partir de la continuidad de ρ_n y que $g \in \text{SO}(2)$ es equivalente a que la sucesión g^n sea acotada).

Proposición 5.39. Sean $A, B \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ tales que **no** están en posición ping-pong. Entonces para toda representación $\rho : \text{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(V)$ las matrices $\rho(A)$ y $\rho(B)$ **no** están en posición ping-pong.

Demostración. Suponemos que la representación es irreducible gracias al Lema 5.33 y que las representaciones de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ son completamente reducibles. A partir de la clasificación de matrices en $\text{SL}_2(\mathbb{R})$, tenemos que las matrices en cuestión son hiperbólicas, elípticas o diagonales con 1 en la diagonal. En el caso de que por ejemplo A no sea hiperbólica, la Observación 5.38 nos dice que $\rho(A)$ tampoco es de tipo hiperbólico, de manera que no hay posición ping-pong en la imagen. Luego, si suponemos que tanto A como B son hiperbólicas, tenemos que **no** están en posición ping-pong si y solamente si hay alguna repetición en la lista A^+, A^-, B^+, B^- , es decir, comparten alguna dirección propia. Luego, en una base apropiada (en la que alguna de las dos sea diagonal), ambas son triangulares

superiores (o inferiores). En particular, su grupo generado $\langle A, B \rangle$ está contenido en un grupo soluble, de manera que es soluble. Concluimos gracias a la Observación 2.31 y la Proposición 5.12. $\square$

Nuestro análisis se apoyará en el siguiente resultado.

Lema 5.40. Las representaciones irreducibles de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ están dadas por $\rho_n \otimes \rho_m$ donde n, m son naturales distintos de cero y ρ_i es la representación irreducible descrita en la sección anterior.

La prueba de este lema es el contenido del Apéndice B.

Teorema 5.41. Sea $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación. Consideremos $g_1 = (x_1, y_1)$ y $g_2 = (x_2, y_2)$ tales que x_1, x_2 no están en posición ping-pong en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y y_1, y_2 tampoco. Entonces $\rho(g_1)$ y $\rho(g_2)$ **no** están en posición ping-pong.

Demostración. Gracias a los Lemas 5.33 y 5.40 y que las representaciones de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ son completamente reducibles podemos suponer que ρ está dada por $\rho_n \otimes \rho_m$ para ciertos n y m naturales. Si $n = 0$ o $m = 0$, tenemos que ρ es una representación de uno de los factores de G , de manera que estamos en las hipótesis de la proposición 5.39 anterior.

Supongamos ahora $n \geq 1$, $m \geq 1$. Si alguna de las matrices x_1, x_2, y_1, y_2 no es hiperbólica, es unipotente (valores propios 1) o elíptica. En particular, sus valores propios son de módulo 1, de manera que $\rho(g_1)$ o $\rho(g_2)$ no es proximal gracias a la observación 5.35. Entonces, supongamos además que x_1, x_2, y_1, y_2 son todas matrices hiperbólicas. Nuevamente, como x_1, x_2 e y_1, y_2 no están en posición ping-pong podemos repetir los argumentos de la Proposición 5.39, encontrando que existen bases de $\mathbb{R}^2$ en las que los grupos

$$\langle x_1, x_2 \rangle \quad \text{y} \quad \langle y_1, y_2 \rangle$$

consisten de matrices triangulares superiores (o inferiores), en particular son grupos solubles, de manera que

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle \times \langle y_1, y_2 \rangle$$

es soluble, nuevamente concluyendo la prueba gracias a la Observación 2.31 y la Proposición 5.12. $\square$

5.5. Comentarios finales

Invarianza de la integralidad

Con lo descrito hasta ahora, uno podría verse tentado a "hacer un último intento" combinando las dos ideas anteriores: dado $\Gamma < G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ aritmético, construir un morfismo de grupos de Lie $\varphi: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ tal que al considerar el cuerpo $\mathbb{K}$ generado por los coeficientes de las matrices en $\varphi(\Gamma)$ podemos además construir un morfismo de cuerpos $\sigma: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{F}$ de manera que el morfismo inducido en $\varphi(\Gamma)$ nos permita encontrar elementos en posición ping-pong para el valor absoluto que consideremos en $\mathbb{F}$.

Esto no es posible pues el hecho de que las matrices de Γ tengan trazas que son enteros algebraicos, es preservado por morfismos de grupos de Lie, como vemos en el siguiente enunciado (los grupos Γ y G con los que trabajamos verifican las hipótesis del teorema).

Teorema 5.42. [17, Theorem 2.5] Sea G un grupo de Lie algebraico real con centro trivial, $\Gamma < G$ un subgrupo Zariski denso. Entonces es equivalente:

- Las trazas de elementos en Γ son enteros algebraicos.
- Para toda representación inyectiva $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ las trazas de los elementos en $\rho(\Gamma)$ son enteros algebraicos.

De esta manera, la obstrucción para el "ping-pong p-ádico" es preservada por morfismos de grupos de Lie y obtenemos el siguiente enunciado.

Proposición 5.43. Sea $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación. Consideremos $\Gamma < G$ un grupo aritmético. Dado λ valor propio de $\rho(\gamma)$, supongamos que existe un cuerpo de números $\mathbb{K}$ con $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces para todo valor absoluto no arquimediano $|\cdot|_*$ en $\mathbb{K}$ es $|\lambda|_* = 1$.

Ping-pong en espacios de banderas

Otra forma de generalizar la noción de que dos matrices jueguen "ping-pong" es extender nuestra noción de proximalidad. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, notamos que podemos identificar $\mathbb{P}(V)$ con el cociente $\mathrm{GL}(V)/P$ donde P es el estabilizador de una recta para la acción de $\mathrm{GL}(V)$ en V .

En el caso de que $V = \mathbb{R}^n$ y la recta es $\mathbb{R}e_1$ tenemos que el grupo P está dado por las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Luego la identificación anterior no es más que identificar una recta r con la matriz (a menos del subgrupo P) que lleva el vector e_1 en esa recta. De esta manera, dada una matriz A , es equivalente que ésta sea proximal a que su acción en el cociente $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/P$ tenga un punto atractor.

Inspirados en esto, podemos ahora considerar la dinámica de la acción de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ en los espacios de banderas parciales de $\mathbb{R}^n$ y definir nociones de proximalidad y posición ping-pong en los mismos.

Definición 5.44. Una *bandera parcial* F (de índices $I = (n_1, n_2, \dots, n_k)$) de V un espacio vectorial es una sucesión de subespacios

$$V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_k$$

donde $\dim V_i = n_i$.

Un *subgrupo parabólico* P_I (de índices I) es el estabilizador en $\mathrm{GL}(V)$ de una bandera (de índices I).

Toda matriz de $\mathrm{GL}(V)$ actúa en el espacio de banderas parciales (de ciertos índices fijos I cualesquiera), el cual identificamos con $\mathrm{GL}(V)/P_I$. Decimos que una matriz A es I -proximal si su acción en $\mathrm{GL}(V)/P_I$ tiene un único punto fijo atractor. Para determinar si una matriz es I -proximal, basta con observar los módulos de sus valores propios (al igual que con la definición usual de proximalidad). Notando $\lambda_1(A) \geq \cdots \geq \lambda_n(A)$ a los módulos de los valores propios de A , decimos que la matriz tiene un *salto* en el índice k si $\lambda_k(A) > \lambda_{k+1}(A)$. Tenemos lo siguiente:

Proposición 5.45. Una matriz es I -proximal para $I = (n_1, \dots, n_k)$ si y sólo si tiene saltos en todos los índices $n_i \in I$.

Como nos interesan que una matriz y su inversa puedan ser I -proximales, centraremos nuestra atención en los índices (y subgrupos parabólicos) *simétricos*: el conjunto de índices I es simétrico si cada vez que $i \in I$ tenemos que $n - i \in I$ donde $n = \dim V$.

Con lo anterior, podemos finalmente definir lo siguiente:

Definición 5.46. Sea un conjunto de índices simétrico $I \subset \{1, \dots, n\}$. Decimos que dos matrices $A, B \in GL(V)$ están en I -posición ping-pong si:

- A, A^{-1}, B, B^{-1} son I -proximales.
- Las banderas atractoras son distintas dos a dos.
- Existe un punto en $GL(V)/P_I$ en el entorno atractor de todas las banderas atractores anteriores.

De la misma manera que en lo anterior tenemos que si dos matrices A, B están en I -posición ping-pong, existe n tal que A^n y B^n generan un grupo libre. El entorno atractor de la bandera atractora de una matriz A consiste de las banderas transversas a ésta.

Definición 5.47. Decimos que dos banderas parciales V_i y W_j de índices I , para I simétrico, son *transversas* si $V_i \oplus W_{n-i} = V$ para todo $i \in I$.

A partir de esto, es natural considerar el encaje de Plucker: Dado un espacio vectorial V y un natural k se define

$$\wedge^k: GL(V) \rightarrow GL(\wedge^k V)$$

donde $\wedge^k V$ es la potencia exterior k -ésima de V , a partir de la fórmula

$$\wedge^p A(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = Av_1 \wedge \dots \wedge Av_k$$

y extender linealmente.

Es posible probar que los módulos de los valores propios de $\wedge^k A$ son $\prod_{i \in E} \lambda_i(A)$ donde E es un subconjunto de k elementos de $\{1, \dots, n\}$ siendo $n = \dim(V)$. De esta manera, considerando k el primer índice de I , una matriz I -proximal A tiene como imagen por $\wedge^k$ una matriz proximal en el sentido usual. Además, se puede probar que banderas transversales van en banderas transversales, de manera que si dos matrices A, B están en I -posición ping-pong, $\wedge^k A, \wedge^k B$ también (para un nuevo conjunto de índices). Esto se puede resumir en la siguiente proposición, que se puede ver como un caso particular de de [14, Proposition 3.3].

Proposición 5.48. Sean $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ en I -posición ping-pong para cierto conjunto $I = (n_1, \dots, n_k)$ de índices. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\wedge^N A$ y $\wedge^N B$ están en posición ping-pong en $GL_{\binom{n}{N}}(\mathbb{R})$.

Corolario 5.49. Sea $G = SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$ y $\rho: G \rightarrow GL(V)$ una representación. Consideremos $g_1 = (x_1, y_2)$ y $g_2 = (x_2, y_2)$ tales que x_1, x_2 no están en posición ping-pong y y_1, y_2 tampoco. Entonces $\rho(g_1)$ y $\rho(g_2)$ no están en I -posición ping-pong para cualquier elección de índices I .

Demostración. Supongamos que existe una ρ y índices I tal que $\rho(g_1)$ y $\rho(g_2)$ están en I -posición ping-pong. Considerando el N de la Proposición 5.48, tenemos que $\varphi = \wedge^N \circ \rho: G \rightarrow GL(\wedge^N V)$ sería una representación tal que $\varphi(g_1)$ y $\varphi(g_2)$ están en posición ping-pong. Esto es absurdo por el Teorema 5.41. $\square$

Apéndice A

Alternativa de Tits

En este apéndice presentamos una demostración de la alternativa de Tits, basada en las notas de Y. Benoist [4] y el libro [6] para ciertos enunciados preliminares. Nuestro objetivo es ofrecer una exposición más detallada y desarrollada de los argumentos allí contenidos, incorporando explicaciones y precisiones adicionales con el fin de volver el texto más accesible.

Recordamos el enunciado:

Teorema A.1. [4, Theoreme 3.10] Dado un cuerpo de característica cero $\mathbb{K}$ y $\Gamma < \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, vale una de las siguientes afirmaciones:

- Γ es virtualmente soluble.
- Γ contiene un subgrupo libre en dos generadores.

Observación A.2. Las dos posibilidades son mutuamente excluyentes. Basta recordar que un grupo libre no es soluble y razonar de la misma manera que en la Observación 2.30 como sigue: supongamos que existe $H < \Gamma$ con H soluble y $[\Gamma : H] < \infty$ y además $F_2 < \Gamma$ un grupo libre. Por el Lema 3.6 tenemos

$$[F_2 : H \cap F_2] < [\Gamma : H] < \infty$$

de manera que $H \cap F_2$ es libre no cíclico (pues los subgrupos cíclicos de F_2 son de índice infinito y estas son las dos posibilidades por Nielsen-Schreier). Por otro lado, como $H \cap F_2 < H$ debería ser también soluble, lo cual es absurdo por la Observación 2.30.

A.1. Preliminares

A.1.1. Topología de Zariski

Una herramienta central para el estudio de subgrupos de grupos lineales es la clausura de Zariski, pues permite, dado un grupo infinito Γ construir un grupo de Lie $G \supset \Gamma$ que comparte muchas de las características de Γ (solubilidad, nilpotencia, por ej.) pero en el que ahora podemos aplicar las técnicas de grupos algebraicos y grupos de Lie.

Dado un cuerpo $\mathbb{K}$, consideramos $V \simeq \mathbb{K}^m$ un espacio vectorial de dimensión m y $\mathbb{K}[V]$ el anillo de polinomios en V , donde por polinomio nos referimos a una función de

V a $\mathbb{K}$ que se puede expresar como un polinomio en las coordenadas en una base de V . Dado un conjunto $E \subset V$ y un ideal $I < \mathbb{K}[V]$ definimos $I(E)$ el ideal de polinomios nulos en E y $Z(I)$ el conjunto de ceros comunes de I :

$$I(E) = \{p \in \mathbb{K}[V] : p(x) = 0 \quad \forall x \in E\}$$

$$Z(I) = \{x \in V : p(x) = 0 \quad \forall p \in I\}$$

Dado $E \subset V$ definimos su *clausura de Zariski* como $\overline{E}^Z = Z(I(E))$ y decimos que es *cerrado* cuando $E = \overline{E}^Z$ y *abierto* cuando es el complemento de un cerrado. Notamos que los cerrados son exactamente los conjuntos de ceros de familias de polinomios. Estos cerrados definen la *topología de Zariski* en V . Para todo $E \subset V$ consideramos la *topología de Zariski sobre E* a la restricción de la anterior topología a E .

Observación A.3. Dado un isomorfismo de cuerpos $\varphi: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{F}$, notando $V = \mathbb{K}^n$ y $W = \mathbb{F}^n$ tenemos que los espacios V y W con la topología Zariski son homeomorfos. Explícitamente, si consideramos una base $x_1, \dots, x_n$ de V e $y_1, \dots, y_n$ base de W el homeomorfismo está dado por

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \mapsto \sum_{i=1}^n \varphi(a_i) y_i$$

.

Ejemplo A.4. Tenemos que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ es un cerrado Zariski al considerar el polinomio $\det - 1$. De la misma manera, notando que la identidad $AA^T = 1$ se puede ver como los ceros simultáneos de polinomios en las entradas de las matrices, el grupo $\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ es también un cerrado Zariski. Un ejemplo de un abierto Zariski es $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ por estar descrito por la desigualdad $\det \neq 0$ que es lo mismo que el complemento de los puntos donde se da la igualdad $\det = 0$.

Ejemplo A.5. Dada una recta (o conjunto finito de rectas) en $V = \mathbb{K}^n$, la condición de preservar la recta (o la familia) se puede ver como una ecuación polinomial. De esta manera, el conjunto de matrices que fijan una recta (o permutan una familia finita) es un cerrado Zariski de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Naturalmente aparecen las nociones de conexidad, densidad y componentes conexas de cualquier topología. Una noción particularmente útil es la de *irreducibilidad*: un conjunto $E \subset V$ se dice irreducible si no se puede escribir como la unión de dos cerrados propios no vacíos distintos. Claramente un subconjunto irreducible es en particular conexo. Llamamos componentes irreducibles de E a los subconjuntos irreducibles maximales de E .

Dado un cuerpo $\mathbb{K}$ con un valor absoluto $|\cdot|$, tenemos que los polinomios de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ son continuos pensados como funciones de $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ para la topología definida a partir de este valor absoluto. De esto, es inmediato deducir que todo cerrado para la topología Zariski es también cerrado para la anterior topología. Por ejemplo, al considerar $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ con la topología usual, un cerrado Zariski es un cerrado en el sentido usual.

Procedemos a enunciar varios resultados que forman parte de la prueba de la alternativa.

Lema A.6. [6, Lemma 5.15] Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Dado $\Gamma < \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tenemos que $\bar{\Gamma}^Z$ en $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ es un grupo.

Lema A.7. [6, Lemma 5.21] Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $V = \mathbb{K}^n$. Entonces la componente Zariski conexa de la identidad Γ_e de un subgrupo $\Gamma < \text{GL}(V)$ es un subgrupo normal de índice finito de Γ que es irreducible para la topología Zariski.

Si tomamos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dado un cerrado de la topología Zariski, tenemos que es una variedad diferenciable salvo en un cerrado de interior vacío (pues es una variedad algebraica definida por ecuaciones polinomiales), de dimensión positiva siempre que no sea finita. Dado un subgrupo $\Gamma < \text{GL}(V)$ con $V \simeq \mathbb{R}^n$, tenemos que la multiplicación a izquierda por un elemento fijo es un homeomorfismo de Γ , de manera que un grupo Zariski cerrado es una variedad diferenciable. Recomendamos ver [6] donde este hecho es parte del desarrollo a lo largo de todo el texto.

Con lo anterior podemos enunciar el siguiente resultado clave:

Proposición A.8. Sea $\Gamma < \text{GL}_n(\mathbb{R})$ infinito. Entonces $\bar{\Gamma}^Z$ es un grupo de Lie de dimensión positiva.

Proposición A.9. Dados subgrupos A y B de G , con $A < B$ de índice finito y $\bar{B}^Z$ conexo Zariski, entonces $\bar{A}^Z = \bar{B}^Z$.

Demostración. Tenemos que existen finitos $b_i \in B$ tales que $B = A \cup b_2 A \cup \dots \cup b_n A$. Como la multiplicación a izquierda por un elemento de un grupo es un homeomorfismo del mismo (para la topología Zariski también) deducimos que $\bar{B}^Z = \bar{A}^Z \cup b_2 \bar{A}^Z \cup \dots \cup b_n \bar{A}^Z$. Notamos que dado que $\bar{A}^Z$ es un subgrupo de $\bar{B}^Z$, los elementos de la unión anterior son coclases, de manera que son disjuntos o iguales, luego a menos de eliminar elementos repetidos la unión es disjunta. Como $\bar{B}^Z$ es conexo y $e \in \bar{A}^Z$ deducimos que todos salvo $\bar{A}^Z$ son vacíos y $\bar{A}^Z = \bar{B}^Z$. $\square$

Proposición A.10. Dado $\Gamma < \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tenemos que Γ es soluble $\iff \bar{\Gamma}^Z$ es soluble.

Demostración. Como un subgrupo de un soluble es soluble, tenemos el recíproco.

Supongamos entonces Γ soluble.

Notemos $G = \bar{\Gamma}^Z$. La prueba se hace en tres etapas:

- $[G, G] \subset \overline{[\Gamma, \Gamma]}^Z$: Dado p polinomio que se anula en $[\Gamma, \Gamma]$, tenemos que para todos $g, h \in \Gamma$ es $p(ghg^{-1}h^{-1}) = 0$, fijando g y considerando h variable, notamos que $p(ghg^{-1}h^{-1}) = 0$ para $g \in \Gamma$ y $h \in G$ por definición de esta topología. Con un razonamiento análogo fijando $h \in G$ deducimos que p se anula en los conmutadores de elementos de G . De esta manera tenemos que $\{\text{conmutadores de } G\} \subset \overline{[\Gamma, \Gamma]}^Z$ y por lo tanto $[G, G] \subset \overline{[\Gamma, \Gamma]}^Z$.
- $G^{(n)} \subset \overline{\Gamma^{(n)}}^Z$ para todo n : si $n = 0$ no hay nada que decir. Inductivamente, tenemos que

$$G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}] \subset [\overline{\Gamma^{(n-1)}}^Z, \overline{\Gamma^{(n-1)}}^Z] \subset \overline{[\Gamma^{(n-1)}, \Gamma^{(n-1)}]}^Z = \overline{\Gamma^{(n)}}^Z$$

donde en la primer inclusión usamos la hipótesis inductiva, y en la segunda el punto anterior.

- Concluimos notando que si n_0 es tal que $\Gamma^{(n_0)} = \{e\}$ entonces por el punto anterior es

$$G^{(n_0)} \subset \overline{\Gamma^{(n_0)}}^Z = \overline{\{e\}}^Z = \{e\}$$

donde la última igualdad surge de notar que los puntos son cerrados para esta topología.

□

A.1.2. Lema de Selberg y Teorema de Engel

En el Capítulo 3 mencionamos el conocido Lema de Selberg que enunciamos a continuación:

Lema A.11. (Selberg) Dado $\mathbb{K}$ cuerpo de característica cero, todo subgrupo finitamente generado de $Gl_n(\mathbb{K})$ es virtualmente sin torsión.

El resultado que usaremos posteriormente no es este, sino la formulación más precisa a continuación (que implica el anterior resultado). La prueba se encuentra en [4].

Decimos que una matriz g es *unipotente* si 1 es su único valor propio y *virtualmente unipotente* si una potencia g^n es unipotente, o lo que es equivalente, que sus valores propios son todos raíces de la unidad.

Lema A.12. Dado $\mathbb{K}$ cuerpo de característica cero, todo subgrupo finitamente generado de $Gl_n(\mathbb{K})$ contiene un subgrupo de índice finito tal que sus elementos virtualmente unipotentes son unipotentes.

Decimos que un $\Gamma < Gl_n(\mathbb{K})$ es unipotente si sus elementos son unipotentes.

En vínculo con lo anterior, citamos el siguiente resultado clásico de la teoría de Álgebras de Lie. Notamos a las transformaciones lineales de V en V por $End(V)$ y recordamos que decimos que un $x \in End(V)$ se dice *nilpotente* si $\exists n/x^n = 0$.

Teorema A.13. (Engel) Dado V espacio vectorial sobre un cuerpo de característica cero y $\mathfrak{g} < End(V)$ un álgebra de Lie tal que todos sus elementos son nilpotentes. Entonces existe una base B de V en la que para todo $g \in \mathfrak{g}$ la matriz asociada en B es estrictamente triangular superior.

El anterior teorema y su prueba se pueden encontrar en el capítulo 6 de [12].

A.1.3. Elementos proximales

La existencia de un grupo libre se basa en las construcciones descritas en el Capítulo 5, particularmente en la dinámica de elementos proximales descrita en la Sección 5.2.2 comúnmente conocida como dinámica "ping-pong". A continuación pasamos a dar ciertos resultados complementarios.

Dado un cuerpo local $\mathbb{K}$ respecto a un valor absoluto $|\cdot|$, un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial V y $g \in GL(V)$, recordamos que $\lambda_i(g)$ es el valor absoluto del i -ésimo valor propio de g , ordenados por valor absoluto y m_g la dimensión de el espacio invariante asociado a los valores propios de módulo $\lambda_1(g)$ de g .

Lema A.14. Dado $g \in \text{End}(V)$ y $p \geq 1$, el conjunto $E_p := \{g \in \text{End}(V) / m_g \leq p\}$ es un abierto en $\text{End}(V)$.

En particular, los elementos proximales forman un abierto.

Demostración. El polinomio característico de g depende continuamente de g , de manera que los módulos de los valores propios también, de manera que el conjunto $\{g / \lambda_1(g) > \lambda_{p+1}(g)\}$ es abierto. $\square$

De lo anterior se puede concluir lo siguiente:

Lema A.15. El elemento g es proximal en $\mathbb{P}(V)$ si y sólo si existen constantes $c_n \in \mathbb{K}$ tales que la sucesión $c_n g^n$ converge, respecto a la topología en $\text{End}(V)$ inducida por $|\cdot|$, a una proyección de rango 1.

Demostración. Similarmente al Lema 5.9, dado un proximal, tomando $c_n = \lambda_1(g)^{-n}$ tenemos el resultado. Recíprocamente, dado que una proyección de rango 1 es proximal y el Lema A.14 tenemos que existe n_0 tal que $c_{n_0} g^{n_0}$ es proximal, de manera que g^{n_0} es proximal y por lo tanto g también (esto último se puede deducir considerando la forma de Jordan de g en la clausura algebraica de $\mathbb{K}$). $\square$

Notamos que cuando trabajemos con una acción de un grupo G en cierto espacio V , podemos hablar de la proximalidad de un elemento $g \in G$ al identificarlo con la transformación $g \cdot - \in \text{End}(V)$.

De esta manera, recordamos el encaje de Plucker de la Sección 5.5 $\wedge^k: \text{End}(V) \rightarrow \text{End}(\wedge^k V)$ dado a partir de la fórmula

$$\wedge^k g(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = gv_1 \wedge \cdots \wedge gv_k$$

y extender linealmente.

El siguiente Lema nos dice que si queremos que un $g \in \text{End}(V)$ actúe de manera proximal en cierto espacio, nos alcanza con que haya algún i tal que $\lambda_i(g) > \lambda_{i+1}(g)$, no necesariamente el primero.

Lema A.16. Dado $g \in \text{End}(V)$, $k \geq 1$ y $W = \wedge^k V$

- Si $k = m_g$ entonces $\wedge^k g$ es proximal en $\mathbb{P}(W)$.
- Si $\wedge^k g$ es proximal en $\mathbb{P}(W)$, entonces $p \geq m_g$.

Demostración. Se deduce de notar que los valores absolutos de los valores propios de $\wedge^p g$ son $\prod_{i \in E} \lambda_i(g)$ donde E es un subconjunto de p elementos de $\{1, \dots, m\}$ siendo $m = \dim(V)$. $\square$

A.2. Condición suficiente para la existencia de un grupo libre

El siguiente Lema se puede pensar como un caso particular de la alternativa de Tits, pero que además reduce el caso general a buscar elementos proximales en $\mathbb{P}(V)$. Decimos que la acción de un grupo $\Gamma < \text{GL}(V)$ en V es irreducible si no existe un subespacio $W \subset V$ invariante por los elementos de Γ .

Lema A.17. Dado $\Gamma < Gl(V)$ Zariski conexo, con $\dim(V) \geq 2$ tal que la acción es irreducible y Γ posee un elemento proximal, entonces:

- Existe $\gamma \in \Gamma$ tal que γ y γ^{-1} son proximales.
- Γ contiene un grupo libre en dos generadores.

Demostración. Dados dos subespacios no triviales A, B de V , la irreducibilidad de la acción de Γ nos permite encontrar un $h \in \Gamma$ tal que $h(A) \not\subset B$. Para ver esto razonamos como sigue: si $A \not\subset B$, basta tomar $h = Id$, en caso contrario el espacio generado por la órbita de A por la acción de Γ estará contenido en B , el cual sería un subespacio invariante por la acción, contradiciendo la irreducibilidad.

Además, dados finitos pares de subespacios A_i, B_i , podemos encontrar un $h \in \Gamma$ que verifica $h(A_i) \not\subset B_i$ simultáneamente. Para ver esto, al igual que en lo anterior la irreducibilidad de la acción nos dice que el subconjunto de elementos de Γ que verifica cada una de las condiciones del tipo $h(A_i) \not\subset B_i$ es no vacío, donde además, cada una de estas condiciones define un abierto de la topología Zariski. Luego, como Γ es Zariski conexo, deducimos que es además irreducible como grupo topológico para la topología Zariski gracias al Lema A.7, de manera que cualquier conjunto finito de abiertos no vacíos tiene intersección no vacía, lo cual nos permite encontrar el $h \in \Gamma$ deseado.

Veamos el primer punto.

Sea g el elemento proximal de Γ . Gracias al Lema A.15 existe c_n tal que el $\pi = \lim_n c_n g^n$ es de rango 1. Como $\mathbb{P}(\text{End}(V))$ es compacto, podemos además considerar d_n de manera que (a menos de considerar una subsucesión) existe el límite $\sigma = \lim_n d_n g^{-n}$.

Consideramos entonces dos elementos h_1 y h_2 de Γ de manera que

$$h_1(\text{Im}(\pi)) \not\subset \text{Ker } \sigma \quad \text{y} \quad h_2(\sigma h_1(\text{Im}(\pi))) \not\subset \text{Ker } \pi$$

Sea entonces $g_n = g^n h_2 g^{-n} h_1 \in \Gamma$, observamos que $\lim_n c_n d_n g_n = \pi h_2 \sigma h_1$ es entonces un múltiplo no nulo de una proyección de rango 1 (podemos observar que $\text{Im}(\pi)$ es un subespacio invariante para la transformación, donde la misma no es cero). Por el Lema A.14 tenemos que para cierto n el elemento $\gamma = g_n$ es proximal.

Podemos aplicar el mismo razonamiento para γ^{-1} , al tomar un n tal que tanto g_n como g_n^{-1} sean proximales. Para esto notamos que $\lim c_n d_n (g_n)^{-1} = h_1^{-1} \pi h_2^{-1} \sigma$ de manera que es necesario agregar a h_1 y h_2 las condiciones adicionales

$$h_1^{-1}(\text{Im}(\pi)) \not\subset \text{Ker } \sigma \quad \text{y} \quad h_2^{-1}(\sigma h_1^{-1} \text{Im}(\pi)) \not\subset \text{Ker } \pi$$

para que este límite sea un múltiplo de una proyección de rango uno, ahora sobre $h_1^{-1}(\text{Im}(\pi))$.

Veamos el segundo punto.

Sea γ el elemento tal que el y su inverso son proximales. Consideremos $h \in \Gamma$ un elemento tal que se verifican las 8 condiciones siguientes: $h^{\pm 1}(\gamma^{\pm}) \not\subset W_{\gamma} \oplus \gamma^{\mp}$ y $h^{\pm 1}(\gamma^{\mp}) \not\subset W_{\gamma} \oplus \gamma^{\pm}$. Recordamos que un tal h existe por la discusión al comienzo de esta prueba.

Concluimos notando que los elementos $\gamma_1 := \gamma$ y $\gamma_2 := h\gamma h^{-1}$ están en posición ping-pong de manera que al elevarlos a cierta potencia generan un grupo libre gracias a la Proposición 5.12. $\square$

A.3. Prueba de la Alternativa de Tits

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica cero y $\Gamma < \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ que **no** es virtualmente soluble. Probaremos que contiene un grupo libre en dos generadores.

Sin pérdida de generalidad, supondremos Γ Zariski conexo gracias a el Lema A.7 y finitamente generado gracias al siguiente resultado.

Lema A.18. [4, Lemme 2.11] Sea $\Gamma < \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo de característica cero. Entonces: Si todos los subgrupos finitamente generados de Γ son virtualmente solubles, Γ también.

Bajo estas hipótesis, procedemos como sigue.

Afirmación. $[\Gamma, \Gamma]$ es Zariski conexo y no es virtualmente soluble.

Para ver que es conexo, notamos que el mapa $(x, y) \mapsto xyx^{-1}y - 1$ es continuo respecto a la topología Zariski, de manera que $C = \{xyx^{-1}y - 1 \mid x, y \in \Gamma\}$ es conexo. Además, $\langle C \rangle = [\Gamma, \Gamma]$ y $\langle C \rangle = \cup_n C^n$, donde los C^n son conexos y comparten el punto e , de manera que $[\Gamma, \Gamma]$ también es conexo.

Luego, por las proposiciones A.9 y A.10 se tiene que un subgrupo Zariski conexo y no soluble no es virtualmente soluble. En caso contrario, tomando $\Lambda <_{i.f.} \Gamma$ soluble, tendríamos que $\bar{\Lambda}^Z = \bar{\Gamma}^Z$ de lo cual se deduce que Γ soluble. Luego como Γ es soluble si y sólo si $[\Gamma, \Gamma]$ lo es, tenemos la afirmación.

Afirmación. Existe $\gamma \in [\Gamma, \Gamma]$ con un valor propio $\alpha \in \mathbb{K}$ que no es raíz de la unidad.

Veamos que si todos los valores propios de elementos de un grupo lineal finitamente generado tuviesen a todos sus valores propios raíces de la unidad, el grupo sería virtualmente soluble.

Para el siguiente argumento se utiliza la hipótesis de finitamente generado de la siguiente manera: dado un generador finito de Γ , llamando $\mathbb{K}$ al cuerpo generado sobre $\mathbb{Q}$ por los coeficientes de las matrices en este generador. Observar que $\Gamma < \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, dado que las operaciones de inversión y multiplicación de matrices son polinomiales en las entradas de las mismas.

Con esto, el Lema A.12 nos dice que existe un subgrupo de índice finito donde todos los virtualmente unipotentes son unipotentes, en nuestro caso, obtenemos un subgrupo de índice finito formado por unipotentes.

Lema A.19. Si $\Lambda < \mathrm{GL}(V)$ está formado por unipotentes, es soluble.

Demostración. Tenemos que para todo $\gamma \in \Lambda$ se tiene $(\gamma - 1)^n = 0$, donde $n = \dim(V)$, de manera que lo mismo es cierto para $G = \bar{\Lambda}^Z$ por definición de la clausura Zariski, el cual es un grupo de Lie.

Consideramos $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G , tenemos que $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ es un difeomorfismo local en 0 sobre un abierto U que contiene al neutro de G . Dado $A \in \mathfrak{g}$, $\exp(A) = I + A + A^2/2 + \dots \in G$ de manera que es unipotente, deducimos que A es nilpotente pues si α es un valor propio de A , entonces $\exp(\alpha)$ es un valor propio de $\exp(A)$ de manera que $\exp(\alpha) = 1$ y $\alpha = 0$.

Con esto, $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie lineal formada por elementos nilpotentes, de manera que por el Teorema de Engel A.13 sabemos que existe una base de V en la que estas matrices son todas estrictamente triangulares superiores. Deducimos que entonces las matrices de U son triangulares superiores con unos en la diagonal y por lo tanto también las de G_0 , la componente conexa en la identidad de G (recordar que U genera la componente conexa de la identidad por el Corolario 2.24). Luego, recordando que G es un subgrupo del normalizador de su componente conexa (Corolario 2.26) y observando que el normalizador del grupo de las matrices triangulares superiores es este mismo grupo (ver Apéndice C), deducimos que G consiste de matrices triangulares superiores. En particular lo mismo es cierto para λ de manera que es soluble (ver Ejemplo 2.29). $\square$

Con esto, para probar la afirmación, basta notar que si todos los valores propios de elementos en $[\Gamma, \Gamma]$ fuesen raíces de la unidad, tendríamos que el subgrupo construido a partir del Lema de Selberg sería de índice finito y formado por unipotentes, de manera que sería soluble, absurdo.

Sea $\gamma \in [\Gamma, \Gamma]$ con valor propio α que no es raíz de la unidad. Gracias al Lema [4, Lemme 3.12] (que es una extensión de nuestro Teorema 2.14 a cuerpos finitamente generados sobre $\mathbb{Q}$), tenemos que existe un valor absoluto $|\cdot|$ en el cuerpo $\mathbb{K}[\lambda]$ tal que $|\alpha| > 1$.

De esta manera, $\lambda_1(\gamma) > 1$ y tomando $k = m_\gamma$ como en el Lema A.16 tenemos que Γ actúa en $W = \wedge^k V$ con $\gamma' = \wedge^k \gamma$ proximal para la acción. Notamos que $\wedge^k: \Gamma \rightarrow GL(W)$ preserva la conexión Zariski, dado que es un mapa en el que cada entrada de la matriz resultante es polinomial en las entradas de la matriz original. En el caso de que W fuese irreducible y de dimensión mayor a 2, estaríamos en las hipótesis del Lema A.17, concluyendo la prueba.

Terminamos la prueba observando cómo asegurar esto último.

Si W no fuese irreducible, considero un sub-espacio propio invariante W_1 de dimensión mínima, el cual por esa razón será irreducible, si $\gamma'|_{W_1}$ es proximal consideramos la acción de Γ en este subespacio. En caso contrario, Inductivamente construimos

$$0 = W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \cdots \subsetneq W_l = W$$

una bandera de sub-espacios invariantes por Γ tal que los cocientes W_i/W_{i-1} son irreducibles, de manera que en uno de estos se realiza el valor propio mayor, es decir, existe i tal que la acción de γ' en $V_i = W_i/W_{i-1}$ tiene un valor propio de módulo $\lambda_1(\gamma)^k$ y es proximal.

Resta observar que $\dim(V_i) \geq 2$. Sea h La transformación correspondiente a la acción de γ' en V_i y $H < GL(V_i)$ el grupo correspondiente a la acción de Γ . Notamos que h tiene determinante 1, pues $\gamma \in [\Gamma, \Gamma]$ de manera que $\gamma' \in [\wedge^k \Gamma, \wedge^k \Gamma]$ y de la misma manera $h \in [H, H]$. Por construcción, h tiene un valor propio de valor absoluto mayor a uno, como el determinante es el producto de los valores propios, la discusión anterior nos dice que debe tener otro valor propio de valor absoluto menor que uno, para lo cual es necesario que $\dim V_i > 1$.

Apéndice B

Pesos maximales de una representación

Este apéndice no es más que un recuento de ciertos resultados de [13] y cómo nos permiten demostrar el Lema 5.40. El contenido se puede encontrar en los capítulos 2 y 3 de la referencia. El resultado central consiste en que dado un grupo de lie semisimple G y una representación irreducible $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$, tenemos que $d\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{sl}(V)$ está determinada a menos de equivalencia por su *peso maximal*. Luego observando que las representaciones $\rho_n \otimes \rho_m$ recorren todos los posibles pesos maximales y recordando la fórmula 2.32 tendremos el resultado. Luego nuestro análisis se centrará en intentar entender $\mathfrak{g}$ y sus posibles representaciones como álgebra de Lie.

Sea G un grupo de Lie semisimple, $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie y fijemos un *álgebra de Cartan* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$: $\mathfrak{h}$ es una subálgebra abeliana maximal conformada por elementos semi-simples (diagonalizables). Otra forma de obtener $\mathfrak{h}$ es como el álgebra de un subgrupo abeliano diagonalizable maximal H de G .

Ejemplo B.1. ■ Si $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ entonces

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \mid \lambda > 0 \right\} \quad \text{y} \quad \mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

Si $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ entonces

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu > 0 \right\} \quad \text{y} \quad \mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Si $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ entonces

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1}\mu^{-1} \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu > 0 \right\} \quad \text{y} \quad \mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

El primer ejemplo anterior será de vital importancia. Notamos $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ a el conjunto de matrices reales 2x2 de traza nula. Es el álgebra de Lie de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Para nuestros intereses, consideraremos la base canónica de este espacio como

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notamos que en esta base es $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$ y $[e, f] = h$. Esta es la única álgebra de Lie real irreducible de dimensión 2 y las relaciones anteriores la determinan.

Mimetizando lo anterior, la estructura de $\mathfrak{g}$ se vuelve más clara al estudiar la acción de $\mathfrak{h}$ a través del corchete en este espacio. Dada $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, se define

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : [A, X] = \alpha(A)X \forall A \in \mathfrak{h}\}$$

Notamos que como el álgebra $\mathfrak{h}$ es abeliana, se diagonaliza simultáneamente en cierta base, de manera que su acción por el corchete también. Luego estos espacios son espacios propios para toda matriz en $\mathfrak{h}$ y el funcional α describe el valor propio de cada $A \in \mathfrak{h}$. Llamamos *peso* a un $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ tal que $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ y Φ al conjunto de estas raíces y le llamamos un *sistema de raíces*. Notamos que estas definiciones dependen de la elección de $\mathfrak{h}$ y son no-canónicas.

A partir de esto tenemos la *descomposición en espacios de peso* de $\mathfrak{g}$ (ver [13, Corollary 2.5.19]):

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

Un cálculo directo nos permite observar que para $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ es $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, en particular $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. En el caso de que α, β y $\alpha + \beta$ son raíces se puede ver que hay una igualdad en la inclusión anterior.

Teorema B.2. [13, Theorems 2.5.20] Bajo las hipótesis anteriores es:

- Φ genera $\mathfrak{h}^*$.
- $\dim[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = 1 \quad \forall \alpha \in \Phi$ y existe un único elemento $h_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ tal que $\alpha(h_\alpha) = 2$ (llamamos a h_α la *coraíz* de α).
- Si $\alpha \in \Phi$ y $c \in \mathbb{C}$ entonces $c\alpha \in \Phi$ si y solo si $c = \pm 1$. Además $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$.
- Si $\alpha, \beta \in \Phi$ y además $\alpha + \beta \in \Phi$, entonces $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

El resultado clave, es que para cada $\alpha \in \Phi$ el álgebra generada por $\mathfrak{g}_\alpha$ y $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ es isomorfa a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, de manera que la clasificación de las representaciones de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ nos permitirá entender las representaciones de $\mathfrak{g}$ y en consecuencia las de G .

Lema B.3. Para cada $\alpha \in \Phi$ existen $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ y $f_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tales que el elemento $h_\alpha = [e_\alpha, f_\alpha] \in \mathfrak{h}$ satisface $\alpha(h_\alpha) = 2$. De esta manera es $[h_\alpha, e_\alpha] = 2e_\alpha$ y $[h_\alpha, f_\alpha] = -2f_\alpha$ de manera que $\{e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha\}$ genera un álgebra isomorfa a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ con el isomorfismo evidente.

A partir de lo anterior, es pertinente observar que las representaciones irreducibles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ tienen una descripción explícita (ver [20, Theorem 1.66] y usar que $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ es una "forma real" de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$). Tenemos lo siguiente:

Teorema B.4. Sea $\pi: \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{sl}(V)$ una representación irreducible con $\dim V = n + 1$. Entonces existe una base B de V en la que es

$$[\pi(h)]_B = \begin{pmatrix} n & & & & \\ & n-2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 2-n & \\ & & & & -n \end{pmatrix} \quad [\pi(e)]_B = \begin{pmatrix} 0 & n & & & \\ & 0 & n-1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\pi(f)]_B = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 2 & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & n & 0 \end{pmatrix}$$

Para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ observamos que entonces el funcional $\alpha: \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\alpha(A) = \pi(A)_{11} - \pi(A)_{n+1, n+1}$ está dado por $\alpha(A) = n(A_{11} - A_{22}) = 2n$, luego el entero n que determina la representación aparece como el coeficiente de α en la base $\{(A_{11} - A_{22})\}$ de $\mathfrak{h}^*$.

Volvamos a el caso general. Sea G semisimple con $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ un álgebra de Cartan y Φ el sistema de pesos asociado, se define el *lattice de pesos* de $\mathfrak{g}$ como

$$P(\mathfrak{g}) = \{\mu \in \mathfrak{h}^* : \mu(h_\alpha) \in \mathbb{Z} \quad \forall \alpha \in \Phi\}$$

Dada $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación de dimensión finita, para $\mu \in \mathfrak{h}^*$ se define

$$V_\mu = \{v \in V : d\rho(A)v = \mu(A)v \quad \forall A \in \mathfrak{h}\}$$

A partir de la discusión anterior y la descomposición de $\mathfrak{g}$ en espacios de peso, se obtiene el siguiente Teorema clave.

Teorema B.5. [13, Theorem 3.1.16] Sea $d\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ como antes. Llamamos *peso* de $d\rho$ a un $\mu \in \mathfrak{h}^*$ tal que $V_\mu \neq 0$ y notamos $X(\rho)$ al conjunto de pesos de $d\rho$. Entonces:

- $X(d\rho) \subset P(\mathfrak{g})$.
- $V = \bigoplus_{\mu \in X(d\rho)} V_\mu$

Dada $\alpha \in \Phi$ $\mu \in \mathfrak{h}^*$, notamos que si $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ es $xV_\mu \subset V_{\mu+\alpha}$. Para ver esto, dado $v \in V_\mu$ y $A \in \mathfrak{h}$ calculamos

$$A(x \cdot v) = x \cdot Av + [A, x]v = \mu(A)x \cdot v + \alpha(A)v = (\mu + \alpha)(A)x \cdot v$$

Esto nos permite ver que en las bases adecuadas, el morfismo ρ y su derivada $d\rho$ llevan matrices triangulares superiores en matrices triangulares superiores. Para esto se fija una noción de raíz positiva, de manera que obtenemos una partición simétrica $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$, de manera que las matrices triangulares superiores se identifican con

$$\mathfrak{n}^+ = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

. La identidad anterior nos muestra que esta estructura se preserva al considerar la base dada por el Teorema.

Ejemplo B.6. Notamos que esto nos da información de como se comportan los valores propios de las matrices al aplicar el morfismo ρ . Analizamos el caso $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Consideramos $H \subset G$ el subgrupo de matrices diagonales en cada factor y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ sus álgebras de Lie como en el ejemplo anterior. Notando por $e_{ij}: \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ el mapa que da la coordenada ij de la matriz y p_i la proyección

de $\mathfrak{g}$ en cada factor, observamos que las raíces son los mapas $\alpha_1 = (e_{11} - e_{22}) \circ p_1$ y $\alpha_2 = (e_{11} - e_{22}) \circ p_2$ y sus opuestos, que dan lugar a las raíces naturales

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \times Id \quad y \quad h_2 = Id \times \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

Dada

$$a = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu & * \\ & \mu^{-1} \end{pmatrix} \in H$$

tenemos que

$$\log(A) = \begin{pmatrix} \log \lambda & * \\ & -\log \lambda \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \log \mu & * \\ & -\log \mu \end{pmatrix}$$

de manera que $d\rho \log(a)$ es una matriz triangular superior (en la base dada por el Teorema anterior) con entradas en la diagonal de la forma $n \log \lambda + m \log \mu$ para $n, m \in \mathbb{Z}$. De esta manera $\rho(a) = \exp d\rho \log(a)$ es triangular superior nuevamente con entradas en la diagonal de la forma $\lambda^n \mu^m$. Luego los valores propios de $\rho(a)$ se escriben como productos de potencias de los valores propios de a . Recomendamos la referencia para un estudio de porqué esto vale en general.

Podemos dotar a los pesos de una representación $d\rho$ de un orden. En el caso de $\mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2$ por ejemplo, al identificarlos con pares de enteros tenemos el orden usual de $\mathbb{Z}^2$. Esto es posible para cualquier elección de álgebra de Cartan de un álgebra semisimple y partición de Φ , en particular decimos que para dos pesos es $\mu < \lambda$ si $\lambda - \mu$ es una combinación con coeficientes no-negativos de raíces en Φ^+ . El resultado clave, consiste en que en el caso de una representación irreducible, la misma consta de un peso maximal $\chi = \chi(d\rho)$ tal que $\dim V_\chi = 1$ y éste determina la representación.

Lema B.7. [13, Corollary 3.2.3] Dada $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ representación irreducible de dimensión finita de álgebras de Lie, existe $\chi \in \mathfrak{h}^*$ peso tal que $\dim V_\chi = 1$. Además, para todo $\mu \in X(\pi)$ con $\mu \neq \chi$ es $\mu < \chi$.

Al χ del Lema anterior se lo conoce como el *peso maximal* de π .

Teorema B.8. [13, Theorem 3.2.5] Sea $\lambda \in P(\mathfrak{g})$.

- Existe una representación irreducible con peso maximal λ .
- La representación con peso maximal λ es única a menos de equivalencia.

Para concluir, notamos que el peso maximal de la representación $\rho_n \otimes \rho_m$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ es el par de enteros n, m . De manera que estas recorren todas las posibles representaciones irreducibles de $\mathfrak{g}$.

Apéndice C

Cálculo de normalizadores

En la prueba del Lema 2.27 fue necesario identificar el normalizador de ciertos grupos, a continuación calcularemos el normalizador en $SL_2(\mathbb{R})$ del grupo de rotaciones $SO(2)$, del grupo A de matrices diagonales, el grupo U de matrices unipotentes triangulares superiores y el grupo B de matrices triangulares superiores.

■ $SO(2)$.

Sea

$$h = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in SO(2), \quad b \neq 0, \quad g = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}).$$

Operando se obtiene

$$ghg^{-1} = \begin{pmatrix} axw + byw + bxz - ayz & -axy - by^2 - bx^2 + axy \\ azw + bw^2 + bz^2 - azw & -azz - bwx - bxz + axw \end{pmatrix}.$$

De manera que si

$$ghg^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in SO(2),$$

deducimos las igualdades

$$\begin{cases} xz + yw = 0, \\ x^2 + y^2 = z^2 + w^2, \end{cases}$$

de manera que las filas de g son perpendiculares y del mismo módulo. Luego existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g = cf$ con $f \in SO(2)$. Como $1 = \det(g) = c^2 \det(f) = c^2$, tenemos que $g \in SO(2)$. Concluimos que

$$N_{SL_2(\mathbb{R})}(SO(2)) = SO(2).$$

■ A .

Sea

$$h = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in A, \quad g \in SL_2(\mathbb{R}).$$

Supongamos que

$$ghg^{-1} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} \in A.$$

En tal caso tenemos

$$\begin{cases} h g^{-1}(e_1) = b g^{-1}(e_1), \\ h g^{-1}(e_2) = b^{-1} g^{-1}(e_2), \end{cases}$$

de manera que $\{g^{-1}(e_1), g^{-1}(e_2)\}$ es una base de vectores propios de h . Deducimos que son múltiplos de e_1 y e_2 y se dan dos posibilidades:

$$g = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad g = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Concluimos que

$$N_{SL_2(\mathbb{R})}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^\times \right\}.$$

■ U .

Sea

$$h = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U, \quad t \neq 0, \quad g \in SL_2(\mathbb{R}).$$

Supongamos que $ghg^{-1} \in U$. En tal caso tenemos que

$$ghg^{-1}(e_1) = e_1,$$

y por lo tanto $h g^{-1}(e_1) = g^{-1}(e_1)$. Deducimos que $g(e_1) = a e_1$ para cierto $a \in \mathbb{R}$, de manera que

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$

Como

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R} \right\}$$

normaliza a U , concluimos que

$$N_{SL_2(\mathbb{R})}(U) = B.$$

■ B

Gracias a la inclusión $U \subset B$, los cálculos del ítem anterior aplican y tenemos que el normalizador de B está incluido en B , como un grupo siempre se normaliza a si mismo tenemos que

$$N_{SL_2(\mathbb{R})}(B) = B$$

Bibliografía

- [1] I. Agol. The virtual haken conjecture (with an appendix by ian agol, daniel groves and jason manning). *Documenta Mathematica*, 18:1045–1087, 2013.
- [2] A. F. Beardon. *The geometry of discrete groups*, volume 91. Springer Science & Business Media, 2012.
- [3] R. Benedetti and C. Petronio. *Lectures on hyperbolic geometry*. Springer Science & Business Media, 1992.
- [4] Y. Benoist. Sous-groupes discrets des groupes de lie. *European Summer School in Group Theory*, pages 1–72, 1997.
- [5] Y. Benoist. Réseaux des groupes de lie. *Notes de cours de*, 2, 2008.
- [6] Y. Benoist and J.-F. Quint. Random walks on reductive groups. In *Random Walks on Reductive Groups*, pages 153–167. Springer, 2016.
- [7] M. R. Bridson and A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319. Springer Science & Business Media, 2013.
- [8] N. Brody, D. Fisher, W. van Limbeek, et al. Greenberg-shalom’s commensurator hypothesis and applications. *Expositiones Mathematicae*, page 125736, 2025.
- [9] J. O. Button. A 3-manifold group which is not four dimensional linear. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 218(9):1604–1619, 2014.
- [10] J. W. Cannon. Introductory notes on richard thompson’s groups. *Enseign. Math.(2)*, 42(3-4):215, 1996.
- [11] G. Cosac. *On the geometry of semi-arithmetic Riemann surfaces*. PhD thesis, PhD thesis, IMPA, 2021.
- [12] K. Erdmann and M. J. Wildon. *Introduction to Lie algebras*, volume 122. Springer, 2006.
- [13] R. Goodman, N. R. Wallach, et al. *Symmetry, representations, and invariants*, volume 255. Springer, 2009.
- [14] F. Guéritaud, O. Guichard, F. Kassel, and A. Wienhard. Anosov representations and proper actions. *Geometry & Topology*, 21(1):485–584, 2017.

- [15] D. Hilbert. *The theory of algebraic number fields*. Springer Science & Business Media, 1998.
- [16] T. W. Hungerford. *Algebra*, volume 73. Springer Science & Business Media, 2012.
- [17] S. Hurtado and S. Dey. Irreducible groups and ergodicity in the boundary. *Arxiv*, 2025.
- [18] S. Katok. *Fuchsian groups*. University of Chicago press, 1992.
- [19] A. W. Knap. Representation theory of semisimple groups: an overview based on examples. 2001.
- [20] A. W. Knap and A. W. Knap. *Lie groups beyond an introduction*, volume 140. Springer, 1996.
- [21] R. Lyndon and J. Ullman. Pairs of real 2-by-2 matrices that generate free products. *Michigan Mathematical Journal*, 15(2):161–166, 1968.
- [22] C. Maclachlan and A. W. Reid. Arithmetic hyperbolic 3-manifolds and orbifolds. In *The Arithmetic of Hyperbolic 3-Manifolds*, pages 275–304. Springer, 2003.
- [23] M. MF. Vigneras, arithmétique des algebres des quaternions, lnm 800.
- [24] G. Prasad and M. S. Raghunathan. Cartan subgroups and lattices in semi-simple groups. *Annals of Mathematics*, 96(2):296–317, 1972.
- [25] J.-P. Serre. *Local fields*, volume 67. Springer Science & Business Media, 2013.
- [26] J. Stillwell. *Classical topology and combinatorial group theory*, volume 72. Springer Science & Business Media, 2012.
- [27] W. P. Thurston. Hyperbolic structures on 3-manifolds, ii: Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle. *Collected works of William P. Thurston with commentary*, 2:79–110, 1986.