Genericidad de difeomorfismos que tienen todos sus exponentes de Lyapunov nulos en casi todo punto

Lic. Elisa Grin
Orientadora: Dra. María Alejandra Rodríguez Hertz

septiembre de 2010

Índice general

Resumen

En este trabajo encontraremos para variedades de dimensión 3, un conjunto residual R en un abierto de $\mathrm{Diff}^1_m(M)$ tal que todo difeomorfismo $f \in R$ tiene todos sus exponentes de Lyapunov nulos en casi todo punto.

Introducción

No se sabe con qué frecuencia ocurre entre los difeormorfismos conservativos que todos los exponentes de Lyapunov sean nulos casi todo punto. Ni que haya un exponente no nulo. El objetivo de esta monografía es mostrar que para toda variedad de dimensión 3, hay un conjunto "grande"de difeomorfismos para los cuales todos los exponentes son cero casi todo punto.

De manera concreta, sea M una variedad 3-dimensional, y sea m una medida de volumen. Llamemos $\mathrm{Diff}_m^1(M)$ a los difeomorfismos que preservan m, i.e. $m\left(f^{-1}\left(A\right)\right) = m\left(A\right)$ para todo conjunto A medible. Mostraremos que:

Teorema 1 *Para toda variedad 3-dimensional M, existe un abierto no vacío $\mathcal{A} \subset \mathrm{Diff}_m^1(M)$ tal que genéricamente en $\mathcal{A}$ todos los exponentes de Lyapunov son cero m-casi todo punto en M.*

Recordemos que decimos que una propiedad es génerica en un conjunto de difeomorfismos si existe un subconjunto residual de ese conjunto en donde vale la propiedad.

Para la demostración, usamos el reciente resultado:

Teorema 2 (JRH) *Sea M una variedad de dimensión 3, entonces existe un conjunto R residual en $\mathrm{Diff}_m^1(M)$, tal que todo difeomorfismo $f \in R$ o bien tiene todos sus exponentes de Lyapunov nulos casi todo punto, o bien es ergódico, no uniformemente hiperbólico, y tiene descomposición dominada.*

Un difeomorfismo $f : M \to M$ tiene descomposición dominada si el fibrado tangente TM se descompone en dos sub-fibrados invariantes E y F, tales que

(1) $TM = E \oplus F$

(2) para todo $x \in M$ y para todo par de vectores unitarios $v_E \in E_x$ y $v_F \in F_x$ se tiene

$$\left\|Df_x v_E\right\| \leq \frac{1}{2}\left\|Df_x v_F\right\|$$

para alguna métrica apropiada [G]. Se dice, además, que F domina a E, y se denota $F \succ E$.

Veremos que si f es un difeomorfismo en una variedad de dimensión 3 tal que f tiene dos puntos fijos hiperbólicos p_1 y p_2 donde los autovalores $\alpha_1,\ \beta_1$ y γ_1 de Df_{p_1} y $\alpha_2,\ \beta_2$ y γ_2 de Df_{p_2} verifican las propiedades enunciadas a continuación,

1. $\alpha_1,\ \beta_1 \in \mathbb{C}$, $|\alpha_1| > 1,\ |\beta_1| > 1$,
2. $\gamma_1 \in \mathbb{R}$, $|\gamma_1| < 1$,
3. $\alpha_2,\ \beta_2 \in \mathbb{C}$, $|\alpha_1| < 1,\ |\beta_1| < 1$,
4. $\gamma_2 \in \mathbb{R}$, $|\gamma_2| > 1$;

entonces no puede tener descomposición dominada. Como los puntos fijos hiperbólicos persisten y son del mismo tipo, i. e. son estables, bajo perturbaciones C^1, hay un entorno $\mathcal{U}$ de f en $\mathrm{Diff}^1(M)$ donde los difeomorfismos tampoco pueden tener descomposición dominada.

Construiremos un difeomorfismo f conservativo con dos puntos fijos como los descriptos anteriormente. Como mencionamos, ningún difeomorfismo puede tener descomposición dominada dentro de un entorno $\mathcal{U}$ de f, luego los difeomorfismos que están en el conjuto residual R dado en el Teorema 2 y en el entorno $\mathcal{U}$ de f tienen todos sus exponentes de Lyapunov nulos casi todo punto.

Para la construcción del difeomorfismo f usaremos la versión conservativa del Lema de Franks [BDP] enunciada a continuación.

Lema 3 (versión conservativa del Lema de Franks) *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo conservativo, $E \subset M$ un conjunto finito f-invariante, B una perturbación $\varepsilon-$conservativa de Df en E, entonces para todo V entorno de E existe un difeomorfismo g arbitrariamente cerca en C^1 de f que concide con f en E y fuera de V tal que Dg es igual a B en E.*

Expondremos con detalle estos resultados en el capítulo 3.

En el capítulo 1 expondremos conceptos y resultados que usaremos en los restantes capítulos.

En el capítulo 2 expondremos algunos criterios de ergodicidad para medidas suaves. Comenzaremos con el argumento de Hopf [H], [An], con el cual veremos que todo difeomorfismo de Anosov es ergódico; luego veremos la demostración de un nuevo criterio de ergodicidad desarrollado por F. Rodriguez Hertz, M. A. Rodriguez Hertz, A. Tahzibi y R. Ures [HHUT], que prueba que la clase homoclínica de Pesin de un punto periódico hiperbólico es ergódica si el difeomorfismo f es $C^{1+\alpha}$; y finalmente, usaremos este criterio y el Teorema desarrollado por Katok llamado Lema Principal que prueba que si el difeomorfismo f es $C^{1+\alpha}$, la variedad M puede descomponerse casi todo punto en una cantidad numerable de componentes ergódicas no triviales que son las clases homoclínicas ergódicas de los puntos periódicos hiperbólicos.

Capítulo 1

Conceptos preliminares

En este capítulo se dará una exposición sintética de conceptos y resultados que se usarán en los restantes capítulos. Se supone que el lector está familiarizado con los conceptos básicos de la teoría ergódica; una exposición detallada de los mismos se encuentra en el libro [M1].

1.1. Difeomorfismos que preservan el volumen.

Sea M una variedad compacta de dimensión n; una forma de volumen de clase C^r en M es una función que a cada punto $p \in M$ le asocia una aplicación n-lineal alternada $\omega_p : TM_p \times \overset{n}{\cdots} \times TM_p \to \mathbb{R}$ no degenerada cuya dependencia de p es C^r en el siguiente sentido: si $\varphi : U \to M$ es una carta local, entonces la función con dominio en U que a cada punto q le asigna $\omega_{\varphi(q)}((D_q\varphi)e_1, ...(D_q\varphi)e_n)$, donde $\{e_1, ..., e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, es de clase C^r. A ω le asignamos una medida μ_ω sobre los borelianos de M de la siguiente forma: para cada boreliano $A \subset M$ tomamos cartas $\varphi_j : U_j \to M \quad j = 1, 2...$ tales que $A \subset \underset{j}{\cup}\varphi_j(U_j)$. Descomponemos A en borelianos disjuntos $A_1, A_2, ...$ tales que $A_j \subset \varphi_j(U_j)$ y definimos

$$\mu_\omega(A) = \sum_j \int_{\varphi^{-1}(A_j)} \omega_{\varphi_j(x)}((D_x\varphi_j)e_1, ...(D_x\varphi_j)e_n)dx.$$

Esta definición no depende de las cartas ni de la descomposición elegidas.

Todas las medidas μ_ω son equivalentes y se las llama medida de Lebesgue de la variedad M. Cuando M es una variedad orientada dotada de una estructura Riemanniana, la forma de volumen asociada a ella es la que verifica que si $p \in M$ y $\{v_1, ..., v_n\}$ es una base ortonormal positivamente orientada de T_pM, entonces $\omega_p\,(v_1, ..., v_n) = 1$. Esta forma de volumen existe y es única.

Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo C^1, ω una forma de volumen sobre M y sea $p \in M$. Podemos definir en TM_p una forma n-lineal alternada $(f^*\omega)_p$ dada por

$$(f^*\omega)_p\,(v_1, ..., v_n) = \omega_{f(p)}\,(Df_pv_1, ..., Df_pv_n)\,.$$

Notemos con $\det_\omega(Df_p)$ al *determinante de Df_p con respecto a ω_p y $\omega_{f(p)}$*, esto es, al único número real que satisface $(f^*\omega)_p = \det_\omega(Df_p)\omega_p$. Puesto que f es un difeomorfismo vale $\mu_\omega(f(A)) = \mu_{f^*\omega}(A)$ para todo boreliano $A \subset M$, lo que implica que μ_ω es f-invariante cuando y sólo cuando $|\det_\omega(Df_p)| = 1$ para todo $p \in M$.

En página 38 del libro [M1] se encuentra una exposición más detallada de estos conceptos.

1.2. Exponentes de Lyapunov. El Teorema de Oseledec

Definición 4 *Sean M será una variedad Riemanniana compacta, $f : M \to M$ un difeomorfismo C^1, $x \in M, v \in T_xM$, llamamos* exponente de Lyapunov asociados a x y v *a*

$$\lambda(x, v) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x)v\|$$

Observemos que si existe dicho límite, $\|Df^n(x)v\| \approx e^{\lambda(x,v)n}$ con n grande

De la definición se desprenden las propiedades:

i) $\lambda(x, v) = \lambda(x, \alpha v)$;

ii) $\lambda(x, v_1 + v_2) \leq \max(\lambda(x, v_1), \lambda(x, v_2))$ y

$\lambda(x, v_1 + v_2) = \max(\lambda(x, v_1), \lambda(x, v_2))$ si $\lambda(x, v_1) \neq \lambda(x, v_2)$

Si hacemos tender n a $-\infty$, obtenemos la propiedad

iii) $\lambda(x, v_1 + v_2) \geq \min(\lambda(x, v_1), \lambda(x, v_2))$ y

$\lambda(x, v_1 + v_2) = \min \lambda(x, v_1), \lambda(x, v_2))$ si $\lambda(x, v_1) \neq \lambda(x, v_2)$

Definición 5 *Decimos que x es un* punto regular *si existen números reales $\lambda_1(x) > \lambda_2(x) > \ldots > \lambda_m(x)$ y subespacios del espacio tangente a M en p, $E_1(x), E_2(x) \ldots E_m(x)$, que llamamos* espacios propios de x, *tales que*

$$T_xM = E_1(x) \oplus E_2(x) \oplus \ldots \oplus E_m(x)$$

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x)v_j\| = \lambda_j(x)$$

para todo $v_j \in E_j(x) - \{0\}$.

Los $\lambda_j(x)$ y $E_j(x)$ son únicos, ya que si tomamos $v \in T_xM$, podemos expresarlo como $v = v_1+v_2+...+v_m$ con $v_i \in E_i(x)$. Usando las propiedades ii), iii), obtenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x)v\| = \lambda_k(x)$, $\lim_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x)v\| = \lambda_p(x)$ donde $k = \min \{j \diagup v_j \neq 0\}$, $p = \max \{j \diagup v_j \neq 0\}$, al tener que igualar estos límites resulta $k = p$, es decir, v está en alguno de los $E_j(x)$.

Si x es un punto regular, fácilmente vemos que los exponentes de Lyapunov de cualquier punto de su órbita son los mismos. Vemos también que los espacios propios de $f(x)$ se obtienen derivando los de x, con lo cual las dimensiones de estos espacios son también constantes sobre las órbitas. Es decir, valen:

i) $\lambda_j(x) = \lambda_j(f(x))$

ii) $Df(x)E_j(x) = E_j(f(x))$

Las dimensiones de los espacios propios pueden variar, pero si tomamos $n_1, \ldots, n_m$ naturales, tales que $n_1 + \ldots + n_m = \dim M$ y llamamos

$$\Lambda(n_1, \ldots, n_m) = \{x : \dim E_j(x) = n_j\}$$

vemos que este conjunto es invariante, luego vale:

iii) $f(\Lambda(n_1, \ldots, n_m)) = \Lambda(n_1, \ldots, n_m)$

Si notamos con Λ al conjunto de los puntos regulares, obtenemos que

$$\Lambda = \cup\Lambda(n_1, \ldots, n_m).$$

donde la unión es tomada sobre todas las posibles $m-$uplas de enteros positivos $(n_1, \ldots, n_m)$ tales que $n_1 + \ldots + n_m = \dim M$ y $1 \leq m \leq \dim M$. Se puede ver que cada $\Lambda(n_1, \ldots, n_m)$ es un boreliano.

En la página 339 del libro [M1] se exponen con mayor detalle estos conceptos.

El siguiente Teorema debido a Oseledec, establece que el conjunto de los puntos regulares tiene medida total.

Teorema 6 (Teorema de Oseledec [O]) *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo C^1, entonces existe un conjunto boreliano $\mathcal{R}$ de medida total y para cada $\varepsilon > 0$ existe una función medible Borel $C_\varepsilon : \mathcal{R} \to (1, \infty)$ tal que para cualquier $x \in \mathcal{R}$ podemos encontrar $E_1(x), E_2(x), \ldots E_m(x)$ subespacios del espacio tangente de M en x y escalares $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots \lambda_m(x)$ de manera tal que*

$$T_xM = E_1(x) \oplus E_2(x) \oplus \ldots \oplus E_m(x),$$
$$\lambda_1(x) > \lambda_2(x) > \ldots > \lambda_m(x)$$

y valgan:

i) $\frac{1}{C_\varepsilon(x)} e^{(\lambda_j - \varepsilon)n} \|v_j\| \leq \|Df^n(x)v_j\| \leq C_\varepsilon(x) e^{(\lambda_j+\varepsilon)n} \|v_j\|$ *para todo* $v_j \in E_j(x)$*, para todo* $n \in \mathbb{Z}$

ii) $C_\varepsilon(f(x)) \leq C_\varepsilon(x) e^\varepsilon$

iii) $\measuredangle(E_i(x), E_j(x)) \geq \frac{1}{C_\varepsilon(x)}$ *si* $i \neq j$

La demostración de este Teorema puede verse en el libro [M1], teorema 10.1.

De la propiedad i) del enunciado del Teorema se deduce que existen los exponentes de Lyapunov para todo x en $\mathcal{R}$.

C_ε no necesariamente es acotada como en el caso hiperbólico, y tampoco lo es sobre cada órbita, aunque sí es *temperada*. Si fijamos $\varepsilon > 0$ y $L > 0$ y tomamos al conjunto $\mathcal{R}_{\varepsilon,L} = \{x \in \mathcal{R} / C_\varepsilon(x) \leq L\}$ obtenemos propiedades parecidas a las del caso hiperbólico. A estos conjuntos los llamamos *Bloques de Pesin*. Los bloques de Pesin no son necesariamente invariantes, pero verifican que

$$f(\mathcal{R}_{\varepsilon,L}) \subset \mathcal{R}_{\varepsilon,e^\varepsilon L}$$

Además, para cada $\varepsilon > 0$, resulta $R = \bigcup_{L=1}^{\infty} \mathcal{R}_{\varepsilon,L}$.

Llamemos $E^s_x = \bigoplus_{\lambda_i(x)<0} E_i(x)$, $E^u_x = \bigoplus_{\lambda_i(x)>0} E_i(x)$, $E^0_x = E_{\lambda(x)=0}(x)$. Por el Teorema 6, para casi todo punto de M vale $TM_x = E^s_x \oplus E^0_x \oplus E^u_x$. Llamamos *región de Pesin* y la notamos con $\Sigma(f)$ al conjunto donde existen los exponentes de Lyapunov y son todos no nulos. Sea m una medida invariante, si en un conjunto N vale que $E^0_x = \{0\}$ casi todo $x \in N$, decimos que f es *no uniformemente hiperbólica* en N y que m es una *medida hiperbólica* en N.

Ejemplo 7 *El difeomorfismo de Anosov en el toro de dimensión* 2*,* $\mathbb{T}^2$*, dado por* $(x,y) \to A(x,y)$ *donde* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *, tiene dos exponentes de Lyapunov:* $\lambda > 0$ *y* -λ*. La región de Pesin es todo el toro.*

Si ahora consideramos $A \times Id : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$*,la región de Pesin es vacía.*

Puede verse una exposición detallada de este difeomorfismo en la página 42 del libro [KH].

1.3. Foliaciones. El Teorema de la variedad estable de Pesin

Una foliación de dimensión k de una M una variedad de dimensión n es intuitivamente una descomposición en subvariedades conexas de dimensión k llamadas hojas que localmente pueden verse como subconjuntos de $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ con segunda coordenada constante.

El ejemplo más elemental de foliación de dimensión k es la foliación de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ donde las hojas son los $k-$planos de la forma $\mathbb{R}^k \times \{c\}$ con $c \in \mathbb{R}^{n-k}$.

Los difeomorfismos locales $h : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$ que preservan las hojas de la foliación son aquellos que para cada $c \in \mathbb{R}^{n-k}$, $h(x,c)$ deja la segunda coordenada constante, más precisamente pueden expresarse en la forma

$$h(x,y) = (h_1(x,y), h_2(y))$$

con $(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

Definición 8 *Sean* M *una variedad de dimensión* n*, decimos que un atlas* $\mathfrak{F} = \{(U,\phi)\}$ *es una* foliación *de clase* C^r *de dimensión* k *de* M *si tiene las siguientes propiedades.*

i) $\phi(U) = U_1 \times U_2$ *donde* U_1*,* U_2 *son discos abiertos de* $\mathbb{R}^k$*,* $\mathbb{R}^{n-k}$ *respectivamente para cada carta local* (U,ϕ)

ii) *Si las cartas* (U,ϕ)*,* (V,ψ) *son tales que* $U \cap V \neq \emptyset$*, entonces las funciones*

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

son de la forma

$$\psi \circ \phi^{-1}(x,y) = (h_1(x,y), h_2(y))$$

Los conjuntos $\phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{c\})$ son llamados *placas*. Un camino de placas de L es una sucesión $\alpha_1, ...\alpha_l$ de placas de L tal que $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, ..., l-1\}$. Las clases de equivalencia de la relación en Λ: pRq si existe un camino de placas $\alpha_1, ...\alpha_l$ tal que $p \in \alpha_1,\ q \in \alpha_l$, son llamadas hojas de L. Notamos con F al conjunto de hojas.

Cuando Λ es un compacto decimos que la familia $L = \{(U, \phi)\}$ es una *laminación* si los conjuntos abiertos U cubren a Λ y verifican las propiedades i) e ii) donde $h_1(x, y)$ es C^1 respecto a la variable x.

En la página 18 del libro [CL] se encuentra una exposición detallada de estos conceptos.

Definición 9 *Llamamos* variedad estable de Pesin *y la notamos con* $W^s(x)$ *a*

$$W^s(x) = \left\{ y \in M : \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \log d(f^n(x), f^n(y)) < 0 \right\}$$

y variedad inestable de Pesin *y la notamos con* $W^u(x)$ *a*

$$W^u(x) = \left\{ y \in M : \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \log d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < 0 \right\}$$

Las variedades estables e inestables no son en general variedades. El Teorema de la variedad estable de Pesin [P], cuyo enunciado expondremos a continuación, asegura que son *variedades inmersas*. Recordemos que una variedad inmersa es la imagen de una *inmersión*, donde una inmersión es una función $f : M \to N$ diferenciable tal que f y Df_p son inyectivas para todo $p \in M$.

Llamamos *variedad estable local de* x y la notamos con $W^s_{loc}(x)$ a la componente conexa de $W^s(x) \cap B(x, r)$ que contiene a x, donde $B(x, r)$ es la bola Riemanniana de centro x y radio r. Análogamente definimos la *variedad inestable local de* x. Las variedades estables (inestables) locales son variedades.

Teorema 10 (Teorema de la variedad estable de Pesin [P]) *Sean* $f : M \to M$ *un difeomorfismo* $C^{1+\alpha}$ *donde* α *es un número positivo,* m *una medida suave preservada por* f *y* M *una variedad Riemanniana, entonces valen las siguientes propiedades:*

i) $W^s(x)$, $W^u(x)$ *son subvariedades inmersas.*

ii) *Existen $\varepsilon > 0$ donde $\lambda^-(x) + \varepsilon < 0$, y una función $T : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^+$, donde $\mathcal{R}$ es el conjunto de los puntos regulares, que verifican:*

$$T(f^n(x)) \leq T(x)e^{10\varepsilon|n|}$$

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq T(x)e^{\lambda^-(x)+\varepsilon}d(x,y), \ y \in W^s(x)$$

iii) $T_xW^s_{loc}(x) = E^s_x$, $T_xW^u_{loc}(x) = E^u_x$

iv) *fijados $\rho > 0$, $L > 1$, el mapa $x \to W^{s,u}_{loc}(x)$ es continuo en el bloque de Pesin $\mathcal{R}_{\rho,L}$ con la topología C^1.*

1.4. Continuidad absoluta

Una noción importante para la prueba del criterio de ergodicidad desarrollado por F. Rodriguez Hertz, M. A. Rodriguez Hertz, A. Tahzibi y R. Ures [HHUT] es el de continuidad absoluta.

Sean M una variedad compacta y m una medida de probabilidad de Lebesgue; decimos que una partición $\mathcal{P}$ de la variedad M es medible si existe una cantidad numerable de subconjuntos $E_1, E_2, ...,$ de M con los que podemos escribir a cada átomo P de $\mathcal{P}$ como

$$P \overset{\circ}{=} E_1^* \cap E_2^* \cap ... \cap E_n^* \cap ...$$

donde cada E_i^* es E_i o su complemento $M - E_i$ y notamos con $A \overset{\circ}{=} B$ si A coincide con B casi todo punto.

Sea $\widehat{m}$ la medida de probabilidad en $\mathcal{P}$ definida por $\widehat{m}(Q) = m(\pi^{-1}(Q))$, donde π es la proyección de M en $\mathcal{P}$, esto es $\pi(x) = [x]$. Un *sistema canónico de medidas condicionales de m respecto a $\mathcal{P}$*, es una familia $\{m_P\}_{P\in\mathcal{P}}$ de probabilidades en M tal que:

i) $m_P(P) = 1$, $\widehat{m}-$casi todo $P \in \mathcal{P}$

ii) dada cualquier función continua $\varphi : M \to \mathbb{R}$, la función $P \ni \mathcal{P} \to \int \varphi dm_P$ es medible y $\int \varphi dm = \int(\int \varphi dm_P)d\widehat{m}$.

Para cada partición medible, el sistema canónico de medidas condicionales es único $\widehat{m}-$casi todo $P \in \mathcal{P}$. Recíprocamente, si una partición $\mathcal{P}$ admite un sistema canónico de medidas condicionales, entonces la partición es medible. Se puede ver [V] para una información más detallada de estos conceptos.

Observemos que en general las particiones estables e inestables no son medibles.

Definición 11 *Una partición P* es subordinada a la partición inestable W^u *si para* $m-$*casi todo punto vale:*

i) $P(x) \subset W^u(x)$

ii) $P(x)$ es un entorno de x en la topología de $W^u(x)$

donde $P(x)$ es el átomo de $\mathcal{P}$ que tiene al elemento x.

Definición 12 *Decimos que* m *posee* continuidad absoluta *respecto a medidas condicionales sobre variedades inestables si para toda partición medible* $\mathcal{P}$ *subordinada a* W^u*,* $m_{P(x)}$ *es absolutamente continua respecto de* λ_x^u*, donde* λ_x^u *es la medida Riemanniana en* W^u*.*

Sea $x_0 \in R$ tal que $\dim E^s_{x_0} > 0$, $\dim E^u_{x_0} > 0$, tomemos dos discos U y V transversales a $W^s_{loc}(x_0)$ de manera tal que $x_0 \in U$. Sea D el conjunto formado por los puntos de $U \cap R$ tales que la variedad estable intersecta transversalmente a U y a V y tiene la misma dimensión que $W^s_{loc}(x_0)$.

Una *holonomía* es una función $h : D \to V$ que asigna a cada $x \in R$ el punto del conjunto $W^s_{loc}(x) \cap V$.

Decimos que la partición estable es *absolutamente continua* si para toda holonomía se verifica que la imagen de un conjunto de medida de Lebesgue positiva tiene medida de Lebesgue positiva. La continuidad absoluta de la partición inestable se define análogamente.

Teorema 13 (Ya. Pesin [P], C. Pugh, M. Shub [PS]) *Las particiones estable e inestable son absolutamente continuas.*

Las holonomías son continuas cuando nos restringimos a los bloques de Pesin $\mathcal{R}_{\varepsilon,l}$. Esta propiedad con el Teorema 13 implica que existen particiones medibles $\{\xi(x)\}$ subordinadas a W^s y a W^u donde para cualquier conjunto A medible se verifica que $m(A) = \int m_x^\xi(A \cap \xi(x)) dm_T$.

Capítulo 2

Criterios de ergodicidad

En este capítulo, M será una variedad Riemanniana compacta, m una medida de probabilidad suave, $f : M \to M$ un difeomorfismo que preserva la medida m.

No hay teoremas que describan el comportamiento de un difeomorfismo en conjuntos que no cortan a la región de Pesin. Varios investigadores han estudiado la frecuencia con la que existe una región de Pesin no trivial, o incluso conjuntos de medida positiva con al menos un exponente de Lyapunov no nulo. Algunos resultados muestran que genéricamente en $\mathrm{Diff}^1_m(M)$ para los difeomorfismos se presenta una dicotomía. Decimos que una propiedad es *genérica* en un conjunto de difeomorfismos si existe un residual de ese conjunto en donde vale la propiedad. Estos teoremas han sido desarrollados a raíz de que en 1983 R. Mañé enunció en [M2] que en el conjunto de $\mathrm{Diff}^1_m(M)$ existe un residual donde cada difeomorfismo del mismo o bien es un Anosov o bien tiene todos sus exponentes de Lyapunov nulos casi todo punto. Si bien en [M3] se da un bosquejo de la prueba, recién en el año 2002 J. Bochi da una demostración completa en [B]. Podemos destacar que la única superficie que admite un Anosov es el toro [F] por lo tanto, para cualquier superficie a excepción del toro, genéricamente en $\mathrm{Diff}^1_m(M)$ todos los exponentes de Lyapunov son nulos. En el año 2005, J. Bochi y M. Viana [BV], encuentran que para dimensiones arbitrarias genéricamente los difeomorfismos presentan la siguiente dicotomía puntual, para casi todo punto la órbita o bien tiene un splitting de Oseledec dominado o bien todos los exponentes de Lyapunov son nulos. El resultado de A. Avila y J. Bochi publicado en [AB] en el año 2009, es válido para variedades de cualquier dimensión y establece que genéricamente para los difeomorfismos se presenta la alternativa siguiente, o bien casi todo punto tiene un exponente de Lyapunov igual a cero, o bien la región de Pesin es esencialmente densa en la variedad, es una componente ergódica y hay un splitting dominado global. Recientemente M. A. Rodríguez Hertz [JRH] desarrolló un teorema válido para variedades de dimensión 3, que asegura la existencia de un residual de $\mathrm{Diff}^1_m(M)$, tal que todo difeomorfismo f del mismo o bien tiene todos sus exponentes de Lyapunov nulos casi todo punto, o bien es ergódico, no uniformemente hiperbólico, y tiene descomposición dominada. A. Ávila y J. Bochi conjeturan que este último resultado es válido para variedades de cualquier dimensión. Mi contribución consiste en mostrar

que en todas las variedades de dimensión 3, el conjunto de los difeomorfismos con todos los exponentes nulos en casi todo punto, es esencialmente no removible. Es decir, en todas las 3-variedades existe un conjunto abierto $\mathcal{A}$ de difeomorfismos que contiene un conjunto residual cuyos difeomorfismos tienen todos los exponentes de Lyapunov nulos casi todo punto. No se sabe para cuáles variedades de dimensión 3, $\mathcal{A}$ coincide con $\mathrm{Diff}^1_m(M)$, es decir, la dicotomía para los difeomorfismos del residual encontrado en [JRH] se reduce a tener todos los exponentes de Lyapunov nulos casi todo punto. En el caso aparentemete más sencillo de la 3-esfera [BI] se sabe que no existen difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, pero no se sabe si podría haber difeomorfismos con descomposición dominada, ergódicos.

En este capítulo expondremos algunos criterios y ejemplos importantes en la Teoría de difeomorfismos no uniformemente hiperbólicos, o Teoría de Pesin, que permiten encontrar conjuntos invariantes donde f es ergódica.

2.1. El Argumento de Hopf

En 1939 el austríaco E. Hopf [H] demostró que el flujo geodésico de una superficie de curvatura negativa es ergódico, estudiando los promedios de Birkhoff de funciones continuas para las foliaciones estables e inestables del flujo. Esta técnica, luego conocida como el Argumento de Hopf, fue utilizada por D. Anosov [An], D. Anosov y Ya Sinai [AS], para probar que todo difeomorfismo de Anosov es ergódico. Esto último lo veremos para un ejemplo particular y luego expondremos la demostración.

Sea $\varphi : M \to \mathbb{R}$ una función continua, $x \in M$, el Teorema Ergódico de Birkhoff (puede verse [M1]), nos dice que existe un conjunto de medida total donde los límites $\varphi^+(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i(x)$, $\varphi^-(x) = \lim_{n\to-\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i(x)$ existen y son iguales. Como φ es continua, $\varphi^+(x) = \varphi^+(y)$ para todo $y \in W^s(x)$, $\varphi^-(x) = \varphi^-(y)$ para todo $y \in W^u(x)$.

Decimos que x es un *punto típico* de φ si $\varphi^+(x) = \varphi^+(y)$ para todo $y \in W^s(x)$, para m_x^u-casi todo $y \in W^u(x)$.

Lema 14 *Sea $\varphi : M \to \mathbb{R}$ una función continua, luego existe un conjunto invariante $S \subset M$ de medida 1 tal que para cualquier punto $x \in S$ vale que*

$$\varphi^+(y) = \varphi^+(x), \;\; y \in W^s\,(x)\,,$$

$$\varphi^+(y) = \varphi^+(x) \;\;\; m_x^u - c.t. \; y \in W^u\,(x)\,,$$

donde $\varphi^+(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \varphi \circ f^k(x)$

Demostración. Sean

$$S_0 = \left\{x \in M \diagup \varphi^+(x) = \varphi^-(x)\right\}$$

$$S_1 = \{x \in S_0 \diagup y \in S_0 \; m_x^u - c.t. \; y \in W_{loc}^u(x)\}$$

Supongamos que S_1 no tiene medida 1. Podemos tomar entonces un conjunto A de medida positiva tal que para cualquier punto $x \in A$ exista un conjunto B_x contenido en $W_{loc}^u(x) - S_0$ tal que $m_x^u(B_x) > 0$. Tomemos un punto de densidad y en A y un disco pequeño T transversal a $W_{loc}^u(y)$, entonces podemos encontrar un conjunto B en el complemento de S_0 tal que

$$m(B) = \int_T m_x^u(B_x) dm_T(x) > 0$$

lo cual es absurdo.

Como φ es continua, $\varphi^-(y) = \varphi^-(x)$ para todo $y \in W^u(x)$. Luego, para cualquier $x \in S_1$ vale que $\varphi^+(y) = \varphi^-(y) = \varphi^-(x) = \varphi^+(x)$ m_x^u-casi todo $y \in W_{loc}^u(x)$.

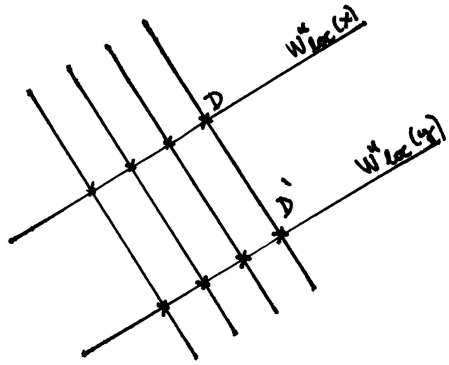
Sea $S = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}} f^n(S_1)$. El conjunto S es invariante, tiene medida 1 y como el promedio de Birkhoff es invariante sobre las órbitas, para cualquier $x \in S$ vale que $\varphi^+(y) = \varphi^+(x)$ m_x^u-casi todo $y \in W^u(x)$. ■

Ejemplo 15 *Veamos que el difeomorfismo Anosov en $\mathbb{T}^2$ dado por $(x, y) \to A(x, y)$ donde A es la matriz dada por $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ es ergódico.*

Sean S el dado por el Lema 14, $\varphi : M \to \mathbb{R}$ una función continua.

Tomemos $x \in S$ y un entorno $C(x)$, de manera tal que dados cualquier par de puntos $y, z \in C(x), W_{loc}^s(y)$ intersecte a $W_{loc}^u(z)$ transversalmente y en un punto de $C(x)$.

Figura 2.1:



Tomemos $y \in C(x) \cap S$ *y* $D \subset W^u_{loc}(x) \cap C(x)$*, de medida positiva, tal que* $\varphi^+(z) = \varphi^+(x)$ *para todo* $z \in D$*. Tomemos la foliación dada por* $\mathcal{F}^s = \{W^s_{loc}(z),\ z \in D\}$ *y llamemos* D' *al conjunto formado por las intersecciones de las variedades estables de los puntos de* D *con la variedad inestable de* y *(ver figura 2.1). Como las variedades son rectas,* $m(D') = m(D) > 0$ *y como* φ^+ *es constante en las variedades estables, resulta* $\varphi^+(z) = \varphi^+(x)$ *para todo* $z \in D'$*. Como* $y \in S$ *y* $m(D') > 0$ *, resulta* $\varphi^+(y) = \varphi^+(x)$*. Luego* φ^+ *es constante casi todo punto en* $C(x)$*.*

Como $\mathbb{T}^2$ *es compacto y* S *tiene medida* 1*, podemos tomar un número finito de estos entornos* $C(x_1), ..., C(x_m)$ *de manera que lo cubran, y como es conexo, podemos suponer que los puntos están ordenados de manera tal que* $C(x_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{i} C(x_j)) \neq \emptyset$ *para* $i = 1, ...m-1$*. Al tener estas intersecciones medida positiva, concluímos que* φ^+ *es constante casi todo punto de* $\mathbb{T}^2$*.*

Teorema 16 (An) *Si* $f \in C^{1+\alpha}$ *es un difeomorfismo de Anosov, entonces es ergódico.*

Demostración. Si repasamos la demostración para el difeomorfismo de Anosov en el toro dado por la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, vemos que lo único que no podemos generalizar es que D' tiene medida positiva, ya que las variedades locales no son necesariamente rectas, pero como f un difeomorfismo de Anosov, la foliación estable es absolutamente continua, y como D tiene medida positiva, vale que D' tiene medida positiva. ■

2.2. Un nuevo criterio de ergodicidad

Definición 17 *Sea p un punto periódico hiperbólico, llamamos* clase homoclínica estable de Pesin asociada a p *y la notamos con* $Phc^s(p)$ *a*

$$Phc^s(p) = \{x \in R : W^s(x) \pitchfork W^u(o(p)) \neq \emptyset\}$$

análogamente, llamamos clase homoclínica inestable de Pesin *a*

$$Phc^u(p) = \{x \in R : W^u(x) \pitchfork W^s(o(p)) \neq \emptyset\}$$

y clase homoclínica de Pesin *a*

$$Phc(p) = Phc^s(p) \cap Phc^u(p).$$

Vamos a exponer un criterio de ergodicidad desarrollado por F. Rodriguez Hertz, M. A. Rodriguez Hertz, A. Tahzibi y R. Ures [HHUT], que asegura que la clase homoclínica de Pesin de un punto periódico hiperbólico es ergódica. Para la demostración del mismo usaremos el Teorema de Densidad de Lebesgue-Vitali [M1] que prueba que en todo conjunto de medida positiva casi todo punto es de densidad, el Teorema de Recurrencia de Poincaré [M1], que asegura que para todo conjunto A medible de medida positiva casi todo punto de A vuelve infinitas veces a A, el $\lambda-$Lemma [PM] que prueba que toda variedad que intersecta a la variedad estable de un punto fijo hiperbólico al iterarla se acerca en C^1 a la variedad inestable, y los siguientes resultados:

Lema 18 *Para toda función $\psi \in L^1(M)$, existe S_ψ de medida 1 tal que dado cualquier $x \in S_\psi$, $\psi^+(y) = \psi^+(x)$ casi todo $y \in W^s(x) \cup W^u(x)$.*

Demostración. Tomemos una sucesión $\{\varphi_n\}$ de funciones continuas tal que $\varphi_n \to \psi$ en L^1. Luego $\varphi^+ \to \psi^+$ en L^1, y existe una subsucesión $\left\{\varphi_{n_k}\right\}$ de $\{\varphi_n\}$ y un conjunto S de medida 1, tal que $\varphi^+_{n_k}(x) \to \psi^+(x)$ para todo $x \in S$. Se puede ver de manera análoga a la prueba del Lema 14 que el conjunto $S_1 = \{x \in S / y \in S \ c.t. \ y \in W^s(x) \cup W^u(x)\}$ tiene medida 1. Por el Lema 14, si $x \in S$ vale que $\psi^+(y) = \psi^+(x)$ casi todo $y \in W^s_{loc}(x) \cup W^u_{loc}(x)$. Como esta propiedad vale para casi todo $x \in S$ y el promedio de Birkhoff es constante sobre las órbitas, resulta que existe S_ψ de medida 1 tal que para todo $x \in S_\psi$, $\psi^+(y) = \psi^+(x)$ casi todo $y \in W^s(x) \cup W^u(x)$. ■

Corolario 19 *Para todo A medible e invariante existe S_A de medida 1 tal que para cualquier $x \in S_A$ es válida la relación*

$$y \in A \ \text{casi todo} \ y \in W^s(x) \cup W^u(x) \Leftrightarrow x \in A$$

Demostración. Sea χ_A la función característica de A. Al ser A invariante, resulta: $\chi_A^+(x) = 1$ si $x \in A$, $\chi_A^+(x) = 0$ si $x \notin A$. Por el Lema 18, existe S_A de medida 1, tal que para todo $x \in A$ vale $\chi_A^+(y) = \chi_A^+(x)$ casi todo $y \in W^s(x) \cup W^u(x)$. Luego S_A verifica lo pedido. ■

En este contexto la notación $A \overset{\circ}{=} B$ significa que A coincide casi todo punto con B, análogamente decimos que $A \overset{\circ}{\subset} B$ si casi todo punto de A está en B.

Teorema 20 (Criterio de Ergodicidad) *Sean M una variedad compacta, $f \in C^{1+\alpha}$ un difeomorfismo que preserva una medida suave m, $p \in Per_H(f)$ tal que*

$$m(Phc^s(p))m(Phc^u(p)) > 0$$

entonces valen:

i) $Phc^s(p) \overset{0}{=} Phc^u(p) \overset{0}{=} Phc(p)$

ii) $Phc(p)$ es una componente ergódica hiperbólica.

iii) $Phc(p)$ puede escribirse como

$$Phc(p) = B^1(p) \cup ... \cup B^k(p)$$

donde $f(B^i(p)) = B^{i+1}(p)$ para $i = 1, ..., k-1$, $f(B^k(p)) = B^1(p)$ y $f^k\big|_{B^i(p)}$ es Bernoulli.

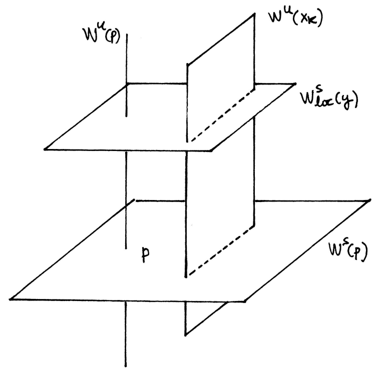
Demostración.

i) Veamos que $Phc^u(p) \overset{0}{\subset} Phc^s(p)$.

Para esto primero probaremos que para todo $x \in Phc^u(p)$, existe un entero k tal que $Phc^s(p)$ intersecta a $W^u(f^k(x))$ en un conjunto de medida positiva.

Sea $x \in Phc^u(p)$. Sean $\varepsilon > 0$, $l > 1$, $n \geq 1$ tales que $m(Phc^s(p) \cap \mathcal{R}^n_{\varepsilon,l}) > 0$. Podemos tomar $\delta > 0$ tal que para todo $z \in Phc^s(p) \cap \mathcal{R}^n_{\varepsilon,l}$ el conjunto $W^s_{loc}(z)$ contenga un s-disco $B_\delta(z)$ de radio δ centrado en z, esto lo podemos hacer tomando un compacto de medida positiva en $Phc^s(p) \cap \mathcal{R}^n_{\varepsilon,l}$, ya que la parte iv) del Teorema 10 nos asegura que las variedades estables locales en los bloques de Pesin varían con continuidad. Sea y un punto de densidad de Lebesgue de $B^s = Phc^s(p) \cap \mathcal{R}^n_{\varepsilon,l}$ tal que $d(y, W^u(p)) < \frac{\delta}{2}$.

Figura 2.2:



El λ-Lemma nos asegura la existencia de un entero positivo k tal que $W^u(x_k) \pitchfork W^s_{loc}(y) \neq \emptyset$ donde $x_k = f^k(x)$. Notemos que esta intersección puede tener dimensión positiva (ver figura 2.2).

Como y es un punto de densidad de Lebesgue, $m(B^s \cap B_\delta(y)) > 0$. Tomemos una foliación diferenciable $\mathcal{L}$ en $B_\delta(y)$ de dimensión

$$u_y = \dim(M) - \dim(W^s_{loc}(y))$$

transversal a $W^s_{loc}(y)$. Notemos que $u_y \leq \dim(W^u(x_k))$. Podemos pedir también que la hoja L_w que contiene a $w \in W^u(x_k)$ esté contenida en $W^u(x_k)$ (ver figura 2.3).

Por el Teorema de Fubini tenemos que

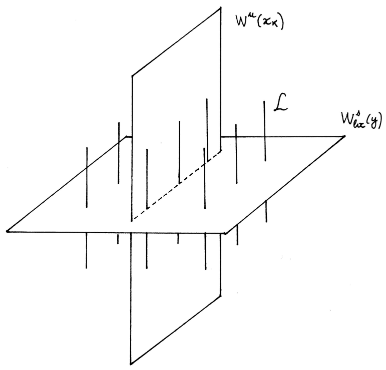
$$m(B^s \cap B_\delta(y)) = \int_{W^s_{loc}(y)} m^L_z(L_z \cap B^s) dm^s_y(z)$$

luego $m^L_z(L_z \cap B^s) > 0$ para m^s_y-casi todo $z \in W^s_{loc}(y)$. Tomemos $z \in W^s_{loc}(y)$ tal que $m^L_z(L_z \cap B^s) > 0$. Sea $w \in W^u(x_k) \cap B_\delta(y)$, la holonomía estable es absolutamente continua, luego manda al conjunto de los puntos de B^s en L_z a un conjunto de medida positiva en L_w. B^s es un conjunto *s-saturado*, esto es si $x \in B^s$ entonces todo punto de la variedad estable de $x \in B^s$, luego la imagen por la holonomía estable cada punto de B^s en L_z está en B^s. Por lo tanto $m^L_w(L_w \cap B^s) > 0$ para todo $w \in W^u(x_k) \cap B_\delta(y)$.

Si el conjunto $W^u(x_k) \cap W^s_{loc}(y)$ tiene dimensión cero, entonces

$$m^u_{x_k}(W^u(x_k) \cap B^s) > 0$$

Figura 2.3:



luego B^s intersecta a $W^u(x_k)$ en un conjunto de medida positiva.

En otro caso, podemos tomar una subvariedad T contenida en $W^u(x_k)$ que contenga a $W^u(x_k) \pitchfork W^s_{loc}(y)$. Nuevamente por el Teorema de Fubini vale

$$m^u_{x_k}(B^s \cap W^u(x_k) \cap B_\delta(y)) \geq \int_T m^L_w(L_w \cap B^s) dm_T(w) > 0$$

Por lo tanto B^s intersecta a $W^u(x_k)$ en un conjunto de medida positiva.

Hemos probado que para todo $x \in Phc^u(p)$, existe un entero k tal que $Phc^s(p)$ intersecta a $W^u(f^k(x))$ en un conjunto de medida positiva. Tomemos $x \in Phc^u(p) \cap S_{Phc^s(p)}$, donde $S_{Phc^s(p)}$ es el conjunto de medida total dado en el Lema 19. Si x_k no estuviera en $Phc^s(p)$, tampoco lo estaría casi todo y en $W^u(x_k)$, contradiciendo el resultado previo. Como $Phc^s(p)$ es f-invariante, concluímos que $x \in Phc^s(p)$.

Por lo tanto $Phc^u(p) \overset{\circ}{\subset} Phc^s(p)$. Tomando f^{-1} vemos que $Phc^s(p) \overset{\circ}{\subset} Phc^u(p)$.

ii) Veamos primero que todo punto de $Phc(p)$ no tiene ningún exponente de Lyapunov nulo. Sea $x \in Phc(p)$ y sean $s = dimW^s(p)$, $u = dimW^u(p)$, $\widetilde{s} = dimW^s(x)$, $\widetilde{u} = dimW^u(x)$. Como $W^s(x) \pitchfork W^u(p) \Rightarrow \widetilde{s} + u \geq n$, $W^u(x) \pitchfork W^s(p) \Rightarrow \widetilde{u} + s \geq n$, de $s + u = n$ y $\widetilde{s} + \widetilde{u} = n$, resulta $\widetilde{u} = u$ y $\widetilde{s} = s$.

Sea $\varphi : M \to \mathbb{R}$ una función continua. Sea S el conjunto dado en el enunciado del Lema 14.

Tomemos $\varepsilon > 0$, $l > 1$ tales que $m(Phc(p) \cap R_{\varepsilon,l}) > 0$ y llamemos $B = Phc(p) \cap R_{\varepsilon,l} \cap S$. Tomemos $\delta > 0$ tal que para todo x de un conjunto de medida positiva de B, $W^s_{loc}(x)$ contenga un s-disco $B_\delta(x)$ de radio δ centrado en x. Sin pérdida de generalidad llamemos B a ese conjunto y supongamos que todos los puntos de B son de densidad de Lebesgue de B y que retornan infinitas veces en el pasado y en el futuro a B.

Sea $y \in B$, luego existe $n > 0$ tal que $d(y_n, W^u(p)) < \frac{\delta}{2}$ donde $y_n = f^n(y)$ es un punto de densidad de Lebesgue de B. Tomemos la partición $\{W^u_{loc}(z)\}_{z\in B\cap B_\delta(y_n)}$, por Fubini resulta

$$m(B \cap B_\delta(y_n)) = \int_T m^u_z(B \cap B_\delta(y_n) \cap W^u_{loc}(z))dm_T(z).$$

Podemos tomar entonces un punto $z \in B \cap B_\delta(y_n)$ tal que $m^u_z(B \cap B_\delta(y_n) \cap W^u_{loc}(z)) > 0$.

Sea $x \in Phc(p) \cap S$. Como $W^u(p) \pitchfork W^s_{loc}(y) \neq \emptyset$, el λ-Lemma nos asegura la existencia de un entero positivo k tal que $W^u(x_k) \pitchfork W^s_{loc}(y) \neq \emptyset$ donde $x_k = f^k(x)$. La holonomía estable es absolutamente continua, luego manda el conjunto $B \cap B_\delta(y_n) \cap W^u_{loc}(z)$ de $W^u_{loc}(z)$ en un conjunto de medida positiva de $W^u(x_k)$. Como φ^+ es constante en las variedades estables y en cada punto de $B \cap B_\delta(y_n) \cap W^u_{loc}(z)$ donde vale $\varphi^+(z)$, existe un conjunto de medida positiva en $W^u(x_k)$ donde cada punto v del mismo verifica que $\varphi^+(v) = \varphi^+(z)$. Como $x_k \in S$, resulta $\varphi^+(x_k) = \varphi^+(z)$ y como φ^+ es constante sobre las órbitas, resulta $\varphi^+(x) = \varphi^+(z)$. Luego el promedio de Birkhoff es constante casi todo punto en $Phc(p)$. Luego $Phc(p)$ es una componente ergódica hiperbólica.

iii) Hagamos

$$B^1(p) = \{x \in R : W^s(x) \pitchfork W^u(p) \neq \emptyset,\ W^u(x) \pitchfork W^s(p) \neq \emptyset\}$$
$$B^{i+1}(p) = f(B^i(p))$$

La prueba de que $f^k\big|_{B^i(p)}$ es Bernoulli, puede consultarse en [P].

■

2.3. El Teorema de Descomposición Ergódica de Pesin

En esta sección demostraremos el Teorema de Descomposición Ergódica de Pesin. Para ello usaremos el Criterio de Ergodicidad desarrollado por [HHUT] y el Lema Principal, resultado desarrollado por Katok en 1980.

Tomemos $p, q \in Per_H(f)$ tales que $m(Phc(q) \cap Phc(p)) > 0$ y , si $Phc(p)$ no coincidiera casi todo punto con $Phc(q)$, como $Phc(p)$ y $Phc(q)$ invariantes lo sería también $Phc(q) \cap Phc(p)$, luego f no sería ergódica en $Phc(p)$. Luego, dados dos puntos periódicos hiperbólicos, sus clases homoclínicas coinciden o son disjuntas casi todo punto. Como los puntos fijos hiperbólicos no se pueden acumular, hay a lo sumo una cantidad numerable de clases homoclínicas ergódicas distintas. Vimos en el Teorema 20 que cada clase homoclínica es ergódica e invariante; del Lema Principal deduciremos que estas componentes cubren casi todo punto toda la variedad si la región de Pesin tiene medida 1.

Teorema 21 (Lema Principal) *Sean M una variedad Riemanniana compacta de dimensión finita, m una medida suave y $f \in C^{1+\alpha}$ un difeomorfismo no uniformemente hiperbólico que preserva m. Entonces para cualquier $k = 0, \ldots, \dim(M)$ y $\varepsilon, l > 0$, existe $\psi > 0$ tal que si existe $m > 0$ que verica las siguientes condiciones*

i) $x,\ f^m(x) \in \mathcal{R}^k_{\varepsilon,l}$, *donde* $\mathcal{R}^k_{\varepsilon,l} = \mathcal{R}_{\varepsilon,l} \cap \{x \in R \diagup \dim E^u(x) = k\}$

ii) $d(x, f^m(x)) < \psi$ *para algún* $m > 0$,

existe un punto periódico hiperbólico z tal que $x \in Phc(z)$, donde $m(Phc(z)) > 0$.

Corolario 22 *Sea m una medida hiperbólica, entonces para casi todo $x \in \mathcal{R}$*

existe $z \in Per_H(f)$ tal que $x \in Phc(z)$, donde $m(Phc(z)) > 0$

Demostración. Tomemos ε, l, k tal que $m(\mathcal{R}^k_{\varepsilon,l}) > 0$. Sea ψ la dada por el Teorema 21, y tomemos y punto de densidad de $\mathcal{R}^k_{\varepsilon,l}$, luego $m(\mathcal{R}^k_{\varepsilon,l} \cap B_{\frac{\psi}{2}}(y)) > 0$, por el Teorema de recurrencia de Poincaré, para casi todo $x \in \mathcal{R}^k_{\varepsilon,l} \cap B_{\frac{\psi}{2}}(y)$ existe $m > 0$ tal que $f^m(x) \in \mathcal{R}^k_{\varepsilon,l} \cap B_{\frac{\psi}{2}}(y)$. Por el Teorema de Densidad de Lebesgue-Vitali casi todo punto x cumple con la hipotesis del Teorema de Katok. ■

Luego si m es una medida hiperbólica, podemos tomar $p_1,\ p_2, .. \in Per_H(f)$ tales que las $Phc(p_i)$ son disjuntas casi todo punto y cubren casi todo punto a M. Si llamamos

$$\Lambda^1_i = \{x \in M : W^s(x) \pitchfork W^u(p_i) \neq \emptyset,\ W^u(x) \pitchfork W^s(p_i) \neq \emptyset\}$$

$\Lambda^{j+1}_i = f(\Lambda^j_i)$, hemos dado la demostración del Teorema de Descomposición Ergódica de Pesin.

Teorema 23 (Teorema de Descomposición Ergódica de Pesin) *Sean M una variedad Riemanniana compacta de dimensión finita, m una medida suave y $f \in C^{1+\alpha}$ un difeomorfismo no uniformemente hiperbólico que preserva m, entonces m se descompone como suma numerable de componentes ergódicas no triviales Λ_i donde:*

i) $M \stackrel{0}{=} \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \ldots \Lambda_n \cup \ldots$donde Λ_i son medibles, invariantes y disjuntos

ii) $f|_{\Lambda_i}$ es ergódica

iii) $\Lambda_i = \Lambda_i^1 \cup \Lambda_i^2 \cup \ldots \cup \Lambda_i^{n_i}$ donde Λ_i^j son disjuntos y $f^{n_i}|_{\Lambda_i^j}$ es Bernoulli

iv) $\Lambda_i = Phc(p_i)$ donde $p_i \in Per_H(f)$.

Capítulo 3

Difeomorfismos con todos los exponentes de Lyapunov nulos c. t. p.

En este capítulo veremos que para toda variedad de dimensión 3, existe un abierto no vacío $\mathcal{A} \subset \mathrm{Diff}^1_m(M)$ tal que genéricamente en $\mathcal{A}$ todos los exponentes de Lyapunov son cero m-casi todo punto en M.

Decimos que una propiedad es *genérica* en un conjunto de difeomorfismos si existe un residual de ese conjunto en donde vale la propiedad.

En la primera sección expondremos una demostración de la versión conservativa del Lema de Franks. En la segunda, usando este Lema, encontraremos un abierto no vacío $\mathcal{A} \subset \mathrm{Diff}^1_m(M)$ para cada variedad M de dimensión 3, tal que ningún difeomorfismo de $\mathcal{A}$ tenga descomposición dominada. Un Teorema desarrollado recientemente por M.A. Rodríguez Hertz [JRH], asegura para variedades de dimensión 3 la existencia de un residual de $\mathrm{Diff}^1_m(M)$, tal que todo difeomorfismo f del mismo o bien tiene todos sus exponentes de Lyapunov nulos casi todo punto, o bien es ergódico, no uniformemente hiperbólico, y tiene descomposición dominada. Usando dicho Teorema, concluiremos que existe un residual R de $\mathcal{A}$ donde cada difeomorfismo de R tiene todos los exponentes de Lyapunov cero m-casi todo punto en M.

3.1. El Lema de Franks

Para la demostración de la versión conservativa del Lema de Franks usaremos un resultado de álgebra lineal que asegura que podemos expresar a cada matriz en el $SL(N, \mathbb{R})$ próxima a la matriz identidad como el producto de un número finito de matrices semejantes a rotaciones donde tanto las matrices de rotación como las matrices de semejanza están próximas a la matriz identidad.

Más precisamente cada matriz $A \in SL(N, \mathbb{R})$ puede expresarse en la forma

(*) $A = B_1 \circ B_2 \circ ... \circ B_m$ donde $B_i = P_i \circ R_i \circ P_i^{-1}$, P_i y R_i están cerca de la identidad en $SL(N, \mathbb{R})$ y R_i es una rotación para $i = 1, ..., m$.

Proposition 24 *Escribiremos a la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\varepsilon} & -\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}} \\ 0 & \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}} & \sqrt{1-\varepsilon} \end{bmatrix}$$

como el producto de matrices conjugadas a rotaciones. Escribamos a A como $D_1 \circ R_1$ donde

$$D_1 = diag(1+\varepsilon, \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}, \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}),$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\varepsilon^2} & -\varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \sqrt{1-\varepsilon^2} \end{bmatrix}.$$

A D_1 la podemos expresar como $D_2 \circ D_3$, donde $D_2 = diag(1+\varepsilon, \frac{1}{1+\varepsilon}, 1)$ y $D_3 = diag(1, \sqrt{1+\varepsilon}, \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}})$. A D_2 y D_3 las descomponemos usando el siguiente criterio: si $D = diag(\lambda, \frac{1}{\lambda})$ y

$$R = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

donde $0 < |a| < 1$, $R \circ D$ es conjugada a una rotación si $\left|a(\lambda + \frac{1}{\lambda})\right| < 2$.

Lema 25 *Para todo $N > 1$, $\varepsilon > 0$, existe un entorno $\mathcal{G}$ de la identidad en $SL(N, \mathbb{R})$ tal que toda matriz $A \in \mathcal{G}$ puede escribirse como un producto finito $B_1 \circ B_2 \circ ... \circ B_m$, donde $B_i = P_i \circ R_i \circ P_i^{-1}$, P_i y R_i están cerca de la identidad en $SL(N, \mathbb{R})$ y R_i es una rotación.*

Demostración. Mencionamos en la proposición 24 que si A es una matriz diagonal en $SL(2, \mathbb{R})$, entonces existe una matriz de rotación $R \in SL(2, \mathbb{R})$ cercana a la identidad tal que RA es semejante a una rotación. Luego tenemos el siguiente resultado.

i) Si $A \in SL(2, \mathbb{R})$ es una matriz diagonal cercana a la identidad, entonces puede escribirse en la forma (*).

Toda matriz diagonal en $SL(N,\mathbb{R})$ cercana a la identidad puede ser expresada como el producto de $N-1$ matrices diagonales cercanas a la identidad cuyos autovalores, excepto dos de ellos, son todos iguales a uno. Por la propiedad i) tenemos que,

ii) Si $A \in SL(N,\mathbb{R})$ es una matriz diagonal cercana a la identidad, entonces puede escribirse en la forma (*).

La forma normal de Jordan J de una matriz puede multiplicarse por una matriz diagonal D apropiada de manera tal que DJ sea diagonalizable. Luego toda matriz de $SL(N,\mathbb{R})$ es semejante al producto de una matriz diagonal por una diagonalizable. Usando ii)concluimos que si $A \in SL(N,\mathbb{R})$,entonces puede escribirse en la forma (*). ■

Lema 26 (versión conservativa del Lema de Franks [BDP]) *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo conservativo, $E \subset M$ un conjunto finito f-invariante, B una perturbación $\varepsilon-$conservativa de Df en E, entonces para todo V entorno de E existe un difeomorfismo g arbitrariamente cerca en C^1 de f que concide con f en E y fuera de V tal que Dg es igual a B en E.*

Observemos que el Lema de Franks consiste en perturbaciones locales en torno a una cantidad finita de puntos. Tomando cartas locales en esos puntos, la demostración sigue del siguiente Lema.

Lema 27 *Para todo $N \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, existe un entorno $\mathcal{G}$ de la identidad en $SL(N,\mathbb{R})$ tal que para cualquier $A \in \mathcal{G}$ existe $f \in Diff^1_{Leb}(\mathbb{R}^N)$ que satisface las siguientes propiedades:*

i) *f coincide con la identidad fuera de la bola unitaria centrada en el origen*

ii) $f(0) = 0$ *y* $Df(0) = A$

iii) $\|Df - Id\| < \varepsilon$

Demostración. Podemos reducir el caso general al caso en que la matriz

A sea una rotación, ya que si la matriz es conjugada a una rotación, la función se encuentra inmediatamente haciendo el cambio de coordenadas, y si A es cualquier matriz de $\mathcal{G}$, por el Lema 25, podemos expresarla como el producto de un número finito de matrices semejantes a rotaciones donde tanto las matrices de rotación como las matrices de semejanza están próximas a la matriz identidad.

Sea $A = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix}$ donde:

1. $R = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, a^2 + b^2 = 1,\ b > 0$

2. Id es la matriz identidad en $SL(N-2, \mathbb{R})$.

La función f_b satisface las condiciones i), ii) e iii) del enunciado del Teorema, donde f_b está dada por

$$f_b(x_1, x_2, ..., x_N) = (M_b(\rho) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, x_3, ..., x_N)$$

donde:

1. $M_b(\rho) = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - g^2(\rho)} & -g(\rho) \\ g(\rho) & \sqrt{1 - g^2(\rho)} \end{bmatrix},$

2. $\rho = \sqrt{x_1^2 + ... + x_N^2}$

3. g es una función diferenciable que verifica:

   a) $g|_{[0,\rho_0]} \equiv b$

   b) $g|_{[\rho_1,0]} \equiv 0$

   c) g es decreciente en $[\rho_0, \rho_1]$, donde $0 < \rho_0 < \rho_1 < 1$.

■

3.2. Genericidad de los difeomorfismos con todos los exponentes de Lyapunov nulos

Definición 28 *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo, decimos que f tiene descomposición dominada si el fibrado tangente TM se descompone en dos sub-fibrados invariantes E y F, tales que:*

i) $TM = E \oplus F$

ii) *para todo $x \in M$ y para todo par de vectores unitarios $v_E \in E_x$ y $v_F \in F_x$ se tiene*

$$\|Df_x v_E\| \leq \frac{1}{2} \|Df_x v_F\|$$

para alguna métrica apropiada.

Se dice que F domina a E, y se denota $F \succ E$.

Ejemplo 29 *Si f es un difeomorfismo de Anosov, se tiene una descomposición dominada del fibrado tangente $TM = E^s \oplus E^u$ donde $E^u \succ E^s$.*

Ejemplo 30 *Si f es un difeomormismo parcialmente hiperbólico, entonces se tiene que $E^u \succ E^c \succ E^s$.*

Ejemplo 31 *Sea f un difeomorfismo en una variedad de dimensión 3 tal que f tiene dos puntos fijos hiperbólicos p_1 y p_2 donde los autovalores $\alpha_1,\ \beta_1$ y γ_1 de Df_{p_1} y $\alpha_2,\ \beta_2$ y γ_2 de Df_{p_2} verifican:*

1. $\alpha_1,\ \beta_1 \in \mathbb{C}$, $|\alpha_1| > 1,\ |\beta_1| > 1$.
2. $\gamma_1 \in \mathbb{R}$, $|\gamma_1| < 1$.
3. $\alpha_2,\ \beta_2 \in \mathbb{C}$, $|\alpha_1| < 1,\ |\beta_1| < 1$.
4. $\gamma_2 \in \mathbb{R}$, $|\gamma_2| > 1$.

Los únicos subespacios invariantes de dimensión 1 y 2 en TM_{p_1} son V_{γ_1} y $V_{\alpha_1,\ \beta_1}$ correspondientes a los autovalores γ_1 y $\alpha_1,\ \beta_1$ respectivamente. Análogamente, en TM_{p_2} los únicos subespacios invariantes de dimensión 1 y 2 son V_{γ_2} y $V_{\alpha_2,\ \beta_2}$ correspondientes a los autovalores γ_2 y $\alpha_2,\ \beta_2$.

Supongamos que el difeomorfismo f tiene descomposición dominada y llamemos E y F a los subfibrados tales que $F \succ E$. Si F_p tuviera dimensión 1 debe valer en p_1: $F_{p_1} = V_{\gamma_1}$, $E_{p_1} = V_{\alpha_1,\ \beta_1}$ ya que son los únicos subespacios invariantes en TM_{p_1} de dimensión 1 y 2 respectivamente. Pero Df_{p_1} es contractiva en V_{γ_1} y expansiva en $V_{\alpha_1,\ \beta_1}$ y como todas las métricas en espacios vectoriales de dimensión finita son equivalentes, no puede valer

$$\|Df_{p_1} v_E\| \leq \frac{1}{2} \|Df_{p_1} v_F\|$$

para todo par de vectores unitarios $v_E \in E_{p_1}$ y $v_F \in F_{p_1}$ en ninguna norma. Si F_p tuviera dimensión 2, razonando de manera análoga en TM_{p_2} llegamos a una contradicción. Por lo tanto f no puede tener descomposición dominada.

Teorema 32 (JRH) *Sea M una variedad de dimensión 3, entonces existe un conjunto R residual en $\mathrm{Diff}^1_m(M)$, tal que todo difeomorfismo $f \in \mathcal{R}$ o bien tiene todos sus exponentes de Lyapunov nulos casi todo punto, o bien es ergódico, no uniformemente hiperbólico, y tiene descomposición dominada.*

Teorema 33 *Para toda variedad 3-dimensional M, existe un abierto no vacío $\mathcal{A} \subset \mathrm{Diff}^1_m(M)$ tal que genéricamente en $\mathcal{A}$ todos los exponentes de Lyapunov son cero en m-casi todo punto de M.*

Demostración. Tomemos las matrices como en la proposición 24,

$$B_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{1+\varepsilon} & -\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon}} & 0 \\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon}} & \sqrt{1+\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\varepsilon \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\varepsilon} & -\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}} & 0 \\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}} & \sqrt{1-\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon \end{bmatrix}$$

donde $\varepsilon > 0$. B_1 y B_2 tienen determinante 1 y tienden a la matriz identidad cuando $\varepsilon \to 0$. Los autovalores $\alpha_1 = \sqrt{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon}} i$, $\beta_1 = \sqrt{1+\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon}} i$ y $\gamma_1 = 1-\varepsilon$ de Df_{p_1} y $\alpha_2 = \sqrt{1-\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}} i$, $\beta_2 = \sqrt{1-\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}} i$ y $\gamma_2 = 1+\varepsilon$ de Df_{p_2} verifican:

1. $\alpha_1,\ \beta_1 \in \mathbb{C}$, $|\alpha_1| > 1$, $|\beta_1| > 1$.
2. $\gamma_1 \in \mathbb{R}$, $|\gamma_1| < 1$.
3. $\alpha_2,\ \beta_2 \in \mathbb{C}$, $|\alpha_1| < 1$, $|\beta_1| < 1$.
4. $\gamma_2 \in \mathbb{R}$, $|\gamma_2| > 1$.

Sea M una variedad de dimensión 3. Tomemos p_1, $p_2 \in M$, U_i entornos de p_i en M, el Lema 26 nos asegura la existencia de un difeomorfismo g conservativo tal que g coincide con la identidad fuera de $U_1 \cup U_2$, p_1 y p_2 son puntos fijos de g y $Dg_{p_i} = B_i$.

Como los puntos fijos hiperbólicos persisten bajo perturbaciones C^1, existe un abierto $\mathcal{A} \subset \mathrm{Diff}^1_m(M)$ tal que todo difeomorfismo $f \in \mathcal{A}$ tiene dos puntos fijos hiperbólicos del mismo tipo que p_1 y p_2. Ningún difeomorfismo de $\mathcal{A}$ puede tener descomposición dominada, ya que son del mismo tipo visto en el ejemplo 31. Sea R el residual dado en el Teorema 32, luego para los difeomorfismos del residual $\mathcal{A} \cap R$ en $\mathcal{A}$, los exponentes de Lyapunov se anulan casi todo punto. ■

Ejemplo 34 *Sea M una variedad de dimensión 3. Encontraremos una función f conservativa con dos puntos fijos hiperbólicos tales que los autovalores α_1, β_1 y γ_1 de Df_{p_1} y α_2, β_2 y γ_2 de Df_{p_2} verifican:*

1. $\alpha_1,\ \beta_1 \in \mathbb{C}$, $|\alpha_1| > 1$, $|\beta_1| > 1$,
2. $\gamma_1 \in \mathbb{R}$, $|\gamma_1| < 1$,

3. $\alpha_2,\ \beta_2 \in \mathbb{C}$, $|\alpha_1| < 1,\ |\beta_1| < 1$,

4. $\gamma_2 \in \mathbb{R}$, $|\gamma_2| > 1$.

Para nuestros propósitos no necesitamos que la función g dada en el enunciado del Lema 26 se encuentre próxima a f. Si revisamos la demostración de dicho Lema, vemos que el enunciado puede generalizarse a cualquier B conservativa si no pedimos que la función g se encuentre próxima a f.

Sean (U, ϕ) una carta local de M y p_1, p_2 dos puntos cualesquiera de $\phi(U)$. Tomemos $r > 0$ de manera tal que cada bola $B(p_i, r)$ con centro en p_i y radio r esté contenida en $\phi(U)$ para $i = 1, 2$.

Sea g es una función diferenciable que verifica:

a) $g|_{[0,\rho_0]} \equiv 1$

b) $g|_{[\rho_1,0]} \equiv 0$

c) *g es decreciente en $[\rho_0, \rho_1]$, donde $0 < \rho_0 < \rho_1 < r$.*

Sea b un número real, notemos con g_b a bg.

Tomemos la función h definida en $B(0, r)$ como $h = h_5 \circ h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1$ donde las funciones h_i están dadas por las siguientes fórmulas

para $i = 1,\ 2,\ 3$

$$h_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 - g_{b_i}^2(\rho_i)} & -g_{b_i}(\rho_i) \\ 0 & g_{b_i}(\rho_i) & \sqrt{1 - g_{b_i}^2(\rho_i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ u_2^i \\ u_3^i \end{bmatrix}$$

donde:

- $u_2^1 = x_2$, $u_2^2 = x_3$; $b_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\rho_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$
- $u_2^2 = -\frac{1}{3}(x_2 + x_3)$, $u_3^2 = \frac{\sqrt{119}}{357}(23x_2 - 13x_3)$; $b_2 = \frac{\sqrt{238}}{24}$;
  $\rho_2 = \sqrt{x_1^2 + \frac{1}{119}(72x_2^2 - 40x_2x_3 + 32x_3^2)}$
- $u_2^3 = -\frac{3}{2}\sqrt{2}x_2$, $u_2^3 = -\frac{\sqrt{2}}{12}(5x_2 + \sqrt{119}x_3)$; $b_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
  $\rho_3 = \sqrt{x_1^2 + \frac{1}{72}(349x_2^2 + 10\sqrt{119}x_2x_3 + 119x_3^2)}$

para $i = 4, 5$

$$h_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - g_{b_i}^2(\rho_i)} & -g_{b_i}(\rho_i) & 0 \\ g_{b_i}(\rho_i) & \sqrt{1 - g_{b_i}^2(\rho_i)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ x_3 \end{bmatrix}$$

donde:

- $u_1^4 = -\frac{2}{9}(x_1 + x_2)$, $u_2^4 = \frac{\sqrt{959}}{8631}(454x_1 - 194x_2)$; $b_4 = \frac{\sqrt{1918}}{144}$;
  $\rho_4 = \sqrt{\frac{1}{959}(2592x_1^2 - 2080x_1x_2 + 512x_2^2) + x_3^2}$

- $u_1^5 = -\frac{9}{4}\sqrt{2}x_1$, $u_2^5 = -\frac{\sqrt{2}}{72}(65x_1 + \sqrt{959}x_2)$; $b_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
  $\rho_5 = \sqrt{\frac{1}{2592}(30469x_1^2 + 130\sqrt{959}x_1x_2 + 959x_2^2) + x_3^2}$

Sea f *la función definida como*

a) *en* $\phi(U)$*:*

1. $f(x) = h^{-1}(x - p_1) + p_1$ *en* $B(p_1, r)$
2. $f(x) = h(x - p_2) + p_2$ *en* $B(p_2, r)$
3. $f = Id$ *en el complemento de* $B(p_1, r) \cup B(p_2, r)$

b) $f = Id$ *en el complemento de* U

Puede verse que f *satisface las condiciones pedidas.*

Bibliografía

[AB] A. Avila, J. Bochi, *Nonuniform hyperbolicity, global dominated splittings and generic properties of volume-preserving diffeomorphisms*,a aparecer en Transactions of the AMS.

[An] D. V. Anosov, *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature,* Trudy Mat. Inst. Stelkov, 90, (1967).

[AS] D. V. Anosov, Ya. Sinai, *Certain smooth ergodic systems,* Uspehi Mat. Nauk, 22, 5(137), (1967),107-172.

[B] J. Bochi, *Genericity of zero Lyapunov exponents, Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 22 (2002), no. 6.

[BDP] C. Bonatti, L. J. Díaz, E. R. Pujals, *A C^1-generic dichotomy for diffeomorphisms: Weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources,* http://annals.math.princeton.edu/annals/2003/158-2/annals-v158-n2-p01-s.pdf

[BI] D. Burago, S. Ivanov, *Partially hyperbolic diffeomorphisms of 3-manifolds with abelian fundamental groups*, J. Modern Dynamics 2, no4 (2008)

[BV] J. Bochi, M. Viana, *The Lyapunov exponents of generic volume-preserving and symplectic maps*, Annals of Mathematics (2), 161 (2005) 1423-1485.

[CL] C. Camacho, A. Lins Neto, *Teoria Geométrica das Folheações*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Projeto Euclides, Rio de Janeiro,1979.

[F] J. Franks, *Anosov diffeomorphisms, Global Analysis* (Proc. Symp. Pure Mathematics, 14), American Mathematical Society, 1970, pp. 61-93.

[G] N. Gourmelon, *Adapted metrics for dominated splittings*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, 27 (2007),no 6.

[H] E. Hopf, *Statistik der geodätischen linien in Mannigfaltigkeiten negativer krümmung*, Ber. Verh. Schs. Akad. Wiss. Leipzig 91, (1939), 261-304.

[HHUT] F. Rodriguez Hertz, M. A. Rodriguez Hertz, , A. Tahzibi, R. Ures, *New criteria for ergodicity and non-uniform hyperbolicity*, http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0907/0907.4539v1.pdf

[JRH] M. Rodriguez Hertz, *A dichotomy for generic conservative diffeomorphisms in dimension 3, preprint 2009.*

[K] A. Katok, *Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms,* Publ. Math. IHES 51, (1980), 137-173.

[KH] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. With a supplement by Anatole Katok and Leonardo Mendoza*, 54 Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[M1] R. Mañé, *Introdução à Teoria Ergódica*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Projeto Euclides, Rio de Janeiro,1983.

[M2] R. Mañé, *Oseledec's theorem from the generic viewpoint*, Proceedings of the ICM, vol. 2, Warsaw 1983, 1269-1276.

[M3] R. Mañé, *The Lyapunov exponents of generic area preserving diffeomorphisms*, International Conference on Dynamical Systems (Montevideo, 1995) (Pitman Research Notes in Mathematics Series, 362), 1996, pp. 110-119.

[O] V. I. Oseledec, *A multiplicative ergodic theorem*, Trans. Moscow Math. Soc. 19, (1968), 197-231.

[P] Ya. Pesin, *Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory*, Uspekhi mat. Nauk 32, (1977) 55-112; English transl., Russian Math. Surveys 32 (1977), 55-114.

[PM] J. Palis, W. de Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems. An Introduction*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[PS] C. Pugh, M. Shub, *Ergodic attractors*, Trans. Am. Math. Soc. 312, (1989), 1-54.

[V] M. Viana, *Desintegration into conditional measures: Rokhlin's theorem*, http://w3.impa.br/%7Eviana/out/rokhlin.pdf