Tesis de Maestría

Generalizaciones de la noción de bimonoide

Sara Vilar del Valle

Orientador: Dr. Mariana Haim

Maestría en Matemática
Pedeciba
Universidad de la República
Uruguay

26 de mayo de 2016

Agradecimientos.

A la Negra, por haber aceptado trabajar conmigo, por enseñarme de todo, guiarme, exigirme y ayudarme en el trabajo y en muchas, muchas cosas más.

A mis compañeros, especialmente a Javi, Pau, Maru y Fede que me ayudaron siempre que pudieron y me escucharon tantas veces.

A los grandes maestros que tuve, que me enseñaron casi todo lo que sé.

A mis compañeros de trabajo, que me cubrieron en mil y una, y me apoyaron siempre, especialmente Patricia, Eduardo y Magdalena.

A Carlos, por bancarme y acompañarme, y a Lorenzo, por darme el empujón final.

Resumen

En este trabajo revisamos las dos generalizaciones conocidas de la noción de bimonoide al contexto no trenzado: mónadas comonoidales ([4] y [12]) y bimónadas ([10]).

Abstract

In this work, we present the two known generalizations of the notion of bimonoid to the non braided context: comonoidal monads ([4] y [12]) and bimonads ([10]).

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La teoría de álgebras de Hopf está fuertemente vinculada a la teoría de grupos. En la base de esta teoría esta la noción de $\Bbbk$-biálgebra, que corresponde a un conjunto con estructura de álgebra y de coálgebra ligadas por una compatibilidad natural. Es sabido que este concepto puede verse más en general como un *bimonoide* en una categoría trenzada. Este trabajo trata sobre posibles generalizaciones de la noción de bimonoide a categorías no necesariamente trenzadas.

Los módulos sobre una $\Bbbk$-álgebra son un caso particular de lo que en álgebra universal se conoce como estructura algebraica. Una teoría algebraica es un conjunto de axiomas que describe un tipo particular de estructura algebraica (a modo de ejemplos de teorías algebraicas, citamos la teoría de anillos, la teoría de grupos). La traducción categórica de las nociones de *teoría algebraica* y de *estructura algebraica* está dada por los conceptos respectivos de *mónada* y de *álgebras* sobre una mónada. Los anillos, los grupos, por ejemplo, son álgebras sobre cierta mónada en Set (en cada caso la mónada se construye naturalmente a partir de una adjunción).

Más explícitamente, si A es una $\Bbbk$-álgebra, el functor $L_A : Vec_\Bbbk \to Vec_\Bbbk$ definido en objetos por $L_A(V) = A \otimes V$ y en morfismos por $L_A(f) = id_A \otimes f$ es una mónada. De hecho los axiomas de $\Bbbk$-álgebra para un objeto de $Vec_\Bbbk$ se corresponden uno a uno con los axiomas de mónada para L_A. Es natural entonces pensar a las mónadas como generalización de las $\Bbbk$-álgebras y por tanto intentar modelar las $\Bbbk$-biálgebras en el contexto de mónadas.

La generalización primera y conocida es la de bimonoide en una categoría monoidal trenzada. Las generalizaciones que existen y de las que trata la tesis parten de una mónada (como generalización del álgebra)y toman dos posibles caminos:

- Eliminar la hipótesis de la existencia de una trenza en la categoría de base. Esta corriente, la de Bruguières y Virelizier en [3] y [4] y [12], trabaja en el contexto de categorías monoidales (no necesariamente trenzadas) y considera functores comonoidales que son además mónadas, con ciertas relaciones de compatibilidad entre estas estructuras. Este camino da lugar a las llamadas *mónadas comonoidales*; de manera dual y análoga, se pueden considerar las llamadas *comónadas monoidales* como otra posible generalización (que parte de una comónada como generalización de la estructura de $\Bbbk$-coálgebra).
- Eliminar la hipótesis de monoidal y considerar una transformación natural que ocupa el lugar de trenza (conocida como *ley distributiva*). Esto fue hecho en particular en [9], [10], [11] y [14]: los autores,Mesablishvili y Wisbauer, consideran una categoría cualquiera y modelan un bimonoide a través de un functor que es a la vez mónada y comónada y donde estas estructuras conviven bajo ciertas relaciones de compatibilidad que pueden ser enunciadas a través de la ley distributiva. Este camino da lugar a las llamadas bimónadas.

En ambos contextos se tiene la noción extendida que agrega una antípoda (mónada comonoidal de Hopf y bimónada de Hopf respectivamente) y se generalizan resultados conocidos de la teoría de álgebras de Hopf (en particular, en ambos contextos se prueba una versión del Teorema Fundamental de módulos de Hopf). No consideraremos estas nociones en el presente trabajo.

Este trabajo tiene por objetivo, además de recopilar ejemplos de mónadas y comónadas, revisar estas dos corrientes de generalización, presentando las definiciones, algunos resultados importantes y algunos ejemplos.

En el capítulo 2, introducimos los preliminares algebraicos y categóricos, y fijamos las notaciones necesarias, además de presentar los ejemplos principales de monoide, comonoide y bimonoide en una categoría monoidal trenzada.
En el capítulo 3 pasamos a las mónadas y comónadas, como generalización de monoide y comonoide, recopilando varios ejemplos. Presentamos además la *categoría de Eilenberg-Moore*

asociada a una mónada o a una comónada, que en el primer caso (el de una mónada) corresponde a las álgebras sobre ella, y en el segundo caso a las coálgebras sobre la comónada (las generalizaciones respectivas de lo que en $Vec_{\Bbbk}$ llamamos módulos y comódulos). Además, describimos las categorías de Eilenberg-Moore en los ejemplos recopilados.

Finalmente, en los capítulos 4 y 5, estudiamos las dos posibles generalizaciones de bimonoide, varios ejemplos y algunos resultados dentro de cada teoría, relativos a las categorías de módulos (álgebras sobre la mónada), comódulos (coálgebras sobre la comónada) y bimódulos (álgebras y coálgebras con relaciones de compatibilidad).

Asimismo, en el capítulo 5, presentamos en la Proposición 5.4 un resultado original que puede ser de interés, y que vincula las dos generalizaciones.

Capítulo 2

Preliminares y notaciones

En este capítulo presentamos primero los preliminares algebraicos y luego los categóricos, con el objetivo de fijar las definiciones y notaciones básicas.

2.1. Álgebras, coálgebras y biálgebras sobre un cuerpo $\Bbbk$

En toda esta sección se considera $\Bbbk$ un cuerpo fijo.

Definición 2.1. *Una* ***$\Bbbk$-álgebra*** *es una terna (A, m, u) tal que*

- *A es un $\Bbbk$-espacio vectorial,*
- *$m : A \otimes A \to A$ es un mapa lineal que verifica $m \circ (m \otimes id_A) = m \circ (id_A \otimes m)$ (**asociatividad** de m),*
- *$u : \Bbbk \to A$ es un mapa lineal que verifica $m \circ (u \otimes id_A) = id_A = m \circ (id_A \otimes u)$ (donde estamos identificando $\Bbbk \otimes A$ y $A \otimes \Bbbk$ con A vía el isomorfismo natural de espacios vectoriales). Las funciones m y u se dicen respectivamente el **producto** y la **unidad** del álgebra. Notar que $u(1_\Bbbk)$ es el neutro de m.*

Definición 2.2. *Sean $(A, m, u), (A', m', u')$ dos $\Bbbk$-álgebras. Una transfomación lineal $f : A \to A'$ es un* ***morfismo de $\Bbbk$-álgebras*** *si los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "m"] & A' \otimes A' \arrow[d, "m'"] \\ A \arrow[r, "f"] & A' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Bbbk \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "u'"] & A \arrow[d, "f"] \\ & A' \end{tikzcd}$$

Definición 2.3. *Una* $\mathbb{k}$***-coálgebra*** *es una terna* (C, Δ, ε) *tal que*

- C *es un* $\mathbb{k}$*-espacio vectorial,*
- $\Delta : C \to C \otimes C$ *es un mapa lineal que verifica* $(\Delta \otimes id_C) \circ \Delta = (id_C \otimes \Delta) \circ \Delta$ *(**coasociatividad** de* Δ*),*
- $\varepsilon : C \to \mathbb{k}$ *es un mapa lineal que verifica* $(\varepsilon \otimes id_C) \circ \Delta = id_C = (id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta$ *(donde estamos identificando* $\mathbb{k} \otimes C$ *y* $C \otimes \mathbb{k}$ *con* C *via el isomorfismo natural de espacios vectoriales).*

Las funciones Δ *y* ε *se dicen respectivamente el **coproducto** y la **counidad** de la coálgebra, puesto que corresponden a las nociones duales de producto y unidad para álgebras.*

Definición 2.4. *Sean* $(C, \Delta, \varepsilon), (C', \Delta', \varepsilon')$ *dos* $\mathbb{k}$*-coálgebras. Una transfomación lineal* $f : C \to C'$ *es un **morfismo de*** $\mathbb{k}$***-coálgebras*** *si los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd} C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"] & A' \otimes A' \\ C \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "f"] & C' \arrow[u, "\Delta'"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{k} & A \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[d, "f"] \\ & A' \arrow[ul, "\varepsilon'"] \end{tikzcd}$$

Definición 2.5. *Se dice que* $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ *es una* $\mathbb{k}$*-**biálgebra** si*

- (B, m, u) *es una* $\mathbb{k}$*-álgebra,*
- (B, Δ, ε) *es una* $\mathbb{k}$*-coálgebra,*
- $\Delta : B \to B \otimes B$ *es un morfismo de álgebras, donde* $B \otimes B$ *se considera con el producto* $m \otimes m$*,*
- $\varepsilon : B \to \mathbb{k}$ *es un morfismo de álgebras, donde* $\mathbb{k}$ *se considera con el producto usual.*

*Un **morfismo de*** $\mathbb{k}$***-biálgebras*** *es un morfismo de álgebras y de coálgebras.*

Ejemplo 1. *Dado un conjunto* X*, si se define, para cada* $x \in X$*,* $\Delta(x) = x \otimes x$ *y* $\varepsilon(x) = 1_{\mathbb{k}}$ *y se extiende linealmente a morfismos* Δ, ε *definidos en* $\mathbb{k}[X]$*, se obtiene una* $\mathbb{k}$*-coálgebra* $(\mathbb{k}[X], \Delta, \varepsilon)$*.*
Por otro lado, si M *es un monoide (en el sentido clásico, conjuntista), el* $\mathbb{k}$*-espacio vectorial* $\mathbb{k}[M]$ *de base* M *(conjunto de las combinaciones lineales finitas de elementos de* M*) tiene estructura de* $\mathbb{k}$*-álgebra si se considera el producto* m *como la extensión lineal del producto en* M *y la unidad* u *como el neutro de* M*.*
Resulta además que $(\mathbb{k}[M], m, u, \Delta, \varepsilon)$ *es una biálgebra.*

2.2. Categorías

Para la teoría general de categorías y las notaciones, referimos a [2] y [8]. Asumimos conocida la definición de categoría, functor, transformación natural, endofunctor y bifunctor. Notaremos Set, $Vec_{\Bbbk}$ y Cat a las categorías de conjuntos, espacios vectoriales sobre un cuerpo $\Bbbk$ y categorías, respectivamente. El siguiente concepto será utilizado más adelante en 5.1.

Definición 2.6. *Sea $U : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor.*
*Si F es un endofunctor de $\mathcal{D}$, un **levantamiento de F via U** es un endofunctor $\overline{F}$ de $\mathcal{C}$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "\overline{F}"] \arrow[d, "U"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "U"] \\
\mathcal{D} \arrow[r, "F"] & \mathcal{D}.
\end{tikzcd}$$

*Si $\overline{F}, \overline{G}$ son levantamientos respectivos de $F, G : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ y $\tau : F \Rightarrow G$ es una transformación natural, un **levantamiento de τ via U** es una transformación natural $\overline{\tau} : \overline{F} \Rightarrow \overline{G}$ tal que para cada objeto X de $\mathcal{C}$ se tiene la siguiente igualdad entre morfismos de $\mathcal{D}$:*

$$U(\overline{\tau}_X) = \tau_{UX}$$

2.3. Categorías monoidales y monoidales trenzadas

Si se quiere generalizar la noción clásica de monoide (es decir un conjunto con una operación asociativa que admite neutro) a un contexto categórico, un buen marco es el de las categorías monoidales.

Definición 2.7. *Una **categoría monoidal** es una séxtupla $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, r, l)$ donde $\mathcal{C}$ es una categoría, $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un bifunctor, I es un objeto, a, r, l son isomorfismos naturales tales que si notamos $\otimes(X, Y)$ en lugar de $X \otimes Y$*

$$a_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \to (X \otimes Y) \otimes Z$$

es natural para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ y el diagrama pentagonal

$$
\begin{tikzcd}
X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W)) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "id_X \otimes a"'] & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[r, "a"] & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[rr, "a"'] & & (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[u, "a \otimes id_W"']
\end{tikzcd}
$$

conmuta para todos $X, Y, Z, W \in \mathcal{C}$.

$$r_X : I \otimes X \to X;\ l_X : X \otimes I \to X$$

son naturales para todo $X \in \mathcal{C}$ y el diagrama triangular

$$
\begin{tikzcd}
X \otimes (I \otimes Y) \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "id_X \otimes r"'] & (X \otimes I) \otimes Y \arrow[d, "l \otimes id_Y"] \\
& X \otimes Y
\end{tikzcd}
$$

conmuta para todos $X, Y \in \mathcal{C}$.
Además

$$r_I = l_I : I \otimes I \to I$$

La transformación natural a se llama ***restricción de asociatividad*** *y l, r se llaman* ***restricciones de unidad****.*
Una categoría monoidal se dice ***estricta*** *si las restricciones de asociatividad y de unidad son identidades.*
Suele decirse que el bifunctor $\otimes$ y el objeto I son respectivamente el ***producto*** *y el* ***neutro*** *de la categoría monoidal. En general denotaremos a la categoría monoidal mediante $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ o simplemente mediante $\mathcal{C}$.*
En una categoría monoidal se puede considerar el bifunctor transposición τ tal que $\tau(X \otimes Y) = Y \otimes X$. Una categoría monoidal se dice ***trenzada*** *si además existe un isomorfismo natural $c : \otimes \to \otimes \circ \tau$ tal que*

$$
\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c_{X,Y} \otimes id_Z"] & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "c_{X, Y \otimes Z}"] & (Y \otimes Z) \otimes X \arrow[d, "a"] \\
(Y \otimes X) \otimes Z \arrow[r, "a"] & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[r, "id_Y \otimes c_{X,Z}"] & Y \otimes (Z \otimes X)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "a^{-1}"] \arrow[d, "id_X \otimes c_{X,Y}"] & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "c_{X, Y \otimes Z}"] & Z \otimes (X \otimes Y) \arrow[d, "a^{-1}"] \\
X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[r, "a^{-1}"] & (X \otimes Z) \otimes Y \arrow[r, "c_{X,Z} \otimes id_Y"] & (Z \otimes X) \otimes Y
\end{tikzcd}
$$

Ejemplos 1.

1 $(Vec_{\mathbb{k}}, \otimes, \mathbb{k}, a, l, r)$ *es monoidal, siendo* $a_{U,V,W}(u \otimes (v \otimes w)) = (u \otimes v) \otimes w \ \forall u \in U, v \in V, w \in W, r_V : \mathbb{k} \otimes V \to V$ *es* $r_V(k \otimes v) = kv \ \forall v \in V, k \in \mathbb{k}$ *y* $l_V : V \otimes \mathbb{k} \to V$ *es* $l_V(v \otimes k) = vk \ \forall v \in V, k \in \mathbb{k}$. *Además es trenzada mediante* $c_{V,W}(v \otimes w) = w \otimes v, \forall v \in V, w \in W$. *Además es trenzada con* $c_{V,W}(v \otimes w) = w \otimes v$.

2 $(Set, \times, \{*\}, a, l, r)$ *es monoidal, con las* a, l, r *obvias. Además es trenzada con* $c_{X,Y}(x, y) = (y, x)$.

3 De manera análoga a Set, Cat *admite una estructura monoidal: el producto es el producto cartesiano de categorías y el neutro es la categoría con un único objeto y una única flecha. Las restricciones de asociatividad y de unidad y la trenza emulan a las de* Set.

4 Dada una categoría $\mathcal{C}$*, consideremos la categoría* $End(\mathcal{C})$ *cuyos objetos son los endofunctores de* $\mathcal{C}$ *y cuyos morfismos son las transformaciones naturales entre endofunctores. Esta categoría tiene una estructura monoidal escricta dada por la composición como producto y el functore* $id_{\mathcal{C}}$ *como neutro. En general, no admite una trenza.*

Es natural entender cuáles son los functores que preservan la estructura monoidal. A veces en la literatura se les llama *functores monoidales* pero cuando van a considerarse versiones laxas (más generales) de estos, es conveniente llamarles *functores monoidales fuertes*.
Antes de dar esta definición, definimos las versiones laxas, que consideraremos en el capítulo 4: *functor monoidal* y *functor comonoidal* (a menudo en la literatura, por ejemplo en [1], se les llama *functor monoidal laxo* y *functor monoidal colaxo*) respectivamente).

Definición 2.8. *Sean* $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, I, a, r, l)$ *y* $(\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, I', a', r', l')$ *dos categorías monoidales. Un* ***functor monoidal*** *de* $\mathcal{C}$ *en* $\mathcal{D}$ *es una terna* (F, F_2, F_0) *donde* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *es un functor,* $F_2 : \otimes_{\mathcal{D}} \circ (F \times F) \Rightarrow F \circ \otimes_{\mathcal{C}}$ *es una transformación natural y* $F_0 : I_{\mathcal{D}} \to F(I_{\mathcal{C}})$ *es un morfismo en* $\mathcal{D}$ *tales que los siguientes diagramas conmutan:*

i)
$$\begin{tikzcd}
FX \otimes_{\mathcal{D}} (FY \otimes_{\mathcal{D}} FZ) \arrow[r, "a'"] \arrow[d, "id_{FX} \otimes_{\mathcal{C}} F_2(Y,Z)"] & (FX \otimes_{\mathcal{D}} FY) \otimes_{\mathcal{D}} FZ \arrow[d, "F_2(X,Y) \otimes_{\mathcal{D}} id_{FZ}"] \\
FX \otimes_{\mathcal{D}} F(Y \otimes_{\mathcal{C}} Z) \arrow[d, "F_2(X, Y \otimes_{\mathcal{C}} Z)"] & F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{D}} FZ \arrow[d, "F_2(X \otimes_{\mathcal{C}} Y, Z)"] \\
F(X \otimes_{\mathcal{C}} (Y \otimes_{\mathcal{C}} Z)) \arrow[r, "F(a)"'] & F((X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \otimes_{\mathcal{C}} Z)
\end{tikzcd}$$

ii)
$$\begin{tikzcd}
FX \otimes_{\mathcal{D}} I' \arrow[r, "l'"] \arrow[d, "id_{FX} \otimes_{\mathcal{D}} F_0"] & FX \\
FX \otimes_{\mathcal{D}} FI \arrow[r, "F_2(X,I)"'] & F(X \otimes_{\mathcal{C}} I) \arrow[u, "F(l)"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I' \otimes FX \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "F_0 \otimes_{\mathcal{D}} id_{FX}"] & FX \\
FI \otimes_{\mathcal{D}} FX \arrow[r, "F_2(I,X)"'] & F(I \otimes_{\mathcal{C}} X) \arrow[u, "F(r)"]
\end{tikzcd}
.$$

De manera dual, se define ***functor comonoidal*** *como una terna* (G, G_2, G_0) *donde* $G_2 : G \circ \otimes_{\mathcal{C}} \Rightarrow \otimes_{\mathcal{D}} \circ (G \times G)$ *es una transformación natural y* $G_0 : F(I_{\mathcal{C}}) \to I_{\mathcal{D}}$ *es un morfismo en* $\mathcal{D}$ *tales que diagramas duales (invirtiendo las flechas) a los de arriba conmutan.*

Un functor monoidal se dice ***fuerte*** *si* F_2 *es un isomorfismo natural y* F_0 *es un isomorfismo en* $\mathcal{D}$*.*

Un functor monoidal fuerte se dice ***estricto*** *si* F_2 *y* F_0 *son identidades.*

Un functor monoidal fuerte se dice ***equivalencia monoidal*** *si además es una equivalencia. (Es fácil ver que su cuasi inverso también es monoidal fuerte.)*

Dos categorías monoidales se dicen ***monoidalmente equivalentes*** *si existe una equivalencia monoidal de una a otra.*

Un teorema fundamental en la teoría de categorías monoidales es el que sigue. Para una prueba, remitimos a [6].

Teorema 2.1. *Toda categoría monoidal es monoidalmente equivalente a una categoría monoidal estricta.*

2.4. Monoides y comonoides en categorías monoidales

Presentamos ahora los conceptos de monoide y comonoide, en categorías monoidales cualesquiera. En vistas del Teorema 2.1, asumiremos que las categorías monoidales son estrictas.

Definición 2.9. *Un* ***monoide*** *en una categoría monoidal trenzada estricta* $(\mathcal{C}, \otimes, I)$*, es una terna* (M, m, u) *donde* M *es un objeto en* $\mathcal{C}$ *y* $m : M \otimes M \to M$ *(producto),* $u : I \to M$ *(unidad) son morfismos en* $\mathcal{C}$ *tales que los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd}
M \otimes M \otimes M \arrow[r, "id_M \otimes m"] \arrow[d, "m \otimes id_M"'] & M \otimes M \arrow[d, "m"] \\
M \otimes M \arrow[r, "m"] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \otimes M \arrow[r, "u \otimes id_M"] \arrow[dr, equal] & M \otimes M \arrow[d, "m"] & M \otimes I \arrow[l, "id_M \otimes u"'] \arrow[dl, equal] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Para simplificar la notación muchas veces lo denotamos simplemente por M*.*

Ejemplos 2.

1 *Un monoide en* $Vec_{\Bbbk}$ *es una* $\Bbbk$*-álgebra.*

2 *Un monoide en* Set *es un monoide en el sentido usual.*

3 *Un monoide en* Cat *es una categoría monoidal.*

Definición 2.10. *Sean* $(M, m, u), (M', m', u')$ *monoides en* $\mathcal{C}$*. Un morfismo* $f : M \to M'$ *en* $\mathcal{C}$ *es un* ***morfismo de monoides*** *si los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd}
M \otimes M \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "m"] & M' \otimes M' \arrow[d, "m'"] \\
M \arrow[r, "f"] & M'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & M' \\
& I \arrow[ul, "u"] \arrow[u, "u'"']
\end{tikzcd}$$

De manera dual (es decir, invirtiendo las flechas en los diagramas) se obtiene la noción de comonoide.

Definición 2.11. *Un* ***comonoide*** *en una categoría monoidal trenzada estricta* $(\mathcal{C}, \otimes, I)$*, es una terna* (C, Δ, ε) *donde* C *es un objeto en* $\mathcal{C}$ *y* $\Delta : C \to C \otimes C$ *(coproducto),* $\varepsilon : C \to I$ *(counidad) son morfismos en* $\mathcal{C}$ *tales que los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "id_C \otimes \Delta"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes id_C"] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\varepsilon \otimes id_C"'] \arrow[r, "id_C \otimes \varepsilon"] & C \otimes I \\
& C \arrow[ul, equal] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}$$

Ejemplos 3.

1 *Un comonoide en* $Vec_{\Bbbk}$ *es una* $\Bbbk$*-coálgebra.*

2 *Los únicos comonoides en* Set *son triviales. En efecto, supongamos que* (X, Δ, ε) *es un comonoide en* Set *y tomemos* $x \in X$*. Se tiene que* $\varepsilon \times id(\Delta(x)) = id(x)$*. Si* $\Delta(x) = (x_1, x_2)$ *resulta que* $x_2 = x$*. Utilizando el triángulo derecho del diagrama de comonoide obtenemos que* $x_1 = x$ *y por lo tanto la estructura de comonoide en* X *es la trivial.*
Esto ilustra por qué la versión conjuntista de la noción de coálgebra no es conocida (por oposición a la versión conjuntista de la noción de álgebra que es bien natural: los monoides clásicos).

3 *Análogamente, puede verse que los comonoides en* Cat *son triviales.*

Definición 2.12. *Sean* $(C, \Delta, \varepsilon), (C', \Delta', \varepsilon')$ *comonoides en* $\mathcal{C}$*. Un morfismo* $f : C \to C'$ *en* $\mathcal{C}$ *es un* ***morfismo de comonoides*** *si los diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta"] & C' \arrow[d, "\Delta'"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"] & C' \otimes C' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon"] & C' \arrow[d, "\varepsilon'"] \\ & \mathcal{I} \end{tikzcd}$$

2.5. Bimonoides en categorías monoidales trenzadas

Queremos ahora llevar a un marco categórico la noción de $\Bbbk$-biálgebra. Observemos que el axioma pentagonal que establece la compatibilidad entre las estructuras de álgebra y coálgebra usa fuertemente la trenza de $Vec_{\Bbbk}$. Esto sugiere que el concepto general, el de bimonoide, se enuncie en una categoría monoidal trenzada. De hecho, el siguiente resultado ordena y permite ver mejor el concepto de bimonoide.

Proposición 2.1. *Sean* $(\mathcal{C}, \otimes, I, \tau)$ *una categoría monoidal trenzada y* (M, m, u)*,* (C, Δ, ϵ) *respectivamente un monoide y un comonoide en* $\mathcal{C}$*. Entonces* $M \otimes M$ *y* $C \otimes C$ *son respectivamente un monoide y un comonoide en* $\mathcal{C}$*, con estructuras heredadas de las originales como sigue: El producto de* $M \otimes M$ *es* $m' = (m \otimes m) \circ (id \otimes \tau \otimes id)$ *y la unidad es* $u' = u \otimes u$*, el coproducto* $C \otimes C$ *es* $\Delta' = (id \otimes \tau \otimes id) \circ (\Delta \otimes \Delta)$ *y la counidad es* $\varepsilon' = \varepsilon \otimes \varepsilon$*.*

Definición 2.13. *Sea* $(\mathcal{C}, \otimes, I, \tau)$ *una categoría monoidal trenzada.* $(B, m, u, \Delta, \epsilon)$ *es un* ***bimonoide*** *en* $\mathcal{C}$ *si*

- (B, m, u) *es un monoide en* $\mathcal{C}$

- (B, Δ, ϵ) *es un comonoide en* $\mathcal{C}$

- Δ, ϵ *son morfismos de monoides*

Observación 1.

- *La condición de que* Δ *es morfismo de monoides se explicita en que los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd}
& B \otimes B \arrow[r, "\Delta\otimes\Delta"] \arrow[dl, "m"] & B \otimes B \otimes B \otimes B \arrow[dd, "id_B\otimes\tau\otimes id_B"'] \\
B \arrow[dr, "\Delta"'] & & \\
& B \otimes B & B \otimes B \otimes B \otimes B \arrow[l, "m\otimes m"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\Delta"] & B \otimes B \\
I \arrow[u, "u"] \arrow[r, "\cong"'] & I \otimes I \arrow[u, "u\otimes u"']
\end{tikzcd}$$

- *La condición de que* ε *es morfismo de monoides se expresa en que los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd}
B \otimes B \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\varepsilon\otimes\varepsilon"] & B \arrow[d, "\varepsilon"] \\
I \otimes I \arrow[r] & I
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\varepsilon"] & I \\
& I \arrow[ul, "u"] \arrow[u, "id"']
\end{tikzcd}$$

- *Puede verse a partir de lo anterior que si* $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ *es tal que* (B, m, u) *es una* $\mathbb{k}$*-álgebra y* (B, Δ, ε) *es una* $\mathbb{k}$*-coálgebra, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

  (i) Δ *y* ε *son morfismos de monoides,*

  (ii) m *y* u *son morfismos de comonoides.*

Ejemplos 4.

1. *Un bimonoide en* $Vec_{\mathbb{k}}$ *es una* $\mathbb{k}$*-biálgebra.*
2. *Todo monoide en Set es un bimonoide con la estructura de comonoide trivial.*

Capítulo 3

Mónadas y comónadas.

Dado un objeto M en una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, I)$, se puede considera el functor $L_M = M \otimes \_ : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Los axiomas de monoide/comonoide para M se traducen al functor L_M obteniendo las nociones de mónada y comónada, que prescinden de la estructura monoidal de $\mathcal{C}$.
En este sentido, el concepto de mónada/comónada puede pensarse como una generalización de la noción de monoide/comonoide a una categoría cualquiera.
De la misma forma, los conceptos de módulo sobre un monoide y comódulo sobre un comonoide se generalizan mediante las nociones de álgebra sobre una mónada y coálgebra sobre una comónada.
En este capítulo presentamos las definiciones de mónada, comónada, álgebra, coálgebra y algunos resultados importantes en este marco.

3.1. Mónadas y comónadas sobre una categoría.

Como vimos en el capítulo anterior, dada cualquier categoría $\mathcal{C}$, los endofunctores de $\mathcal{C}$ forman una categoría monoidal con la composición: $(End(\mathcal{C}), \circ, id_{\mathcal{C}})$ y por lo tanto tiene sentido considerar monoides y comonoides en dicha categoría.

Definición 3.1. *Una **mónada sobre** $\mathcal{C}$ es un monoide (F, μ, η) en $End(\mathcal{C})$. Explícitamente, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un functor, $\mu : F^2 \Longrightarrow F$ y $\eta : I \Longrightarrow F$ son transformaciones naturales y los* *siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd} F^3 \arrow[r, "\mu F"] \arrow[d, "F\mu"] & F^2 \arrow[d, "\mu"] \\ F^2 \arrow[r, "\mu"] & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "\eta F"] \arrow[dr, equal] & F^2 \arrow[d, "\mu"] & F \arrow[l, "F\eta"'] \arrow[dl, equal] \\ & F & \end{tikzcd}$$

Un morfismo de mónadas (sobre $\mathcal{C}$) $\varphi : (F, \mu, \eta) \to (F', \mu', \eta')$ es un morfismo de monoides en $End(\mathcal{C})$, es decir una transformación natural $\varphi : F \Longrightarrow F'$ tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} F^2 \arrow[rr, "\mu"] \arrow[d, "F\varphi"] & & F \arrow[d, "\varphi"] \\ FF' \arrow[r, "\varphi F'"] & F'F' \arrow[r, "\mu'"] & F' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\eta'"] & F \arrow[d, "\varphi"] \\ & F' \end{tikzcd}$$

Definición 3.2. *De manera dual, decimos que un comonoide en $End(\mathcal{C})$ es una* ***comónada sobre*** *$\mathcal{C}$. Explícitamente, se trata de una terna (G, δ, ε) donde $G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un functor y $\delta : G \Longrightarrow G^2$ y $\varepsilon : G \Longrightarrow I$ son transformaciones naturales tales que los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"] & G^2 \arrow[d, "G\delta"] \\ G^2 \arrow[r, "\delta G"] & G^3 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} IoG & G^2 \arrow[l, "\varepsilon G"'] \arrow[r, "G\varepsilon"] & GoI \\ & G \arrow[u, "\delta"] \arrow[ul, equal] \arrow[ur, equal] & \end{tikzcd}$$

Un morfismo de comónadas *$\varphi : (G, \delta, \varepsilon) \to (G', \delta', \varepsilon')$ es una transformación natural $\varphi : G \Longrightarrow G'$ tal que los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[d, "\delta"] & & G' \arrow[d, "\delta'"] \\ G^2 \arrow[r, "G\varphi"] & GG' \arrow[r, "\varphi G'"] & G'^2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I & G \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ & G' \arrow[ul, "\varepsilon'"] \end{tikzcd}$$

Ejemplos 5. *Mónadas y comónadas*

1. *Sea* (M, m, u) *un monoide en una categoría monoidal (que asumimos estricta para evitar tecnicismos)* $(\mathcal{C}, \otimes, I)$. *Se tiene una mónada dada por el functor*

$$M \otimes \_ : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

y las transformaciones naturales definidas por los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} M \otimes (M \otimes X) \arrow[r, equal] \arrow[dr, "\mu_X"'] & (M \otimes M) \otimes X \arrow[d, "m \otimes id_X"] \\ & M \otimes X, \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] \arrow[dr, "\eta_X"'] & I \otimes X \arrow[d, "u \otimes id_X"] \\ & M \otimes X. \end{tikzcd}$$

2. *El ejemplo anterior puede completarse de la siguiente manera. Consideremos* X *un objeto cualquiera en una categoría monoidal* $(\mathcal{C}, \otimes, I)$, *y consideramos el functor* $L_X : \mathcal{C} \to \mathcal{C}, L_X(Y) = X \otimes Y$, *se tiene el siguiente resultado:*

   - L_X *es una mónada sobre* $\mathcal{C}$ *si y sólo si* X *es un monoide en* $(\mathcal{C}, \otimes, I)$. *El ejemplo anterior muestra cómo definir la estructura de mónada de* L_X *a partir de la de monoide de* X. *Recíprocamente, si tenemos que* (L_X, μ, η) *es una mónada, definimos* $m : X \otimes X \to X$ *como* $m = \mu_I : L_X^2(I) \to L_X(I)$, *y* $u : I \to X$ *como* $\eta_I : I \to L_X(I)$.
   - *De manera dual, se prueba que* L_X *es una comónada sobre* $\mathcal{C}$ *si y sólo si* X *es un comonoide en* $(\mathcal{C}, \otimes, I)$.

3. *Mónada* Powerset*: consideremos el functor* $\mathcal{P} : Set \to Set$ *que a un conjunto* X *le asocia su conjunto de partes* $\mathcal{P}(X)$ *y a una función* $f : X \to Y$ *le asocia* $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ *definida por* $\mathcal{P}(f)(S) = f(S), \forall S \subseteq X$. *Si*

$$\begin{aligned} &\mu_X : \mathcal{P}^2(X) \to \mathcal{P}(X), \quad &&\mu_X(\{S_i\}, i \in I) = \textstyle\bigcup_{i \in I} S_i, \\ &\eta_X : X \to \mathcal{P}(X), &&\eta_X(a) = \{a\}, \end{aligned}$$

se tiene que $(\mathcal{P}, \mu, \eta)$ *es una mónada sobre Set.*

4. *Mónada de listas: consideremos el functor* $\mathcal{L} : Set \to Set$, *donde* $\mathcal{L}(X)$ *es el conjunto de listas finitas de elementos de* X *y* $\mathcal{L}(f)[a_1 a_2 ... a_n] = [f(a_1) f(a_2) ... f(a_n)]$.
Resulta que $(\mathcal{L}, \mu, \eta)$ *es una mónada con:*

$$\begin{aligned} &\mu_X : \mathcal{L}^2(X) \to \mathcal{L}(X), \quad &&\mu_X([l_1, l_2, ..., l_m]) = [l_1 l_2 ... l_m] \ \textit{(la concatenación)}, \\ &\eta_X : X \to \mathcal{L}(X), &&\eta_X(a) = [a]. \end{aligned}$$

5. *Como no se puede definir una función con codominio vacío, los functores $\mathcal{P}$ y $\mathcal{L}$ no admitirán estructura de comónada (puesto que no se podrá definir una counidad). El siguiente ejemplo considera una estructura de comónada en Set.*

6. *Consideremos el functor $S : Set \to Set$ que a un conjunto X le asocia el conjunto S(X) de todas las sucesiones con términos en X. El functor S es una comónada en Set con la siguiente estructura:*

$$\begin{aligned} &\delta_X : SX \to SSX, && \delta_X((x_i)_{i\in N}) = \{(x_i)_i; (x_{2i})_i; (x_{3i})_i ...\}, \\ &\varepsilon_X : SX \to X, && \varepsilon_X((x_i)_{i\in N}) = x_1. \end{aligned}$$

   Este es un ejemplo de que si bien no hay comonoides no triviales en Set, sí hay comónadas interesantes.

7. *El functor $\mathcal{L}^+ : Set \to Set$ que a un conjunto no vacío X le asocia el conjunto de sus listas finitas no vacías y deja fijo el conjunto vacío es una mónada y una comónada en Set. La estructura de mónada está dada por la concatenación. La estructura de comónada es la siguiente:*

$$\begin{aligned} &\delta_X : \mathcal{L}^+X \to \mathcal{L}^+\mathcal{L}^+X, && \delta_X([x_1x_2...x_m]) = [[x_1x_2...x_m], [x_2...x_m], ..., [x_m]], \\ &\varepsilon_X : \mathcal{L}^+X \to X, && \varepsilon_X([x_1x_2...x_m]) = x_1 \end{aligned}$$

   Este ejemplo puede encontrarse en [13].

Observaciones 1.

1. *Dado el functor $\mathcal{L}$ se puede considerar $\mathcal{L}^+$ para que resulte una comónada, sin embargo al pensar en algo similar para el functor $\mathcal{P}$ no se consigue el mismo resultado.*

2. *Toda mónada F en Set que proviene de un monoide verifica $F(\emptyset) = \emptyset$. Se deduce que la mónada $\mathcal{P}$ no proviene de un monoide.*

3.2. Álgebras sobre una mónada y coálgebras sobre una comónada

Definición 3.3. *Dada (F, μ, η) una mónada en una categoría $\mathcal{C}$, un* ***álgebra sobre*** *(F, μ, η) (o simplemente una F-álgebra) es un par (X, x) donde $X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ y $x : FX \to X \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$*

son tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$
\begin{tikzcd}
F^2X \arrow[r, "Fx"] \arrow[d, "\mu_X"] & FX \arrow[d, "x"] \\
FX \arrow[r, "x"] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, equal, "id_X"] & FX \arrow[d, "x"] \\
& X
\end{tikzcd}
$$

De manera dual, una ***coálgebra sobre una comónada*** (G, δ, ε) *es un par (X, x) donde* $X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ *y* $x : X \to GX \in \mathcal{A}$ *son tales que los siguientes diagramas conmutan:*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "x"] \arrow[d, "x"] & GX \arrow[d, "Gx"] \\
GX \arrow[r, "\delta_X"] & G^2X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X & GX \arrow[l, "\epsilon_X"'] \\
& X \arrow[u, "x"] \arrow[ul, equal, "id_X"]
\end{tikzcd}
$$

Definición 3.4. *Dadas* $(X, x), (Y, y)$ *dos* F*-álgebras, decimos que* $f : X \to Y$ *en* $\mathcal{C}$ *es* ***un morfismo de*** F***-álgebras*** *si el siguiente diagrama conmuta:*

$$
\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "x"] \arrow[d, "Ff"] & X \arrow[d, "f"] \\
FY \arrow[r, "y"] & Y
\end{tikzcd}
$$

De manera dual un ***morfismo de G-coálgebras*** *es un morfismo en* $\mathcal{C}$ *tal que* $y \circ f = Gf \circ x$

Dada una mónada F, la categoría de F-álgebras y morfismos de F-álgebras se llama **Categoría de Eilenberg-Moore asociada a la mónada** F y se denota por $\mathcal{C}_F$. Dada una comónada G, la categoría de G-coálgebras y morfismos de G-coálgebras de llama **Categoría de Eilenberg-Moore asociada a la comónada** G y se denota por $\mathcal{C}^G$.

Observación 2. *Hay otra categoría asociada naturalmente a una mónada* F *(o a una comónada* G*) que se llama categoría de Kleisli y que es dual en un sentido que se entenderá en la Observación 3.*

Describimos ahora las categorías de Eilenberg-Moore correspondientes a las mónadas y comónadas de los ejemplos 5.

Ejemplos 6.

1. *Si A es una $\Bbbk$-álgebra, las álgebras sobre la mónada L_A son los A-módulos a izquierda y las álgebras sobre la mónada R_A son los A-módulos a derecha.*
   La categoría de Eilenberg-Moore se completa con los morfismos de A-módulos, a izquierda o derecha respectivamente.

2. *De manera dual, si C es una $\Bbbk$-coálgebra, las coálgebras sobre la mónada L_C son los C-comódulos a izquierda y las coálgebras sobre la mónada R_C son los C-comódulos a derecha. Los morfismos son morfismos de C-comódulos, a izquierda o derecha respectivamente.*

3. *Las álgebras sobre la mónada $\mathcal{P}$ son los órdenes parciales superiormente completos (es decir tales que todo subconjunto tiene supremo).*
   En efecto, si (X, h) es una $\mathcal{P}$-álgebra, definiendo que $x \leq y$ si y solo si $h\{x, y\} = x$ obtenemos un orden parcial en X y se puede verificar fácilmente que todo conjunto Y incluido en X admite un supremo, dado por $supY = h(Y)$. Recíprocamente, si $(X, \leq)$ es un orden parcial superiormente completo, (X, h) resulta una $\mathcal{P}$-álgebra definiendo $h : P(X) \to X$ como $h(Y) = sup(Y)$ para todo subconjunto Y de X.
   Los morfismos son las funciones monótonas que preservan supremos.

4. *Las álgebras sobre la mónada de listas $\mathcal{L}$ son los monoides.*
   Si (X, h) es una $\mathcal{L}$-álgebra, definimos $x \cdot y = h[x, y]$ obteniendo que $(X, \cdot)$ es un monoide en Set cuyo neutro es el conjunto vacío. Recíprocamente, si $(X, \cdot)$ es un monoide en Set resulta que (X, h) es una $\mathcal{L}$-álgebra definiendo $h[x_1, x_2, ..., x_n] = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$.
   Los morfismos son los morfismos de monoides.

5. *Las coálgebras sobre la comónada $\mathcal{S}$ definida en Set son conjuntos equipados con una acción del monoide multiplicativo de enteros positivos.*
   Dada una acción $\cdot : \mathbb{N}^+ \times X \to X$, denotando $m \cdot x = x^m$ se tiene que $x^1 = x$ y $(x^m)^n = x^{mn}$. Si definimos $\rho : X \to S(x)$ como $\rho(x) = (x, x^2, x^3, ..., x^n, ..)$ resulta que (X, ρ) es una $\mathcal{S}$-coálgebra.
   Recíprocamente si (X, ρ) es una $\mathcal{S}$-coálgebra, definimos $\cdot : \mathbb{N}^+ \times X \to X$ mediante $m \cdot x = (\rho(x))_m$ resulta que $(X, \cdot)$ es un conjunto con una acción del monoide multiplicativo $\mathbb{N}^+$.
   Los morfismos son funciones que preservan la acción.

6. *Adaptando lo que pasa para $\mathcal{L}$, se tiene que las álgebras sobre la mónada $\mathcal{L}^+$ son los*

semigrupos. Los morfismos son los morfismos de semigrupos.

Por otro lado, las coálgebras sobre la comónada $\mathcal{L}^+$ son los bosques de árboles con raiz. En efecto, supongamos que (X, ρ) es una $\mathcal{L}^+$-coálgebra; se debe cumplir para todo $x \in X$ que $\delta(\rho(x)) = (\mathcal{L}^+\rho)(\rho(x))$. Poniendo $\rho(x) = [x_1, x_2, ..., x_n]$ resulta $\rho(x_1) = [x_1, x_2, ..., x_n], ..., \rho(x_n) = [x_n]$. Por otro lado, como $\varepsilon(\rho(x)) = x$ resulta que $x_1 = x$ y por lo tanto $\rho(x) = [x, x_2, ..., x_n]$. Se puede interpretar $\rho(x)$ como parte de un árbol donde $x_2, ..., x_n$ son los predecesores estrictos de x. En particular, un tal x_n no tiene predecesores estrictos. El conjunto $R_0 = \{x \in X / \rho(x) = [x]\}$ es entonces no vacío porque X lo es (alcanza con tomar un elemento $x \in X$ y considerar el último elemento de la lista $\rho(x)$). Si $r \in R_0$ consideramos $R_1^r = \{x \in X / \rho(x) = [x, r]\}$ y continuando el procedimeinto podemos considerar $R_i, i \geq 1$ el conjunto de elementos del árbol de raiz r que se encuentran en el nivel i, obteniendo entonces que se trata de un bosque de árboles con raíces en R_0.

Recíprocamente, si X es un bosque de árboles con raiz, podemos definir una $\mathcal{L}^+$-coálgebra de la siguiente forma: $\rho : X \to \mathcal{L}^+(X)$ es la función que a $x \in X$ le asocia la lista que ordena los predecesores del árbol al cuál x pertenece (esta lista comienza en x y termina en la raiz de dicho árbol). Dicha lista de antecesores es claramente no vacía y finita.

Los morfismos en esta categoría son los morfismos de grafos dirigidos que preservan raíces.

3.3. Adjunciones de Eilenberg-Moore

Observar que si (F, μ, η) es una mónada en $\mathcal{C}$, dado $X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ resulta que el par (FX, μ_X) es una F-álgebra. Las F- álgebras de esta forma se dicen libres.

Definición 3.5. *Llamamos **functor libre** de la mónada F al functor $\mathcal{L}_F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_F$ definido por $\mathcal{L}_F(X) = (FX, \mu_X)$ en objetos y $\mathcal{L}_F(f) = F(f)$ en morfismos.*
La naturalidad de μ garantiza que $F(f)$ es un morfismo de F-álgebras y por lo tanto el functor libre está bien definido.

Definición 3.6. *El **functor de olvido** es el functor $U_F : \mathcal{C}_F \to \mathcal{C}$ definido por $U_F(X, x) = X$ en objetos y $U_F(f) = f$ en morfismos.*

Proposición 3.1. *Si (F, μ, η) es una mónada sobre $\mathcal{C}$, el functor libre $\mathcal{L}_F$ es adjunto a izquierda del functor de olvido U_F. Además $U_F\mathcal{L}_F = F$.*

Demostración: Basta con definir dos transformaciones naturales, $\varepsilon : \mathcal{L}_F U_F \to id_{\mathcal{C}_F}$ y $\bar{\eta} : id_{\mathcal{C}} \to U_F \mathcal{L}_F$ que verifiquen las igualdades triangulares siguientes (notamos L para $\mathcal{L}_F$ y U para U_F para descargar la notación:

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "L\bar{\eta}"] \arrow[dr, equal, "id"'] & LUL \arrow[d, "\varepsilon L"] \\
 & L
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\bar{\eta}U"] \arrow[dr, equal, "id"'] & ULU \arrow[d, "U\varepsilon"] \\
 & U
\end{tikzcd}
$$

Si tomamos η la unidad de la mónada y definimos $\bar{\eta}(X) : X \to LX = (FX, \mu_X)$ como el propio η, y por otro lado tomamos $\varepsilon : (FX, \mu_X) = LU(X, x) \to X$ definida por $\varepsilon_{(X,x)} = x$ para cada $(X, x) \in \mathcal{C}_F$, resulta que ambas son transformaciones naturales. El hecho de que (X, x) sea una F-álgebra garantiza que x es un morfismo de F-álgebras y por lo tanto que ε está bien definido.

El diagrama de unidad de la mónada F implica la primera igualdad triangular y el diagrama de compatibiliad de la unidad de la mónada con la estructura de F-álgebra de (X, x) implica la segunda.

$\square$

Observación 3. *1. La adjunción de la Proposición 3.1 se llama **adjunción de Eilenberg Moore**.*

2. Se tiene una adjunción de Eilenberg-Moore sobre comónadas. Más explícitamente:

- *si (G, δ, ε) es una comónada sobre $\mathcal{C}$, se define el **functor libre** $\mathcal{L}^G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^G$ como $\mathcal{L}^G(X) = (GX, \delta_X)$ en objetos y $\mathcal{L}^G(f) = G(f)$ en morfismos. También se define el **functor de olvido** $U^G : \mathcal{C}^G \to \mathcal{C}$ como $U^G(X, x) = X$ en objetos, $U^G(f) = f$ en morfismos,*
- *$\mathcal{L}^G$ es adjunto a derecha de U^G,*
- *$U^G \mathcal{L}^G = G$.*

3. La categoría de Kleisli (mencionada en la Observación 2) asociada a una mónada F (o a una comónada G) también se vincula con $\mathcal{C}$ mediante una adjunción que da lugar a la mónada F (respectivamente a la comónada G).

4. Si se considera, dada una mónada F, la categoría de todas las adjunciones $L \dashv U \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}$ tales que $LU = F$ con morfismos convenientes, se puede probar que la adjunción de Eilenberg-Moore es un objeto terminal mientras que la de Kleisli es un objeto inicial.

5. *De manera dual, para el caso de una comónada* G, *si se consideran las adjunciones* $U \dashv L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *tales que* $UL = G$, *se tiene que la adjunción de Kleisli resulta un objeto terminal y la de Eilenberg-Moore* $U^G \dashv \mathcal{L}^G$ *uno inicial.*

Capítulo 4

Generalización al contexto monoidal no trenzado

Una posible generalización de la noción de bimonoide en una categoría trenzada, asume que $\mathcal{C}$ es una categoría monoidal. Si consideramos un objeto B en una categoría monoidal, el functor L_B es una mónada si y sólo si B es un monoide; además, en el caso trenzado, dicho functor es comonoidal si y sólo si B es un comonoide; más aún, relaciones naturales de compatibilidad entre la estructura comonoidal y la de mónada se corresponden con la condición de compatibilidad que da una estructura de bimonoide en B.

En este capítulo, trataremos esta generalización.

4.1. Mónadas comonoidales

Sean $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}})$ y $(\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, I_{\mathcal{D}})$ dos categorías monoidales estrictas. Recordamos (ver Definición 2.8) que un functor comonoidal entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ es una terna (F, φ, φ_0) tal que $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es functor, $\varphi : F\otimes \Rightarrow \otimes(F \times F)$ es una transformación natural, $\varphi_0 : F(I_{\mathcal{C}}) \to I_{\mathcal{D}}$ es una arista en $\mathcal{D}$ y para todo $X, Y \in \mathcal{C}$ los siguientes diagramas conmutan

-
$$\begin{tikzcd}
F(X \otimes Y \otimes Z) \arrow[r, "\varphi_{X\otimes Y,Z}"] \arrow[d, "\varphi_{X,Y\otimes Z}"] & F(X \otimes Y) \otimes F(Z) \arrow[d, "\varphi_{X,Y}\otimes id_{F(Z)}"] \\
F(X) \otimes F(Y \otimes Z) \arrow[r, "id_{F(X)}\otimes\varphi_{Y,Z}"] & F(X) \otimes F(Y) \otimes F(Z)
\end{tikzcd}$$

-
$$\begin{tikzcd}
F(X) = F(X \otimes I_{\mathcal{C}}) \arrow[r, "\varphi_{X,I_{\mathcal{C}}}"] \arrow[dr] & F(X) \otimes F(I_{\mathcal{C}}) \arrow[d, "id_{F(X)}\otimes\varphi_0"] \\
& F(X) \otimes I_{\mathcal{D}}
\end{tikzcd}$$

-
$$\begin{tikzcd}
F(X) = F(I_{\mathcal{C}\otimes X}) \arrow[r, "\varphi_{I_{\mathcal{C}},X}"] \arrow[dr] & F(I_{\mathcal{C}}) \otimes F(X) \arrow[d, "\varphi_0\otimes id_{F(X)}"] \\
& I_{\mathcal{D}} \otimes F(X)
\end{tikzcd}$$

Definición 4.1. *Si $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}}), (\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, I_{\mathcal{D}})$ son categorías monoidales y $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ son functores comonoidales, decimos que $T : (F, \varphi, \varphi_0) \to (G, \psi, \psi_0)$ es una* ***transformación natural de functores comonoidales*** *si los siguientes diagramas conmutan para X, Y objetos cualesquiera de $\mathcal{C}$:*

$$\begin{tikzcd}
F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \arrow[r, "T_{X\otimes_{\mathcal{C}}Y}"] \arrow[d, "\varphi_{X,Y}"] & G(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \arrow[d, "\psi_{X,Y}"] \\
F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) \arrow[r, "T_X\otimes_{\mathcal{D}}T_Y"] & G(X) \otimes_{\mathcal{D}} G(Y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(I_{\mathcal{C}}) \arrow[r, "T_{I_{\mathcal{C}}}"] \arrow[dr, "\varphi_0"] & G(I_{\mathcal{C}}) \arrow[d, "\psi_0"] \\
& I_{\mathcal{D}}
\end{tikzcd}$$

Observación 4. *1. Si (F, φ, φ_0) es un endofunctor comonoidal de $(\mathcal{C}, \otimes, I)$, entonces el functor $F^2 : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ también es comonoidal tomando*

$$(\varphi_{FX,FY} \circ F(\varphi_{X,Y})) : F^2(X \otimes Y) \to F^2(X) \otimes F^2(Y) \quad y \quad \varphi_0 \circ F(\varphi_0) : F^2(I) \to I.$$

2. *El endofunctor $id_{\mathcal{C}}$ es trivialmente comonoidal (la transformación natural identidad y el morfismo identidad le dan dicha estructura).*

3. *De manera análoga se prueba que F^2 es un funtor monoidal si F lo es y que $id_{\mathcal{C}}$ es trivialmente monoidal (recordar la Definición 2.8 de functor monoidal).*

Definición 4.2. *Decimos que $(F, \mu, \eta, \varphi, \varphi_0)$ es una **mónada comonoidal** en $\mathcal{C}$ si:*

- *(F, μ, η) es una mónada en $\mathcal{C}$*
- *(F, φ, φ_0) es un functor comonoidal*
- *μ, η son transformaciones naturales de functores comonoidales.*

Ejemplos 7. 1. *Si B es una $\Bbbk$-álgebra entonces $B \otimes \_ : Vect_{\Bbbk} \to Vect_{\Bbbk}$ es una mónada comonoidal. En efecto, esto es un caso particular del ejemplo siguiente.*

2. *Si B es un bimonoide en una categoría monoidal trenzada $(\mathcal{C}, \otimes, I, \tau)$ entonces el functor $B \otimes \_ : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es una mónada comonoidal: la estructura de mónada inducida por la de monoide ya la vimos en el capítulo 3. Por otro lado, definimos $\varphi_{X,Y} : B \otimes (X \otimes Y) \to B \otimes X \otimes B \otimes Y$ como $\varphi_{X,Y} = (id_B \otimes \tau_{B,X} \otimes id_Y) \circ (\Delta_B \otimes id_X \otimes id_Y)$ y definimos $\varphi_0 : B \otimes I \to I$ como la counidad ε del bimonoide.*

3. *La mónada $\mathcal{P} : Set \to Set$ admite una estrutura comonoidal dada por*

$$\varphi_{X,Y} : \mathcal{P}(X \times Y) \to \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y), \quad \varphi_{X,Y}(S \times T) = (S, T)$$

y $\varphi_0 : \mathcal{P}(\{*\}) \to \{*\}$ la única posible.

Observación 5. *De manera dual, se define **comónada monoidal** como una quíntupla $(G, \delta, \varepsilon, \psi, \psi_0)$ donde (G, δ, ε) es una comónada, (G, ψ, ψ_0) es un functor monoidal y diagramas duales a los de arriba conmutan.*
De hecho si B es un comonoide en una categoría trenzada, se tiene también que el functor $B \otimes \_$ es una comónada monoidal, por lo que esta noción también sirve de generalización, y de hecho las teorías (de mónada comonoidal y comónada monoidal) son análogas.

4.1.1. Estructura monoidal heredada

El siguiente resultado generaliza el resultado conocido en biálgebras que afirma que si M, N son módulos sobre una $\Bbbk$- biálgebra B, entonces $M \otimes_{\Bbbk} N$ también lo es.

Proposición 4.1. *Si* $(F, \mu, \eta, \varphi, \varphi_0)$ *es una mónada comonoidal en una categoría* $\mathcal{C}$ *podemos darle estructura monoidal a* $\mathcal{C}_F$ *definiendo el bifunctor* $\otimes^F$ *de la siguiente forma:*

$$(X, x) \otimes^F (Y, y) = (X \otimes Y, x \otimes y \circ \varphi_{X,Y}) \quad y \quad f \otimes^F g = f \otimes g$$

Demostración: Si $I^\varphi = (I, \varphi_0)$ resulta que $(\mathcal{C}_F, \otimes^F, I^\varphi)$ es monoidal. En efecto, $\otimes^F$ es un bifunctor porque $\otimes$ lo es, $(X \otimes Y, (x \otimes y) \circ \varphi_{X,Y})$ es una F-álgebra porque los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
F^2(X \otimes Y) \arrow[r, "F(\varphi_{X,Y})"] \arrow[dd, "\mu_{X \otimes Y}"] & F(FX \otimes FY) \arrow[r, "F(x \otimes y)"] \arrow[d, "\varphi_{FX \otimes FY}"] & F(X \otimes Y) \arrow[d, "\varphi_{X,Y}"] \\
& F^2X \otimes F^2Y \arrow[r, "Fx \otimes Fy"] \arrow[d, "\mu_X \otimes \mu_Y"] & FX \otimes FY \arrow[d, "x \otimes y"] \\
F(X \otimes Y) \arrow[r, "\varphi_{X,Y}"] & FX \otimes FY \arrow[r, "x \otimes y"] & X \otimes Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \otimes Y \arrow[r, "\eta_{X \otimes Y}"] \arrow[dr, "\eta_X \otimes \eta_Y"] \arrow[ddr, "id_{X \otimes Y}"'] & F(X \otimes Y) \arrow[d, "\varphi_{X,Y}"] \\
& FX \otimes FY \arrow[d, "x \otimes y"] \\
& X \otimes Y
\end{tikzcd}$$

En el primer diagrama, el cuadrado superior conmuta porque ψ es natural, el inferior debido a que (X, x) e (Y, y) son F-álgebras. El rectángulo porque que μ es una transformación natural comonoidal. En el segundo diagrama el triángulo superior conmuta porque η comonoidal y el inferior porque que x e y son F-acciones. Para ver que efectivamente se define una categoría monoidal, falta explicitar las restricciones de asociatividad y de unidad. Lo que haremos es probar que las restricciones de C se heredan en C_F.

Llamemos a, l, r a las restricciones de asociatividad y de unidad en C. En el siguiente diagrama, el rectángulo superior conmuta por la condición de asociatividad que verifica φ y el inferior por la naturalidad de a.

$$\begin{tikzcd}
F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[r, "F(a_{X,Y,Z})"] \arrow[d, "\varphi_{X \otimes Y, Z}"] & F(X \otimes (Y \otimes Z)) \arrow[d, "\varphi_{X, Y \otimes Z}"] \\
F(X \otimes Y) \otimes FZ \arrow[d, "\varphi_{X,Y} \otimes id_Z"] & FX \otimes F(Y \otimes Z) \arrow[d, "id_{FX} \otimes \varphi_{Y,Z}"] \\
(FX \otimes FY) \otimes FZ \arrow[r, "a_{FX,FY,FZ}"] \arrow[d, "(x \otimes y) \otimes z"] & FX \otimes (FY \otimes FZ) \arrow[d, "x \otimes (y \otimes z)"] \\
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a_{X,Y,Z}"] & X \otimes (Y \otimes Z)
\end{tikzcd}$$

Se deduce que $a_{X,Y,Z}$ es morfismo de F-álgebras para toda terna $(X,x),(Y,y),(Z,z)$. De manera similar se prueba que pra toda F-álgebra (X,x), l_X y r_X son morfismos de F-álgebras.

$\square$

Observaciones 2.

1. *Claro está que el resultado anterior tiene su versión para una comónada monoidal y su categoría de coálgebras, que generaliza el hecho de que si M, N son comódulos sobre una $\Bbbk$-biálgebra B, entonces $M \otimes_{\Bbbk} N$ también lo es.*
   En la Sección 5.4 del Capítulo 5, probamos la Proposición 5.4 usando la versión para comónadas monoidales, para ilustrar cómo quedan las F-acciones en este contexto.

2. *En [3] se define cuándo una mónada comonoidal es de Hopf y se prueba una versión general del Teorema Fundamental de Módulos de Hopf. Más precisamente: dada una mónada comonoidal $(T,\mu,u,\varphi,\varphi_0)$,se puede considerar el comonoide $C = (T(I),\varphi_{I,I},\varphi_0)$. A partir de ahí, se define un módulo de Hopf como un objeto con estructura simultánea de T-álgebra y de comódulo sobre C con relaciones de compatibilidad naturales. Son estos objetos los que forman la categoría de T-módulos de Hopf que resulta, bajo ciertas restricciones, monoidalmente equivalente a la categoría original T.*

Capítulo 5

Generalización al contexto no monoidal: leyes distributivas y λ-bimónadas

Otra noción esperable en el intento de generalizar el concepto de bimonoide en una categoría trenzada, sería la de un endofunctor T de una categoría $\mathcal{C}$ con estructura de mónada y comónada con cierta relación de compatiblidad. Una noción de compatibilidad natural es pedir por ejemplo que las transformaciones naturales $\delta : T \Rightarrow T^2, \varepsilon : T \Rightarrow 1_{\mathcal{C}}$ que definen la estructura de comónada, sean morfismos de mónadas.

Observemos que, si T es mónada y comónda, entonces T^2 tiene estructura de mónada sobre $\mathcal{C}$ que viene dada porque T es mónada y $\varepsilon : T \Rightarrow I$ es transformación natural (ver prueba en [14]), pero esta no es una estructura de mónada interesante en el sentido de que no se desprende solamente a partir de la estructura de mónada de T. En otras palabras, que T sea un monoide en $End(\mathcal{C})$ no implica que T^2 lo sea. Esto sería posible por ejemplo si $End(\mathcal{C})$ fuera trenzada, pero esta condición es muy restrictiva. Podría sustituirse por la existencia de algún tipo de estructura de Yang-Baxter para T que en algún sentido respete el producto, el coproducto, la unidad y la counidad (esto es lo que se llama *pretrenza local*, ver Definición 5.5). También esta condición parece muy exigente y en [10] los autores proponen la existencia de lo que se conoce como *ley distributiva de mónada a comónada*, que ya había sido presentada en [9] para combinar una estructura de mónada con una de comónada. Esta ley es más laxa y su existencia no implica en general que T^2 sea una mónada. Sin embargo, permite dar una noción satisfactoria de functor que combina la estructura de mónada y la de comónada. El paradigma viene de generalizar de que un bimonoide en una categoría tensorial trenzada puede verse como un bimódulo sobre símismo.

En este capítulo empezamos por presentar las leyes distributivas en la sección 5.1 y ver que son un buen contexto para trabajar con bimódulos. Terminamos el capítulo dando, en la sección 5.3, la definición de bimónada respecto de una ley distributiva y mostramos que los bimonoides son un ejemplo. Además, en la sección 5.2 presentamos un resultado que vincula las nociones del capítulo anterior con las leyes distributivas.

5.1. Leyes distributivas y levantamientos

En esta sección trabajaremos siempre con $\mathcal{C}$ una categoría cualquiera.
Las leyes distributivas permiten combinar estructuras de mónadas y/o comónadas. Presentamos sólo las conocidas como leyes distributivas de mónada a comónada, que llamaremos simplemente *leyes distributivas*.

Definición 5.1. *Dada (F, μ, η) una mónada y (G, δ, ϵ) una comónada sobre una categoría $\mathcal{C}$, llamamos* **ley distributiva de la mónada** F **a la comónada** G *a una transfomación natural $\lambda : FG \to GF$ que haga conmutar los siguientes diagramas:*

$$(I)\quad \begin{tikzcd} FFG \arrow[r, "F\lambda"] \arrow[d, "\mu G"] & FGF \arrow[r, "\lambda F"] & GFF \arrow[d, "G\mu"] \\ FG \arrow[rr, "\lambda"] & & GF \end{tikzcd} \qquad (II)\quad \begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\eta G"] \arrow[dr, "G\eta"'] & & FG \arrow[dl, "\lambda"] \\ & GF & \end{tikzcd}$$

$$(III)\quad \begin{tikzcd} FG \arrow[r, "F\delta"] \arrow[d, "\lambda"] & FGG \arrow[r, "\lambda G"] & GFG \arrow[d, "G\lambda"] \\ GF \arrow[rr, "\delta F"] & & GGF \end{tikzcd} \qquad (IV)\quad \begin{tikzcd} FG \arrow[rr, "F\epsilon"] \arrow[dr, "\lambda"] & & F \\ & GF \arrow[ur, "\epsilon F"] & \end{tikzcd}$$

Una tranformación natural $\lambda : GF \Rightarrow FG$ que verifica axiomas análogos se dice **ley distributiva de la comónada** G **a la mónada** F*. Asimismo, se definen leyes distributivas de mónada a mónada y de comónada a comónada.*

A modo de ejemplo enunciamos el diagrama análogo a (I) para una ley distributiva de *una comónada G a una mónada F:*

$$\begin{tikzcd} GFF \arrow[r, "\lambda F"] \arrow[d, "G\mu"] & FGF \arrow[r, "F\lambda"] & FFG \arrow[d, "\mu G"] \\ GF \arrow[rr, "\lambda"] & & FG \end{tikzcd}$$

Ejemplo 2.

1. *El ejemplo clásico proviene de una pretrenza local y será tratado en la Sección 5.3.*

2. *Si $(T, \mu, \eta, \varphi, \varphi_0)$ es una mónada comonoidal sobre una categoría monoidal $(C, \otimes, I)$, se tiene que:*

    - *TI admite naturalmente una estructura de comonoide en $\mathcal{C}$ y por lo tanto el functor $TI \otimes \_$ es una comónada sobre $\mathcal{C}$,*
    - *Existe una ley distributiva de la mónada T a la comónada $TI \otimes \_$. (Ver [11])*

La prueba de la siguiente Proposición construye una correspondencia biunívoca entre leyes distributivas y levantamientos via el functor de olvido de la construcción de Eilenberg Moore (ver Definición 2.6).

Proposición 5.1. *Dadas (F, μ, η) una mónada y $(G, \delta, \varepsilon,)$ una comónada en $\mathcal{C}$ son equivalentes:*

1. *Existe $\lambda : FG \to GF$ una ley distributiva de la mónada F a la comónada G*

2. *Existen $\bar{G} : \mathcal{C}_F \to \mathcal{C}_F$ levantamiento de G via U_F y $\bar{\delta}, \bar{\varepsilon}$ levantamientos respectivos de δ y ε tales que $(\bar{G}, \bar{\delta}, \bar{\varepsilon})$ es una comónada en $\mathcal{C}_F$.*

3. *Existen $\underline{F} : \mathcal{C}^G \to \mathcal{C}^G$ levantamiento de F via U_G y $\underline{\mu}, \underline{\eta}$ levantamientos respectivos de μ y η tales que $(\underline{F}, \underline{\mu}, \underline{\eta})$ es una mónada en $\mathcal{C}^G$.*

Demostración:

- $1 \Rightarrow 2$:
  Sean $\lambda : FG \to GF$ una ley distributiva y $(X, x) \in \mathcal{C}_F$. Definimos $\bar{G}(X, x) = (GX, G(x) \circ \lambda_X)$. Que $\bar{G}$ es un levantamiento de G es claro pues a nivel de objetos $\bar{G}$ y G coinciden. Para ver que $\bar{G}(X, x) \in \mathcal{C}_F$ alcanza con observar que $G(x) \circ \lambda_X : FGX \to GX$ es una

F-acción, es decir que los siguientes diagramas conmutan:

$$
(i)\quad
\begin{tikzcd}
F^2GX \arrow[r, "F(G(x)\lambda_X)"] \arrow[d, "\mu_{GX}"'] & FGX \arrow[d, "G(x)\lambda_X"] \\
FGX \arrow[r, "G(x)\lambda_X"] & GX
\end{tikzcd}
\qquad
(ii)\quad
\begin{tikzcd}
GX \arrow[r, "\eta_{GX}"] \arrow[dr, equal, "id_{GX}"'] & FGX \arrow[d, "G(x)\lambda_X"] \\
& GX
\end{tikzcd}
$$

Para probar que el diagrama (i) es conmutativo, lo escribimos de la siguiente forma (se puede hacer porque λ es una transformación natural, por lo que para el morfismo x resulta que: $\lambda_X \circ FG(x) = GF(x) \circ \lambda_{FX}$).

$$
\begin{tikzcd}
FFGX \arrow[r, "F\lambda_X"] \arrow[d, "\mu_{GX}"] & FGFX \arrow[r, "\lambda_{FX}"] & GFFX \arrow[r, "GF(x)"] \arrow[d, "G\mu_X"] & GFX \arrow[d, "G(x)"] \\
FGX \arrow[rr, "\lambda_X"] & & GFX \arrow[r, "G(x)"] & GX
\end{tikzcd}
$$

El rectángulo de la izquierda es conmutativo por ser λ una ley distributiva. El rectángulo de la derecha conmuta porque (X, x) es una F-álgebra (se usa la functorialidad de G). En ambos casos usamos los axiomas correspondientes al producto.
De manera análoga, usando los axiomas de ley distributiva y de F-álgebra que corresponden a la unidad, tenemos los siguientes triángulos conmutativos y entonces (ii) conmuta

$$
\begin{tikzcd}
GX \arrow[r, "\eta_{GX}"] \arrow[dr, equal, "G\eta_X"] \arrow[dd, "id_{GX}"'] & FGX \arrow[d, "\lambda_X"] \\
& GFX \arrow[dl, "G(x)"] \\
GX &
\end{tikzcd}
$$

Para obtener la tesis falta ver que $(\bar{G}, \bar{\delta}, \bar{\epsilon})$ es una comónada en $\mathcal{C}_F$:

$\bar{\delta} : (GX, G(x) \circ \lambda_X) \to (G^2X, G^2(x) \circ G(\lambda_X) \circ \lambda_{GX})$ es un morfismo de F-álgebras si hace conmutar el exterior:

$$
\begin{tikzcd}
FGX \arrow[r, "\lambda_X"] \arrow[d, "F\delta_X"] & GFX \arrow[r, "G(x)"] \arrow[drr, "\delta_{FX}"] & GX \arrow[r, "\delta_X"] & GGX \\
FGGX \arrow[rr, "\lambda_{GX}"] & & GFGX \arrow[r, "G\lambda_X"] & GGFX \arrow[u, "G^2(x)"']
\end{tikzcd}
$$

Por el diagrama (III) de la definición de ley distributiva conmuta el diagrama izquierdo y por la naturalidad de δ con el morfismo x el derecho.

Utilizando el diagrama (IV) de ley distributiva y la naturalidad de ε se obtiene que $\bar{\varepsilon}$ es un morfismo de F-álgebras.

- $2 \Rightarrow 1$:
  Dada un F-álgebra (X,x) consideramos $\bar{G}(X,x) = (GX, \rho_X)$. Sabemos que $\bar{G}$ es una comónada en $\mathcal{C}_F$ entonces $\rho_X : FGX \to GX$ hace conmutar los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} FFGX \arrow[r, "F\rho_X"] \arrow[d, "\mu_{GX}"] & FGX \arrow[d, "\rho_X"] \\ FGX \arrow[r, "\rho_X"] & GX \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} GX \arrow[r, "\eta_{GX}"] \arrow[dr, equal, "id_{GX}"'] & FGX \arrow[d, "\rho_X"] \\ & GX \end{tikzcd}$$

Definimos λ de la siguiente forma:

$$\lambda_X : \ FGX \xrightarrow{FG_{\eta_X}} FGFX \xrightarrow{\rho_{FX}} GFX$$

Hay que probar que los siguientes diagramas conmutan:

$$(I) \quad \begin{tikzcd} FFG \arrow[r, "F\lambda"] \arrow[d, "\mu G"] & FGF \arrow[r, "\lambda F"] & GFF \arrow[d, "G\mu"] \\ FG \arrow[rr, "\lambda"] & & GF \end{tikzcd} \qquad (II) \quad \begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\eta G"] \arrow[dr, "G\eta"'] & & FG \arrow[dl, "\lambda"] \\ & GF & \end{tikzcd}$$

$$(III) \quad \begin{tikzcd} FG \arrow[r, "F\delta"] \arrow[d, "\lambda"] & FGG \arrow[r, "\lambda G"] & GFG \arrow[d, "G\lambda"] \\ GF \arrow[rr, "\delta F"] & & GGF \end{tikzcd} \qquad (IV) \quad \begin{tikzcd} FG \arrow[rr, "F\epsilon"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & F \\ & GF \arrow[ur, "\epsilon F"'] & \end{tikzcd}$$

Veamos el primero. Hay que probar que conmuta:

$$\begin{tikzcd} FFGX \arrow[r, "F^2G_{\eta_X}"] \arrow[d, "\mu_{GX}"] & FFGFX \arrow[r, "F\rho_{FX}"] & FGFX \arrow[r, "FG\eta_{FX}"] & FGFFX \arrow[r, "\rho_{F^2X}"] & GF^2X \arrow[d, "G\mu"] \\ FGX \arrow[r, "FG\eta_X"] & FGFX \arrow[rrr, "\rho_{FX}"] & & & GFX \end{tikzcd}$$

Como $FG\mu_X \circ FG\eta_{FX}$ es la identidad, podemos obtener el siguiente diagrama, en donde el triángulo es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
FFGX \arrow[r, "F^2G_{\eta_X}"] \arrow[dd, "\mu_{GX}"] & FFGFX \arrow[r, "F\rho_{FX}"] \arrow[dd, "\mu_{GFX}"] & FGFX \arrow[r, "FG\eta_{FX}"] \arrow[dr, equal] & FGFFX \arrow[r, "\rho_{F^2X}"] \arrow[d, "FG\mu_X"] & GF^2X \arrow[dd, "G\mu_X"] \\
 & & & FGFX \arrow[dr, "\rho_{FX}"] & \\
FGX \arrow[r, "FG\eta_X"] & FGFX \arrow[rrr, "\rho_{FX}"] & & & GFX
\end{tikzcd}$$

El rectángulo de la izquierda conmuta por naturalidad de μ para el morfismo $G\eta_X$; la conmutatividad del trapecio central es la condición de asociatividad para la F-álgebra (GFX, ρ_{FX}) y la del trapecio de la derecha es que $G\mu_X$ es morfismo de F-álgebras (μ_X es un morfismo de F-álgebras y $\bar{G}$ es un functor en $\mathcal{C}_F$). Se deduce la conmutatividad del diagrama (I).

Para probar (IV) escribimos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
FGX \arrow[r, "F\varepsilon_X"] \arrow[d, "FG\eta_X"] & FX \\
FGFX \arrow[r, "\rho_{FX}"] & GFX \arrow[u, "\varepsilon_{FX}"]
\end{tikzcd}$$

de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd}
FGX \arrow[rrrr, "F\varepsilon_X"] \arrow[dddd, "FG\eta_X"] \arrow[ddr, "\rho_X"] & & & & FX \arrow[ddll, "x"] \\
 & (a) & & & \\
 & GX \arrow[r, "\varepsilon_X"] & X & (b) & \\
 & (c) & & & \\
FGFX \arrow[rrrr, "\rho_{FX}"] & & & & GFX \arrow[uuuu, "\varepsilon_{FX}"] \arrow[uulll, "G(x)"]
\end{tikzcd}$$

El diagrama (a) conmuta porque ε_X es un morfismo en $\mathcal{C}_F$ y el (b) porque es la condición de naturalidad ε para el morfismo x.

Falta ver que el diagrama (c) conmuta. Como x es una F-acción y por lo tanto un morfismo de F-álgebras (entre (FX, μ_X) y (X, x)) y G es un functor en $\mathcal{C}_F$, resulta que $G(x)$ es un morfismo en de F-álgebras, es decir $G(x) \circ \rho_{FX} = \rho_X \circ FG(x)$. Por la condición de unidad para la F-álgebra X, se tiene $FG(x) \circ FG\eta_X = id_X$, de donde (c) es conmutativo.

Por la naturalidad de δ para el morfismo $G\eta_X$, por ser δ_{FX}, $G^2(x)$, $G\rho_X$ morfismos de F-álgebras y por ser x y ρ_X F-acciones, obtenemos el diagrama (III) de la tesis. Utilizando el hecho de que $G(x)$ es morfismo de F-álgebras y de que x es una F-acción obtenemos el diagrama (II).

De forma similar se prueba $1 \Leftrightarrow 3$.

$\square$

Observación 6. *Más en general, es decir para $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ambos mónadas, ambos comónadas o uno y uno, se prueba lo siguiente: si existe una ley distributiva λ de F a G, entonces:*

- *si F es mónada, entonces λ induce un levantamiento de F via el functor de olvido a la categoría de Eilenberg-Moore de G,*
- *si G es comónada, entonces λ induce un levantamiento de G via el functor de olvido a la categoría de Eilenberg-Moore de F.*

En este sentido, las leyes distributivas de mónada a comónada (y no las de comónada a mónada) son las adecuadas para que los levantamientos de F y G sean posibles y poder entonces dar una noción de bimódulo, como haremos para terminar esta sección.

Mostramos ahora que todas las formas esperables de definir *bimódulo*, es decir una doble estructura de F-álgebra y G-coálgebra compatibles, son de hecho la misma (ver Proposición 5.3).

Proposición 5.2. *Si (F, μ, η) es una mónada, (G, δ, ϵ) una cómonada y $\lambda : FG \to GF$ una ley distributiva se tiene que las categorías $(\mathcal{C}^G)_{\underline{F}}$ y $(\mathcal{C}_F)^{\bar{G}}$ son isomorfas.*

Demostración: Los functores

$$\begin{aligned} \psi : (\mathcal{C}^G)_{\underline{F}} \to (\mathcal{C}_F)^{\bar{G}}, \qquad & \psi\left((X, \theta_X), h_X)\right) = ((X, U_G(h_X)), \bar{\theta_X}) \\ \psi^{-1} : (\mathcal{C}_F)^{\bar{G}} \to (\mathcal{C}^G)_{\underline{F}}, \qquad & \psi^{-1}\left((X, h_X), \theta_X\right) = ((X, U_F(\theta_X)), \underline{h_X}) \end{aligned}$$

son inversos.

□

Definición 5.2. *En el contexto de la Proposición anterior, llamamos* $\lambda-(F,G)$***-bimódulo*** *a una terna* (X, h_X, θ_X) *tales que* $(X, h_X) \in \mathcal{C}_F$, $(X, \theta_X) \in \mathcal{C}^G$ *y sujetas al siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "h_X"] \arrow[d, "F\theta_X"] & X \arrow[r, "\theta_X"] & GX \\
FGX \arrow[r, "\lambda_X"] & GFX \arrow[ur, "G(h_X)"] &
\end{tikzcd}$$

Notamos $\mathcal{C}_F^G$ *a la categoría cuyos objetos son los* λ*-bimódulos y los morfismos son morfismos de* F*-álgebras y de* G*-coálgebras simultáneamente.*

Observación 7. *A partir de la nomenclatura de álgebras y coálgebras, resultaría natural hablar de "biálgebra" en lugar de "bimódulos". No lo hacemos para mantener lo usual en la literatura sobre este tema.*

Proposición 5.3. *Bajo las notaciones anteriores, se tienen los siguientes isomorfismos de categorías:*

$$\mathcal{C}_F^G \cong (\mathcal{C}_F)^{\overline{G}} \cong \left(\mathcal{C}^G\right)_{\underline{F}}.$$

Demostración: En efecto, el segundo isomorfismo es la Proposición 5.2.
El primero se observar que un objeto en $(\mathcal{C}_F)^{\overline{G}}$ es una terna (X, h_X, θ_X), donde (X, h_X) es un objeto de $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ y $\theta_X : X \to GX$, además de definir una estructura de $\overline{G}$-coálgebra sobre X, es un morfismo en $\mathcal{C}_F$ (la estructura de F-álgebra de GX dada por $G(h_X) \circ \lambda_X$). Se tiene entonces $\theta_X \circ h_X = G(h_X) \circ \lambda_X \circ F(\theta_X)$.

□

5.2. Caso duoidal

En el capítulo anterior vimos que si T es una mónada comonoidal sobre una categoria monoidal, la categoría de Eilenberg-Moore correspondiente resulta monoidal. Ahora consideraremos una mónada F y una comónada G actuando sobre una categoría monoidal $\mathcal{C}$ y ligadas por una ley distributiva λ. Es natural preguntarse bajo qué condiciones la categoría de λ-bimódulos $\mathcal{C}_F^G$ resulta monoidal. El buen contexto es el de la siguiente definición.
Este resultado es original de nuestro trabajo.

Definición 5.3. *$(F, G, \varphi, \varphi_0, \psi, \psi_0)$ es una **λ-mónada comónada duoidal** en una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ si (F, φ, φ_0) es una mónada comonoidal, (G, ψ, ψ_0) es una comónada monoidal, λ es una ley distributiva entre F y G y los siguientes diagramas conmutan:*

$$
\begin{tikzcd}
F(GX \otimes GY) \arrow[rr, "F\psi_{X,Y}"] \arrow[d, "\varphi_{GX,GY}"] & & FG(X \otimes Y) \arrow[d, "\lambda_{X\otimes Y}"] \\
FGX \otimes FGY \arrow[d, "\lambda_X \otimes \lambda_Y"] & & GF(X \otimes Y) \arrow[d, "G\varphi_{X,Y}"] \\
GFX \otimes GFY \arrow[rr, "\psi_{FX,FY}"] & & G(FX \otimes FY)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FI \arrow[r, "F\psi_0"] \arrow[d, "\varphi_0"] & FGI \arrow[d, "\lambda_I"] \\
I \arrow[d, "\psi_0"] & GFI \arrow[dl, "G\varphi_0"] \\
GI &
\end{tikzcd}
$$

Proposición 5.4. *Si $(F, G, \varphi, \varphi_0, \psi, \psi_0)$ es una λ-mónada comónada duoidal en $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ entonces $\mathcal{C}_F^G$ es una categoría monoidal.*

Demostración: La categoría $\mathcal{C}_F$ es monoidal por ser F una mónada comonoidal. Por otro lado, como G es una comónada en $\mathcal{C}$ y se tiene una ley distributiva de F a G, se deduce que $\bar{G}$ es comónada en $\mathcal{C}_F$. A partir de la definición de $\bar{G}$ y de $\otimes^F$, se tiene

$$
\begin{gathered}
\bar{G}(X, x) \otimes^F \bar{G}(Y, y) = (GX \otimes GY, (G(x) \otimes G(y)) \circ (\lambda_X \otimes \lambda_Y)\varphi_{GX,GY}) \\
\bar{G}\left((X, x) \otimes^F (Y, y)\right) = (G(X \otimes Y), G(x \otimes y) \circ G\varphi_{X,Y} \circ \lambda_{X\otimes Y}) \\
\bar{G}(I, \varphi_0) = (GI, G\varphi_0 \circ \lambda_I)
\end{gathered}
$$

Si tomamos el primer diagrama en la Definición 5.3 y usamos además que, por naturalidad de ψ, se tiene $G(x \otimes y) \circ \psi_{FX,FY} = \psi_{X,Y} \circ (Gx \otimes Gy)$, obtenemos que $\psi_{X,Y} : G(X \otimes Y) \to GX \otimes GY$ es un morfismo de F-álgebras. Por otro lado, la condición de que ψ_0 : sea un morfismo de F-álgebras es exactamente el segundo diagrama de la Definición 5.3. Se tiene entonces que $(\bar{G}, \bar{\psi}, \psi_0)$ es un functor monoidal, siendo $\bar{\psi}$ el levantamiento de ψ.
Además, los diagramas que hacen que δ y ε sean tranformaciones naturales entre functores monoidales, son los mismos que hacen que sus levantamientos $\bar{\delta}$ y $\bar{\varepsilon}$ sean transformaciones naturales entre functores monoidales.
Se deduce que $(\bar{G}, \bar{\delta}, \bar{\varepsilon}, \bar{\psi}, \psi_0)$ es una comónada monoidal sobre la categoría monoidal $\mathcal{C}_F$, y por lo tanto $\mathcal{C}_F^G$ es monoidal.

$\square$

Observación 8. *La Proposición anterior puede probarse usando los resultados de la Proposición 4.1 y viendo que $\bar{F}$ es una mónada comonoidal en la categoría de G-coálgebras $\mathcal{C}^G$. Elegimos usar la versión dual de la Proposición 4.1 para fijar las ideas en el contexto de comónadas monoidales.*

5.3. Bimónadas

Comenzamos esta sección viendo los ejemplos clásicos de leyes distributivas para un functor T que es a la vez mónada y comónada, que nos permitirán entender la definición que presentamos de *bimónada.*

Definición 5.4. *Sea X un objeto en una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, I)$. Decimos que un morfismo $c : X \otimes X \to X \otimes X$ en $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}$ **satisface la ecuación de Yang-Baxter** si verifica $(c \otimes 1_X)(1_X \otimes c)(c \otimes 1_X) = (1_X \otimes c)(c \otimes 1_X)(1_X \otimes c)$ como enformorfismos de $X \otimes X \otimes X$.*

Observación 9. *En particular si $(\mathcal{C}, \otimes, I, c)$ es monoidal trenzada, y X es un objeto en $\mathcal{C}$, se deduce que $c_{X,X}$ satisface la ecuación de Yang-Baxter.*

Definición 5.5. *Sea T un endofunctor de una categoría $\mathcal{C}$ que es a la vez mónada y comónada. $\tau : T^2 \to T^2$ es una **pretrenza local** en T si es una ley distributiva de la mónada T a la comónada T, también una ley distributiva de la comónada T a la mónada T y además satisface la ecuación de Yang-Baxter.*

Observación 10. *Si T es mónada y comónada y $\tau : T^2 \to T^2$ es una pretrenza local, se tiene que $\lambda = (\mu T)(T\tau)(\delta T)$ es una ley distributiva de la mónada (T, μ, η) a la comónada (T, δ, ε). Por otro lado, se tiene que $\lambda = (T\mu)(\tau T)(T\delta)$ es una ley distributiva de la comónada T a la mónada T. En particular, una trenza en $\mathcal{C}$ induce leyes distributivas de mónada a comónada y de comónada a mónada.*

Es bien sabido que una pretrenza local $c : B^2 \to B^2$ induce, a partir de una estructura de mónada (comónada) en B, una estructura de mónada (respectivamente, comónada) en B^2, definidas por

$$B^4 \xrightarrow{BcB} B^4 \xrightarrow{\mu\mu} B^2$$

(respectivamente, $B^2 \xrightarrow{\delta\delta} B^4 \xrightarrow{BcB} B^4$).

Sin embargo, esto no es cierto si cambiamos c por una ley distributiva cualquiera. Los diagramas de compatibilidad de biálgebras, que pueden caracterizarse por ejemplo por que el producto y la unidad sean morfismos de coálgebras (o equivalentemente, que el coproducto y la counidad sean morfismos de álgebras) pierden entonces sentido en el contexto general. Sin embargo, como el functor I sí tiene estructura de mónada y comónada, tiene sentido mantener las condiciones de que η sea morfismo de comónadas y ε sea morfismo de mónadas. El diagrama pentagonal se sustituye por otro diagrama, que en el caso particular en que λ proviene de una pretrenza local como en la Observación 10, resulta el diagrama pentagonal conocido. Esto se entiende bien en el Ejemplo 3.

Definición 5.6. *$(T, \mu, \eta, \delta, \epsilon, \lambda)$ es una **bimónada** en una categoría $\mathcal{C}$ si*

- *(T, μ, η) es una mónada en $\mathcal{C}$,*
- *$(T, \delta, \varepsilon, \delta)$ es una comónada en $\mathcal{C}$,*
- *$\eta : I \to T$ es un morfismo de comónadas*
- *$\varepsilon : T \to I$ es un morfismo de mónadas,*
- *$\lambda : TT \to TT$ es una ley distributiva de la mónada T a la comónada T que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
TT \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "T\delta"] & T \arrow[r, "\delta"] & TT \\
TTT \arrow[rr, "\lambda T"] & & TTT \arrow[u, "T\mu"]
\end{tikzcd}$$

*También suele decirse que $(T, \mu, \eta, \delta, \varepsilon)$ es una **λ-bimónada**.*

Ejemplo 3. *Si $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ es un bimonoide en la categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, I, \tau)$ y tomamos el functor $B \otimes \_ : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ con las estructuras de mónada y de comónada inducidas (ver Capítulo 2), se tiene que $B \otimes \_$ es una bimónada respecto de la ley distributiva $\lambda : B \otimes B \otimes \_ \Longrightarrow B \otimes B \otimes \_$ definida mediante a partir de la trenza τ como en la Observación 10. Explícitamente:*

$$\lambda := B \otimes B \otimes \_ \xrightarrow{\Delta \otimes id_B \otimes 1_{\mathcal{C}}} B \otimes B \otimes B \otimes \_ \xrightarrow{id_B \otimes \tau \otimes 1_{\mathcal{C}}} B \otimes B \otimes B \otimes \_ \xrightarrow{m \otimes id_B \otimes 1_{\mathcal{C}}} B \otimes B \otimes \_$$

Observación 11. *1. Se tiene que si $(T,\mu,\eta,\delta,\varepsilon,\lambda)$ es una bimónada, entonces (TX,μ_X,δ_X) es un λ-bimódulo. De hecho, la instancia en el objeto TX del diagrama final de la Definición 5.6 es exactamente la condición de λ-bimódulo para TX equipado con las estructuras libres de T-álgebra y T-coálgebra.*

2. Si en el ejemplo anterior cambiamos λ por $\lambda' : B \otimes B \otimes \_ \to B \otimes B \otimes \_$ definida por $\lambda'_X(a \otimes b \otimes x) = b \otimes a \otimes x$, obtenemos una ley distributiva (de mónada a cmónada y de comónada a mónada) pero resulta que la quíntupla $(B \otimes \_, \mu, \eta, \delta, \varepsilon, \lambda')$ no es una bimónada.
La ley distributiva no generaliza a la instancia de una trenza c si no al twisting obtenido a partir de esa trenza como en el ejemplo 3.

Ejemplo 4. *En [7] se presenta un ejemplo de una λ-bimónada que no proviene de un bimonoide. Considerar el functor $\mathcal{L}^+ : Set \to Set$ tal que $\mathcal{L}^+(X)$ es el conjunto de listas finitas no vacías de X con la estructura de mónada inducida por la concatenación como en el Ejemplo 4 del capítulo* 3 *y la estructura de comónada del Ejemplo 7 del mismo capítulo.*
Para cada lista c, notamos c^j a la lista que se obtiene quitando los primeros j elementos de c (si la lista es de largo n, entonces $1 \leq j \leq n-1$). Consideramos la tranformación natural $\lambda : \mathcal{L}^+\mathcal{L}^+ \Rightarrow \mathcal{L}^+\mathcal{L}^+$ definida de la siguiente manera. Tomamos para cada $i \in \{1,2,\cdots,k\}$, una lista $l_i = [a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in_i}]$ y a partir de estas listas, se obtiene la lista $c = [a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{k1}]$ (se puede pensar que colocamos las listas en orden como filas de una "matriz con agujeros" y que c corresponde a la primera columna).
Bajo esta notación, definimos $\lambda_X[l_1, l_2, \cdots, l_k]$ como la lista siguiente, (notar que está formada por $n_1+n_2+\cdots+n_k$ listas no vacías de elementos de X):

$$[c, a_{12}c^1, a_{13}c^1, \cdots, a_{1n_1}c^1, c^1, a_{22}(c^1)^1, a_{23}(c^1)^1, \cdots, a_{2n_2}(c^1)^1, (c^1)^1, \cdots, a_{3n_3}\left((c^1)^1\right)^1, \cdots, [a_{k1}], [a_{k2}], \cdots, [a_{kn_k}]]$$

Resulta que L^+ es una λ-bimónada.

En [11], los autores definen λ-mónadas de Hopf como λ-bimónadas donde el functor identidad es invertible por convolución (un producto de convolución se define de manera natural en los endofunctores de la bimónada, y por lo tanto es natural la noción de antípoda). En este contexto y bajo ciertas restricciones, prueban una versión del Teorema Fundamental de Módulos de Hopf. Además, consideran el caso particular de las λ-bimónadas para las cuales λ proviene de una pretrenza local, probando en este caso muchas propiedades para la eventual antípoda (como por ejemplo, que la antípoda es -en un sentido que se adapta a este contexto- un antimorfismo de mónadas y de comónadas).

Bibliografía

[1] Aguiar, M., Mahajan, S, *Monoidal functors, species and Hopf algebras*, CRM Monograph Series, Vol 29, 2010.

[2] Borceux,F., *Handbook of Categorical Algebra*, Cambridge University Press, 1994.

[3] Bruguières, A., Lack,S., Virelizier, A., *Hopf monads on monoidal categories*, Advances in Mathematics, Vol 227, pp 745–800, 2011.

[4] Bruguières, A., Virelizier, A., *Hopf monads*, Advances in Mathematics, Vol 215-2, pp 679-733, 200).

[5] Böhm, G., Brzeziński, T., Wisbauer, R., *Monads and comonads in module categories.*, Journal of Algebra, Vol 322, pp 1719-1747, 2009.

[6] Kassel Kassel,C., *Quantum Groups*, Springer, New York, 1995.

[7] Kowalzig, N., Krahmer, J., Slevin, P., *Cyclic homology arising from adjunctions.*, Theory and Applications of Categories, Vol 30-32, pp 1067–1095, 2015.

[8] Mac Lane, S., *Categories for the working mathematician.*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1998.

[9] Mesablishvili, B., *Entwining Structures in Monoidal Categories*, Journal of Algebra, Vol 319-6, pp 2496-2517 2008.

[10] Mesablishvili, B., Wisbauer, R., *Notes on bimonads and hopf monads*, Marcel Dekker ed., New York, 2001.

[11] Mesablishvili, B., Wisbauer, R., *Bimonads and hopf monads on categories*, Journal of K-theory: K-theory and its Applications to Algebra, Geometry, and Topology, Vol 7-2, pp 349-388, 2011.

[12] Moerdijk, I., *Monads on tensor categories*, Journal of Pure and Applied Algebra, Vol 168-2-3, pp 189-208, 2002.

[13] Patras, F., *Lambda rings*, Handbook of Algebra, Vol 3, pp 961-986, 2003.

[14] Wisbauer,R., *Algebras versus coalgebras*, Applied Categorical Structures, Vol 16-1-2, pp 255-295, 2008.