

TESIS DE MAESTRIA

Teoría de Homotopía Abstracta

Jazmin Finot Soler

Orientadora: Eugenia Ellis

Maestría en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República - PEDECIBA
Uruguay
Junio 2023

Resumen

En este trabajo estudiaremos la noción de categoría modelo y su correspondiente categoría de homotopía derivada. Veremos dos ejemplos de esta estructura: la categoría de espacios topológicos y la categoría de conjuntos simpliciales. Asimismo, estableceremos una equivalencia de Quillen entre ambas categorías. Estudiaremos, posteriormente, la estructura de categoría modelo estable y veremos cómo esta condición de estabilidad implica de la categoría de homotopía resulte ser una categoría triangulada.

Introducción

La teoría de homotopía abstracta busca generalizar los conceptos y las estructuras que surgen al estudiar teoría de homotopía en espacios topológicos, creando un marco abstracto que nos permita estudiar teoría de homotopía en otras categorías como, por ejemplo, la de conjuntos simpliciales o la de los complejos de cadenas.

Supongamos que tenemos una categoría \mathcal{C} junto con una clase distinguida W de morfismos que no son isomorfismos pero que queremos considerar como tales. Así, por ejemplo, al estudiar la categoría de espacios topológicos Top a menos de homotopía, estamos considerando las equivalencias débiles de homotopía como isomorfismos. Una posible forma de obtener una nueva categoría en la que los morfismos de W sean isomorfismos es la localización. Dicha localización consiste en invertir formalmente los morfismos de W y obtenemos una nueva categoría $\mathcal{C}[W^{-1}]$ y un funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[W^{-1}]$ tal que $F(f)$ es un isomorfismo para todo morfismo f en W . Sin embargo, al considerar este enfoque surgen los siguientes problemas: puede que $\mathcal{C}[W^{-1}]$ no sea localmente pequeña y además, los homsets resultan difíciles de manejar debido a que no tenemos una buena descripción de los morfismos de la localización.

La estructura de categoría modelo planteada por Quillen en 1967 nos permite resolver los problemas que surgen en la localización, descritos en el párrafo anterior. Las categorías modelo axiomatizan la estructura subyacente en la teoría de homotopía clásica en espacios topológicos. En tal sentido, en una categoría modelo tenemos tres clases distinguidas de morfismos: la clase de morfismos W , que buscamos invertir, y que llamaremos equivalencias débiles, así como una clase de fibraciones y una clase de cofibraciones. Esta estructura adicional dada por las fibraciones y las cofibraciones, junto con una serie de axiomas, permite definir una noción general de homotopía a partir de la cual construiremos una nueva categoría llamada la categoría de homotopía de \mathcal{C} , denotada por $\text{Ho}(\mathcal{C})$ y donde los morfismos de W resultan ser isomorfismos. Probaremos que, de hecho, las categorías $\text{Ho}(\mathcal{C})$ y $\mathcal{C}[W^{-1}]$ son equivalentes, lo cual nos permite obtener una descripción concreta de los

morfismos de la localización.

Naturalmente, surge la siguiente pregunta: ¿cómo comparar diferentes teorías de homotopía? Una forma sería la construcción de un funtor entre las categorías modelo que preserve equivalencias débiles, fibraciones y cofibraciones. Dicho enfoque, sin embargo, resulta restrictivo considerando particularmente que lo que nos interesa comparar son las categorías de homotopía. Surge, entonces, la noción de un par de funtores de Quillen, que está formado por dos funtores adjuntos donde cada funtor preserva la mitad de la estructura de categoría modelo. Cuando los funtores inducidos en las categorías de homotopía resultan ser equivalencias de categorías se trata de una equivalencia de Quillen. Esta noción es suficientemente débil para que dos categorías de homotopía puedan ser equivalentes sin que las categorías modelo subyacentes lo sean. En este trabajo estudiaremos dos ejemplos de categorías modelo: los espacios topológicos y los conjuntos simpliciales y veremos que son Quillen equivalentes.

Finalmente, nos preguntamos qué estructura tiene la categoría de homotopía de una categoría modelo. El punto de partida para responder esta pregunta lo constituye la definición de un par de funtores adjuntos: el funtor suspensión y el funtor loop. A partir de estos funtores, definiremos la noción de categoría modelo estable y construiremos sucesiones de fibra y cofibra. Cuando la categoría modelo es estable, las sucesiones de fibra y cofibra se pueden extender a izquierda y derecha, lo que nos permitirá demostrar que la categoría de homotopía de una categoría modelo estable es triangulada. Las categorías trianguladas, desarrolladas por Verdier, axiomatizan la estructura de la categoría derivada de una categoría abeliana a través de triángulos exactos, que juegan el rol de las sucesiones exactas cortas en una categoría abeliana. En el contexto de las categorías modelo estables los triángulos están dados por las sucesiones de cofibra.

El trabajo está organizado como se describe a continuación.

En el primer capítulo expondremos nociones y resultados necesarios para el desarrollo del trabajo. Comenzaremos definiendo la composición transfinita que será una herramienta fundamental a la hora de estudiar las categorías modelo cofibrantemente generadas. Luego, presentaremos las categorías trianguladas, las cuales constituyen una noción central de este trabajo y probaremos algunos resultados acerca de esta estructura.

El segundo capítulo comenzará con la definición de categoría modelo siguiendo [2]. Veremos cómo surge una noción de homotopía que nos permitirá construir la categoría de homotopía de una categoría modelo y probaremos

que coincide con la localización. Concluiremos este capítulo estudiando morfismos entre categorías modelo, es decir, los funtores de Quillen.

El objetivo del tercer capítulo es construir ejemplos de categorías modelo, basándonos nuevamente en [2]. Dado que los axiomas de categoría modelo son difíciles de probar, estudiaremos, en primer lugar, las categorías modelo cofibrantemente generadas. Esta estructura reduce las condiciones de categoría modelo a verificar y nos permitirá dar dos ejemplos de categorías modelo: los espacios topológicos y los conjuntos simpliciales. Igualmente, veremos que estas dos categorías modelo son Quillen equivalentes.

En el cuarto capítulo, siguiendo [8] probaremos uno de los resultados fundamentales de este trabajo: la categoría de homotopía de una categoría modelo estable es triangulada. Comenzaremos viendo la existencia de un par de adjunción en una categoría modelo punteada dada por los funtores loop y suspensión, para así poder definir lo que es una categoría modelo estable. Veremos, a continuación, cómo estos funtores nos permiten, asimismo, definir sucesiones de fibra y cofibra en una categoría modelo punteada. Concluiremos este capítulo viendo que cuando la categoría modelo es estable, su categoría de homotopía resulta ser triangulada y los triángulos están dados por las sucesiones de cofibra.

Índice general

Introducción	I
1. Preliminares	1
1.1. Ordinales, cardinales y composición transfinita	1
1.2. Categorías trianguladas	4
2. Categorías Modelo	13
2.1. Estructura modelo en una categoría	13
2.2. La categoría de homotopía	19
2.3. Los funtores de Quillen	33
2.3.1. Adjunciones de Quillen	33
2.3.2. Funtores derivados	35
2.3.3. Equivalencias de Quillen	40
3. Categorías modelo cofibrantemente generadas	45
3.1. El argumento del objeto pequeño	45
3.2. Teorema de reconocimiento	54
3.3. Estructura modelo en Top	59
3.4. Estructura modelo en sSet	72
3.4.1. La categoría sSet de conjuntos simpliciales	72
3.4.2. La realización geométrica y el funtor singular	77
3.4.3. Estructura modelo en sSet	79
3.4.4. Grupos de homotopía de sSet	87
3.5. Equivalencia de Quillen entre Top y sSet	92
4. Teoría de homotopía estable	95
4.1. Categorías modelo estables	95
4.2. Sucesiones de fibra y cofibra	118
4.3. Categoría de homotopía de una categoría modelo estable . . .	134
Bibliografía	145

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Ordinales, cardinales y composición transfinita

En esta sección estudiaremos el concepto de composición transfinita que es necesario para definir los objetos pequeños de una categoría, basándonos en el segundo capítulo de [2].

Definición 1.1.1. 1. Un **orden parcial** es un conjunto S junto con una relación \leq que verifica las siguientes propiedades:

- reflexiva: $a \leq a$ para todo $a \in S$
 - transitiva: si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$ para todos $a, b, c \in S$
 - antisimétrica: si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$ para todos $a, b \in S$
2. Decimos que un orden parcial es **total** si verifica que para todo par de elementos $a, b \in S$ tenemos $a \leq b$ o bien $b \leq a$
3. Decimos que un orden total es un **buen orden** si todo subconjunto A no vacío de S tiene un primer elemento, es decir, existe $b \in A$ tal que $b \leq a$ para todo $a \in A$

Definición 1.1.2. Sea S un conjunto bien ordenado, dado $x \in S$ definimos $s(x) = \{y \in S : y \leq x\}$. Un **ordinal** es un conjunto bien ordenado α tal que $s(\beta) = \beta$ para todo $\beta \in \alpha$.

Definición 1.1.3. Si α es un ordinal, entonces el **sucesor** de α es el primer ordinal mayor que α . Si un ordinal no es sucesor de ningún otro ordinal decimos que es un **ordinal límite**.

Definición 1.1.4. Sea \mathcal{C} una categoría con todos los colímites pequeños, es decir todos los colímites sobre diagramas indexados en categorías pequeñas, y λ un ordinal.

1. Una λ -**sucesión** en \mathcal{C} es un funtor $X : \lambda \rightarrow \mathcal{C}$ que preserva colímites. Lo escribiremos de la forma

$$X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_\beta \longrightarrow \cdots$$

Como X preserva colímites, para todo ordinal límite $\gamma < \lambda$, el morfismo inducido

$$\operatorname{colim}_{\beta < \gamma} X_\beta \longrightarrow X_\gamma$$

es un isomorfismo dado que en conjuntos parcialmente ordenados, la noción de colímite coincide con la noción de supremo.

2. La **composición** de la λ -sucesión X es el morfismo

$$X_0 \longrightarrow \operatorname{colim}_{\beta < \lambda} X_\beta$$

La composición es única a menos de isomorfismo ya que el colímite no es único.

3. Sea D una colección de morfismos en \mathcal{C} tal que todo morfismo $X_\beta \rightarrow X_{\beta+1}$ es un elemento de D para $\beta+1 < \lambda$. La **composición transfinita** de los morfismos de D es la composición

$$X_0 \longrightarrow \operatorname{colim}_{\beta < \lambda} X_\beta$$

Esquemáticamente, lo vemos como

$$\begin{array}{ccccccc} X_0 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & X_2 & \longrightarrow & \cdots \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & & & \\ & & \operatorname{colim}_{\beta < \lambda} X_\beta & & & & \end{array}$$

Observación 1.1.5. Si $\lambda = \omega$ entonces una λ -sucesión es una sucesión usual

Definición 1.1.6. Dado un conjunto A , el **cardinal** de A , que denotaremos como $|A|$, es el menor ordinal para el cual existe una biyección

$$|A| \longrightarrow A$$

Definición 1.1.7. Sea γ un cardinal. Decimos que un ordinal α es γ -filtrado si es un ordinal límite y verifica que si $A \subseteq \alpha$ y $|A| \leq \gamma$ entonces $\sup A < \alpha$.

Definición 1.1.8. Sea \mathcal{C} una categoría que tiene todos los colímites de sucesiones, D una colección de morfismos en \mathcal{C} , A un objeto de \mathcal{C} y κ un cardinal.

- Decimos que A es κ -pequeño relativo a D si para todo los ordinales κ -filtrados λ y todas las λ -sucesiones

$$X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_\beta \longrightarrow \cdots$$

tales que cada morfismo $X_\beta \longrightarrow X_{\beta+1}$ es un elemento de D para $\beta+1 < \lambda$, el morfismo de conjuntos

$$\operatorname{colim}_{\beta < \lambda} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X_\beta) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \operatorname{colim}_{\beta < \lambda} X_\beta)$$

es un isomorfismo.

- Decimos que A es **pequeño relativo a D** si es κ -pequeño relativo a D para algún κ .
- Decimos que A es **pequeño** si es pequeño relativo a \mathcal{C} .

Observación 1.1.9. Si κ y κ' son dos cardinales tales que $\kappa < \kappa'$ y A es κ -pequeño relativo a D , entonces A es κ' -pequeño relativo a D porque todo ordinal κ' -filtrado también es κ -filtrado.

El siguiente ejemplo nos será de utilidad más adelante.

Ejemplo 1.1.10. [2, Ejemplo 2.1.5.] Todo objeto en la categoría de conjuntos Set es pequeño. De hecho, veremos que si A es un conjunto entonces A es $|A|$ -pequeño. Sea λ un ordinal $|A|$ -filtrado y X una λ -sucesión de conjuntos. Dado un morfismo $f : A \longrightarrow \operatorname{colim}_{\beta < \lambda} X_\beta$, tenemos, para cada $a \in A$, un índice $\beta(a)$ tal que $f(a)$ está en la imagen de $X_{\beta(a)}$. Sea $\gamma = \sup_{a \in A} \beta(a)$. Como λ es un ordinal $|A|$ -filtrado, tenemos que $\gamma < \lambda$ y que el morfismo f se factoriza a través de un morfismo $g : A \longrightarrow X_\gamma$.

Definición 1.1.11. Sea \mathcal{C} una categoría con todos los colímites pequeños, D una colección de morfismos en \mathcal{C} y A un objeto de \mathcal{C} .

- Decimos que A es **finito relativo a D** si A es κ -pequeño relativo a D para un cardinal finito κ .
- Decimos que A es **finito** si es finito relativo a \mathcal{C} .

1.2. Categorías trianguladas

En esta sección veremos cómo se definen las categorías trianguladas y algunas de sus propiedades básicas siguiendo el cuarto capítulo de [8].

Definición 1.2.1. Decimos que una categoría \mathcal{C} es una **categoría aditiva** si tiene todos los productos y coproductos finitos y está enriquecida en la categoría de grupos abelianos, es decir los hom sets de \mathcal{C} son grupos abelianos y la composición de morfismos es bilineal.

Un **functor aditivo** es un functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre categorías aditivas tal que

$$F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

es un morfismo de grupos abelianos.

Definición 1.2.2. Sea \mathcal{T} una categoría aditiva con una autoequivalencia aditiva $\Sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$. Un **triángulo** en \mathcal{T} es una sucesión de morfismos

$$X \xrightarrow{f_1} Y \xrightarrow{f_2} Z \xrightarrow{f_3} \Sigma X$$

Un **morfismo de triángulos** entre $X \xrightarrow{f_1} Y \xrightarrow{f_2} Z \xrightarrow{f_3} \Sigma X$ y

$$X' \xrightarrow{f'_1} Y' \xrightarrow{f'_2} Z' \xrightarrow{f'_3} \Sigma X'$$

es un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f_1} & Y & \xrightarrow{f_2} & Z & \xrightarrow{f_3} & \Sigma X \\ \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_3 & & \downarrow \Sigma \phi_1 \\ X' & \xrightarrow{f'_1} & Y' & \xrightarrow{f'_2} & Z' & \xrightarrow{f'_3} & \Sigma X' \end{array}$$

Definición 1.2.3. Sea \mathcal{T} una categoría aditiva, cuyo objeto cero es $*$, junto con una autoequivalencia aditiva $\Sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ llamada **functor shift**. Decimos que \mathcal{T} es una **categoría triangulada** si existe una clase distinguida de triángulos llamados **triángulos exactos** que satisfacen los siguientes axiomas:

- **T1:** El triángulo $* \longrightarrow X \longrightarrow X \longrightarrow *$ es exacto para todo objeto X de \mathcal{T} . Todo triángulo isomorfo a un triángulo exacto es un triángulo exacto. Todo morfismo $f : X \rightarrow Y$ se puede extender a un triángulo exacto de la forma $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{u} \Sigma X$.
- **T2:** El triángulo

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{u} \Sigma X$$

es exacto si y solamente si el triángulo

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{u} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y$$

es exacto.

- **T3:** Dado un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f_1} & Y & \xrightarrow{f_2} & Z & \xrightarrow{f_3} & \Sigma X \\ \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & & & \downarrow \Sigma \phi_1 \\ X' & \xrightarrow{f'_1} & Y' & \xrightarrow{f'_2} & Z' & \xrightarrow{f'_3} & \Sigma X' \end{array}$$

tal que las dos filas son triángulos exactos y el cuadrado de la izquierda conmuta, existe un morfismo $\phi_3 : Z \rightarrow Z'$ que lo completa a un morfismo de triángulos

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f_1} & Y & \xrightarrow{f_2} & Z & \xrightarrow{f_3} & \Sigma X \\ \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_3 & & \downarrow \Sigma \phi_1 \\ X' & \xrightarrow{f'_1} & Y' & \xrightarrow{f'_2} & Z' & \xrightarrow{f'_3} & \Sigma X' \end{array}$$

- **T4:** Dado un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f_1} & Y & \xrightarrow{f_2} & Z & \xrightarrow{f_3} & \Sigma X \\ \parallel & & \downarrow u_1 & & & & \parallel \\ X & \xrightarrow{g_1} & U & \xrightarrow{g_2} & V & \xrightarrow{g_3} & \Sigma X \\ & & \downarrow u_2 & & & & \\ & & W & & & & \\ & & \downarrow u_3 & & & & \\ & & \Sigma Y & & & & \end{array}$$

tal que la columna y las dos filas son triángulos exactos, existe un triángulo exacto

$$Z \xrightarrow{v_1} V \xrightarrow{v_2} W \xrightarrow{v_3} \Sigma Z$$

que se puede agregar al diagrama anterior para obtener un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{f_1} & Y & \xrightarrow{f_2} & Z & \xrightarrow{f_3} & \Sigma X \\
\parallel & & \downarrow u_1 & & \downarrow v_1 & & \parallel \\
X & \xrightarrow{g_1} & U & \xrightarrow{g_2} & V & \xrightarrow{g_3} & \Sigma X \\
& & \downarrow u_2 & & \downarrow v_2 & & \\
& & W & \xlongequal{\quad} & W & & \\
& & \downarrow u_3 & & \downarrow v_3 & & \\
& & \Sigma Y & \xrightarrow{\Sigma f_2} & \Sigma Z & &
\end{array}$$

Definición 1.2.4. Una subcategoría \mathcal{T}' de una categoría triangulada \mathcal{T} es una **subcategoría triangulada** si es una categoría triangulada con el shift y los triángulos heredados de \mathcal{T} .

Lema 1.2.5. [8, Lema 4.1.4.] Sea $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{u} \Sigma X$ un triángulo exacto en una categoría triangulada \mathcal{T} . Entonces $g \circ f = 0$ y $u \circ g = 0$.

Demostración. Para ver que $g \circ f = 0$ consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xlongequal{\quad} & X & \longrightarrow & * & \longrightarrow & \Sigma X \\
\parallel & & \downarrow f & & & & \parallel \\
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{u} & \Sigma X
\end{array}$$

Por los axiomas T1 y T2, tenemos que la primera fila del diagrama es un triángulo exacto y por hipótesis la segunda fila es un triángulo exacto. Luego, por el axioma T3, el diagrama se puede completar a un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xlongequal{\quad} & X & \longrightarrow & * & \longrightarrow & \Sigma X \\
\parallel & & \downarrow f & & \downarrow & & \parallel \\
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{u} & \Sigma X
\end{array}$$

Entonces, como el cuadrado del medio conmuta, obtenemos que $g \circ f = 0$.

Por otro lado, para ver que $u \circ g = 0$ consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
Y & \xlongequal{\quad} & Y & \longrightarrow & * & \longrightarrow & \Sigma Y \\
\parallel & & \downarrow g & & & & \parallel \\
Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{u} & \Sigma X & \xrightarrow{\Sigma f} & \Sigma Y
\end{array}$$

Por los axioma T1 y T2 tenemos que la primera fila es un triángulo exacto y por el axioma T2 tenemos que la segunda fila es un triángulo exacto. Por

lo tanto, por el axioma T3, podemos completar el diagrama a un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xlongequal{\quad} & Y & \longrightarrow & * & \longrightarrow & \Sigma Y \\ \parallel & & \downarrow g & & \downarrow & & \parallel \\ Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{u} & \Sigma X & \xrightarrow{-\Sigma f} & \Sigma Y \end{array}$$

y, como el cuadrado del medio conmuta, obtenemos que $u \circ g = 0$. \square

Proposición 1.2.6. [8, Proposición 4.1.5.] *Sea \mathcal{T} una categoría triangulada, A un objeto de \mathcal{T} y $X \xrightarrow{f_1} Y \xrightarrow{f_2} Z \xrightarrow{f_3} \Sigma X$ un triángulo exacto en \mathcal{T} . Entonces, las sucesiones de grupos abelianos*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, X) \xrightarrow{f_{1*}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, Y) \xrightarrow{f_{2*}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, Z) \xrightarrow{f_{3*}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, \Sigma X)$$

y

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma X, A) \xrightarrow{f_3^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, A) \xrightarrow{f_2^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, A) \xrightarrow{f_1^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, A)$$

son exactas.

Demostración. Vamos a probar que la primera sucesión es exacta. Por el axioma T2, alcanza con probar que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, X) \xrightarrow{f_{1*}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, Y) \xrightarrow{f_{2*}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, Z)$$

es exacta.

Veamos primero que $\mathrm{Im}(f_{1*}) \subset \mathrm{Ker}(f_{2*})$. Sea $g : A \rightarrow Y$ tal que $g \in \mathrm{Im}(f_{1*})$, es decir existe $u : A \rightarrow X$ tal que $g = f_1 \circ u$. Por el axioma T3, tenemos que existe un morfismo $h : * \rightarrow Z$ que completa el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xlongequal{\quad} & A & \longrightarrow & * & \longrightarrow & \Sigma A \\ \downarrow u & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow \Sigma u \\ X & \xrightarrow{f_1} & Y & \xrightarrow{f_2} & Z & \xrightarrow{f_3} & \Sigma X \end{array}$$

Obtenemos, entonces, que $f_2 \circ g$ se factoriza sobre $*$. Por lo tanto, $f_2 \circ g = 0$ y $g \in \mathrm{Ker}(f_{2*})$.

Veamos, ahora, que $\mathrm{Ker}(f_{2*}) \subset \mathrm{Im}(f_{1*})$. Sea $g : A \rightarrow Y$ tal que $g \in \mathrm{Ker}(f_{2*})$. Entonces $f_2 \circ g = 0$ y, por el axioma T3, existe un morfismo $u : A \rightarrow X$ que completa el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
A & \xlongequal{\quad} & A & \longrightarrow & * & \longrightarrow & \Sigma A \\
\downarrow u & & \downarrow g & & \downarrow & & \downarrow \Sigma u \\
X & \xrightarrow{f_1} & Y & \xrightarrow{f_2} & Z & \xrightarrow{f_3} & \Sigma X
\end{array}$$

Entonces $f_1 \circ u = g$ y obtenemos que $g \in \text{Im}(f_{1*})$. \square

Definición 1.2.7. Decimos que un functor de una categoría triangulada en una categoría abeliana es un **functor cohomológico** si manda triángulos exactos en sucesiones exactas.

Por ejemplo, en la proposición anterior vimos que los funtores $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(A, -)$ y $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, A)$ son cohomológicos para todo objeto A de \mathcal{T} .

Corolario 1.2.8. [8, Corolario 4.1.8.] Sea

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{f_1} & Y & \xrightarrow{f_2} & Z & \xrightarrow{f_3} & \Sigma X \\
\downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_3 & & \downarrow \Sigma \phi_1 \\
X' & \xrightarrow{f'_1} & Y' & \xrightarrow{f'_2} & Z' & \xrightarrow{f'_3} & \Sigma X'
\end{array}$$

un morfismo de triángulos exactos en una categoría triangulada \mathcal{T} . Si dos de los ϕ_i son isomorfismos, entonces el tercero también lo es.

Demostración. Veremos que si ϕ_1 y ϕ_2 son isomorfismos, entonces ϕ_3 también es un isomorfismo. Sea A un objeto de \mathcal{T} . Por la proposición anterior, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{Hom}_{\mathcal{T}}(A, X) & \xrightarrow{f_{1*}} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(A, Y) & \xrightarrow{f_{2*}} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(A, Z) & \xrightarrow{f_{3*}} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(A, \Sigma X) & \xrightarrow{\Sigma f_{1*}} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(A, \Sigma Y) \\
\downarrow \phi_{1*} & & \downarrow \phi_{2*} & & \downarrow \phi_{3*} & & \downarrow \Sigma \phi_{1*} & & \downarrow \Sigma \phi_{2*} \\
\text{Hom}_{\mathcal{T}}(A, X') & \xrightarrow{f'_{1*}} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(A, Y') & \xrightarrow{f'_{2*}} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(A, Z') & \xrightarrow{f'_{3*}} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(A, \Sigma X') & \xrightarrow{\Sigma f'_{1*}} & \text{Hom}_{\mathcal{T}}(A, \Sigma Y')
\end{array}$$

Por el lema de los cinco, obtenemos que ϕ_{3*} es un isomorfismo para todo objeto A de \mathcal{T} . Entonces, $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, \phi_3) : \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, Z')$ es isomorfismo. Luego, por el lema de Yoneda, concluimos que ϕ_3 es un isomorfismo. \square

Lema 1.2.9. [8, Lema 4.1.9.] Los triángulos exactos de una categoría triangulada \mathcal{T} son cerrados bajo productos y coproductos.

Demostración. Probaremos la afirmación para los coproductos.

Sea

$$X_i \xrightarrow{f_i} Y_i \xrightarrow{g_i} Z_i \xrightarrow{u_i} \Sigma X_i$$

un triángulo exacto para todo $i \in J$. Para probar que

$$\bigsqcup_{i \in J} X_i \xrightarrow{\bigsqcup_{i \in J} f_i} \bigsqcup_{i \in J} Y_i \xrightarrow{\bigsqcup_{i \in J} g_i} \bigsqcup_{i \in J} Z_i \xrightarrow{\bigsqcup_{i \in J} u_i} \Sigma \bigsqcup_{i \in J} X_i$$

es un triángulo exacto, veremos que es isomorfo a un triángulo exacto.

Por el axioma T1, tenemos que el morfismo $\bigsqcup_{i \in J} f_i : \bigsqcup_{i \in J} X_i \rightarrow \bigsqcup_{i \in J} Y_i$ se puede completar a un triángulo exacto

$$\bigsqcup_{i \in J} X_i \xrightarrow{\bigsqcup_{i \in J} f_i} \bigsqcup_{i \in J} Y_i \longrightarrow W \longrightarrow \Sigma \bigsqcup_{i \in J} X_i$$

Luego, por el axioma T3, para cada $i \in J$ existe un morfismo $Z_i \rightarrow W$ que completa el siguiente diagrama a un diagrama conmutativo mediante el morfismo punteado

$$\begin{array}{ccccccc} X_i & \xrightarrow{f_i} & Y_i & \xrightarrow{g_i} & Z_i & \xrightarrow{u_i} & \Sigma X_i \\ \downarrow & & \downarrow & & \vdots & & \downarrow \\ \bigsqcup_{i \in J} X_i & \xrightarrow{\bigsqcup_{i \in J} f_i} & \bigsqcup_{i \in J} Y_i & \longrightarrow & W & \longrightarrow & \Sigma \bigsqcup_{i \in J} X_i \end{array}$$

Por la propiedad universal del coproducto, existe un morfismo $\bigsqcup_{i \in J} Z_i \rightarrow W$ que forma parte de un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \bigsqcup_{i \in J} X_i & \longrightarrow & \bigsqcup_{i \in J} Y_i & \longrightarrow & \bigsqcup_{i \in J} Z_i & \longrightarrow & \Sigma \bigsqcup_{i \in J} X_i \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{i \in J} X_i & \longrightarrow & \bigsqcup_{i \in J} Y_i & \longrightarrow & W & \longrightarrow & \Sigma \bigsqcup_{i \in J} X_i \end{array}$$

Sea A un objeto en \mathcal{T} . Aplicando el funtor cohomológico $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, A)$ al triángulo

$$X_i \xrightarrow{f_i} Y_i \xrightarrow{g_i} Z_i \xrightarrow{u_i} \Sigma X_i$$

obtenemos una sucesión exacta larga de grupos abelianos

$$\cdots \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(Z_i, A) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(Y_i, A) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X_i, A) \longrightarrow \cdots$$

Tomando el coproducto de estas sucesiones exactas largas, obtenemos la sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{i \in J} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(Z_i, A) \longrightarrow \bigoplus_{i \in J} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(Y_i, A) \longrightarrow \bigoplus_{i \in J} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X_i, A) \longrightarrow \cdots$$

que, por definición del coproducto, es isomorfa a la sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\bigsqcup_{i \in J} Z_i, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\bigsqcup_{i \in J} Y_i, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\bigsqcup_{i \in J} X_i, A) \longrightarrow \cdots$$

Por otro lado, aplicando el funtor cohomológico $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, A)$ al triángulo

$$\bigsqcup_{i \in J} X_i \longrightarrow \bigsqcup_{i \in J} Y_i \longrightarrow W \longrightarrow \Sigma \bigsqcup_{i \in J} X_i$$

obtenemos la sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\bigsqcup_{i \in J} Y_i, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\bigsqcup_{i \in J} X_i, A) \longrightarrow \cdots$$

Tenemos, entonces el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-1} \bigsqcup_{i \in J} Y_i, A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-1} \bigsqcup_{i \in J} X_i, A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\bigsqcup_{i \in J} Y_i, A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\bigsqcup_{i \in J} X_i, A) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-1} \bigsqcup_{i \in J} Y_i, A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma^{-1} \bigsqcup_{i \in J} X_i, A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\bigsqcup_{i \in J} Z_i, A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\bigsqcup_{i \in J} Y_i, A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\bigsqcup_{i \in J} X_i, A) \end{array}$$

Entonces, por el lema de los cinco, tenemos un isomorfismo natural en A

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, A) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\bigsqcup_{i \in J} Z_i, A)$$

lo que nos da, por el lema de Yoneda, un isomorfismo

$$\bigsqcup_{i \in J} Z_i \rightarrow W$$

Entonces, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \bigsqcup_{i \in J} X_i & \longrightarrow & \bigsqcup_{i \in J} Y_i & \longrightarrow & \bigsqcup_{i \in J} Z_i & \longrightarrow & \Sigma \bigsqcup_{i \in J} X_i \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{i \in J} X_i & \longrightarrow & \bigsqcup_{i \in J} Y_i & \longrightarrow & W & \longrightarrow & \Sigma \bigsqcup_{i \in J} X_i \end{array}$$

donde la fila de abajo es un triángulo exacto y las flechas verticales son isomorfismos. Entonces por el axioma T1, tenemos que

$$\bigsqcup_{i \in J} X_i \longrightarrow \bigsqcup_{i \in J} Y_i \longrightarrow \bigsqcup_{i \in J} Z_i \longrightarrow \Sigma \bigsqcup_{i \in J} X_i$$

también es un triángulo exacto. \square

Observación 1.2.10. El axioma T3 no especifica que haya una única forma de completar el diagrama. En general, habrá muchas formas de hacerlo. Por ejemplo, consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma^{-1}X & \xrightarrow{0} & Y & \longrightarrow & X \sqcup Y & \longrightarrow & X \\ \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ \Sigma^{-1}X & \xrightarrow{0} & Y & \longrightarrow & X \sqcup Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

donde las filas son el coproducto de los triángulos exactos

$$\Sigma^{-1}X \longrightarrow * \longrightarrow X \longleftarrow X$$

y

$$* \longrightarrow Y \longleftarrow Y \longrightarrow *$$

Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo en \mathcal{T} . Entonces el morfismo $\bar{f} : X \sqcup Y \rightarrow X \sqcup Y$ inducido por $(1, f) : X \rightarrow X \sqcup Y$ y $(0, 1) : Y \rightarrow X \sqcup Y$ completa el diagrama. Como esto es cierto para todo morfismo f , obtenemos que el morfismo que completa el diagrama no es único.

Definición 1.2.11. Decimos que un triángulo exacto

$$X \xrightarrow{f_1} Y \xrightarrow{f_2} Z \xrightarrow{f_3} \Sigma X$$

en una categoría triangulada \mathcal{T} **escinde** si uno de los mapas f_1, f_2, f_3 es nulo.

Lema 1.2.12. [8, Lema 4.1.12.] Si el triángulo exacto

$$X \xrightarrow{f_1} Y \xrightarrow{f_2} Z \xrightarrow{f_3} \Sigma X$$

escinde, entonces $Y \simeq X \sqcup Z$ en \mathcal{T} .

Demostración. Probaremos la afirmación para el caso $f_3 = 0$. Como

$$X \longleftarrow X \longrightarrow * \xrightarrow{0} \Sigma X$$

y

$$* \longrightarrow Z \longleftarrow Z \longrightarrow *$$

son triángulos exactos, tenemos que su coproducto

$$X \longrightarrow X \sqcup Z \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$$

también es un triángulo exacto. Luego, por el axioma T3 existe un morfismo $Y \rightarrow X \sqcup Z$ que completa el siguiente diagrama a un morfismo de triángulos exactos.

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{0} & \Sigma X \\
 \parallel & & \vdots & & \parallel & & \parallel \\
 X & \longrightarrow & X \sqcup Z & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & \Sigma X
 \end{array}$$

Como la primera y la tercera flecha vertical son isomorfismos, obtenemos que $Y \rightarrow X \sqcup Z$ es un isomorfismo. \square

Capítulo 2

Categorías Modelo

En este capítulo presentaremos la estructura de categoría modelo siguiendo el primer capítulo del libro [2]. Comenzaremos viendo la definición y algunos resultados básicos como el argumento del retractor y el lema de Ken Brown. Nos dedicaremos, luego, a estudiar la categoría de homotopía de una categoría modelo \mathcal{C} y veremos que coincide con la localización de \mathcal{C} que se obtiene invirtiendo formalmente las equivalencias débiles. Finalmente, estudiaremos funtores entre categorías modelo así como los funtores inducidos entre las categorías de homotopía.

2.1. Estructura modelo en una categoría

Dada una categoría \mathcal{C} , podemos considerar una categoría $\text{Map}(\mathcal{C})$ cuyos objetos son los morfismos de \mathcal{C} y cuyos morfismos son cuadrados conmutativos.

Definición 2.1.1. Sea \mathcal{C} una categoría.

1. Decimos que un morfismo f en \mathcal{C} es un **retractor** de un morfismo g en \mathcal{C} si f es retractor de g como objetos de $\text{Map}(\mathcal{C})$, es decir si existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & id_A & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ A & \longrightarrow & C & \longrightarrow & A \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\ B & \longrightarrow & D & \longrightarrow & B \\ & \curvearrowleft & & \curvearrowright & \\ & & id_B & & \end{array}$$

donde las composiciones horizontales son las identidades respectivas.

2. Una **factorización functorial** es un par ordenado (α, β) de funtores $\text{Map}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Map}(\mathcal{C})$ tal que $f = \beta(f) \circ \alpha(f)$ para todo $f \in \text{Map}(\mathcal{C})$. En particular, el codominio de $\alpha(f)$ es el dominio de $\beta(f)$, el codominio de $\beta(f)$ es el codominio de f y el dominio de $\alpha(f)$ es el dominio de f .

Definición 2.1.2. Sean $i : A \rightarrow B$ y $p : X \rightarrow Y$ morfismos en la categoría \mathcal{C} . Decimos que i tiene la **left lifting property** (LLP) con respecto a p y que p tiene la **right lifting property** (RLP) con respecto a i si para todo diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

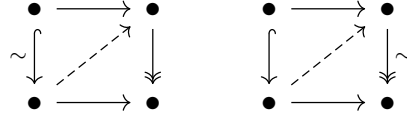
existe un levantamiento $h : B \rightarrow X$ tal que $hi = f$ y $ph = g$.

Definición 2.1.3. Una **estructura modelo** en una categoría \mathcal{C} consiste en

- tres clases de morfismos que forman subcategorías de \mathcal{C}
 - las **equivalencias débiles** que notaremos como $\xrightarrow{\sim}$
 - las **fibraciones** que notaremos como \rightarrow
 - las **cofibraciones** que notaremos como \hookrightarrow
- dos factorizaciones functoriales (α, β) y (γ, δ)

que satisfacen las siguientes condiciones:

1. **2-de-3.** Sean f y g morfismos en \mathcal{C} tales que gf está definido, si dos de los morfismos f , g y gf son equivalencias débiles, entonces el tercero también lo es
2. **Retractos.** Sean f y g morfismos en \mathcal{C} tales que f es un retracto de g , si g pertenece a alguna de las subcategorías distinguidas entonces f también
3. **Levantamientos.** Decimos que un morfismo es una **fibración trivial** si es una fibración y una equivalencia débil y que un morfismo es una **cofibración trivial** si es una cofibración y una equivalencia débil. Las cofibraciones triviales tienen la LLP respecto a las fibraciones y las cofibraciones tienen la LLP respecto a las fibraciones triviales, es decir los diagramas de la siguientes formas admiten levantamientos



4. **Factorizaciones.** Para todo morfismo f , $\alpha(f)$ es una cofibración, $\beta(f)$ es una fibración trivial, $\gamma(f)$ es una cofibración trivial y $\delta(f)$ es una fibración, es decir todo morfismo f se puede factorizar de las dos formas siguientes



Definición 2.1.4. Una **categoría modelo** es una categoría \mathcal{C} completa y cocompleta, es decir que tiene todos los límites y colímites pequeños, junto con una estructura modelo en \mathcal{C} .

Ejemplo 2.1.5. Dada una categoría cocompleta \mathcal{C} , podemos poner tres estructuras modelo en \mathcal{C} tomando los isomorfismos como una de las subcategorías distinguidas y todos los morfismos como las otras dos subcategorías. Por ejemplo, un morfismo es una equivalencia débil si y solamente si es un isomorfismo y todo morfismo es una fibración y una cofibración. En este caso, tomamos α y δ como el functor identidad, $\beta(f)$ como la identidad en el codominio de f y $\gamma(f)$ como la identidad en el dominio de f .

Observación 2.1.6. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} categorías modelo, entonces $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ es una categoría modelo con la siguiente estructura: un morfismo (f, g) de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ es una equivalencia débil (fibración, cofibración) si y solamente si f y g son equivalencias débiles (fibraciones, cofibraciones) en \mathcal{C} y \mathcal{D} respectivamente. Esta estructura modelo es la **estructura modelo producto**.

Observación 2.1.7. Si \mathcal{C} es una categoría modelo, entonces \mathcal{C}^{op} es una categoría modelo donde las cofibraciones de \mathcal{C}^{op} son las fibraciones de \mathcal{C} , las fibraciones de \mathcal{C}^{op} son las cofibraciones de \mathcal{C} y las equivalencias débiles de \mathcal{C}^{op} son las equivalencias débiles de \mathcal{C} .

Dado que una categoría modelo \mathcal{C} es cocompleta, tiene un objeto terminal $*$ y un objeto inicial \emptyset . Entonces, podemos considerar las siguientes definiciones.

Definición 2.1.8. Sea \mathcal{C} una categoría modelo y X un objeto de \mathcal{C} . Decimos que X **cofibrante** si el morfismo $\emptyset \rightarrow X$ es una cofibración y que es **fibrante** si el morfismo $X \rightarrow *$ es una fibración.

Sea X un objeto de una categoría modelo \mathcal{C} . Al aplicarle la factorización funtorial (α, β) al morfismo $\emptyset \rightarrow X$ obtenemos

$$\emptyset \hookrightarrow QX \xrightarrow{\sim} X$$

y por lo tanto, podemos considerar un funtor $X \mapsto QX$ tal que QX es cofibrante y una transformación natural $QX \xrightarrow{q_X} X$ que es una fibración trivial. Decimos que Q es el **functor de reemplazo cofibrante** de \mathcal{C} .

Análogamente, si le aplicamos factorización funtorial (γ, δ) al morfismo $X \rightarrow *$ obtenemos

$$X \xrightarrow{\sim} RX \twoheadrightarrow *$$

y por lo tanto, tenemos un funtor $X \mapsto RX$ tal que RX es fibrante y una transformación natural $X \xrightarrow{r_X} RX$ que es una cofibración trivial. Decimos que R es el **functor de reemplazo fibrante** de \mathcal{C} .

Lema 2.1.9 (Argumento del retracto). [2, Lema 1.1.9.] *Supongamos que tenemos una factorización $f = pi$ en una categoría \mathcal{C} y supongamos que f tiene la LLP con respecto a p . Entonces f es un retracto de i . Dualmente, si f tiene la RLP con respecto a i , entonces f es un retracto de p .*

Demostración. Sean $f : A \rightarrow C$, $i : A \rightarrow B$ y $p : B \rightarrow C$. Si f tiene la LLP con respecto a p , entonces tenemos un levantamiento $r : C \rightarrow B$ en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ f \downarrow & \nearrow r & \downarrow p \\ C & \xlongequal{\quad} & C \end{array}$$

Tenemos, por lo tanto, que $p \circ r = id_C$. Luego, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & \xlongequal{\quad} & A & \xlongequal{\quad} & A \\ f \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow f \\ C & \xrightarrow{r} & B & \xrightarrow{p} & C \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & id_C & \end{array}$$

y concluimos f es retracto de i . □

El argumento del retracto implica que los axiomas de categoría modelo están sobredeterminados, como veremos en el siguiente lema.

Lema 2.1.10. [2, Lema 1.1.10.] *Sea \mathcal{C} una categoría modelo. Entonces*

1. un morfismo es una cofibración si y solamente si tiene la LLP con respecto a todas las fibraciones triviales
2. un morfismo es una fibración si y solamente si tiene la RLP con respecto a todas las cofibraciones triviales

Demostración. Probaremos sólo la primera afirmación dado que la segunda es análoga.

Por definición, las cofibraciones tienen la LLP con respecto a todas las fibraciones triviales. Recíprocamente, sea f un morfismo que tiene la LLP con respecto a todas las fibraciones triviales. Si factorizamos f como $f = pi$ donde i es una cofibración y p es una fibración trivial, entonces f tiene la LLP con respecto a p . Luego, por el argumento del retracto, f es un retracto de i y, por lo tanto, f es una cofibración. \square

Observación 2.1.11. El lema anterior implica, en particular, que todo isomorfismo en una categoría modelo es una fibración trivial y una cofibración trivial.

Corolario 2.1.12. [2, Corolario 1.1.11.] Sea \mathcal{C} una categoría modelo. Entonces, las cofibraciones son cerradas bajo pushouts. Es decir, si tenemos un pushout

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \longrightarrow & D \end{array}$$

donde f es una cofibración, entonces g también es una cofibración.

Dualmente, las fibraciones son cerradas bajo pullbacks.

Demostración. Veremos, primero, que si f tiene la LLP con respecto a un morfismo h entonces g también tiene la LLP con respecto a h . Para ello, consideramos el siguiente diagrama, donde el cuadrado de la izquierda es un pushout

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{s} & C & \xrightarrow{t} & X \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow h \\ B & \xrightarrow{u} & D & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

Dado que f tiene la LLP con respecto a h , existe un morfismo $w : B \rightarrow X$ tal que $wf = ts$ y $hw = vu$.

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{s} & C & \xrightarrow{t} & X \\
 f \downarrow & & & \nearrow w & \downarrow h \\
 B & \xrightarrow{u} & D & \xrightarrow{v} & Y
 \end{array}$$

Aplicando la propiedad universal del pushout al cuadrado izquierdo del primer diagrama, obtenemos que existe un morfismo $w' : D \rightarrow X$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{s} & C \\
 f \downarrow & & \downarrow g \\
 B & \xrightarrow{u} & D
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{t} \\
 \searrow w' \\
 \downarrow h \\
 X
 \end{array}$$

Es decir, $w'u = w$ y $w'g = t$. Tenemos entonces

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{t} & X \\
 g \downarrow & \nearrow w' & \downarrow h \\
 D & \xrightarrow{v} & Y
 \end{array}$$

donde $w'g = t$. Falta ver que $hw' = v$. Al respecto, como $(hw')u = hw = vu$ y $(hw')g = ht = vg$, por la propiedad universal del pushout, tenemos que $hw' = v$. Obtuvimos, por lo tanto, que g tiene la LLP con respecto a h . Luego, si f es una cofibración, entonces tiene la LLP con respecto a todas fibraciones triviales y, por lo tanto, g también ya que es un pushout de f . Por lo tanto, por el lema 2.1.10, tenemos que g es una cofibración. \square

Concluiremos esta sección viendo el siguiente resultado.

Lema 2.1.13 (Lema de Ken Brown). [2, Lema 1.1.12.] *Sea \mathcal{C} una categoría modelo y \mathcal{D} una categoría con una subcategoría de equivalencias débiles que satisface el axioma 2-de-3. Sea $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor que manda cofibraciones triviales entre objetos cofibrantes en equivalencias débiles. Entonces, F manda todas las equivalencias débiles entre objetos cofibrantes en equivalencias débiles. Dualmente, si F manda fibraciones triviales entre objetos fibrantes en equivalencia débiles, entonces F manda todas las equivalencias débiles entre objetos fibrantes en equivalencias débiles.*

Demostración. Sea $f : A \rightarrow B$ una equivalencia débil entre objetos cofibrantes de \mathcal{C} . Factorizamos el morfismo $(f, id_B) : A \sqcup B \rightarrow B$ como

$$\begin{array}{ccccc}
 A \sqcup B & \xrightarrow{q} & C & \xrightarrow[\sim]{p} & B \\
 & & & \nearrow & \\
 & & & (f, id_B) &
 \end{array}$$

Por el diagrama de pushout

$$\begin{array}{ccc}
 \emptyset & \longrightarrow & A \\
 \downarrow & & \downarrow i_0 \\
 B & \xrightarrow{i_1} & A \sqcup B
 \end{array}$$

tenemos que las inclusiones $i_0 : A \rightarrow A \sqcup B$ y $i_1 : B \rightarrow A \sqcup B$ cofibraciones.

Luego, $q \circ i_0$ es una cofibración por ser composición de cofibraciones. Además, dado que $f = p \circ (q \circ i_0)$, tenemos que $q \circ i_0$ es una equivalencia débil por el axioma 2-de-3. Por lo tanto, $q \circ i_0$ es una cofibración trivial y, análogamente, se ve que $q \circ i_1$ es una cofibración trivial. Entonces, $F(q \circ i_0)$ y $F(q \circ i_1)$ son equivalencias débiles.

Dado que $F(p) \circ F(q \circ i_1) = F(p \circ (q \circ i_1)) = F(id_B) = id_{F(B)}$ y que $id_{F(B)}$ es una equivalencia débil, obtenemos que $F(p)$ es una equivalencia débil por el axioma 2-de-3.

Finalmente $F(f) = F(p \circ (q \circ i_0)) = F(p) \circ F(q \circ i_0)$ es una equivalencia débil por ser composición de equivalencias débiles. \square

2.2. La categoría de homotopía

Sea \mathcal{C} una categoría con una subcategoría de equivalencias débiles W . Para definir la **categoría de homotopía** $\text{Ho}(\mathcal{C})$ consideramos la categoría libre $F(\mathcal{C}, W^{-1})$ tal que:

- los objetos de $F(\mathcal{C}, W^{-1})$ son los objetos de \mathcal{C}
- un morfismo en $F(\mathcal{C}, W^{-1})$ es una cadena finita de morfismos componibles (f_1, f_2, \dots, f_n) donde cada f_i es un morfismo en \mathcal{C} o la inversa (formal) de un morfismo w_i en W .

En esta categoría, la cadena vacía en un objeto particular es la identidad en ese objeto y la composición está dada por la concatenación de cadenas.

Ahora definimos $\text{Ho}(\mathcal{C})$ como el cociente de $F(\mathcal{C}, W^{-1})$ por la mínima relación de equivalencia en $F(\mathcal{C}, W^{-1})$ que respeta la composición y verifica las siguientes relaciones:

- $id_A = (id_A)$ para todo objeto A
- $(f, g) = (g \circ f)$ para todo par de flechas componibles f y g en \mathcal{C}

- $id_{\text{dom}(w)} = (w, w^{-1})$ y $id_{\text{codom}(w)} = (w^{-1}, w)$ para todo $w \in W$, donde $\text{dom}(w)$ es el dominio de w y $\text{codom}(w)$ es el codominio de w

Notamos que existe un functor $\gamma : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$ que es la identidad en los objetos y manda morfismos de W en isomorfismos.

En principio, $\text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{C})}(A, B)$ podría no ser un conjunto, pero probaremos más adelante, en el Teorema 2.2.10, que $\text{Ho}(\mathcal{C})$ es efectivamente una categoría localmente pequeña cuando \mathcal{C} es una categoría modelo.

Comenzamos viendo que $\text{Ho}(\mathcal{C})$ está caracterizada por una propiedad universal.

Lema 2.2.1. [2, Lema 1.2.2] *Sea \mathcal{C} una categoría con una subcategoría W . Entonces*

1. *Si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un functor que manda morfismos de W en isomorfismos, entonces existe un único functor $\text{Ho}(F) : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$ tal que $(\text{Ho}(F)) \circ \gamma = F$*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\
 & \searrow \gamma & \nearrow \text{Ho}(F) \\
 & & \text{Ho}(\mathcal{C})
 \end{array}$$

2. *Sea $\delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ un functor que manda morfismos de W en isomorfismos y que verifica la propiedad de la parte anterior, entonces existe un único isomorfismo $F : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{E}$ tal que $F\gamma = \delta$*
3. *La correspondencia de la primera parte induce un isomorfismo entre la categoría de funtores $\text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$ con las transformaciones naturales y la categoría de funtores $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ que mandan morfismos de W en isomorfismos con las transformaciones naturales.*

Demostración.

1. Definimos $\text{Ho}(F) : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$ de la siguiente forma:

- si X es un objeto de \mathcal{C} , entonces $\text{Ho}(F)(X) = F(X)$
- si f es un morfismo en \mathcal{C} , entonces $\text{Ho}(F)(f) = F(f)$
- si w es un elemento de W , entonces $\text{Ho}(F)(w^{-1}) = (Fw)^{-1}$

La representación de $\text{Ho}(\mathcal{C})$ como cociente de una categoría libre nos asegura que a través de esta definición obtenemos un functor bien definido.

2. Por la propiedad universal aplicada a γ , tenemos que existe un único funtor $F : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{E}$ tal que $F\gamma = \delta$. Por otro lado, aplicando la propiedad universal a δ tenemos que existe un único funtor $G : \mathcal{E} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$ tal que $G\delta = \gamma$. Entonces, $GF\gamma = G\delta = \gamma$. Luego, el funtor GF y el funtor identidad en $\text{Ho}(\mathcal{C})$ preservan γ y por lo tanto deben ser iguales. Análogamente, $FG\delta = F\gamma = \delta$, entonces FG y el funtor identidad en \mathcal{E} preservan δ y por lo tanto son iguales. Obtenemos, entonces, que F es un isomorfismo.
3. A cada funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ que manda equivalencias débiles en isomorfismos le asociamos $\text{Ho}(F) : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$ y a cada transformación natural $\tau : F \rightarrow G$ le asociamos $\text{Ho}(\tau) : \text{Ho}(F) \rightarrow \text{Ho}(G)$ donde $\text{Ho}(\tau_X) = \tau_X$. La transformación $\text{Ho}(\tau)$ es natural en $\text{Ho}(\mathcal{C})$ porque es natural con respecto a las equivalencias débiles y, por lo tanto, también debe ser natural con respecto a sus inversas. La inversa de este funtor manda un funtor $G : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$ a $G \circ \delta$ y una transformación natural τ a $\tau \circ \gamma$, donde $(\tau \circ \gamma)_X = \tau_X$.

□

Dada una categoría modelo \mathcal{C} , consideramos las siguientes subcategorías:

- \mathcal{C}_c es la subcategoría plena de objetos cofibrantes
- \mathcal{C}_f es la subcategoría plena de objetos fibrantes
- \mathcal{C}_{cf} es la subcategoría plena de objetos cofibrantes y fibrantes

Proposición 2.2.2. [2, Proposición 1.2.3] *Sea \mathcal{C} una categoría modelo. Los funtores de inclusión inducen equivalencias de categorías*

$$\text{Ho}(\mathcal{C}_{cf}) \longrightarrow \text{Ho}(\mathcal{C}_c) \longrightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$$

y

$$\text{Ho}(\mathcal{C}_{cf}) \longrightarrow \text{Ho}(\mathcal{C}_f) \longrightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$$

Demostración. Veremos que la inclusión $\mathcal{C}_c \rightarrow \mathcal{C}$ induce una equivalencia de categorías $\text{Ho}(\mathcal{C}_c) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$. De forma análoga, se prueba que las otras inclusiones inducen equivalencias de categorías.

La inclusión $i : \mathcal{C}_c \rightarrow \mathcal{C}$ preserva equivalencias débiles y por lo tanto induce un funtor $\text{Ho}(i) : \text{Ho}(\mathcal{C}_c) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$. Veremos que el inverso de este funtor está inducido por el funtor de reemplazo cofibrante. Sea $f : X \rightarrow Y$ una equivalencia débil en \mathcal{C} . Tenemos que QX es cofibrante y que existe una fibración trivial natural $q_X : QX \rightarrow X$. Consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow[\sim]{f} & Y \\ \sim \uparrow & & \sim \uparrow \\ QX & \xrightarrow[Qf]{} & QY \end{array}$$

Entonces, por el axioma 2-de-3, tenemos que Qf es una equivalencia débil y por lo tanto Q preserva equivalencias débiles. Luego, Q induce un functor $\text{Ho}(Q) : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C}_c)$. La transformación natural q se puede pensar como una equivalencia débil natural dada por $Q \circ i \rightarrow 1_{\mathcal{C}_c}$ o por $i \circ Q \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$. Así, en la categoría de homotopía, $\text{Ho}(q)$ es un isomorfismo natural $\text{Ho}(i) \circ \text{Ho}(Q) \rightarrow 1_{\text{Ho}(\mathcal{C}_c)}$ y un isomorfismo natural $\text{Ho}(Q) \circ \text{Ho}(i) \rightarrow 1_{\text{Ho}(\mathcal{C})}$. Por lo tanto, $\text{Ho}(Q)$ y $\text{Ho}(i)$ son equivalencias de categorías inversas una de la otra. \square

Veremos, a continuación, una construcción alternativa de $\text{Ho}(\mathcal{C}_{cf})$. Esta construcción nos permitirá probar que $\text{Ho}(\mathcal{C}_{cf})$, y por lo tanto también $\text{Ho}(\mathcal{C})$, son realmente categorías.

Definición 2.2.3. Sean \mathcal{C} una categoría modelo y $f, g : B \rightarrow X$ dos morfismos en \mathcal{C} .

1. un **objeto cilindro** de B es una factorización del fold map $B \sqcup B \rightarrow B$ en una cofibración seguida de una equivalencia débil

$$B \sqcup B \xrightarrow[i_0+i_1]{} \text{Cyl}(B) \xrightarrow[\sim]{s} B$$

2. un **objeto camino** de X es una factorización del morfismo diagonal $X \rightarrow X \times X$ en una equivalencia débil seguida de una fibrición

$$X \xrightarrow[\sim]{r} \text{P}(X) \xrightarrow[(p_0, p_1)]{\twoheadrightarrow} X \times X$$

3. una **homotopía a izquierda** de f a g es un morfismo $H : \text{Cyl}(B) \rightarrow X$ para algún objeto cilindro $\text{Cyl}(B)$ de B tal que $H i_0 = f$ y $H i_1 = g$. Decimos que f y g son **homotópicos a izquierda** si existe una homotopía a izquierda de f a g y lo notaremos de la siguiente manera: $f \sim^l g$.
4. una **homotopía a derecha** de f a g es un morfismo $K : B \rightarrow \text{P}(X)$ para algún objeto camino $\text{P}(X)$ de X tal que $p_0 K = f$ y $p_1 K = g$. Decimos que f y g son **homotópicos a derecha** si existe una homotopía a derecha de f a g y lo notaremos de la siguiente manera: $f \sim^r g$.
5. decimos que f y g son **homotópicos** si son homotópicos a izquierda y a derecha y lo notaremos de la siguiente manera: $f \sim g$.

6. decimos que f es una **equivalencia homotópica** si existe un morfismo $h : X \rightarrow B$ tal que $hf \sim id_B$ y $fh \sim id_X$

Observación 2.2.4. Un objeto camino para B en \mathcal{C} es lo mismo que un objeto cilindro para B en la categoría modelo dual \mathcal{C}^{op} . De forma análoga, una homotopía a derecha entre f y g en \mathcal{C} es lo mismo que una homotopía a izquierda entre f y g en \mathcal{C}^{op} .

Aplicando la factorización funtorial al fold map, obtenemos un objeto cilindro funtorial de B que denotaremos por $B \times I$:

$$B \sqcup B \xrightarrow{i_0+i_1} B \times I \xrightarrow{\sim} B$$

obteniendo, además, en este caso, que el morfismo $s : B \times I \rightarrow B$ es una fibración trivial. Notemos que si $\text{Cyl}(B)$ es otro objeto cilindro de B entonces existe una equivalencia débil $\text{Cyl}(B) \rightarrow B \times I$ compatible con los morfismos (i_0, i_1) y s , que está dada por un levantamiento en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} B \sqcup B & \xrightarrow{i_0+i_1} & B \times I \\ \downarrow i_0+i_1 & \nearrow & \downarrow s \\ \text{Cyl}(B) & \xrightarrow{\sim} & B \end{array}$$

Dualmente, aplicando la factorización funtorial al morfismo diagonal, obtenemos un objeto camino funtorial de X que denotaremos por X^I :

$$X \xrightarrow{\sim} X^I \xrightarrow{(p_0, p_1)} X \times X$$

y en este caso tenemos que el morfismo $r : X \rightarrow X^I$ es una cofibración trivial. Análogamente al caso anterior, dado otro objeto camino $P(X)$ de X existe una equivalencia débil $X^I \rightarrow P(X)$ compatible con los morfismos r y (p_0, p_1) .

Proposición 2.2.5. [2, Proposición 1.2.5] Sean \mathcal{C} una categoría modelo y $f, g : B \rightarrow X$ dos morfismos de \mathcal{C} .

1. Si $f \sim^l g$ y $h : X \rightarrow Y$, entonces $hf \sim^l hg$. Dualmente, si $f \sim^r g$ y $h : A \rightarrow B$, entonces $fh \sim^r gh$.
2. Si X es fibrante, $f \sim^l g$ y $h : A \rightarrow B$, entonces $fh \sim^l gh$. Dualmente, si B es cofibrante, $f \sim^r g$ y $h : X \rightarrow Y$, entonces $hf \sim^r hg$.
3. Si B es cofibrante, entonces ser homotópicos a izquierda es una relación de equivalencia en $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X)$. Dualmente, si X es fibrante, ser homotópicos a derecha es una relación de equivalencia en $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X)$.

4. Si B es cofibrante y $h : X \rightarrow Y$ es una fibración trivial o una equivalencia débil entre objetos fibrantes, entonces h induce un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X)/\sim_l \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, Y)/\sim_l$$

Dualmente, si X es fibrante y $h : A \rightarrow B$ es una cofibración trivial o una equivalencia débil entre objetos cofibrantes entonces h induce un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X)/\sim_r \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)/\sim_r$$

5. Si B es cofibrante, entonces $f \sim^l g$ implica $f \sim^r g$. Asimismo, si $P(X)$ es un objeto camino cualquiera de X , existe una homotopía a derecha de f a g con ese objeto camino. Dualmente, si X es fibrante, entonces $f \sim^r g$ implica $f \sim^l g$ y si $\mathrm{Cyl}(B)$ es un objeto cilindro de B , entonces existe una homotopía a izquierda de f a g con ese objeto cilindro.

Demostración. Por dualidad alcanza con probar las afirmaciones para homotopías a izquierda.

- Si $f \sim^l g$, entonces existe una homotopía a izquierda $H : \mathrm{Cyl}(B) \rightarrow X$ para algún objeto cilindro $\mathrm{Cyl}(B)$ de B tal que $Hi_0 = f$ y $Hi_1 = g$.
Consideramos $hH : \mathrm{Cyl}(B) \rightarrow Y$. Tenemos que $(hH)i_0 = hf$ y $(hH)i_1 = hg$. Por lo tanto, hH es una homotopía a izquierda de hf en hg , es decir $hf \sim^l hg$.
- Dado que $f \sim^l g$, tenemos que existe una homotopía a izquierda $H : \mathrm{Cyl}(B) \rightarrow X$ de f en g para algún objeto cilindro $\mathrm{Cyl}(B)$:

$$B \sqcup B \xrightarrow{i_0+i_1} \mathrm{Cyl}(B) \xrightarrow{s} B$$

Veamos que, como X es fibrante, podemos asumir que $\mathrm{Cyl}(B) \xrightarrow{s} B$ es una fibración trivial. Para ello, factorizamos la equivalencia débil s como una cofibración trivial seguida de una fibración, que también resulta trivial por el axioma 2-de-3:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cyl}(B) & \xrightarrow{\sim_s} & B \\ & \searrow \sim & \nearrow \sim_{s'} \\ & & B' \end{array}$$

Entonces B' también es un objeto cilindro de B y, además, como X es fibrante hay una extensión de la homotopía $H : \text{Cyl}(B) \rightarrow X$ a una homotopía $H' : B' \rightarrow X$ dada por el levantamiento en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Cyl}(B) & \longrightarrow & X \\
 \downarrow \sim & \nearrow H' & \downarrow \\
 B' & \longrightarrow & *
 \end{array}$$

Luego, podemos asumir que $\text{Cyl}(B) \xrightarrow[s]{\sim} B$ es una fibración trivial.

Sea

$$A \sqcup A \xrightarrow{j_0+j_1} \text{Cyl}(A) \xrightarrow[s]{\sim} A$$

un objeto cilindro de A y consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A \sqcup A & \xrightarrow{(i_0+i_1)(h \sqcup h)} & \text{Cyl}(B) \\
 \downarrow j_0+j_1 & \nearrow K & \downarrow s \sim \\
 \text{Cyl}(A) & \xrightarrow{ht} & B
 \end{array}$$

que admite un levantamiento $K : \text{Cyl}(A) \rightarrow \text{Cyl}(B)$. Considerando $HK : \text{Cyl}(A) \rightarrow X$, tenemos que

$$\begin{aligned}
 (HK)j_0 &= Hi_0h = fh \\
 (HK)j_1 &= Hi_1h = gh
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, HK es una homotopía a izquierda de fh en gh .

3. Se tiene que la relación ser homotópicos a izquierda es reflexiva y simétrica para todo B :

- Reflexiva: Si

$$B \sqcup B \xrightarrow{\quad} \text{Cyl}(B) \xrightarrow[s]{\sim} B$$

es un objeto cilindro de B entonces fs es una homotopía izquierda de f en f .

- Simétrica: Sea $H : \text{Cyl}(B) \rightarrow X$ una homotopía izquierda de f en g . Podemos obtener un nuevo objeto cilindro $\text{Cyl}(B)'$ de B intercambiando i_0 con i_1 . Luego, $H : \text{Cyl}(B)' \rightarrow X$ es una homotopía a izquierda de g en f

Veamos ahora, asumiendo que B es cofibrante, que la relación también es transitiva.

Consideramos $f, g, h : B \rightarrow X$ morfismos tales que $f \sim^l g$ y $g \sim^l h$. Tenemos, entonces, una homotopía a izquierda $H : \text{Cyl}(B) \rightarrow X$ de f en g para algún objeto cilindro $\text{Cyl}(B)$ de B :

$$B \sqcup B \xrightarrow{i_0+i_1} \text{Cyl}(B) \xrightarrow{\sim_s} B$$

y una homotopía a izquierda $H' : \text{Cyl}(B)' \rightarrow X$ de g en h para algún objeto cilindro $\text{Cyl}(B)'$ de B :

$$B \sqcup B \xrightarrow{i'_0+i'_1} \text{Cyl}(B)' \xrightarrow{\sim_{s'}} B$$

Sea C el pushout en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{i_1} & \text{Cyl}(B) \\ i'_0 \downarrow & & \downarrow \\ \text{Cyl}(B)' & \longrightarrow & C \end{array}$$

Sea j_0 la composición

$$B \xrightarrow{i_0} \text{Cyl}(B) \longrightarrow C$$

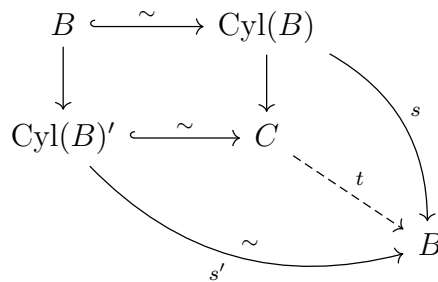
j_1 la composición

$$B \xrightarrow{i'_1} \text{Cyl}(B)' \longrightarrow C$$

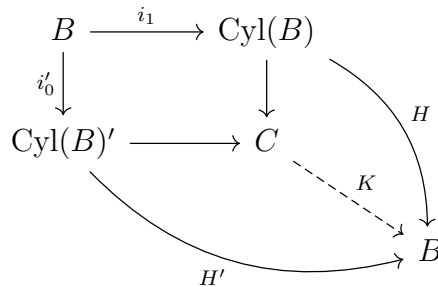
y el morfismo $C \rightarrow B$ inducido por los morfismos s y s' a través de la propiedad universal del pushout en el diagrama anterior. Obtenemos, así, una factorización del fold map $B \sqcup B \rightarrow B$:

$$B \sqcup B \xrightarrow{j_0+j_1} C \xrightarrow{t} B$$

Dado que B es un objeto cofibrante, tenemos que $i_1 : B \rightarrow \text{Cyl}(B)$ es una cofibración trivial, por lo tanto $\text{Cyl}(B)' \rightarrow C$ también es una cofibración trivial por ser el pushout de una cofibración trivial. Luego, por el axioma 2-de-3 obtenemos que t es una equivalencia débil.



Sea $K : C \rightarrow B$ el morfismo inducido por H y H' a través de la propiedad universal del pushout en el siguiente diagrama



Tenemos que $Kj_0 = Hi_0 = f$ y $Kj_1 = H'i_1 = h$. Dado que $j_0 + j_1$ no es necesariamente una cofibración, tenemos que K no es una homotopía a izquierda pero podemos convertirla en una factorizando $j_0 + j_1$ como una cofibración seguida de una fibración trivial:

$$\begin{array}{ccc}
 B \sqcup B & \xrightarrow{j_0+j_1} & C \\
 & \searrow & \nearrow \sim \\
 & & C' \xrightarrow{\phi} & C
 \end{array}$$

Así, C' es un objeto cilindro de B y la composición $K\phi$ es una homotopía a izquierda de f en h .

4. Consideramos el morfismo

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X)/\sim^l & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, Y)/\sim^l \\ f & \longmapsto & hf \end{array}$$

Para ver que es sobreyectivo, tomamos $f' : B \rightarrow Y$. Como B es cofibrante y h es una fibración trivial, el siguiente diagrama admite un levantamiento

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow f & \downarrow \sim h \\ B & \xrightarrow{f'} & Y \end{array}$$

Es decir, existe $f : B \rightarrow X$ tal que $hf = f'$.

Para probar que es inyectivo, supongamos que $hf \sim^l hg$ y veamos que $f \sim^l g$. Sea $H : \text{Cyl}(B) \rightarrow Y$ una homotopía a izquierda de hf en hg . El siguiente diagrama admite un levantamiento

$$\begin{array}{ccc} B \sqcup B & \xrightarrow{f+g} & X \\ i_0+i_1 \downarrow & \nearrow K & \downarrow \sim h \\ \text{Cyl}(B) & \xrightarrow{H} & Y \end{array}$$

y tenemos que K es una homotopía a izquierda de f en g .

5. Sean $H : \text{Cyl}(B) \rightarrow X$ una homotopía a izquierda de f en g y

$$X \xrightarrow{\sim_r} P(X) \xrightarrow{(p_0, p_1)} X \times X$$

un objeto camino de X . Dado que B es cofibrante, se tiene que $i_1 : B \rightarrow \text{Cyl}(B)$ es una cofibración trivial. Por lo tanto, el siguiente diagrama admite un levantamiento

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{rf} & P(X) \\ i_0 \downarrow \sim & \nearrow J & \downarrow (p_0, p_1) \\ \text{Cyl}(B) & \xrightarrow{(fs, H)} & X \times X \end{array}$$

Luego, tomando $K = Ji_1$ obtenemos que $p_0K = fsi_1 = f$ y $p_1K = Hi_1 = g$. Por lo tanto K es una homotopía a derecha de f en g .

□

Corolario 2.2.6. [2, Corolario 1.2.6.] Sea \mathcal{C} una categoría modelo, B un objeto cofibrante de \mathcal{C} y X un objeto fibrante de \mathcal{C} . Entonces, las homotopías a izquierda coinciden con las homotopías a derecha y son relaciones de equivalencia en $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X)$. Además, si $f \sim g : B \rightarrow X$, entonces existe una homotopía a izquierda $H : \text{Cyl}(B) \rightarrow X$ de f a g usando cualquier objeto cilindro $\text{Cyl}(B)$ de B . Dualmente, existe una homotopía a derecha $K : B \rightarrow \text{P}(X)$ de f a g usando cualquier objeto camino $\text{P}(X)$ de X .

Corolario 2.2.7. [2, Corolario 1.2.7.] La relación de homotopía en los morfismos de \mathcal{C}_{cf} es una relación de equivalencia y es compatible con la composición. Por lo tanto la categoría \mathcal{C}_{cf}/\sim existe.

Tenemos que el functor $\mathcal{C}_{cf} \rightarrow \mathcal{C}_{cf}/\sim$ invierte las equivalencias homotópicas en \mathcal{C}_{cf} . Nos interesa que invierta las equivalencias débiles y para probar que esto se cumple, veremos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.8. [2, Proposición 1.2.8.] Sea \mathcal{C} una categoría modelo. Entonces, un morfismo en \mathcal{C}_{cf} es una equivalencia débil si y solamente si es una equivalencia homotópica.

Demostración. Sea $f : A \rightarrow B$ una equivalencia débil entre objetos fibrantes y cofibrantes. Si X es un objeto fibrante y cofibrante, entonces f induce un isomorfismo $f_* : \text{Hom}_{\mathcal{C}_{cf}/\sim}(X, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_{cf}/\sim}(X, B)$ dado por $f_*(h) = fh$. Tomando $X = B$ obtenemos que existe un único morfismo $fg \sim 1_B$. Por lo tanto, $fgf \sim f$ y tomando $X = A$ obtenemos que $gf \sim 1_A$. Entonces, f es una equivalencia homotópica.

Recíprocamente, sea $f : A \rightarrow B$ una equivalencia homotópica entre objetos fibrantes y cofibrantes. Factorizamos f de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow \scriptstyle g & \nearrow \scriptstyle p \\ & & C \end{array}$$

Entonces, C también es un objeto fibrante y cofibrante ya que

$$\emptyset \hookrightarrow A \xleftarrow{g} C \text{ implica } \emptyset \hookrightarrow C$$

y

$$C \xrightarrow{p} B \twoheadrightarrow * \text{ implica } C \twoheadrightarrow *$$

Sea $f' : B \rightarrow A$ una inversa homotópica de f y $H : \text{Cyl}(B) \rightarrow B$ una homotopía a izquierda de ff' en 1_B , donde $B \sqcup B \hookrightarrow \text{Cyl}(B) \xrightarrow{\sim} B$ es un objeto cilindro de B . Dado que B es cofibrante, resulta que i_0 es una cofibración trivial y el diagrama

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{gf'} & C \\ i_0 \downarrow \sim & \nearrow H' & \downarrow p \\ \text{Cyl}(B) & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

admite un levantamiento $H' : \text{Cyl}(B) \rightarrow C$. Sea $q = H'i_1 : B \rightarrow C$. Entonces tenemos que

$$pq = pH'i_1 = Hi_1 = 1_B$$

y además H' es una homotopía a izquierda de gf' en q , ya que

$$H'i_0 = gf' \text{ y } H'i_1 = q$$

Como g es una equivalencia débil, tenemos que es una equivalencia homotópica. Sea $g' : C \rightarrow A$ una inversa homotópica de g . Entonces, $p \sim pgg' \sim fg'$ y por lo tanto $qp \sim (gf')(fg') \sim 1_C$. Si $K : \text{Cyl}(C) \rightarrow C$ es una homotopía a izquierda de 1_C en qp , tenemos que $Ki_0 = 1_C$ es una equivalencia débil. Así, como i_0 también es una equivalencia débil, por el axioma 2-de-3, tenemos que K es una equivalencia débil y por lo tanto $Ki_1 = qp$ también.

Luego, considerando el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{1_C} & C & \xrightarrow{1_C} & C \\ p \downarrow & & \sim \downarrow qp & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{q} & C & \xrightarrow{p} & B \\ & \searrow & \text{---} & \nearrow & \\ & & 1_B & & \end{array}$$

obtenemos que p es un retracto de qp y por lo tanto p es una equivalencia débil. \square

Corolario 2.2.9. [2, Corolario 1.2.9.] Sea \mathcal{C} una categoría modelo. Sean $\gamma : \mathcal{C}_{cf} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C}_{cf})$ y $\delta : \mathcal{C}_{cf} \rightarrow \mathcal{C}_{cf}/\sim$ los funtores canónicos. Existe, entonces, un único isomorfismo de categorías $j : \mathcal{C}_{cf}/\sim \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C}_{cf})$ tal que $j\delta = \gamma$. Además, j es la identidad en los objetos.

Demostración. Veremos que \mathcal{C}_{cf}/\sim verifica la misma propiedad universal que $\text{Ho}(\mathcal{C}_{cf})$. Como $\delta : \mathcal{C}_{cf} \rightarrow \mathcal{C}_{cf}/\sim$ manda equivalencias homotópicas en isomorfismos, por la proposición anterior manda equivalencias débiles en isomorfismos. Sea $F : \mathcal{C}_{cf} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor que manda equivalencias débiles en

isomorfismos. Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : A \rightarrow B$ morfismos en \mathcal{C}_{cf} . Tomamos un objeto cilindro de A :

$$A \sqcup A \xrightarrow{i_0+i_1} \text{Cyl}(A) \xrightarrow{\sim_s} A$$

Entonces, $si_0 = si_1 = 1_A$ y por lo tanto, como s es una equivalencia débil, tenemos que $Fi_0 = Fi_1$. Luego, si $H : \text{Cyl}(A) \rightarrow B$ es una homotopía izquierda de f en g , entonces

$$Ff = H(hi_0) = (FH)(Fi_0) = (FH)(Fi_1) = F(Hi_1) = Fg$$

Es decir, F identifica morfismos homotópicos a izquierda. Dualmente, identifica a morfismos homotópicos a derecha. Existe, entonces un único funtor $G : \mathcal{C}_{cf}/\sim \rightarrow \mathcal{D}$ tal que $G\delta = F$. Tenemos que G es la identidad en los objetos y manda la clase de equivalencia de f en $F(f)$. \square

Concluimos esta sección con el siguiente resultado que será considerado como el teorema fundamental de las categorías modelo.

Teorema 2.2.10. [2, Teorema 1.2.10.] *Sea \mathcal{C} una categoría modelo y sean $\gamma : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$ el funtor canónico, R el funtor de reemplazo fibrante y Q el funtor de reemplazo cofibrante. Entonces,*

1. *La inclusión $\mathcal{C}_{cf} \rightarrow \mathcal{C}$ induce una equivalencia de categorías*

$$\mathcal{C}_{cf}/\sim \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C}_{cf}) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$$

2. *Existen isomorfismos naturales*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(QRX, QRY)/\sim \simeq \text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{C})}(\gamma X, \gamma Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(RQX, RQY)/\sim$$

Además, existe un isomorfismo natural

$$\text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{C})}(\gamma X, \gamma Y) \simeq \text{Ho}_{\mathcal{C}}(QX, RY)/\sim$$

y, si X es cofibrante e Y es fibrante, entonces existe un isomorfismo natural

$$\text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{C})}(\gamma X, \gamma Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)/\sim$$

En particular, $\text{Ho}(\mathcal{C})$ es una categoría.

3. *El funtor γ identifica morfismos homotópicos a izquierda o a derecha*
4. *Si $f : A \rightarrow B$ es un morfismo en \mathcal{C} tal que γf es un isomorfismo en $\text{Ho}(\mathcal{C})$, entonces f es una equivalencia débil.*

Demostración.

1. Ya vimos que la inclusión $\mathcal{C}_{cf} \rightarrow \mathcal{C}$ induce una equivalencia de categorías $\text{Ho}(\mathcal{C}_{cf}) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$. Además, por el corolario anterior tenemos que $\mathcal{C}_{cf}/\sim \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C}_{cf})$ es un isomorfismo de categorías.
2. Vimos también que la inversa de la equivalencia $\text{Ho}(\mathcal{C}_{cf}) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$ está dada por $\text{Ho}(Q) \circ \text{Ho}(R)$, o por $\text{Ho}(R) \circ \text{Ho}(Q)$, lo que nos da los isomorfismos naturales

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(QRX, QRY)/\sim \simeq \text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{C})}(\gamma X, \gamma Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(RQX, RQY)/\sim$$

Para probar que $\text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{C})}(\gamma X, \gamma Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(QX, RY)/\sim$ alcanza con ver que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(QX, RY)/\sim \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(RQX, RQY)/\sim$. Como RQY es fibrante y cofibrante y $QX \rightarrow RQX$ es una equivalencia débil, tenemos que

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(RQX, RQY)/\sim \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(QX, RQY)/\sim$$

Luego, dado que QX es cofibrante y $QRY \rightarrow RQY$ es una equivalencia débil, tenemos que

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(QX, RQY)/\sim \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(QX, QRY)/\sim$$

y, como $QRY \rightarrow RY$ es una equivalencia débil, obtenemos que

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(QX, QRY)/\sim \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(QX, RY)/\sim$$

3. Sean $f, g : A \rightarrow B$ dos morfismos en \mathcal{C} y sea $H : \text{Cyl}(A) \rightarrow B$ una homotopía a izquierda de f en g donde $\text{Cyl}(A)$ es un objeto cilindro de A dado por

$$A \sqcup A \xrightarrow[i_0+i_1]{} \text{Cyl}(A) \xrightarrow[s]{} A$$

Como $si_0 = si_1$ tenemos que

$$\gamma(s)\gamma(i_0) = \gamma(si_0) = \gamma(si_1) = \gamma(s)\gamma(i_1)$$

Luego, como s es una equivalencia débil y γ es un funtor que manda equivalencias débiles en isomorfismos, tenemos que $\gamma(s)$ es un isomorfismo y, por lo tanto, $\gamma(i_0) = \gamma(i_1)$. Entonces

$$\gamma(f) = \gamma(Hi_0) = \gamma(H)\gamma(i_1) = \gamma(Hi_1) = \gamma(g)$$

Luego, γ identifica morfismos homotópicos a izquierda. Análogamente se ve que identifica morfismos homotópicos a derecha.

4. Sea $f : A \rightarrow B$ un morfismo en \mathcal{C} tal que γf es un isomorfismo en $\text{Ho}(\mathcal{C})$. Entonces, QRf es un isomorfismo en \mathcal{C}_{cf}/\sim y por lo tanto QRf es una equivalencia homotópica en \mathcal{C}_{cf}/\sim . Luego, QRf es una equivalencia débil en \mathcal{C}_{cf}/\sim y, como las transformaciones $QX \rightarrow X$ y $X \rightarrow RX$ son equivalencias débiles, tenemos que f es una equivalencia débil por el axioma 2-de-3.

□

2.3. Los funtores de Quillen

Estudiaremos, en esta sección, morfismos entre categorías modelo. Estos morfismos son llamados funtores de Quillen o adjunciones de Quillen. Veremos que un functor de Quillen induce un functor entre las categorías de homotopía. Puede ser que este functor derivado sea una equivalencia de categorías aunque el functor original entre las categorías modelo no lo sea. En este caso, se trata de equivalencias de Quillen.

2.3.1. Adjunciones de Quillen

Definición 2.3.1. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos categorías. Una **adjunción** entre \mathcal{C} y \mathcal{D} es una 3-upla (L, R, ϕ) donde $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $R : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ son funtores y ϕ le asigna a cada par de objetos $X \in \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{D}$ una biyección

$$\phi_{XY} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(L(X), Y) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, R(Y))$$

que es natural en X y en Y . Al functor L lo llamamos **adjunto a izquierda** y a R lo llamamos **adjunto a derecha**. Notaremos la adjunción (L, R, ϕ) mediante

$$F : \mathcal{C} \xrightleftharpoons[\perp]{} \mathcal{D} : R$$

Esta definición de adjunción es equivalente a la existencia de dos transformaciones naturales $\epsilon : FG \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$ y $\eta : 1_{\mathcal{D}} \rightarrow GF$, llamadas counidad y unidad de la adjunción respectivamente, tales que las composiciones

$$F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\epsilon F} F \quad \text{y} \quad G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\epsilon} G$$

son las transformaciones identidad 1_F y 1_G respectivamente.

Definición 2.3.2. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} categorías modelo.

1. Decimos que un functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un **functor de Quillen a izquierda** si es adjunto a izquierda y preserva cofibraciones y cofibraciones triviales
2. Decimos que un functor $U : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ es un **functor de Quillen a derecha** si es un adjunto a derecha y preserva fibraciones y fibraciones triviales
3. Decimos que una adjunción (F, U, ϕ) de \mathcal{C} en \mathcal{D} es una **adjunción de Quillen** si F es un functor de Quillen a izquierda y U es un functor de Quillen a derecha.

En lo que sigue, dada una adjunción de Quillen (F, U, ϕ) , denotaremos por η a la unidad de la adjunción y por ϵ a la counidad de la adjunción.

Notamos que, por el lema de Ken Brown, tenemos que todo functor de Quillen a izquierda preserva equivalencia débiles entre objetos cofibrantes y que todo functor de Quillen a derecha preserva equivalencias débiles entre objetos fibrantes.

Veremos, en el siguiente lema, que en la definición de adjunción de Quillen alcanza con que uno de los funtores sea de Quillen.

Lema 2.3.3. [2, Lema 1.3.4.] Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} categorías modelo y (F, U, ϕ) una adjunción de \mathcal{C} en \mathcal{D} . Entonces son equivalentes:

1. U es un functor de Quillen a derecha
2. F es un functor de Quillen a izquierda
3. (F, U, ϕ) es una adjunción de Quillen

Demostración. Veremos que la primera afirmación implica la segunda. Si (F, U, ϕ) es una adjunción y U es un functor de Quillen a derecha, entonces F es adjunto a izquierda. Luego, para ver que F es un functor de Quillen a izquierda, hay que ver que preserva cofibraciones y cofibraciones triviales. Sea $p : X \rightarrow Y$ una cofibración en \mathcal{C} y $f : Z \rightarrow W$ una fibración trivial en \mathcal{D} . Como U es de Quillen a derecha, tenemos que $U(f)$ es una fibración trivial. Por lo tanto, el siguiente cuadrado conmutativo admite un levantamiento a

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{k} & U(Z) \\
 p \downarrow & \nearrow a & \sim \downarrow U(f) \\
 Y & \xrightarrow{l} & U(W)
 \end{array}$$

Luego, por naturalidad de ϕ , obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
L(X) & \xrightarrow{\phi^{-1}(k)} & Z \\
L(p) \downarrow & \searrow^{\phi^{-1}(a)} & \downarrow \sim f \\
L(Y) & \xrightarrow{\phi^{-1}(l)} & W
\end{array}$$

Entonces, $L(p)$ tiene la LLP con respecto a todas las fibraciones triviales y, por lo tanto, $L(p)$ es una cofibración en \mathcal{D} . De manera análoga se prueba que L preserva las cofibraciones triviales.

Dualmente se prueba que la segunda afirmación implica la primera.

Finalmente, si uno de los adjuntos es de Quillen también lo es el otro y por lo tanto la adjunción es de Quillen. Recíprocamente, si la adjunción es de Quillen entonces los dos funtores adjuntos son de Quillen. \square

Observación 2.3.4. Los funtores de Quillen tanto a izquierda como a derecha son estables bajo composición. Además, las adjunciones de Quillen son estables bajo composición. De hecho, si $(F, U, \phi) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $(F', U', \phi') : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ son adjunciones, podemos definir una adjunción entre \mathcal{C} y \mathcal{E} como la composición $(F' \circ F, U \circ U', \phi \circ \phi')$ donde $\phi \circ \phi'$ es la composición

$$\text{Hom}_{\mathcal{E}}(F'FA, B) \xrightarrow{\cong_{\phi'}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, U'B) \xrightarrow{\cong_{\phi}} \text{Hom}_{\mathcal{E}}(A, UU'B)$$

2.3.2. Funtores derivados

Estudiaremos ahora los funtores inducidos en la categoría de homotopía por los funtores de Quillen.

Definición 2.3.5. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} categorías modelo.

1. Si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un functor de Quillen a izquierda, definimos el **functor de Quillen derivado total a izquierda** $\mathbb{L}F : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{D})$ como la composición

$$\text{Ho}(\mathcal{C}) \xrightarrow[\text{Ho}(Q)]{} \text{Ho}(\mathcal{C}_c) \xrightarrow[\text{Ho}(F)]{} \text{Ho}(\mathcal{D})$$

Dada una transformación natural $\tau : F \rightarrow F'$ entre funtores de Quillen a izquierda, definimos la **transformación natural derivada total** $\mathbb{L}\tau$ como $\text{Ho}(\tau) \circ \text{Ho}(Q)$ de forma que $(\mathbb{L}\tau)_X = \tau_{QX}$.

2. Si $U : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ es un functor de Quillen a derecha, definimos el **functor de Quillen derivado total a derecha** $\mathbb{R}U : \text{Ho}(\mathcal{D}) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$ como la composición

$$\mathrm{Ho}(\mathcal{D}) \xrightarrow[\mathrm{Ho}(R)]{} \mathrm{Ho}(\mathcal{D}_f) \xrightarrow[\mathrm{Ho}(U)]{} H \mathrm{Ho}(\mathcal{C})$$

Dada una transformación natural $\tau : U \rightarrow U'$ entre funtores de Quillen a derecha, definimos la **transformación natural derivada total** $\mathbb{R}\tau$ como $\mathrm{Ho}(\tau) \circ \mathrm{Ho}(R)$ de forma que $(\mathbb{L}\tau)_X = \tau_{RX}$.

Observación 2.3.6. Podemos definir $\mathbb{L}F$ aunque F no sea un functor de Quillen a izquierda: es suficiente con que F sea un functor que manda equivalencias débiles entre objetos cofibrantes en equivalencias débiles. Dualmente, para definir $\mathbb{R}U$ alcanza con que U sea un functor que manda equivalencias débiles entre objetos fibrantes en equivalencias débiles.

Lema 2.3.7. [2, pág. 17] *La transformación natural derivada es functorial.*

Demostración. Sean $\tau : F \rightarrow F'$ y $\tau' : F' \rightarrow F''$ transformaciones naturales entre funtores de Quillen a izquierda.

Tenemos que $\mathbb{L}(\tau' \circ \tau) = (\mathbb{L}\tau') \circ (\mathbb{L}\tau)$ ya que

$$(\mathbb{L}(\tau' \circ \tau))_X = (\tau' \circ \tau)_{QX} = \tau'_{QX} \circ \tau_{QX} = (\mathbb{L}\tau')_X \circ (\mathbb{L}\tau)_X$$

Además $\mathbb{L}(1_F) = 1_{\mathbb{L}F}$ ya que

$$(\mathbb{L}(1_F))_X = (1_F)_{QX} = FQ(X) = \mathbb{L}(X) = (1_{\mathbb{L}F})_X$$

El caso de transformaciones naturales entre funtores de Quillen a derecha es análogo. \square

Notamos que la operación de tomar el functor total derivado no es functorial ya que, por ejemplo, $\mathbb{L}(1_{\mathcal{C}}) = \mathrm{Ho}(Q)$. Sin embargo, es casi functorial en el sentido del siguiente teorema.

Teorema 2.3.8. [2, Teorema 1.3.7.] *Para toda categoría modelo \mathcal{C} , existe un isomorfismo natural $\alpha : \mathbb{L}(1_{\mathcal{C}}) \rightarrow 1_{\mathrm{Ho}(\mathcal{C})}$. Además, para todo par de funtores de Quillen a izquierda $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $F' : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ existe un isomorfismo natural $m = m_{F'F} : \mathbb{L}F' \circ \mathbb{L}F \rightarrow \mathbb{L}(F' \circ F)$. Estos isomorfismos naturales satisfacen las siguientes afirmaciones:*

1. Si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, $F' : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$ y $F'' : \mathcal{C}'' \rightarrow \mathcal{C}'''$ son funtores de Quillen a izquierda, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{L}F'' \circ \mathbb{L}F') \circ \mathbb{L}F & \xrightarrow{m_{F''F' \circ \mathbb{L}F}} & \mathbb{L}(F'' \circ F') \circ \mathbb{L}F & \xrightarrow{m_{(F'' \circ F') \circ F}} & \mathbb{L}((F'' \circ F') \circ F) \\ \parallel & & & & \parallel \\ \mathbb{L}F'' \circ (\mathbb{L}F' \circ \mathbb{L}F) & \xrightarrow{\mathbb{L}F'' \circ m_{F'F}} & \mathbb{L}F'' \circ \mathbb{L}(F' \circ F) & \xrightarrow{m_{F''(F' \circ F)}} & \mathbb{L}(F'' \circ (F' \circ F)) \end{array}$$

2. Si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un funtor de Quillen a izquierda, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}1_{\mathcal{D}} \circ \mathbb{L}F & \xrightarrow{m} & \mathbb{L}(1_{\mathcal{D}} \circ F) \\ \alpha \circ \mathbb{L}F \downarrow & & \parallel \\ 1_{\text{Ho}(\mathcal{D})} \circ \mathbb{L}F & \xlongequal{\quad} & \mathbb{L}F \end{array}$$

3. Si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un funtor de Quillen a izquierda, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}F \circ \mathbb{L}1_{\mathcal{C}} & \xrightarrow{m} & \mathbb{L}(F \circ 1_{\mathcal{C}}) \\ \mathbb{L}F \circ \alpha \downarrow & & \parallel \\ \mathbb{L}F \circ 1_{\text{Ho}(\mathcal{C})} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{L}F \end{array}$$

Demostración. Definimos $\alpha : \mathbb{L}(1_{\mathcal{C}}) \rightarrow 1_{\text{Ho}(\mathcal{C})}$ como el morfismo $\text{Ho}(q)$ donde $q : QX \rightarrow X$ es la fibración trivial natural del reemplazo cofibrante QX en X . Por otro lado, definimos $m_{F'F}$ mediante

$$m_{F'F} : (\mathbb{L}F')(\mathbb{L}F')X = F'QFQX \xrightarrow{F'q_{FQX}} F'FQX = \mathbb{L}(F'F)X$$

Resulta que $m_{F'F}$ es natural en \mathcal{C} y, además, como $F'QFQ$ y $F'FQ$ preservan equivalencias débiles, por el lema de Ken Brown, tenemos que $m_{F'F}$ es natural en $\text{Ho}(\mathcal{C})$. Dado que F preserva objetos cofibrantes, $q_{FQX} : FQX \rightarrow FQX$ es una equivalencia débil entre objetos cofibrantes. Por lo tanto, $m_{F'F} = F'q_{FQX}$ es una equivalencia débil y, entonces, un isomorfismo en $\text{Ho}(\mathcal{C})$.

Para probar la primera afirmación, tenemos que ver que

$$(F''F'q_{FQX}) \circ (F''q_{F'QFQX}) = (F''q_{F'FQX}) \circ (F''QF'q_{FQX})$$

como morfismos $F''QF'QFQX \rightarrow F''F'FQX$. Por naturalidad de q el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} QF'QFQX & \longrightarrow & QF'FQX \\ q_{F'QFQX} \downarrow & & \downarrow q_{F'FQX} \\ F'QFQX & \longrightarrow & F'FQX \end{array}$$

Luego, el siguiente diagrama también conmuta

$$\begin{array}{ccc}
F''QQF'QFQX & \xrightarrow{F''q_{F'QFQX}} & F''F'FQX \\
F''QF'q_{FQX} \downarrow & & \downarrow F''F'q_{FQX} \\
F''QF'QFQX & \xrightarrow{F''q_{F'FQX}} & F''F'FQX
\end{array}$$

Para probar la segunda afirmación, se tiene que

$$m_{1_{\mathcal{D}}F} : (1_{\mathcal{D}})(\mathbb{L}F)X = 1_{\mathcal{D}}QFQX \xrightarrow{q_{FQX}} 1_{\mathcal{E}}FQX = \mathbb{L}(1_{\mathcal{D}}F)X$$

es decir, $m_{1_{\mathcal{D}}F} = q_{FQX} : QFQX \rightarrow FQX$. Por otro lado, $\alpha \circ \mathbb{L}F = \text{Ho}(q) \circ \text{Ho}(F) \circ \text{Ho}(Q)$, o sea

$$\alpha \circ \mathbb{L}F = q(FQX) = q_{FQX} : QFQX \rightarrow FQX$$

Entonces, $\alpha \mathbb{L}F = m_{1_{\mathcal{D}}F}$ y, por lo tanto, el diagrama conmuta.

Finalmente, para probar la tercera afirmación, tenemos que

$$\mathbb{L}F \circ \alpha = \text{Ho}(F) \circ \text{Ho}(Q) \circ \text{Ho}(q) = FQq_X : FQQX \rightarrow FQX$$

y

$$m_{F1_{\mathcal{E}}} = Fq_{QX} : FQQX \rightarrow FQX$$

Luego, queremos probar que $Fq_{QX} = FQq_X$. Alcanza con probarlo para X cofibrante ya que todo objeto X es isomorfo a un objeto cofibrante en la categoría de homotopía $\text{Ho}(\mathcal{C})$. Por naturalidad de q , tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
QQX & \xrightarrow{Qq_X} & QX \\
q_{QX} \downarrow & & \downarrow q_X \\
QX & \xrightarrow{q_X} & X
\end{array}$$

Si X es cofibrante entonces q_X es una equivalencia débil. Luego, Fq_X es una equivalencia débil y, por lo tanto, es un isomorfismo en $\text{Ho}(\mathcal{C})$. Además, en $\text{Ho}(\mathcal{C})$ tenemos que $(Fq_X)^{-1} = Fq_{QX}$ y $(Fq_X)^{-1} = FQq_X$. Concluimos, entonces que $Fq_{QX} = FQq_X$. \square

Definición 2.3.9. Sea $\sigma : F \rightarrow G$ una transformación natural entre los funtores $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $\tau : F' \rightarrow G'$ una transformación natural entre los funtores $F', G' : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$. La **composición horizontal** $\tau \star \sigma$ es la transformación natural $F \circ F' \rightarrow G' \circ G$ dada por $(\tau \star \sigma)_X = \tau_{GX} \circ F' \sigma_X = G' \sigma_X \circ \tau_{FX}$.

Lema 2.3.10. [2, Lema 1.3.9.] Sea $\sigma : F \rightarrow G$ una transformación natural entre los funtores de Quillen a izquierda $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $\tau : F' \rightarrow G'$ una transformación natural entre los funtores de Quillen a izquierda $F', G' : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$. Sea m el isomorfismo composición del teorema anterior. El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}F' \circ \mathbb{L}F & \xrightarrow{m} & \mathbb{L}(F' \circ F) \\ \mathbb{L}\tau \star \mathbb{L}\sigma \downarrow & & \downarrow \mathbb{L}(\tau \star \sigma) \\ \mathbb{L}G' \circ \mathbb{L}G & \xrightarrow{m} & \mathbb{L}(G' \circ G) \end{array}$$

Demostración. El morfismo $\mathbb{L}(\tau \star \sigma) \circ m_X : F'QFQX \rightarrow G'GQX$ es la composición $\tau_{GQX} \circ F'\sigma_{QX} \circ F'q_{FQX}$. Por naturalidad de q , podemos reescribir esta composición como $\tau_{GQX} \circ F'q_{GQX} \circ F'Q\sigma_{QX}$. Luego, por naturalidad de τ reescribimos la composición como $G'q_{GQX} \circ \tau_{QGQX} \circ F'Q\sigma_{QX}$, que es la definición de $m \circ (\mathbb{L}\tau \star \mathbb{L}\sigma)$. \square

Lema 2.3.11. [2, Lema 1.3.10.] Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} categorías modelo y (F, U, φ) una adjunción de Quillen de \mathcal{C} en \mathcal{D} . Entonces, $\mathbb{L}F$ y $\mathbb{R}U$ forman una adjunción $\mathbb{L}(F, U, \varphi) = (\mathbb{L}F, \mathbb{R}U, \mathbb{L}\varphi)$ que llamamos adjunción derivada.

Demostración. El isomorfismo de adjunción $\mathbb{R}\varphi$ que buscamos debe ser un isomorfismo natural $\mathbb{R}\varphi : \text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{D})}(FQX, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{C})}(X, URY)$ es un isomorfismo. Ya vimos que tenemos los isomorfismos naturales

$$\text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{D})}(FQX, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FQX, RY)/\sim$$

y

$$\text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{C})}(X, URY) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(QX, URY)/\sim$$

Falta ver que φ respeta la relación de homotopía. Para ello, consideramos $A \in \mathcal{C}$ un objeto cofibrante y $B \in \mathcal{D}$ un objeto fibrante. Sean $f, g : F(A) \rightarrow B$ morfismos homotópicos. Entonces, existe una homotopía $H : F(A) \rightarrow P(B)$ de f en g para algún objeto camino $P(B)$ de B . Como U preserva productos, fibraciones y equivalencias débiles entre objetos fibrantes, $U(P(B))$ es un objeto camino para $U(B)$. Por lo tanto, $\varphi(H) : A \rightarrow U(P(B))$ es una homotopía a derecha entre φf y φg . Recíprocamente, sean φf y φg morfismos homotópicos. Entonces, existe un objeto cilindro $\text{Cyl}(A)$ de A y una homotopía $H : \text{Cyl}(A) \rightarrow U(B)$ de φf en φg . Luego, dado que F preserva coproductos, cofibraciones y equivalencias débiles entre objetos cofibrantes, $F(\text{Cyl}(A))$ es un objeto cilindro de $F(A)$. Entonces, $\varphi^{-1}H : F(\text{Cyl}(A)) \rightarrow B$ es una homotopía a izquierda de $\varphi^{-1}\varphi f = f$ en $\varphi^{-1}\varphi g = g$. \square

2.3.3. Equivalencias de Quillen

Definición 2.3.12. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos categorías. Una **equivalencia de categorías** entre \mathcal{C} y \mathcal{D} consiste en dos funtores $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ y dos isomorfismos naturales $\alpha : FG \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$ y $\beta : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$.

Definición 2.3.13. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos categorías modelo. Una **equivalencia de Quillen** entre \mathcal{C} y \mathcal{D} es una adjunción de Quillen (F, U, φ) de \mathcal{C} en \mathcal{D} tal que para todo objeto cofibrante $X \in \mathcal{C}$ y todo objeto fibrante $Y \in \mathcal{D}$, el morfismo $f : F(X) \rightarrow Y$ es una equivalencia débil en \mathcal{D} si y solamente si $\varphi(f) : X \rightarrow U(Y)$ es una equivalencia débil en \mathcal{C} .

La siguiente proposición nos dice que aunque una equivalencia de Quillen no sea una equivalencia de categorías, la adjunción derivada sí es una equivalencia de categorías.

Proposición 2.3.14. [2, Proposición 1.3.13.] Sea (F, U, φ) una adjunción de Quillen de \mathcal{C} en \mathcal{D} . Son equivalentes:

1. (F, U, φ) es una equivalencia de Quillen
2. la composición

$$X \xrightarrow{\eta} UFX \xrightarrow{Ur_{FX}} URFX$$

es una equivalencia débil para todo objeto cofibrante X y la composición

$$FQUX \xrightarrow{Fq_{UX}} FQX \xrightarrow{\epsilon} X$$

es una equivalencia débil para todo objeto fibrante X

3. la adjunción derivada $\mathbb{L}(F, U, \varphi)$ de $\text{Ho}(\mathcal{C})$ en $\text{Ho}(\mathcal{D})$ es una equivalencia de categorías.

Demostración.

(1. \implies 2.) Sea X es un objeto cofibrante de \mathcal{C} . Tenemos que $r_{F(X)} : F(X) \rightarrow RF(X)$ es una equivalencia débil y $RF(X)$ es fibrante. Entonces, su adjunto $\varphi r_{F(X)} : X \rightarrow URF(X)$ también es una equivalencia débil ya que (F, U, φ) es una equivalencia de Quillen. En términos de la unidad η de φ tenemos que $\varphi r_{F(X)} = Ur_{F(X)} \circ \eta$ y, por lo tanto $Ur_{F(X)} \circ \eta$ es una equivalencia débil. Análogamente, si X es fibrante, entonces $\epsilon \circ Fq_{U(X)} = \varphi^{-1} q_{U(X)}$ es una equivalencia débil ya que $q_{U(X)} : QU(X) \rightarrow U(X)$ es una equivalencia débil.

(2. \implies 1.) Sea $X \in \mathcal{C}$ cofibrante, $Y \in \mathcal{D}$ fibrante y $f : F(X) \rightarrow Y$ una equivalencia débil. Queremos ver que $\varphi(f)$ que está dada por la composición

$$X \xrightarrow{\eta} UR(X) \xrightarrow{U(f)} U(Y)$$

es una equivalencia débil. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & \varphi(f) & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ X & \xrightarrow{\eta} & UR(X) & \xrightarrow{U(f)} & U(Y) \\ \parallel & & \downarrow U\tau_{F(X)} & & \sim \downarrow U\tau_Y \\ X & \xrightarrow{\sim} & URF(X) & \xrightarrow{U(Rf)} & UR(Y) \end{array}$$

Como f es una equivalencia débil, $R(f)$ también. Luego, dado que U preserva equivalencias débiles entre objetos fibrantes, tenemos que $UR(f)$ es una equivalencia débil y, por el axioma 2-de-3 concluimos que $\varphi(f)$ es una equivalencia débil. Recíprocamente, si $\varphi(f)$ es una equivalencia débil, queremos ver que f también lo es. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccccc} FQX & \xrightarrow{FQ(\varphi f)} & FQUY & \xrightarrow{\sim} & Y \\ \sim \downarrow Fq_X & & \downarrow Fq_{UY} & & \parallel \\ FX & \xrightarrow{F(\varphi f)} & FUY & \xrightarrow{\epsilon} & Y \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ & & f & & \end{array}$$

Como $\varphi(f)$ es una equivalencia débil, $Q(\varphi(f))$ también lo es y, dado que F preserva equivalencias débiles entre objetos cofibrantes, tenemos que $FQ(\varphi(f))$ es una equivalencia débil. Luego, por el axioma 2-de-3, concluimos que f es una equivalencia débil.

(2. \implies 3.) Consideramos $Q(X) \rightarrow X$ que es una equivalencia débil por construcción y $Q(X) \rightarrow URFQ(X)$ que es una equivalencia débil por hipótesis. Al localizar, las equivalencias débiles se convierten en isomorfismos, lo que nos da el isomorfismo $\eta_X : X \rightarrow URFQ(X)$ que es, de hecho, una transformación natural $\eta : 1_{\text{Ho}(\mathcal{C})} \rightarrow (UR)(FQ)$. Análogamente, obtenemos un isomorfismo $\epsilon : (FQ)(UR) \rightarrow 1_{\text{Ho}(\mathcal{D})}$. Concluimos, entonces, que la adjunción inducida en las categorías de homotopía es una equivalencia de categorías.

(3. \implies 2.) Si $Q(X) \rightarrow URFQ(X)$ es un isomorfismo en las categorías de homotopía, entonces $Q(X) \rightarrow URFQ(X)$ es una equivalencias débil. Si X es cofibrante, entonces $X \simeq Q(X)$ y, por lo tanto $X \rightarrow URQ(X)$ es una equivalencia débil. La otra composición es análoga. \square

Veremos, a continuación, un criterio que permite verificar si una adjunción de Quillen es una equivalencia de Quillen.

Definición 2.3.15. Decimos que un funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ **refleja** una propiedad si para todo morfismo $f \in \mathcal{C}$ tal que $F(f)$ tiene esa propiedad, f también la tiene.

Proposición 2.3.16. [2, Corolario 1.3.14.] Sea $(F, U, \varphi) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ una adjunción de Quillen. Son equivalentes:

1. (F, U, φ) es una equivalencia de Quillen
2. F refleja equivalencias débiles entre objetos cofibrantes y para todo objeto fibrante Y , el morfismo $FQU(Y) \rightarrow Y$ es una equivalencia débil
3. U refleja equivalencias débiles entre objetos fibrantes y para todo objeto cofibrante X , el morfismo $X \rightarrow URF(X)$ es una equivalencia débil

Demostración. Veremos que 1. y 2. son equivalentes, la prueba de que 1. y 3. son equivalentes es dual.

Supongamos que (F, U, φ) es una equivalencias de Quillen. Ya vimos, en la proposición anterior, que $FQU(X) \rightarrow Y$ es una equivalencia débil para todo objeto fibrante Y . Para ver que F refleja equivalencias débiles, consideramos $X, Y \in \mathcal{C}$ cofibrantes y $f : X \rightarrow Y$ tal que $F(f)$ es una equivalencia débil. Como F preserva equivalencias débiles entre objetos cofibrantes, tenemos que $FQ(f)$ es una equivalencia débil. Por lo tanto $(\mathbb{L}F)(f)$ es un isomorfismo en la categoría de homotopía $\text{Ho}(\mathcal{D})$. Luego, dado que la adjunción $\mathbb{L}(F, U, \varphi)$ es una equivalencia de categorías, concluimos que f es una equivalencia débil en \mathcal{C} .

Recíprocamente, para ver que (F, U, φ) es una equivalencia de Quillen, veremos que $\mathbb{L}(F, U, \varphi) = (\mathbb{L}F, \mathbb{L}U, \mathbb{L}\varphi)$ es una equivalencia de categorías. Es decir, tenemos que ver que la unidad y la counidad de la adjunción son isomorfismos. La counidad hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} FQUR(X) & \xrightarrow{\sim} & R(X) \xleftarrow{\sim} X \\ & \searrow \epsilon & \nearrow \end{array}$$

donde la flecha de la izquierda es una equivalencia débil por hipótesis y la de la derecha por construcción. Luego, por el axioma 2-de-3, tenemos que ϵ es una equivalencia débil en \mathcal{D} y, por lo tanto, un isomorfismo en $\text{Ho}(\mathcal{D})$. Por otro lado, la composición de la unidad $X \rightarrow URFQ(X)$ con FQ es igual al morfismo $FQ(X) \rightarrow FQURFQ(X)$ que es la inversa de la counidad y, por lo tanto, es un isomorfismo en la categoría de homotopía. Dado que F refleja equivalencias débiles entre objetos cofibrantes, se tiene que $Q(X) \rightarrow QURFQ(X)$ es una equivalencia débil entre objetos cofibrantes. Luego, como Q refleja equivalencias débiles, concluimos que $X \rightarrow URFQ(X)$

es una equivalencia débil y, por lo tanto, un isomorfismo en la categoría de homotopía. \square

Concluiremos esta sección viendo que $\text{Ho}(\mathcal{C})$ tiene productos y productos.

Lema 2.3.17. [2, Ejemplo 1.3.11.] *Sea \mathcal{C} una categoría modelo. Entonces $\text{Ho}(\mathcal{C})$ tiene productos y coproductos.*

Demostración. Para probar que $\text{Ho}(\mathcal{C})$ tiene coproductos, veremos que, dado un conjunto S , el funtor diagonal $\Delta : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})^S$ admite un adjunto a izquierda.

Tenemos que la categoría \mathcal{C}^S es una categoría modelo con la estructura modelo producto. Un funtor de coproducto $\coprod : \mathcal{C}^S \rightarrow \mathcal{C}$ es un adjunto a izquierda del funtor diagonal $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^S$. Por definición de la estructura modelo producto, Δ preserva fibraciones y fibraciones triviales, y \sqcup preserva cofibraciones y cofibraciones triviales. Luego, tenemos una adjunción de Quillen

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{\Delta} \\ \xleftarrow{\coprod} \end{array} \mathcal{C}^S$$

que induce una adjunción

$$\text{Ho}(\mathcal{C}) \begin{array}{c} \xrightarrow{R\Delta} \\ \xleftarrow{L\coprod} \end{array} \text{Ho}(\mathcal{C}^S)$$

Por otro lado, tenemos que $(\mathcal{C}^S)_{cf} \simeq (\mathcal{C}_{cf})^S$ y por lo tanto $(\mathcal{C}^S)_{cf}/\sim \simeq (\mathcal{C}_{cf})^S/\sim$, es decir $\text{Ho}(\mathcal{C}^S) \simeq \text{Ho}(\mathcal{C})^S$. Luego, $\Delta : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})^S$ admite un adjunto a izquierda

$$\begin{array}{ccc} & \Delta & \\ & \curvearrowright & \\ \text{Ho}(\mathcal{C}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{R\Delta} \\ \xleftarrow{L\coprod} \end{array} & \text{Ho}(\mathcal{C}^S) \xleftarrow[\cong]{G} \text{Ho}(\mathcal{C})^S \end{array}$$

dado por $L\coprod \circ G$. Entonces, $\text{Ho}(\mathcal{C})$ tiene coproductos. De forma análoga, se ve que tiene productos. \square

Capítulo 3

Categorías modelo cofibrantemente generadas

Tomando en consideración que probar que una categoría admite una estructura modelo resulta ser una tarea difícil y extensa, en este capítulo definiremos un tipo particular de categoría modelo: las categorías modelo cofibrantemente generadas. En dichas categorías además de simplificarse los axiomas a probar, resulta más simple verificar que un funtor es de Quillen. En tal sentido, comenzaremos viendo el Argumento del Objeto Pequeño que nos permite construir factorizaciones functoriales. Posteriormente, probaremos el Teorema de reconocimiento que nos da las condiciones necesarias y suficientes para que una categoría admita una estructura modelo cofibrantemente generada. Este teorema nos permitirá dar dos ejemplos de categorías modelo: los espacios topológicos y los conjuntos simpliciales. Construiremos, además una equivalencia de Quillen entre estas dos categorías. En todo este capítulo seguiremos el segundo capítulo del libro [2].

3.1. El argumento del objeto pequeño

Definición 3.1.1. Sea I una clase de morfismos en una categoría \mathcal{C} .

1. Un morfismo es **I -inyectivo** si tiene la RLP con respecto a todos los morfismos en I . La clase de morfismos I -inyectivos se denota como I -iny.
2. Un morfismo es **I -proyectivo** si tiene la LLP con respecto a todos los morfismos en I . La clase de morfismos I -proyectivos se denota como I -proy.

3. Un morfismo es una ***I*-cofibración** si tiene la LLP con respecto a todo morfismo *I*-inyectivo. La clase de *I*-cofibraciones es la clase (*I*-iny)-proy y la denotamos como *I*-cof.
4. Un morfismo es una ***I*-fibración** si tiene la RLP con respecto a todo morfismo *I*-proyectivo. La clase de *I*-fibraciones es la clase (*I*-proy)-iny y la denotamos como *I*-fib.

Por ejemplo, si \mathcal{C} es una categoría modelo e I es su clase de cofibraciones, entonces *I*-iny es la clase de fibraciones triviales e $I\text{-cof} = I$. Dualmente, si I es la clase de fibraciones de \mathcal{C} , entonces *I*-proy es la clase de cofibraciones triviales y $I\text{-fib} = I$.

Observación 3.1.2. Notamos que:

- $I \subset I\text{-cof}$
- $I \subset I\text{-fib}$
- $(I\text{-cof})\text{-iny} = I\text{-iny}$
- $(I\text{-fib})\text{-proy} = I\text{-proy}$
- Si $I \subset J$ entonces $I\text{-iny} \supseteq J\text{-iny}$ y $I\text{-proy} \supseteq J\text{-proy}$. Luego, $I\text{-cof} \subseteq J\text{-cof}$ y $I\text{-fib} \subseteq J\text{-fib}$.

Lema 3.1.3. [2, Lema 2.1.8.] Sea $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ un par de funtores adjuntos, I una clase de morfismos en \mathcal{C} y J una clase de morfismos en \mathcal{D} . Entonces

1. $G((FI)\text{-iny}) \subseteq I\text{-iny}$
2. $F(I\text{-cof}) \subseteq (FI)\text{-cof}$
3. $F((GJ)\text{-proy}) \subseteq J\text{-proy}$
4. $G(J\text{-fib}) \subseteq (GJ)\text{-fib}$

Demostración.

1. Sea $g \in F(I)\text{-iny}$ y f un morfismo en I . Para ver que $G(g)$ es un elemento de $I\text{-iny}$, queremos ver que $G(g)$ tiene la RLP con respecto a f . Como $g \in F(I)\text{-iny}$, tenemos que g tiene la RLP con respecto a $F(f)$. Entonces, como (F, G) es un par de adjunción, obtenemos que $G(g)$ tiene la RLP con respecto a f . Concluimos, entonces, que $G(g) \in I\text{-iny}$.

2. Sea $f \in I\text{-cof}$ y $g \in (FI)\text{-iny}$. Para ver que $f \in (FI)\text{-cof}$, queremos ver que $F(f)$ tiene la LLP con respecto a g . Por la parte anterior, tenemos que $G(g) \in I\text{-iny}$ y por lo tanto f tiene la LLP con respecto a $G(g)$. Luego, por adjunción concluimos que $F(f)$ tiene la LLP con respecto a g .
3. Es dual a 1.
4. Es dual a 2.

□

Definición 3.1.4. Sea I un conjunto de morfismos en una categoría \mathcal{C} que tiene todos los colímites pequeños.

- La subcategoría de **complejos I -celulares relativos** es la subcategoría de morfismos que se pueden construir como composición transfinita de pushouts de elementos de I . Es decir, si $f : A \rightarrow B$ es un complejo I -celular relativo, entonces existe un ordinal λ y una λ -sucesión $X : \lambda \rightarrow \mathcal{C}$ tal que se verifican las siguientes condiciones:
 - f es la composición transfinita de X
 - para cada β tal que $\beta + 1 < \lambda$, existe un pushout de la siguiente forma

$$\begin{array}{ccc} C_\beta & \longrightarrow & X_\beta \\ g_\beta \downarrow & & \downarrow \\ D_\beta & \longrightarrow & X_{\beta+1} \end{array}$$

donde $g_\beta \in I$.

Denotamos la colección de complejos I -celulares relativos mediante $I\text{-cell}$.

- Un objeto $A \in \mathcal{C}$ es un **complejo I -celular** si el morfismo $\emptyset \rightarrow A$ es un complejo I -celular relativo.
- Un morfismo es una **inclusión de complejos I -celulares** si es un complejo I -celular relativo cuyo dominio es un complejo I -celular.

Observación 3.1.5. Tenemos que los morfismos identidad pertenecen a $I\text{-cell}$: dado $A \in \mathcal{C}$, la identidad en A es la composición transfinita de la 1-sucesión trivial $X : 1 \mapsto A$. Además, los isomorfismos también pertenecen a $I\text{-cell}$. De hecho, si $f : A \rightarrow B$ es un isomorfismo entonces f es otra elección para la composición transfinita de la 1-sucesión $X : 1 \mapsto A$.

Lema 3.1.6. [2, Lema 2.1.10.] *Sea I una clase de morfismos en una categoría \mathcal{C} con todos los colímites pequeños. Entonces $I\text{-cell} \subseteq I\text{-cof}$.*

Demostración. Alcanza con ver que $I\text{-cof}$ es cerrada bajo pushouts y composiciones transfinitas.

Comencemos viendo que $I\text{-cof}$ es cerrada bajo pushouts. Sea $f \in I\text{-cof}$ y consideramos el siguiente pushout

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & C \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{j} & D \end{array}$$

Para ver que $g \in I\text{-cof}$, probaremos que tiene la LLP con respecto a los morfismos de $I\text{-iny}$. Sea $u \in I\text{-iny}$ tal que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & E \\ g \downarrow & & \downarrow u \\ D & \longrightarrow & F \end{array}$$

Como $f \in I\text{-cof}$, tenemos que el siguiente diagrama admite un levantamiento $h : B \rightarrow E$

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & C & \longrightarrow & E \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow u \\ B & \longrightarrow & D & \longrightarrow & F \end{array}$$

Luego, por la propiedad universal del pushout, existe un morfismo $h' : D \rightarrow E$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \longrightarrow & D \end{array} \begin{array}{ccc} & & \searrow \\ & & E \end{array}$$

h (curved arrow from B to E), h' (dashed arrow from D to E)

Obtuvimos, entonces, el siguiente levantamiento

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & E \\ g \downarrow & \nearrow h' & \downarrow u \\ D & \longrightarrow & F \end{array}$$

y por lo tanto, g tiene la LLP con respecto a u lo que implica que g está en $I\text{-cof}$.

Veamos, ahora, que $I\text{-cof}$ está cerrado bajo composiciones transfinitas. Sea f una composición transfinita de una λ -sucesión $X : \lambda \rightarrow \mathcal{C}$ en $I\text{-cof}$ y $u \in I\text{-iny}$ tal que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \longrightarrow & E \\ f \downarrow & & \downarrow u \\ X_\alpha & \longrightarrow & F \end{array}$$

Probaremos, por inducción transfinita, que f tiene la LLP con respecto a u . Tenemos que $X_0 \rightarrow X_1$ es un elemento de $I\text{-cof}$ por definición de $X : \lambda \rightarrow \mathcal{C}$. Luego, sea $\alpha \leq \lambda$ un ordinal límite y supongamos que la composición de morfismos hasta α (excluido) está en $I\text{-cof}$. Entonces, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \longrightarrow & E \\ c_0 \downarrow & \nearrow & \downarrow u \\ X_1 & & \\ c_1 \downarrow & \nearrow & \\ X_2 & & \\ c_2 \downarrow & & \\ \vdots & & \\ X_\alpha & \longrightarrow & F \end{array}$$

(A curved arrow labeled f goes from X_0 to X_α on the left side of the diagram.)

donde las flechas punteadas existen por la hipótesis de inducción. Por lo tanto, como X_α es un colímite, existe un morfismo $X_\alpha \rightarrow E$, dado por la propiedad universal del colímite, que hace conmutar el diagrama. Concluimos que $X_\alpha \rightarrow E$ es un elemento de $I\text{-cof}$. \square

Lema 3.1.7. [2, Lema 2.1.11.] *Sea λ un ordinal y $X : \lambda \rightarrow \mathcal{C}$ una λ -sucesión tal que cada morfismo $X_\beta \rightarrow X_{\beta+1}$ es un pushout de un morfismo de I o un isomorfismo. Entonces, la composición transfinita de X es un complejo I -celular relativo.*

Demostración. Definimos la siguiente relación de equivalencia \sim en λ : si $\alpha \leq \beta$ decimos que $\alpha \sim \beta$ si para todo γ tal que $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ el morfismo $X_\gamma \rightarrow X_{\gamma+1}$ es un isomorfismo. Entonces, cada clase de equivalencia $[\alpha]$ es

un intervalo cerrado $[\alpha', \alpha'']$ de λ . Además, si $\alpha \leq \beta$ y $\alpha \sim \beta$ entonces el morfismo $X_\alpha \rightarrow X_\beta$ es un isomorfismo por ser composición de isomorfismos

$$X_\alpha \longrightarrow X_{\alpha+1} \longrightarrow X_{\alpha+2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_\beta$$

El conjunto de clases de equivalencia es un conjunto bien ordenado y, por lo tanto, es isomorfo a un único cardinal μ . El funtor $X : \lambda \rightarrow \mathbb{C}$ induce un funtor $Y : \mu \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $Y_{[\alpha']} = X_{\alpha'}$. Luego, Y es una μ -sucesión tal que cada morfismo $Y_\beta \rightarrow Y_{\beta+1}$ es un pushout de morfismos en I . Entonces, la composición transfinita de Y es un complejo I -celular relativo y, dado que la composición transfinita de Y es isomorfa a la composición transfinita de X , obtenemos que X está en I -cell. \square

Lema 3.1.8. [2, Lema 2.1.12.] *Sea \mathcal{C} una categoría con todos los colímites pequeños e I un conjunto de morfismos de \mathcal{C} . Entonces I -cell es cerrado bajo composiciones transfinitas.*

Demostración. Sea $X : \lambda \rightarrow \mathcal{C}$ una λ -sucesión de complejos I -celulares relativos, es decir cada morfismo $X_\beta \rightarrow X_{\beta+1}$ está en I -cell. Entonces, $X_\beta \rightarrow X_{\beta+1}$ es la composición transfinita de una γ_β -sucesión $Y : \gamma_\beta \rightarrow \mathcal{C}$ de pushouts de morfismos de I . Consideramos el conjunto S de todos los pares de ordinales (β, γ) tal que $\beta < \lambda$ y $\gamma < \gamma_\beta$. Definimos un orden total en S mediante:

$$(\beta, \gamma) < (\beta', \gamma') \quad \text{si} \quad \beta < \beta' \quad \text{o si} \quad \beta = \beta' \quad \text{y} \quad \gamma < \gamma'$$

Con este orden, S resulta un conjunto bien ordenado y, por lo tanto, es isomorfo a un único cardinal μ . Obtenemos un funtor $Z : \mu \rightarrow \mathcal{C}$, que es una μ -sucesión donde cada morfismo $Z_\alpha \rightarrow Z_{\alpha+1}$ es un uno de los morfismos $Y_\gamma \rightarrow Y_{\gamma+1}$ o un isomorfismo:

$$\begin{array}{ccccccccccc} Z_{(\beta, \gamma)} & \longrightarrow & Z_{(\beta, \gamma+1)} & \longrightarrow & Z_{(\beta, \gamma+2)} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Z_{\beta, \gamma_\beta} & \longrightarrow & Z_{(\beta+1, \gamma')} \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel \\ Y_\gamma & \longrightarrow & Y_{\beta+1} & \longrightarrow & Y_{\gamma+2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Y_{\gamma_\beta} & \xrightarrow{\cong} & X_{\beta+1} \\ & & & & & & & & \parallel & & \\ & & & & & & & & X_{\beta+1} & & \end{array}$$

Luego, dado que una composición de X también es una composición de Z , por el lema anterior concluimos que una composición de X está en I -cell. \square

Lema 3.1.9. [2, Lema 2.1.13.] *Sea \mathcal{C} una categoría con todos los colímites pequeños e I un conjunto de morfismos de \mathcal{C} . Entonces, cualquier pushout de coproductos de morfismos de I está en I -cell.*

Demostración. Sea K un conjunto y sean $g_k : C_k \rightarrow D_k$ morfismos en I para todo $k \in K$. Consideramos el siguiente diagrama de pushout:

$$\begin{array}{ccc} \sqcup C_k & \longrightarrow & X \\ \sqcup g_k \downarrow & & \downarrow f \\ \sqcup D_k & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Queremos ver que f es un complejo I -celular relativo. Podemos asumir que K es un ordinal λ ya que todo conjunto es isomorfo a un ordinal. Construimos la siguiente λ -sucesión

- $X_0 = X$
- $X_{\beta+1}$ es el pushout $X_\beta \sqcup_{C_\beta} D_\beta$ sobre g_β
- si β es un ordinal límite $X_\beta = \text{colim}_{\alpha < \beta} X_\alpha$

La composición transfinita $X \rightarrow X_\lambda$ de esta λ -sucesión es isomorfa a f y, por lo tanto, f está en I -cell. \square

Veremos ahora el resultado fundamental de esta sección.

Teorema 3.1.10 (El argumento del objeto pequeño). *[2, Teorema 2.1.14.]* Sea \mathcal{C} una categoría con todos los colímites pequeños y sea I un conjunto de morfismos en \mathcal{C} tal que los dominios de los morfismos en I son pequeños relativos a I -cell. Entonces existe una factorización funtorial (γ, δ) en \mathcal{C} tal que para todo morfismo f en \mathcal{C} , el morfismo $\gamma(f)$ está en I -cell y el morfismo $\delta(f)$ está en I -iny.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\gamma(f)} & E_f & \xrightarrow{\delta(f)} & Y \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & f & & \end{array}$$

Demostración. Tomamos un cardinal k tal que el dominio de cada morfismo es k -pequeño relativo a I -cell y un ordinal k -filtrado α .

Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo en \mathcal{C} . Definimos $E_0 = X$ y $p_0 = f$. Dados E_i y p_i , definimos E_{i+1} y p_{i+1} de la siguiente forma:

Sea S el conjunto de cuadrados conmutativos de la forma

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E_i \\ g \downarrow & & \downarrow p_i \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

donde $g \in I$. Para $s \in S$ denotamos por $g_s : A_s \rightarrow B_s$ al morfismo en I correspondiente. Definimos E_{i+1} como el pushout en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \sqcup_{s \in S} A_s & \longrightarrow & E_i \\ \sqcup_{s \in S} g_s \downarrow & & \downarrow \\ \sqcup_{s \in S} B_s & \longrightarrow & E_{i+1} \end{array}$$

Luego, definimos p_{i+1} como el morfismo inducido por p_i aplicando la propiedad universal del pushout

$$\begin{array}{ccc} \sqcup_{s \in S} A_s & \longrightarrow & E_i \\ \sqcup_{s \in S} g_s \downarrow & & \downarrow \\ \sqcup_{s \in S} B_s & \longrightarrow & E_{i+1} \end{array} \begin{array}{l} \xrightarrow{p_i} \\ \xrightarrow{p_{i+1}} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ Y \end{array}$$

Dado un ordinal límite j , si tenemos definidos E_i y p_i para todo $i < j$, definimos $E_j = \text{colim}_{i < \alpha} E_i$ y p_j como el morfismo inducido por los p_i aplicando la propiedad universal del colímite.

Sea $E_f = \text{colim}_{i < \alpha} E_i$, $\delta(f) : E_f \rightarrow Y$ el morfismo inducido por los p_i aplicando la propiedad universal del colímite y $\gamma(f) : X \rightarrow E_f$ la composición transfinita de los morfismos $E_i \rightarrow E_{i+1}$. Obtenemos así que $f = \delta(f) \circ \gamma(f)$.

Cada morfismo $E_i \rightarrow E_{i+1}$ es un elemento de I -cell por ser pushout de un coproducto. Luego, dado que I -cell es cerrado bajo composición transfinita concluimos que $\gamma(f)$ es un elemento de I -cell.

Finalmente, para probar que $\delta(f)$ es un elemento de I -inj, veremos que tiene la RLP con respecto a I . Supongamos que tenemos el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & E_f \\ g \downarrow & & \downarrow \delta(f) \\ B & \xrightarrow{t} & Y \end{array}$$

donde g es un morfismo en I . Como los dominios de los morfismos en I son k -pequeños con respecto a I -cell, tenemos que $h : A \rightarrow E_f$ se factoriza de la siguiente forma

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{h_i} & E_i \\
 \downarrow g & \searrow h & \downarrow \\
 & & E_f \\
 & & \downarrow \delta(f) \\
 B & \xrightarrow{t} & Y
 \end{array}$$

Por construcción de E_i , este rectángulo conmutativo nos da el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{h_i} & E_i \\
 g \downarrow & & \downarrow \\
 B & \xrightarrow{t_{i+1}} & E_{i+1}
 \end{array}$$

Con este morfismo t_{i+1} , podemos construir el levantamiento que buscábamos

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{h} & E_f \\
 g \downarrow & \nearrow & \downarrow \delta(f) \\
 & E_{i+1} & \\
 B & \xrightarrow{t} & Y \\
 & \nearrow t_{i+1} & \\
 & &
 \end{array}$$

Luego, $\delta(f) \in I\text{-iny}$.

Notamos, además, que la descomposición es funtorial porque cada paso en la demostración es funtorial. \square

Corolario 3.1.11. [2, Corolario 2.1.15.] Sea I un conjunto de morfismos en una categoría \mathcal{C} que tiene todos los colímites pequeños. Supongamos que los dominios de I son pequeños relativo a $I\text{-cell}$. Entonces, dado un morfismo $f : A \rightarrow B$ en $I\text{-cof}$, existe un morfismo $g : A \rightarrow C$ en $I\text{-cell}$ tal que f es un retracto de g por un morfismo que deja fijo A .

Demostración. Por el argumento del objeto pequeño tenemos una factorización $f = pg$ donde $g \in I\text{-cell}$ y $p \in I\text{-iny}$. Como $f \in I\text{-cof}$, f tiene la LLP con respecto a p . Entonces, por el argumento del retracto, f es un retracto de g . \square

Proposición 3.1.12. [2, Proposición 2.1.16.] Sea I un conjunto de morfismos en una categoría \mathcal{C} que tiene todos los colímites pequeños. Supongamos que los dominios de I son pequeños relativo a $I\text{-cell}$ y que A es un objeto que es pequeño relativo a $I\text{-cell}$. Entonces A es pequeño relativo a $I\text{-cof}$.

Demostración. Supongamos que A es k -pequeño relativo a I -cell. Sea λ un ordinal k -filtrado y $X : \lambda \rightarrow \mathcal{C}$ una λ -sucesión de morfismos en I -cof. Por inducción transfinita, construiremos una λ -sucesión Y de complejos I -celulares y dos transformaciones naturales $i : X \rightarrow Y$ y $r : Y \rightarrow X$ tales que $ri = 1$.

Definimos $Y_0 = X_0$ y $r_0 = i_0 = 1$. Si tenemos definidos Y_β , i_β y r_β , aplicamos la factorización funtorial del argumento del objeto pequeño a la composición

$$Y_\beta \xrightarrow{r_\beta} X_\beta \xrightarrow{f_\beta} X_{\beta+1}$$

para obtener

$$g_\beta : Y_\beta \rightarrow Y_{\beta+1} \quad y \quad r_{\beta+1} : Y_{\beta+1} \rightarrow X_{\beta+1}$$

tales que $g_\beta \in I$ -cell, $r_{\beta+1} \in I$ -iny y $r_{\beta+1}g_\beta = f_\beta r_\beta$. Entonces, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X_\beta & \xrightarrow{q_\beta i_\beta} & Y_{\beta+1} \\ f_\beta \downarrow & & \downarrow r_{\beta+1} \\ X_{\beta+1} & \xlongequal{\quad} & X_{\beta+1} \end{array}$$

Como $f_\beta \in I$ -cof y $r_{\beta+1} \in I$ -iny, el diagrama admite un levantamiento $i_{\beta+1} : X_{\beta+1} \rightarrow Y_{\beta+1}$. Si β es un ordinal límite, definimos $Y_\beta = \text{colim}_{\alpha < \beta} Y_\alpha$, $i_\beta = \text{colim}_{\alpha < \beta} i_\alpha$ y $r_\beta = \text{colim}_{\alpha < \beta} r_\alpha$. Entonces, el morfismo

$$H : \text{colim Hom}_{\mathcal{C}}(A, X_\beta) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \text{colim } X_\beta)$$

es un retracts de $\text{colim Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y_\beta) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \text{colim } Y_\beta)$, que es un isomorfismo dado que A es k -pequeño relativo a I -cell. Por lo tanto H es un isomorfismo y concluimos que A es k -pequeño con respecto a I -cof. \square

3.2. Teorema de reconocimiento

Definición 3.2.1. Sea \mathcal{C} una categoría modelo. Decimos que \mathcal{C} es una **categoría cofibrantemente generada** si existen conjuntos de morfismos I y J tales que:

1. Los dominios de los morfismos de I son pequeños relativo a I -cell
2. Los dominios de los morfismos de J son pequeños relativo a J -cell
3. La clase de fibraciones es J -iny

4. La clase de fibraciones triviales es I -iny

En este caso, decimos que I es el conjunto de **cofibraciones generadoras**, que J es el conjunto de **cofibraciones triviales generadoras** y denotaremos la categoría modelo mediante (\mathcal{C}, I, J) .

Decimos que una categoría modelo cofibrantemente generada es **finitamente generada** si podemos tomar I y J tales que los dominios y codominios de los morfismos de I y J sean finitos relativos a I -cell.

La siguiente proposición resume las propiedades básicas de las categorías modelo cofibrantemente generadas.

Proposición 3.2.2. *[2, Proposición 2.1.18.] Sea \mathcal{C} una categoría modelo cofibrantemente generada donde el conjunto de cofibraciones generadoras es I y el conjunto de cofibraciones triviales generadoras es J . Entonces*

1. *Las cofibraciones forman la clase I -cof.*
2. *Toda cofibración es retracto de un complejo I -celular relativo.*
3. *Los dominios de I son pequeños relativo a las cofibraciones*
4. *Las cofibraciones triviales forman la clase J -cof*
5. *Toda cofibración trivial es retracto de un J -complejo celular relativo*
6. *Los dominios de J son pequeños relativo a las cofibraciones triviales*

Si \mathcal{C} es finitamente generada, entonces los dominios de I y J son finitos relativo a las cofibraciones.

Demostración. Consecuencia del corolario 3.1.11 y de la proposición 3.1.12. □

Como consecuencia obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.2.3. *Sea (\mathcal{C}, I, J) una categoría modelo cofibrantemente generada. Entonces,*

1. *I -cof = $LLP(RLP(I))$, es decir, los morfismos de I -cof coinciden con los morfismos que tienen la LLP con respecto a los morfismos que tienen la RLP con respecto a los morfismos de I*
2. *J -cof = $LLP(RLP(J))$, es decir, los morfismos de J -cof coinciden con los morfismos que tienen la LLP con respecto a los morfismos que tienen la RLP con respecto a los morfismos de J*

Demostración. Vamos a probar la primera afirmación, la segunda se prueba de forma análoga.

Por definición, tenemos que $I \subset \text{LLP}(\text{RLP}(I))$ y, como ya vimos, una colección de morfismos dada por una propiedad de levantamiento es cerrada bajo pushouts, composiciones transfinitas y retracts. Por lo tanto, obtenemos que $I\text{-cof} \subset \text{LLP}(\text{RLP}(I))$.

Para probar la otra inclusión, tomamos un morfismo $f : X \rightarrow Z$ en $\text{LLP}(\text{RLP}(I))$. Por el argumento del objeto pequeño, tenemos una factorización

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f'} & Y & \xrightarrow{f''} & Z \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & f \end{array}$$

donde $f' \in I\text{-cof}$ y $f'' \in I\text{-iny}$. Entonces f tiene la LLP con respecto a f'' lo que implica la existencia de un levantamiento h en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f'} & Y \\ f \downarrow & \nearrow h & \downarrow f'' \\ Z & \xlongequal{\quad} & Z \end{array}$$

Luego, a través del siguiente diagrama, obtenemos que f es un retracto de f'

$$\begin{array}{ccccc} X & \xlongequal{\quad} & X & \xlongequal{\quad} & X \\ f \downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{h} & Y & \xrightarrow{f''} & Z \end{array}$$

y por lo tanto $f \in I\text{-cof}$. □

Veremos, ahora, el teorema de reconocimiento que nos da las condiciones necesarias y suficientes para que una categoría admita estructura de categoría modelo cofibrantemente generada. Utilizaremos este resultado más adelante para probar que la categoría de espacios topológicos y la categoría de conjuntos simpliciales admiten estructura de categoría modelo.

Teorema 3.2.4 (Teorema de reconocimiento). *[2, Teorema 2.1.19.] Sea \mathcal{C} una categoría completa y cocompleta. Sea W una subcategoría de \mathcal{C} e I y J dos conjuntos de morfismos en \mathcal{C} . Entonces son equivalentes:*

1. *Existe una estructura de categoría modelo cofibrantemente generada en \mathcal{C} tal que I es el conjunto de cofibraciones generadoras, J es el conjunto de cofibraciones triviales generadoras y W es la subcategoría de equivalencias débiles.*

2. Se verifican las siguientes condiciones:

- a. la subcategoría W verifica la propiedad 2-de-3 y es cerrada bajo retracts
- b. los dominios de los morfismos de I son pequeños relativo a I -cell
- c. los dominios de los morfismos de J son pequeños relativo a J -cell
- d. J -cell $\subseteq W \cap I$ -cof
- e. I -iny $\subseteq W \cap J$ -iny
- f. se cumple $W \cap I$ -cof $\subseteq J$ -cof o $W \cap I$ -iny $\subseteq J$ -iny

Demostración.

(1 \implies 2) Por definición de categoría modelo, W satisface 2-de-3 y es cerrado bajo retracts. Las otras condiciones son directas a partir de la definición de categoría modelo cofibrantemente generada.

(2 \implies 1) Veremos que las siguientes clases de morfismos determinan una estructura de categoría modelo cofibrantemente generada en \mathcal{C} :

- el conjunto de equivalencias débiles es W
- el conjunto de fibraciones es $F = J$ -iny
- el conjunto de cofibraciones es $K = I$ -cof

Tenemos, entonces, que las fibraciones y las cofibraciones están cerradas bajo retracts.

Por otro lado, como J -cell $\subseteq W \cap I$ -cof, tenemos que todo morfismo en J -cell es una cofibración trivial. Luego, como todo morfismo en J -cof es retracto de un morfismo en J -cell, obtenemos que todo morfismo en J -cof es una cofibración trivial. Además, como J -iny $\subseteq W \cap I$ -iny, tenemos que todo morfismo en I -iny es una fibración trivial.

Dado f un morfismo en \mathcal{C} , aplicando el argumento del objeto pequeño, obtenemos las siguientes factorizaciones functoriales:

- $f = \beta(f) \circ \alpha(f)$ donde $\beta(f) \in I$ -iny, es decir $\beta(f)$ es una fibración trivial, y $\alpha(f) \in I$ -cell $\subset I$ -cof, es decir $\alpha(f)$ es una cofibración.
- $f = \delta(f) \circ \gamma(f)$ donde $\delta(f) \in J$ -iny, es decir $\delta(f)$ es una fibración, y $\gamma(f) \in J$ -cell $\subset J$ -cof, es decir $\gamma(f)$ es una cofibración trivial.

Nos falta probar el axioma del levantamiento y para eso usaremos la última condición. Comenzaremos viendo que, de hecho, los dos casos son equivalentes.

Afirmación: $W \cap I\text{-cof} \subseteq J\text{-cof}$ si y solamente si $W \cap I\text{-iny} \subseteq J\text{-iny}$

(\Leftarrow) Sea $i \in W \cap I\text{-cof}$. Podemos factorizar i como $i = j \circ p$ con $p \in J\text{-cell} \subseteq W \cap I\text{-cof}$ y $j \in J\text{-iny}$. Por la propiedad 2-de-3 de W , tenemos que $j \in W$ y, por lo tanto, $j \in W \cap I\text{-iny} \subseteq J\text{-iny}$. Entonces, el siguiente diagrama admite un levantamiento

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & Y \\ i \downarrow & \nearrow d & \downarrow j \\ Z & \xlongequal{\quad} & Z \end{array}$$

Luego, i resulta ser un retracto de $p \in J\text{-cell} \subseteq J\text{-cof}$ mediante el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} X & \xlongequal{\quad} & X & \xlongequal{\quad} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow i \\ Z & \xrightarrow{d} & Y & \xrightarrow{j} & Z \end{array}$$

y por lo tanto $i \in J\text{-cof}$.

(\Rightarrow) Sea $j \in W \cap J\text{-iny}$. Podemos factorizar j como $j = i \circ p$ donde $i \in I\text{-iny}$ y $p \in I\text{-cell}$. Por el axioma 2-de-3 de W , obtenemos que $p \in W$. Luego, $p \in W \cap I\text{-cell} \subseteq W \cap I\text{-cof} \subseteq J\text{-cof}$ y, por lo tanto, p tiene la LLP con respecto a i . Entonces, el siguiente diagrama conmutativo admite un levantamiento d

$$\begin{array}{ccc} X & \xlongequal{\quad} & X \\ p \downarrow & \nearrow d & \downarrow j \\ Z & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

Luego, obtenemos que j es un retracto de i mediante el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{p} & Z & \xrightarrow{d} & X \\ j \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow j \\ Y & \xlongequal{\quad} & Y & \xlongequal{\quad} & Y \end{array}$$

y por lo tanto $j \in I\text{-iny}$

Concluiremos la demostración del teorema probando:

- a) toda cofibración trivial tiene la LLP con respecto a las fibraciones asumiendo que $W \cap I\text{-cof} \subseteq J\text{-cof}$
- b) toda cofibración tiene la LLP con respecto a las fibraciones triviales asumiendo que $W \cap I\text{-iny} \subseteq J\text{-iny}$

Para a), notamos que $W \cap I\text{-cof} \subseteq J\text{-cof} = (J\text{-iny})\text{-proy}$ y por lo tanto toda cofibración trivial tiene la LLP con respecto a las fibraciones.

Por otro lado, b) es equivalente a que toda fibración trivial tenga la RLP con respecto a toda cofibración y $W \cap I\text{-iny} \subseteq J\text{-iny}$ implica que toda fibración trivial tiene la RLP con respecto a todo morfismo en I , en particular con respecto a toda cofibración. \square

Con la siguiente proposición veremos que es más sencillo mostrar que una adjunción es de Quillen cuando tenemos categoría modelo cofibrantemente generada.

Proposición 3.2.5. [2, Lema 2.1.20.] Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} categorías modelo. Supongamos que \mathcal{C} es una categoría modelo cofibrantemente generada cuyo conjunto de fibraciones generadoras es I y cuyo conjunto de cofibraciones generadoras es J . Sea $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ una adjunción. Entonces, son equivalentes

1. (F, G) es una adjunción de Quillen
2. Para todo $i \in I$ se tiene que $F(i)$ es una cofibración y para todo $j \in J$ se tiene que $F(j)$ es una cofibración trivial.

Demostración.

(1 \implies 2) Es directo de la definición de funtores de Quillen.

(2 \implies 1) Alcanza con ver que F es un funtor de Quillen a izquierda. Sea K la clase de cofibraciones de \mathcal{D} . Por el 3.1.3 tenemos que $F(I\text{-cof}) \subseteq (FI)\text{-cof}$. Luego, como $(FI) \subseteq K$, tenemos que $F(I\text{-cof}) \subseteq (FI)\text{-cof} \subseteq K\text{-cof} = K$. Luego, concluimos que F preserva cofibraciones. Análogamente, se ve que F preserva cofibraciones triviales. \square

3.3. Estructura modelo en Top

En esta sección definiremos una estructura modelo en la categoría de espacios topológicos Top de forma tal que su categoría de homotopía coincida con la teoría de homotopía clásica en Top. Comenzaremos viendo algunas propiedades de la categoría Top.

La categoría Top es completa y cocompleta pero, a diferencia de la categoría de conjuntos, no todo espacio topológico es pequeño. Para ver esto consideramos un ordinal límite λ y consideramos los siguientes espacios topológicos

- $S = \{a, b\}$ el espacio de Sierpinski donde los abiertos son $\{a\}$, S y \emptyset .

- $Y = \lambda \cup \{\lambda\}$ con la topología $\tau_Y = \{\{\lambda \geq \beta > \alpha\} : \lambda > \alpha\} \cup \{\emptyset\}$
- para cada $\alpha \in \lambda$, sea $X_\alpha = Y \times \{0, 1\} / \sim$ donde $\{0, 1\}$ tiene la topología discreta y $(x, 0) \sim (x, 1)$ si $x < \alpha$

Entonces, los morfismos $X_\alpha \longrightarrow X_{\alpha+1}$ definen una λ -sucesión y tenemos

$$X = \operatorname{colim}_{\alpha < \lambda} X_\alpha = (Y \times \{0\}) \cup \{(\lambda, 1)\}$$

donde los abiertos de X son de la forma

$$U = \{(\beta, 0) : \lambda \geq \beta < \alpha\} \cup \{(\lambda, 1)\}$$

Consideramos $f : S \longrightarrow X$ definida mediante $f(a) = (\lambda, 0)$ y $f(b) = (\lambda, 1)$. Tenemos que f no se puede factorizar de forma continua por ningún X_α porque en estos espacios se puede separar $(\lambda, 0)$ y $(\lambda, 1)$.

Definición 3.3.1. Decimos que una función continua $f : X \rightarrow Y$ es una **inclusión** si se verifica que U es abierto en X si y solamente si existe un abierto V en Y tal que $f^{-1}(V) = U$.

Lema 3.3.2. [2, Lema 25.4.1.] *Todo espacio topológico es pequeño con respecto a las inclusiones.*

Demostración. Sea $X : \lambda \rightarrow \operatorname{Top}$ una λ -sucesión de inclusiones, es decir cada $X_\alpha \rightarrow X_{\alpha+1}$ es una inclusión. Entonces, por inducción transfinita, cada función $X_\alpha \rightarrow X_\beta$ es una inclusión para $\beta > \alpha$ y por lo tanto

$$X_\alpha \rightarrow \operatorname{colim} X_\alpha$$

es una inclusión. Luego, si se puede factorizar una función continua $A \rightarrow \operatorname{colim} X_\alpha$ a través de un morfismo de conjuntos $A \rightarrow X_\alpha$, entonces este morfismo resulta una función continua.

Como todo conjunto es pequeño, tenemos que esa factorización existe y por lo tanto podemos concluir la prueba. \square

Definición 3.3.3. Decimos que una función continua $f : X \rightarrow Y$ es una **inclusión T_1 -cerrada** si es una inclusión cerrada y si todo punto que no está en $Y \setminus f(X)$ es cerrado.

Proposición 3.3.4. [2, Proposición 2.4.2.] *Los espacios topológicos compactos son finitos relativo a las inclusiones T_1 -cerradas.*

Demostración. Sea λ un ordinal límite y sea $X : \lambda \rightarrow \text{Top}$ una λ -sucesión de inclusiones T_1 -cerradas. Entonces cada $X_\alpha \rightarrow \text{colim} X_\alpha$ es una inclusión T_1 -cerrada.

Sea A un espacio topológico compacto. Para probar la afirmación, alcanza con ver que para todo $f : A \rightarrow \text{colim} X_\alpha$ tenemos que $f(A) \subset f(X_\alpha)$ para algún α .

Supongamos que la imagen de f no está contenida en X_α para ningún $\alpha < \lambda$. Entonces, existe una sucesión de puntos $S = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ en $f(A)$ y una sucesión de ordinales $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ tales que $x_n \in X_{\alpha_n} \setminus X_{\alpha_{n-1}}$. Tomamos $\alpha_0 = 0$ y sea $\mu = \sup_n \alpha_n$. Entonces, μ es un ordinal límite y $\mu \leq \lambda$. La intersección de S con cualquier X_{α_n} es finita y con X_0 es el conjunto vacío. Por lo tanto, $S \cap X_{\alpha_n}$ es cerrada en X_{α_n} . Como X_μ es el colímite en Top de los X_{α_n} , tenemos que S tiene la topología discreta como subespacio de X_μ . Dado que $X_\mu \rightarrow \text{colim} X_\alpha$ es una inclusión cerrada, S también tiene la topología discreta como subespacio del espacio compacto $f(A) \subset \text{colim} X_\alpha$, lo que es absurdo y por lo tanto $f(A) \subset X_\alpha$ para algún X_α . \square

De aquí en adelante consideramos la siguiente notación:

- $I := [0, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}$ es el intervalo topológico estándar
- $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ es el n -disco topológico estándar
- $S^{n-1} = \partial D^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ es la n -esfera topológica estándar

Tomamos además la convención $D^0 = \{0\}$, $S^{-1} = \emptyset$ y $S^0 = * \sqcup *$.

Vamos a definir la estructura de modelo clásica en Top y probaremos que es efectivamente una categoría modelo. De hecho, probaremos que es una categoría modelo cofibrantemente generada usando el teorema de reconocimiento.

Comenzamos definiendo los siguientes conjuntos de morfismos:

- $I_{\text{Top}} := \{S^{n-1} \hookrightarrow D^n : n \geq 0\}$
- $J_{\text{Top}} := \{D^n \hookrightarrow \text{Cyl}(D^n) : x \mapsto (x, 0), n \geq 0\}$, donde el objeto cilindro $\text{Cyl}(D^n)$ es simplemente $D^n \times I$

Definiremos, a continuación, las clases distinguidas de morfismos en Top que determinarán la estructura de categoría modelo.

Definición 3.3.5. Decimos que un morfismo $f : X \rightarrow Y$ en Top es

- una **equivalencia débil** si es una equivalencia débil de homotopía, es decir si $\pi_n(f, x) : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$ es un isomorfismo para todo $n \geq 0$ y todo $x \in X$. Denotaremos por W_{Top} al conjunto de equivalencias débiles.
- una **cofibración** si $f \in I_{\text{Top}}$ -cof. Denotaremos por C_{Top} al conjunto de cofibraciones.
- una **fibración** si $f \in J_{\text{Top}}$ -iny. Denotaremos por F_{Top} al conjunto de fibraciones.

Definición 3.3.6. Llamamos **complejo celular relativo** a los elementos de I -cell.

Definición 3.3.7. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Decimos que f es una **fibración de Serre** si para todo cuadrado conmutativo de funciones continuas

$$\begin{array}{ccc} D^n \times \{0\} & \longrightarrow & X \\ (1_{D^n}, 0) \downarrow & & \downarrow f \\ \text{Cyl}(D^n) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

existe una función continua $h : \text{Cyl}(D^n) \rightarrow X$ que hace conmutar el diagrama.

Notamos que la clase distinguida de fibraciones que definimos coincide con las fibraciones de Serre.

Teorema 3.3.8. [2, Teorema 2.4.19.] $(\text{Top}, C_{\text{Top}}, F_{\text{Top}}, W_{\text{Top}})$ es una categoría modelo cofibrantemente generada donde I_{Top} es el conjunto de cofibraciones generadoras y J_{Top} es el conjunto de cofibraciones triviales generadoras.

Demostración. Demostraremos este teorema viendo que se verifican las hipótesis del teorema de reconocimiento:

1. W_{Top} satisface la propiedad 2-de-3 y es cerrado bajo retractos por el lema 3.3.9
2. los dominios de los morfismos en I_{Top} y J_{Top} son pequeños con respecto a I_{Top} -cell y J_{Top} -cell respectivamente por el lema 3.3.13
3. J_{Top} -cell $\subseteq (W_{\text{Top}} \cap I_{\text{Top}}$ -cof) por el lema 3.3.16

4. $I_{\text{Top}}\text{-iny} \subseteq (W_{\text{Top}} \cap J_{\text{Top}}\text{-iny})$ por el lema 3.3.18

5. $(W_{\text{Top}} \cap J_{\text{Top}}\text{-iny}) \subseteq I_{\text{Top}}\text{-iny}$ por el lema 3.3.19

□

Lema 3.3.9. [2, Lema 2.4.4.] W_{Top} satisface el axioma 2-de-3 y es cerrado bajo retracts.

Demostración. Para probar que W_{Top} satisface el axioma 2-de-3 tomamos $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ y $h : X \rightarrow Z$ tales que $g \circ f = h$. Es claro que si $f, g \in W_{\text{Top}}$ entonces $h \in W_{\text{Top}}$ y que si $g, h \in W_{\text{Top}}$ entonces $f \in W_{\text{Top}}$. El problema que puede surgir si $f, h \in W_{\text{Top}}$ y queremos probar que $g \in W_{\text{Top}}$ es que podría existir un punto $y \in Y$ que no pertenece a la imagen de f . En tal sentido, sea $y \in Y$ que puede o no estar en la imagen de f . Como $\pi_0(f)$ es un isomorfismo, existe $x \in X$ y un camino $\alpha : I \rightarrow Y$ de $f(x)$ en y . Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(Y, y) & \longrightarrow & \pi_n(Z, g(y)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_n(Y, f(x)) & \longrightarrow & \pi_n(Z, g(f(x))) \end{array}$$

donde la flecha vertical izquierda es la conjugación por el camino α y la flecha vertical derecha es la conjugación por el camino $g \circ \alpha$. Luego, como el morfismo de abajo es un isomorfismo dado que estamos en la imagen de f , obtenemos que el morfismo de arriba también es un isomorfismo y, por lo tanto, $g \in W_{\text{Top}}$.

Consideremos, ahora, $f : X \rightarrow Y$ retracts de un morfismo $w \in W_{\text{Top}}$.

$$\begin{array}{ccccc} & & id_X & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ X & \longrightarrow & A & \xrightarrow{b} & X \\ & \downarrow f & \sim \downarrow w & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{a} & B & \longrightarrow & Y \\ & \curvearrowleft & & \curvearrowright & \\ & & id_Y & & \end{array}$$

Aplicando el funtor π_i obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_{\pi_i(X)} & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 \pi_i(X) & \longrightarrow & \pi_i(A) & \xrightarrow{\pi_i(b)} & \pi_i(X) \\
 \pi_i(f) \downarrow & & \simeq \downarrow \pi_i(w) & & \downarrow \pi_i(f) \\
 \pi_i(Y) & \xrightarrow{\pi_i(a)} & \pi_i(B) & \longrightarrow & \pi_i(Y) \\
 & & \curvearrowleft & & \\
 & & \text{id}_{\pi_i(Y)} & &
 \end{array}$$

Luego, una inversa de $\pi_i(f)$ es $\pi_i(b) \circ \pi_i(w)^{-1} \circ \pi_i(a) : \pi_i(Y) \rightarrow \pi_i(X)$ y, por lo tanto, $f \in W_{\text{Top}}$. \square

Proposición 3.3.10. [2, Lema 2.4.5.] *Todo morfismo en I_{Top} -cell es una inclusión T_1 -cerrada.*

Demostración. Como todo morfismo en I_{Top} es una inclusión T_1 -cerrada, alcanza con ver que las inclusiones T_1 -cerradas son cerradas por pushouts y composiciones transfinitas.

Sea i una inclusión T_1 -cerrada y j un pushout de i

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & Y \\
 i \downarrow & & \downarrow j \\
 X & \xrightarrow{g} & X \cup_A Y
 \end{array}$$

Entonces, j es inyectivo por ser pushout de un morfismo inyectivo. Luego, para mostrar que es una inclusión cerrada alcanza con ver que para todo conjunto cerrado V en Y , su imagen $j(V)$ es cerrada en $X \cup_A Y$. Por definición de la topología en el pushout, $j(V)$ es cerrado en $X \cup_A Y$ si y solamente si $g^{-1}(j(V))$ es cerrado en X . Como i es inyectiva, $g^{-1}(j(V)) = i(f^{-1}(V))$. Luego, como i es una inclusión cerrada, tenemos que $i(f^{-1}(V))$ es cerrado en X . Por lo tanto, $g^{-1}(j(V))$ es cerrado en X y tenemos que j es una inclusión cerrada. Falta ver que si $p \in (X \cup_A Y) \setminus j(Y)$ entonces $\{p\}$ es cerrado en $X \cup_A Y$. Tenemos que $g^{-1}(p)$ es un único punto $x \in X \setminus i(A)$, entonces, dado que i es una inclusión T_1 -cerrada, $\{x\}$ es cerrado en X . Por lo tanto, $\{p\}$ es cerrado en $X \cup_A Y$ y concluimos que j es una inclusión T_1 -cerrada.

Sea $X : \lambda \rightarrow \text{Top}$ una λ -sucesión de inclusiones T_1 -cerradas, es decir, cada morfismo $X_\alpha \rightarrow X_{\alpha+1}$ es una inclusión T_1 -cerrada. Probaremos por inducción transfinita que la composición de la sucesión también es una inclusión T_1 -cerrada. El caso de una composición finita es trivial. Sea α un ordinal límite y supongamos que $X_0 \rightarrow X_\beta$ es una inclusión T_1 -cerrada para todo $\beta < \alpha$. Denotamos por i_β a la composición $X_0 \rightarrow X_\beta$ y por i^β a la composición $X_\beta \rightarrow X_\alpha$. Veamos, entonces, que i_α es una inclusión T_1 -cerrada. En primer lugar,

tenemos que i_α es inyectiva por ser composición transfinita de morfismos inyectivos. Luego, veremos que i_α es un homeomorfismo sobre su imagen, probando que es un morfismo cerrado. Dado $U \subset X_0$, por hipótesis inductiva, $i_\beta(U)$ es cerrado en X_β para todo $\beta < \alpha$. Dado que los morfismos de la λ -sucesión son inyectivos tenemos que $(i_\beta)^{-1}(i_\alpha(U)) = i_\beta(U)$. Entonces $i_\alpha(U)$ es cerrado en X_α ya que $\text{colim } X_\alpha$ tiene la topología final de los morfismos i^β . Finalmente, veamos que para todo $x \in X_\alpha \setminus i_\alpha(X_0)$ se tiene que $\{x\}$ es cerrado en X_α . Por inyectividad de los i^β tenemos que $(i^\beta)^{-1}(\{x\})$ es o bien el conjunto vacío o bien un único punto en $X_\beta \setminus i_\beta(X_0)$ y, por lo tanto, $(i^\beta)^{-1}(\{x\})$ es cerrado en X_β . Entonces, $\{x\}$ es cerrado en X_α . \square

Observación 3.3.11. Vimos en la proposición 3.3.4 que los espacios topológicos son finitos relativo a las inclusiones T_1 -cerradas, entonces, dado que los dominios de los morfismos en I_{Top} son compactos, tenemos que son finitos relativo a las inclusiones T_1 -cerradas. Luego, como todos los morfismos en $I_{\text{Top-cell}}$ son inclusiones T_1 -cerradas, obtenemos que los dominios de los morfismos en I_{Top} son pequeños relativo a $I_{\text{Top-cell}}$.

Proposición 3.3.12. [2, Corolario 2.4.6.] *Todo morfismo en $I_{\text{Top-cof}}$ es una inclusión T_1 -cerrada.*

Demostración. Como sabemos que el dominio de cada morfismo en I_{Top} es pequeño relativo a $I_{\text{Top-cell}}$, podemos aplicar el corolario del teorema del objeto pequeño que nos dice que todo morfismo en $I_{\text{Top-cof}}$ es el retracto de algún morfismo en $I_{\text{Top-cell}}$. Luego, alcanza con ver que las inclusiones T_1 -cerradas son cerradas bajo retracts.

Sea g una inclusión T_1 -cerrada y f un retracto de g

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_A & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\
 A & \xrightarrow{t} & X & \xrightarrow{r} & A \\
 f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\
 B & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{h} & B \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowright & \\
 & & \text{id}_B & &
 \end{array}$$

Supongamos por absurdo que f no es inyectiva. Entonces, existen $a_1, a_2 \in A$ tales que $f(a_1) = f(a_2)$. Entonces

$$g(t(a_1)) = i(f(a_1)) = i(f(a_2)) = g(t(a_2))$$

Luego, dado que g es inyectiva, se debe cumplir que $t(a_1) = t(a_2)$, lo que contradice que $r \circ t$ sea la identidad.

Para ver que f es una inclusión cerrada alcanza con ver que $f(C)$ es cerrado para todo $C \subseteq A$ cerrado y se tiene que

$$f(C) = (i^{-1} \circ g \circ r^{-1})(C)$$

es cerrado ya que g es una inclusión cerrada.

Para terminar la prueba sea $p \in B \setminus f(A)$ y veremos que $\{p\}$ es cerrado. Si $i(p) = g(x)$ para algún $x \in X$, entonces

$$p = h(i(p)) = h(g(x)) = f(r(x)) = f(r(x))$$

lo que es absurdo. Luego, como g es una inclusión T_1 -cerrada, se tiene que $i(p)$ es cerrado y, por lo tanto, dado que i es inyectiva concluimos que $p = i^{-1}(i(p))$ es cerrado. \square

Lema 3.3.13. *Los dominios de los morfismos en I_{Top} son pequeños relativo a I_{Top} -cell y los dominios de los morfismos en J_{Top} son pequeños relativo a J_{Top} -cell.*

Demostración. Ya vimos que la propiedad 3.3.10 y la proposición 3.3.4 implican que los dominios de los morfismos en I_{Top} son pequeños relativo a I_{Top} .

Además, dado que $J_{\text{Top}}\text{-cell} \subseteq J_{\text{Top}}\text{-cof} \subseteq I_{\text{Top}}\text{-cof}$, por la proposición 3.3.12 tenemos que todos los morfismos en $J_{\text{Top}}\text{-cell}$ son inclusiones T_1 -cerradas. Entonces, por la proposición 3.3.4, concluimos que los dominios de morfismos en J_{Top} son pequeños relativo a $J_{\text{Top}}\text{-cell}$. \square

Proposición 3.3.14. *[2, Lema 2.4.8.] Sea λ un ordinal y $X : \lambda \rightarrow \text{Top}$ una λ -sucesión de inclusiones T_1 -cerradas que también son equivalencias débiles. Entonces el morfismo $X_0 \rightarrow \text{colim } X_\alpha$ es una equivalencia débil y una inclusión T_1 -cerrada.*

Demostración. Como las inclusiones T_1 -cerradas son cerradas bajo composición transfinita tenemos que $X_0 \rightarrow \text{colim } X_\alpha$ es una inclusión T_1 -cerrada.

Veremos que $i_\alpha : X_0 \rightarrow \text{colim } X_\alpha$ es una equivalencia débil por inducción transfinita en α . La afirmación se verifica para $\alpha = 0$. Consideramos, entonces, un ordinal límite β y supongamos que i_α es una equivalencia débil para todo $\alpha < \beta$. Fijamos un punto base $x \in X_0$ y queremos probar que $\pi_n(i_\beta, x)$ es un isomorfismo.

Comencemos viendo que es sobreyectivo. Consideramos $[f] \in \pi_n(X_\beta, i_\beta(x))$ la clase de equivalencia de un morfismo $f : (S^n, *) \rightarrow (X_\beta, x)$. Como S^n es compacto, es pequeño relativo a inclusiones T_1 -cerradas. Entonces, f se factoriza a través de un morfismo $g : (S^n, *) \rightarrow X_\alpha$ para algún $\alpha < \beta$. Es

decir $[i^\beta \circ g] = [f]$. Luego, como i_α es una equivalencia débil, $[g]$ tiene una preimagen por $\pi_n(i_\alpha, x)$. Concluimos entonces que $\pi_n(i_\beta, x)$ es sobreyectivo.

Veamos ahora que $\pi_n(i_\beta, x)$ es inyectivo. Para ello consideramos dos morfismos $f, g : (S^n, *) \rightarrow (X_0, x)$ tales que $[i_\beta(f)] = [i_\beta(g)]$. Sea $H : S^n \times I \rightarrow X_\beta$ una homotopía entre $i_\beta(f)$ y $i_\beta(g)$ que preserve el punto base. Como $S^n \times I$ es compacto, H se factoriza a través de un morfismo $H' : S^n \times I \rightarrow X_\alpha$ para algún $\alpha < \beta$. Entonces, H' es una homotopía entre $i_\alpha(f)$ y $i_\alpha(g)$ que preserve el punto base. Es decir, $[i_\alpha(f)] = [i_\alpha(g)]$ en $\pi_n(X_\alpha, x)$. Luego, como i_α es una equivalencia débil concluimos que $[f] = [g]$ en $\pi_n(X_0, x)$. \square

Proposición 3.3.15. [2, pág. 53] *La clase de inclusiones de retracts por deformación es cerrada bajo pushouts.*

Demostración. Sea i una inclusión de un retracto por deformación y supongamos que tenemos un diagrama de pushout

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{g} & X \cup_A Y \end{array}$$

Dado que I es localmente compacto, el funtor $- \times I : \text{Top} \rightarrow \text{Top}$ es adjunto a izquierda del funtor $\text{Hom}(I, -) : \text{Top} \rightarrow \text{Top}$. Por lo tanto, el funtor $- \times I$ conmuta con colímites y obtenemos el siguiente diagrama de pushout

$$\begin{array}{ccc} A \times I & \xrightarrow{f \times 1_I} & Y \times I \\ i \times 1_I \downarrow & & \downarrow j \times 1_I \\ X \times I & \xrightarrow{g \times 1_I} & (X \cup_A Y) \times I \end{array}$$

Sea $K : X \times I \rightarrow X$ la homotopía con respecto a la cual i es la inclusión de un retracto por deformación. La propiedad universal del pushout induce el morfismo H en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & Y \times I \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times I & \longrightarrow & (X \cup_A Y) \times I \\ K \downarrow & & \searrow H \\ X & \xrightarrow{g} & X \cup_A Y \end{array}$$

(y,t) ↦ j(y)

Veamos que H es una retracción por deformación y que j es la inclusión correspondiente:

- por construcción se tiene que $H(y, t) = j(y)$ para todo $y \in Y$
- se tiene que $H(p, 0) = p$ para todo $p \in X \cup_A Y$. Si $p \in \text{Im}(j)$ esto es claro. Si no, $p = g(x)$ para algún $x \in X$ y entonces

$$H(p, 0) = H(g(x), 0) = g(K(x, 0)) = g(x) = p$$

- se tiene que $H(p, 1) \in j(Y)$ para todo $p \in X \cup_A Y$. Si $p \in \text{Im}(j)$ esto es claro. Si no, $p = g(x)$ para algún $x \in X$ y entonces

$$H(g(x), 1) = g(K(x, 1)) \in j(Y)$$

□

Lema 3.3.16. [2, Proposición 2.4.9.] *Todo morfismo en J_{Top} -cof es una cofibración trivial.*

Demostración. Ya sabemos que J_{Top} -cof $\subseteq I_{\text{Top}}$ -cof y, por lo tanto, todos los morfismos de J_{Top} -cof son cofibraciones. Falta ver que todo morfismo de J_{Top} -cof es una equivalencia débil. Dado que los morfismos de J_{Top} -cof son inclusiones de retracts por deformación, por la proposición 3.3.15, tenemos que pushouts de morfismos en J_{Top} -cof son inclusiones de retracts por deformación y, por lo tanto, son equivalencias débiles. Además, como las inclusiones T_1 -cerradas son cerradas bajo pushouts, se tiene que pushouts de morfismos en J_{Top} -cof son inclusiones T_1 -cerradas. Luego, por la proposición 3.3.14, composiciones transfinitas de pushouts de morfismos en J_{Top} -cof son equivalencias débiles. Es decir, J_{Top} -cell $\subseteq W_{\text{Top}}$. Luego, como las equivalencias débiles son cerradas bajo retracts, por el corolario del argumento del objeto pequeño, concluimos que J_{Top} -cof $\subseteq W_{\text{Top}}$. □

En particular, obtenemos que J_{Top} -cell $\subseteq (W_{\text{Top}} \cap I_{\text{Top}}\text{-cof})$. Veremos, a continuación, que I_{Top} -cof $\subseteq (W_{\text{Top}} \cap J_{\text{Top}}\text{-iny})$.

Proposición 3.3.17. [2, pág. 54] *El morfismo $* \rightarrow S^n$ es un elemento de I_{Top} -cof*

Demostración. Dado $i : A \rightarrow B$ un elemento de I_{Top} -iny, queremos ver que $* \rightarrow S^n$ tiene la LLP con respecto a i . Se tiene que el morfismo $* \rightarrow S^n$ es el pushout de la inclusión $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$. Luego, como $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ está en I_{Top} e i está en I_{Top} -iny, tenemos que i tiene la RLP con respecto a $S^{n-1} \rightarrow D^n$ lo que induce el levantamiento $D^n \rightarrow A$ en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 S^{n-1} & \longrightarrow & * & \longrightarrow & A \\
 \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \downarrow i \\
 D^n & \longrightarrow & S^n & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

Luego, por la propiedad universal del pushout obtenemos el levantamiento $S^n \rightarrow B$ que buscábamos. \square

Lema 3.3.18. [2, Proposición 2.4.10.] *Todo morfismo en I_{Top} -iny es una fibración trivial.*

Demostración. Dado que $J_{\text{Top}}\text{-cof} \subseteq I_{\text{Top}}\text{-cof}$, tenemos que $I_{\text{Top}}\text{-iny} \subseteq J_{\text{Top}}\text{-iny}$ y, por lo tanto, todo morfismo de $I_{\text{Top}}\text{-iny}$ es una fibración. Falta ver que $I_{\text{Top}}\text{-iny} \subseteq W_{\text{Top}}$. Sean $p : X \rightarrow Y$ en $I_{\text{Top}}\text{-iny}$ y $x_0 \in X$. Queremos ver que

$$\pi_n(p, x_0) : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, p(x_0))$$

es un isomorfismo para todo n .

Para ver que $\pi_n(p, x_0)$ es sobreyectivo, mostraremos que dado $f : (S^n, *) \rightarrow (Y, p(x_0))$ existe $g : (S^n, *) \rightarrow (X, x_0)$ tal que $f = p \circ g$. Como $p \in I_{\text{Top}}\text{-iny}$ y $* \rightarrow S^n$ está en I_{Top} por la proposición 3.3.15, el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 * & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & & \downarrow p \\
 S^n & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

admite un levantamiento $S^n \rightarrow X$ que es el morfismo g buscado.

Para ver que $\pi_n(p, x_0)$ es inyectivo consideremos $f, g : (S^n, *) \rightarrow (X, x_0)$ tales que $[p \circ f] = [p \circ g]$ en $\pi_n(Y, p(x_0))$. Entonces, existe una homotopía $H : S^n \times I \rightarrow Y$ entre $p \circ f$ y $p \circ g$. Los morfismos f y g inducen un morfismo $(f, g) : S^n \vee S^n \rightarrow X$ donde $S^n \vee S^n$ se obtiene de $S^n \sqcup S^n$ identificando los puntos base. Por otro lado, H induce un morfismo $\bar{H} : S^n \wedge I_+ \rightarrow Y$ donde $S^n \wedge I_+ = (S^n \times I) / (* \times I)$. Tenemos que la inclusión $S^n \vee S^n \hookrightarrow S^n \wedge I_+$ es un CW-complejo relativo donde $S^n \wedge I_+$ se obtiene pegándole un $n + 1$ -disco a $S^n \vee S^n$ y, por lo tanto, está en $I_{\text{Top}}\text{-cof}$. Luego, el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 S^n \vee S^n & \xrightarrow{(f,g)} & X \\
 \downarrow & & \downarrow p \\
 S^n \wedge I_+ & \xrightarrow{\bar{H}} & Y
 \end{array}$$

admite un levantamiento que constituye una homotopía entre f y g . \square

Resta ver que $W_{\text{Top}} \cap J_{\text{Top}}\text{-iny} \subseteq I_{\text{Top}}\text{-iny}$, es decir, que toda fibración trivial es un elemento de $I_{\text{Top}}\text{-iny}$.

Lema 3.3.19. [2, Teorema 2.4.12.] Toda fibración de Serre trivial está en I_{Top} -iny.

Demostración. Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo en $W_{\text{Top}} \cap J_{\text{Top}}$ -iny. Entonces, f induce isomorfismos $\pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$ para todo $n \geq 0$. En particular, para $n = 0$, tenemos un isomorfismo entre las componentes arcoconoexas de X y de Y . Dado que $\pi_0(f)$ es sobreyectiva, el siguiente diagrama admite un levantamiento

$$\begin{array}{ccc} S^{-1} = \emptyset & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ D^0 = * & \longrightarrow & Y \end{array}$$

y, dado que $\pi_0(f)$ es inyectiva, el siguiente diagrama admite un levantamiento

$$\begin{array}{ccc} S^0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ D^1 = I & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Luego, falta ver que si $n \geq 2$ entonces el siguiente diagrama admite un levantamiento

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Tomamos un punto base en S^{n-1} y sea x su imagen en X e y su imagen en Y . Por el diagrama, se tiene que $f_*([\alpha]) = 0$ en $\pi_{n-1}(Y, y)$. Entonces, dado que f es una equivalencia débil, $[\alpha] = 0$ en $\pi_{n-1}(X, x)$. Luego, existe un morfismo β' tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow & \nearrow \beta' & \downarrow \\ D^n & & Y \end{array}$$

Falta ver que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow \beta' & \downarrow f \\ D^n & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

también conmuta. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 S^{n-1} & \hookrightarrow & D^n \\
 \downarrow & & \downarrow f \circ \beta' \\
 D^n & \xrightarrow{\beta} & Y
 \end{array}$$

Entonces, por la propiedad universal del pushout, existe un único morfismo $\varphi : S^n \rightarrow Y$. El morfismo φ representa un elemento del n -ésimo grupo de homotopía de Y , es decir $[\varphi] \in \pi_n(Y, y)$. Como f es una equivalencia débil, existe $[p] \in \pi_n(X, x)$ tal que $f_*([p]) = [\varphi]$. Obtenemos, entonces, que el siguiente diagrama conmuta a menos de homotopía

$$\begin{array}{ccc}
 & & X \\
 & \nearrow p & \downarrow f \\
 S^n & \xrightarrow{\varphi} & Y
 \end{array}$$

Podemos escoger p como un morfismo $p' : D^n \rightarrow X$. Sea $(f \circ p', \beta) : S^n \rightarrow Y$ el morfismo que se obtiene aplicando la propiedad universal del pushout al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 S^{n-1} & \longrightarrow & D^n & & \\
 \downarrow & & \downarrow & \searrow \beta & \\
 D^n & \longrightarrow & S^n & \dashrightarrow & Y \\
 & \searrow f \circ p' & & & \downarrow \\
 & & & & Y
 \end{array}$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
 [(f \circ p', \beta)] &= [(f \circ p', f \circ \beta')] + [(f \circ \beta', \beta)] \\
 &= f_*([(p', \beta')]) + [(f \circ \beta', \beta)] \\
 &= f_*([p]) + [(f \circ \beta', \beta)] \\
 &= [\varphi] + [(f \circ \beta', \beta)] \\
 &= [(\beta, f \circ \beta')] + [(f \circ \beta', \beta)] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Obtenemos así, que existe una homotopía Φ de $f \circ \beta'$ en β que deja fijo el borde del n -disco. Por lo tanto, podemos extenderla a un morfismo

$$S^{n-1} \sqcup_{S^{n-1} \times I} D^n \times I \xrightarrow{(f \circ \alpha, \Phi)} Y$$

Luego, alcanza con encontrar un levantamiento del diagrama

$$\begin{array}{ccc}
D^n & \xrightarrow{p'} & X \\
\downarrow & & \downarrow f \\
S^{n-1} \sqcup_{S^{n-1} \times I} D^n \times I & \xrightarrow{(f \circ \alpha, \Phi)} & Y
\end{array}$$

Pero, dado que $S^{n-1} \sqcup_{S^{n-1} \times I} D^n \times I$ es isomorfo a $D^n \times I$ y que $f \in J_{\text{Top}}$ -iny obtenemos que el levantamiento buscado existe. \square

Concluiremos esta sección viendo que, con la estructura de categoría modelo descrita, todo espacio topológico es un objeto fibrante de Top .

Proposición 3.3.20. [2, Corolario 2.4.14.] *En $(\text{Top}, C_{\text{Top}}, F_{\text{Top}}, W_{\text{Top}})$ todo objeto es fibrante.*

Demostración. Sea Y un espacio topológico. Dado que todo morfismo en J_{Top} es la inclusión de un retracto, resulta que el morfismo $Y \rightarrow *$ tiene la RLP con respecto a J_{Top} y, por lo tanto, $Y \rightarrow *$ es una fibración. \square

3.4. Estructura modelo en sSet

3.4.1. La categoría sSet de conjuntos simpliciales

En esta sección definiremos la categoría de conjuntos simpliciales sSet y veremos algunas de sus propiedades.

Definición 3.4.1. Definimos la **categoría simplicial** Δ de la siguiente manera:

- los objetos son los conjuntos ordenados $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ con $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Obj}(\Delta) = \{[n] : n \in \mathbb{N}\}$$

- los morfismos son las funciones monótonas crecientes

$$\Delta([n], [m]) = \text{Hom}_{\Delta}([n], [m]) = \{f : [n] \rightarrow [m] : f(i) \leq f(j) \text{ si } i \leq j\}$$

Definiremos, ahora, morfismos particulares en la categoría Δ .

Definición 3.4.2. Los morfismos **cocara** son los endomorfismos de la categoría Δ definidos mediante

$$\begin{aligned}
d_n^i : [n] &\longrightarrow [n+1] \text{ con } n \in \mathbb{N}, n \neq 0, i \in \{0, \dots, n\} \\
d_n^i(m) &= \begin{cases} m & \text{si } m < i \\ m+1 & \text{si } m \geq i \end{cases}
\end{aligned}$$

Es decir, $d_n^i(\{0, \dots, n\}) = \{0, \dots, \hat{i}, \dots, n+1\}$ donde \hat{i} significa que omitimos i en $\{0, \dots, n+1\}$. Los morfismos **codegeneración** son los endomorfismos de Δ definidos mediante

$$s_n^j : [n+1] \longrightarrow [n] \text{ con } n \in \mathbb{N}, j \in \{0, \dots, n\}$$

$$s_n^j(m) = \begin{cases} m & \text{si } m \leq j \\ m-1 & \text{si } m > j \end{cases}$$

Es decir, $s_n^j(\{0, \dots, n+1\}) = \{0, \dots, j, j, \dots, n\}$.

Veremos ahora que cualquier morfismo en la categoría Δ es la composición de morfismos cocara y morfismos de codegeneración, lo que resulta muy útil para describir un conjunto simplicial.

Lema 3.4.3. [4, pág. 177] *En Δ , cualquier morfismo $f : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, n'\}$ tiene una única representación de la forma*

$$f = d^{i_k} \dots d^{i_1} s^{j_1} \dots s^{j_h} \quad (1)$$

donde los enteros no negativos satisfacen $n+k-h = n'$ y además los supraíndices satisfacen

$$n' \geq i_k > \dots > i_1 \geq 0 \quad 0 \leq j_i < \dots < j_h \leq n$$

Demostración. Una función monótona creciente f queda completamente determinada por su imagen en $\{0, \dots, n'\}$ y por los elementos $j \in \{0, \dots, n-1\}$ donde la función no crece, es decir los j tales que $f(j) = f(j+1)$.

Luego, sean i_1, \dots, i_k en orden creciente los elementos de $\{0, \dots, n'\}$ que no están en la imagen de f y sean j_1, \dots, j_h los elementos de $\{0, \dots, n\}$ donde f no crece.

Tenemos entonces que $f = d^{i_k} \dots d^{i_1} s^{j_1} \dots s^{j_h}$. \square

Lema 3.4.4. [4, pág. 177] *Las caras y degeneraciones satisfacen las siguientes relaciones llamadas identidades cosimpliciales:*

$$\begin{aligned} d^i d^j &= d^{j-1} d^i & \text{si } i \leq j, \\ s^j s^i &= s^i s^{j+1} & \text{si } i \leq j, \\ s^j d^i &= d^i d^{j-1} & \text{si } i < j, \\ s^j d^i &= 1 & \text{si } i = j, j+1, \\ s^j d^i &= d^{i-1} s^j & \text{si } i > j+1 \end{aligned} \quad (2)$$

Demostración. Estas relaciones se verifican directamente a partir de la definición de d^i y de s^i .

Por ejemplo, para la primera, como $i \leq j$, tenemos que

$$d^i d^j([n]) = d^i(\{0, \dots, \underbrace{i}_{\text{lugar } i}, \dots, \hat{j}, \dots, n\}) = \{0, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{j}, \dots, n\}$$

$$d^{j-1} d^i([n]) = d^{j-1}(\{0, \dots, \hat{i}, \dots, \underbrace{j}_{\text{lugar } j-1}, \dots, n\}) = \{0, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{j}, \dots, n\}$$

□

Proposición 3.4.5. [4, pág. 178] *Los morfismos de la categoría Δ son todas las composiciones de todos los morfismos d^i y s^j sujetas a las identidades simpliciales.*

Demostración. Por el lema 3.4.3, tenemos que todo morfismo en Δ es una composición de morfismos cocara y codegeneración. Además, las relaciones del lema 3.4.4 nos permiten escribir cualquier composición de morfismos cocara y codegeneración en la forma (1). □

Definición 3.4.6. Un **conjunto simplicial** es un funtor contravariante $X : \Delta \rightarrow \text{Set}$ o, equivalentemente, un funtor covariante $X : \Delta^{op} \rightarrow \text{Set}$. La **categoría sSet de conjuntos simpliciales** está definida mediante:

- los objetos son los funtores covariantes de Δ^{op} en Set
- los morfismos son las transformaciones naturales

Definición 3.4.7. Dado un conjunto simplicial X_\bullet , denotamos por $X[n]$ a $X_n = X(\{0, \dots, n\})$ y decimos que X_n es el **conjunto de n-símplices** de X_\bullet .

Definición 3.4.8. Definimos el **n-símplice estándar** Δ^n en sSet como el funtor contravariante $\Delta^n = \Delta(-, [n]) : \Delta \rightarrow \text{Set}$ que manda un morfismo $f : [m] \rightarrow [n]$ en Δ en un morfismo g dado por $g(\sigma'(i)) = \sigma(f(i))$ donde $\sigma \in \Delta([m'], [n])$ y $\sigma' \in \Delta([m], [n])$.

Observación 3.4.9. Aplicando el lema de Yoneda, tenemos que si $K : \Delta^{op} \rightarrow \text{Set}$ es un funtor covariante entonces

$$\begin{aligned} \text{Nat}(\text{Hom}_{\Delta^{op}}([n], -), K) &= \text{Hom}_{\text{sSet}}(\text{Hom}_{\Delta}(-, [n]), K) \\ &= \text{Hom}_{\text{sSet}}(\Delta^n, K) \end{aligned}$$

Luego, para todo conjunto simplicial X_\bullet , se cumple que

$$\text{Hom}_{\text{sSet}}(\Delta^n, X_\bullet) \cong X_n$$

Veremos, ahora, una descripción más concreta de los conjuntos simpliciales a partir de algunos morfismos particulares.

Sea d_i el morfismo correspondiente a d^i en la categoría Δ^{op} , y s_i el morfismo correspondiente a s^i . Llamamos morfismo cara a d_i y morfismo degeneración a s_i .

Como $(-)^{op}$ es un funtor contravariante, las identidades cosimpliciales inducen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 d_j d_i &= d_i d_{j-1} & \text{si } i \leq j, \\
 s_i s_j &= s_{j+1} s_i & \text{si } i \leq j, \\
 d_i s_j &= s_{j-1} d_i & \text{si } i < j, \\
 d_i s_j &= 1 & \text{si } i = j, j + 1, \\
 d_i s_j &= s_j d_{i-1} & \text{si } i > j + 1
 \end{aligned} \tag{3}$$

Análogamente a la proposición 3.4.5, tenemos que todos los morfismos de Δ^{op} están generados por composiciones de morfismos cara y degeneración sujetos a las relaciones (3).

Esto nos permite dar una definición más concreta de conjunto simplicial: para dar un conjunto simplicial alcanza con definir conjuntos de n -símplices, morfismos cara y morfismos degeneración.

Si X es un conjunto simplicial, notaremos por d_i a $X(d_i)$ y por s_j a $X(s_j)$.

Proposición 3.4.10. [4, pág. 179] *Un conjunto simplicial X es una colección de conjuntos X_n para cada $n \geq 0$ junto con funciones $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$ y $s_i : X_n \rightarrow X_{n+1}$, para todo $0 \leq i \leq n$ y para todo n , que satisfacen las siguientes relaciones:*

$$d_j d_i = d_i d_{j-1} \quad \text{si } i \leq j, \tag{4}$$

$$s_i s_j = s_{j+1} s_i \quad \text{si } i \leq j, \tag{5}$$

$$d_i s_j = s_{j-1} d_i \quad \text{si } i < j, \tag{6}$$

$$d_i s_j = 1 \quad \text{si } i = j, j + 1, \tag{7}$$

$$d_i s_j = s_j d_{i-1} \quad \text{si } i > j + 1 \tag{8}$$

Proposición 3.4.11. [2, pág. 74] *Un morfismo simplicial $f : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ es equivalente a una sucesión de morfismos $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ que conmutan con los morfismos cara y degeneración.*

Demostración. Por definición, si $f : X \rightarrow Y$ es una transformación natural entre conjuntos simpliciales, tenemos que existen morfismos f_n y f_{n-1} tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{d_i} & X_{n-1} \\ f_n \downarrow & & \downarrow f_{n-1} \\ Y_n & \xrightarrow{d_i} & Y_{n-1} \end{array}$$

lo que implica que $f_{n-1}d_i = d_i f_n$.

Análogamente, existen morfismos f_{n+1} y f_n tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{s_j} & X_{n+1} \\ f_n \downarrow & & \downarrow f_{n+1} \\ Y_n & \xrightarrow{s_j} & Y_{n+1} \end{array}$$

lo que implica que $f_{n+1}s_j = s_j f_n$ □

Observación 3.4.12. La categoría $s\text{Set}$ es completa y cocompleta ya que los límites y colímites se pueden construir por nivel y la categoría Set es bicompleta.

Definición 3.4.13. Sea X_\bullet un conjunto simplicial y X un símplice de X_\bullet . Una **cara** de X es cualquier imagen de X bajo iteraciones de morfismos cara. Una **degeneración** de X es cualquier imagen de X bajo iteraciones de morfismos degeneración.

Definición 3.4.14. Decimos que un conjunto simplicial Y_\bullet es un **subconjunto simplicial** de un conjunto simplicial X_\bullet si existe un monomorfismo $Y_\bullet \rightarrow X_\bullet$, es decir si $Y_n \subseteq X_n$ para todo $[n] \in \Delta$ y si

$$X_\bullet f|_{Y_n} = Y_\bullet f$$

para todo $f : [m] \rightarrow [n]$. Dado un subconjunto $S \subset X_n$ para algún n , el conjunto simplicial **generado** por S es el menor subconjunto simplicial de X que contiene a S .

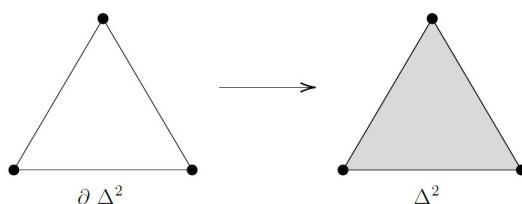
A continuación, veremos tres tipos importantes de subconjuntos del conjunto simplicial Δ^n .

Definición 3.4.15. La **i-ésima cara** $\partial_i \Delta^n$ de Δ^n es el conjunto simplicial generado por d^i . Es decir,

$$\partial_i \Delta^n \cong \Delta^{n-1} \xrightarrow{d^i} \Delta^n$$

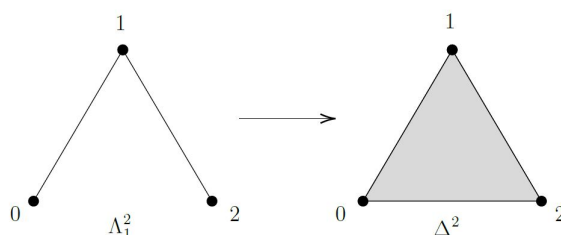
Definición 3.4.16. La **n-esfera simplicial** $\partial \Delta^n$ es el subconjunto simplicial de Δ^n dado por la unión de las caras $\partial_0 \Delta^n, \dots, \partial_n \Delta^n$. Es decir, es el subconjunto simplicial generado por $\{d^0, \dots, d^n\}$.

Gráficamente, podemos pensar $\partial\Delta^n$ de la siguiente forma



Definición 3.4.17. El **cuerno simplicial** Λ_k^n es la unión de todas las caras de Δ^n menos la k -ésima cara. Es decir, es el subconjunto simplicial de Δ^n generado por el conjunto $\{d^0, \dots, d^{k-1}, d^{k+1}, \dots, d^n\}$.

Gráficamente, podemos pensar el cuerno Λ_k^n de la siguiente forma



3.4.2. La realización geométrica y el funtor singular

En esta sección, estudiaremos el funtor realización geométrica y el funtor singular. Ambos serán fundamentales tanto para establecer la estructura de categoría modelo en los conjuntos simpliciales como para probar que existe una equivalencia de Quillen entre la estructura modelo en Top y la estructura modelo que definiremos en sSet.

Definición 3.4.18. La **realización geométrica** de un conjunto simplicial $X_\bullet \in \text{sSet}$ es el coend

$$|X_\bullet| = \int^{[n] \in \Delta} \Delta^n \times X_n$$

donde $\Delta^n \times X_n$ es el coproducto $\sqcup_{X_n} \Delta^n$. Es decir, $|X_\bullet|$ es el coigualador

$$\sqcup_{[n] \rightarrow [m] \in \Delta} \Delta^n \times X_m \rightrightarrows \sqcup_n \Delta^n \times X_n \longrightarrow |X_\bullet|$$

donde las dos flechas paralelas están dadas por los morfismos

$$\Delta^n \times X_m \longrightarrow \Delta^n \times X_n$$

y

$$\Delta^n \times X_m \longrightarrow \Delta^m \times X_m$$

inducidos por la función $[n] \longrightarrow [m]$.

La realización geométrica define un funtor

$$\begin{aligned} | - | : \text{sSet} &\longrightarrow \text{Top} \\ X_\bullet &\longmapsto |X_\bullet| = \int^{[n] \in \Delta} \Delta^n \times X_n \end{aligned}$$

Definición 3.4.19. El funtor singular está dado por

$$\begin{aligned} \text{Sing} : \text{Top} &\longrightarrow \text{sSet} \\ X &\longmapsto \text{Sing}(X) \end{aligned}$$

donde $\text{Sing}(X)_n := \text{Hom}_{\text{Top}}(|\Delta^n|, X)$

Lema 3.4.20. [2, pág. 76] El funtor realización geométrica y el funtor singular determinan una adjunción

$$| - | : \text{sSet} \xrightleftharpoons[\perp]{} \text{Top} : \text{Sing}$$

Demostración. Sean $K \in \text{sSet}$ y $X \in \text{Top}$. La biyección

$$\varphi_{K,X} : \text{Hom}_{\text{Top}}(|K|, X) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{sSet}}(K, \text{Sing}(X))$$

está dada por la siguiente composición

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{sSet}}(K, \text{Sing}(X)) &\cong \int^{[n] \in \Delta} \text{Hom}_{\text{Set}}(K_n, \text{Sing}(X)_n) \\ &= \int^{[n] \in \Delta} \text{Hom}_{\text{Set}}(K_n, \text{Hom}_{\text{Top}}(\Delta^n, X)) \\ &\cong \int^{[n] \in \Delta} \text{Hom}_{\text{Top}}(K_n \times \Delta^n, X) \\ &\cong \text{Hom}_{\text{Top}}\left(\int^{[n] \in \Delta} K_n \times \Delta^n, X\right) \\ &= \text{Hom}_{\text{Top}}(|K|, X) \end{aligned}$$

Donde, el primer isomorfismo se debe a que si $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ son dos funtores, entonces el conjunto de transformaciones naturales de F en G es $\int^{c \in \mathcal{C}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), G(c))$. El segundo isomorfismo, lo obtenemos asociándole a cada $f \in \text{Hom}_{\text{Set}}(K_n, \text{Hom}_{\text{Top}}(\Delta^n, X))$ el elemento $g \in \text{Hom}_{\text{Top}}(K_n \times \Delta^n, X)$ dado por $g(k, x) = f(k)(x)$. Finalmente, el tercer isomorfismo se debe a que un coend es un colímite. \square

3.4.3. Estructura modelo en sSet

Para definir la estructura modelo en la categoría sSet comenzamos considerando las siguientes clases de morfismos:

- $I_{\text{sSet}} = \{\partial\Delta^n \rightarrow \Delta^n \text{ tal que } n \geq 0\}$
- $J_{\text{sSet}} = \{\Lambda_k^n \rightarrow \Delta^n \text{ tal que } n \geq 0\}$

Definición 3.4.21 (Estructura modelo en sSet). Sea f un morfismo en sSet. Decimos que f es:

1. una equivalencia débil si y solamente si $|f|$ es una equivalencia débil en Top. Denotamos por W_{sSet} al conjunto de equivalencias débiles.
2. una fibración si y solamente si $f \in J_{\text{sSet}}$ -iny. Denotamos por F_{sSet} al conjunto de fibraciones.
3. una cofibración si y solamente si $f \in I_{\text{sSet}}$ -cof. Denotamos por C_{sSet} al conjunto de cofibraciones.

Definición 3.4.22. Los morfismos de J_{sSet} -iny se llaman **fibraciones de Kan** y los morfismos de I_{sSet} -cof se llaman **extensiones anódinas**

Veremos, utilizando el teorema de reconocimiento que sSet resulta ser una categoría modelo con las clases distinguidas de morfismos que acabamos de definir.

Teorema 3.4.23. [2, Teorema 3.6.5.] $(\text{sSet}, C_{\text{sSet}}, F_{\text{sSet}}, W_{\text{sSet}})$ es una categoría modelo cofibrantemente generada donde I_{sSet} es el conjunto de cofibraciones generadoras y J_{sSet} es el conjunto de cofibraciones triviales generadoras.

Demostración. Verificaremos las hipótesis del teorema de reconocimiento:

1. W_{sSet} verifica la propiedad 2-de-3 y es cerrado bajo retracts por el lema 3.4.24.
2. los dominios de los morfismos en I_{sSet} y J_{sSet} son pequeños relativo a I_{sSet} -cell y J_{sSet} -cell respectivamente por el lema 3.4.25.
3. J_{sSet} -cell $\subseteq (I_{\text{sSet}}$ -cof $\cap W_{\text{sSet}})$ por el lema 3.4.27
4. I_{sSet} -iny $\subseteq (J_{\text{sSet}}$ -iny $\cap W_{\text{sSet}})$ por el lema 3.4.34
5. $(J_{\text{sSet}}$ -iny $\cap W_{\text{sSet}})$ $\subseteq I_{\text{sSet}}$ -iny por el lema 3.4.35

□

Lema 3.4.24. W_{sSet} *satisface la propiedad 2-de-3 y es cerrado bajo retractos.*

Demostración. Si $f \in W_{\text{sSet}}$ entonces $|f| \in W_{\text{Top}}$. Como $|-|$ es un funtor y W_{Top} satisface la propiedad 2-de-3 y es cerrado bajo retractos, tenemos que W_{sSet} también. □

Lema 3.4.25. [2, Lema 3.1.1.] *Todo conjunto simplicial es pequeño. En particular, los dominios de los morfismos en I_{sSet} y J_{sSet} son pequeños relativo a I_{sSet} -cell y J_{sSet} -cell respectivamente.*

Demostración. Nos referimos al lema 3.1.1. de [2]. □

Ahora probaremos que J_{sSet} -cell $\subseteq (I_{\text{sSet}}$ -cof $\cap W_{\text{sSet}})$. Para ello, veremos primero una caracterización de las cofibraciones en sSet.

Proposición 3.4.26. [2, Proposición 3.2.2.] *Sea f un morfismo en sSet. Entonces, f es un elemento de I_{sSet} -cof si y solamente si f es inyectivo. En particular, todo conjunto simplicial es cofibrante. Además, toda cofibración es un complejo I -celular relativo.*

Demostración.

(\Rightarrow) Los morfismos de I_{sSet} son inyectivos. Luego, como las inyecciones son cerradas bajo pushouts, composiciones transfinitas y retractos, todo elemento de I_{sSet} -cell es inyectivo y por lo tanto todo morfismo en I_{sSet} -cof es inyectivo.

(\Leftarrow) Sea $f : K \rightarrow L$ un morfismo inyectivo en sSet. Veremos que podemos escribir f como una composición transfinita de pushouts y coproductos de morfismos en I_{sSet} . Tomamos $X_0 = K$ y $f_0 = f : X_0 \rightarrow L$. Sea S_0 el conjunto de 0-símplices de L que no están en la imagen de f_0 . Cada elemento $s \in S_0$ se corresponde con un morfismo $\Delta^0 \rightarrow L$. Obtenemos X_1 y f_1 a través del siguiente pushout:

$$\begin{array}{ccc}
 \emptyset = \sqcup_{s \in S_0} \partial \Delta^0 & \longrightarrow & X_0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \sqcup_{s \in S_0} \Delta^0 & \longrightarrow & X_1 \\
 & \searrow a & \downarrow f_1 \\
 & & L
 \end{array}$$

f_0 (curved arrow from X_0 to L)
 f_1 (dashed arrow from X_1 to L)
 a (curved arrow from $\sqcup_{s \in S_0} \Delta^0$ to L)

donde a es el coproducto de las restricciones de $\Delta^0 \rightarrow L$ al borde. Como a y f_0 son inyectivas y sus imágenes son disjuntas, obtenemos que f_1 es inyectivo. Además, por construcción, f_1 resulta sobreyectiva en los 0-símplices.

Supongamos que tenemos construidos los símplices X_k y los morfismos $f_k : X_k \rightarrow L$ para $k \leq n$ y que cada f_k es inyectiva y sobreyectiva sobre los símplices de dimensión menor a k . Construimos f_{n+1} de forma similar a la que construimos f_1 . Sea S_n el conjunto de n -símplices en L que no están en la imagen de f_n . Notamos que todo elemento $s \in S_n$ es no degenerado (ya hemos tratado los símplices degenerados en los casos de menor dimensión) y corresponde a un morfismo $\Delta^n \rightarrow L$. Luego, obtenemos X_{n+1} y f_{n+1} a través del siguiente pushout:

$$\begin{array}{ccc}
 \sqcup_{s \in S_n} \partial \Delta^n & \longrightarrow & X_n \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \sqcup_{s \in S_n} \Delta^n & \longrightarrow & X_{n+1} \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & L
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \text{---} f_n \text{---} \\
 \text{---} f_{n+1} \text{---} \\
 \text{---} b \text{---}
 \end{array}$$

donde b es el coproducto de las restricciones de $\Delta^n \rightarrow L$ al borde. Por construcción, f_{n+1} es inyectiva y sobreyectiva sobre los n -símplices y, por lo tanto, sobre todos los símplices de dimensión menor o igual a n . Luego, f es la composición de la sucesión f_n y, por lo tanto, es un elemento de $I_{\text{sSet}}\text{-cell}$. En particular, f es un elemento de $I_{\text{sSet}}\text{-cof}$. \square

Lema 3.4.27. [2, Proposición 3.2.3.] *Toda extensión anodina es una cofibración trivial.*

Demostración. Todo morfismo en J_{sSet} es inyectivo. Entonces por la proposición anterior, tenemos que $J_{\text{sSet}} \subseteq I_{\text{sSet}}\text{-cof}$. Luego, $J_{\text{sSet}}\text{-cof} \subseteq I_{\text{sSet}}\text{-cof}$. Falta ver que todo morfismo en $J_{\text{sSet}}\text{-cof}$ es una equivalencia débil. Para ello, veremos que la realización geométrica de todo morfismo en $J_{\text{sSet}}\text{-cof}$ es una equivalencia débil en Top. Sea $f \in J_{\text{sSet}}$, entonces f es una inclusión de la forma $\Lambda_r^n \hookrightarrow \Delta^n$. Notamos que $|\Delta^n| \cong D^n \cong D^{n-1} \times I$ y podemos tomar estos homeomorfismos de forma que manden $|\Lambda_r^n|$ en $D^{n-1} \times \{0\}$. Entonces, considerando el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 |\Lambda_r^n| & \xrightarrow{\cong} & D^{n-1} & \longrightarrow & * \\
 |f| \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \in J_{\text{Top}}\text{-iny} \\
 |\Delta^n| & \xrightarrow{\cong} & D^{n-1} \times I & \longrightarrow & *
 \end{array}$$

tenemos que $|f| \in J_{\text{Top}}\text{-cof}$. Luego,

$$|J_{\text{sSet}}| \subseteq J_{\text{Top}}\text{-cof}$$

y por lo tanto

$$|J_{\text{sSet}}\text{-cof}| \subseteq |J_{\text{sSet}}|\text{-cof} \subseteq J_{\text{Top}}\text{-cof}$$

Tenemos, entonces, que la realización geométrica de cualquier morfismo en $J_{\text{sSet}}\text{-cof}$ es una equivalencia débil en Top . Luego, todo elemento de $J_{\text{sSet}}\text{-cof}$ es una equivalencia débil en sSet . \square

Ahora veremos que $I_{\text{sSet}}\text{-iny} \subseteq (W_{\text{sSet}} \cap J_{\text{sSet}}\text{-iny})$. Para ello, tenemos que ver que la realización geométrica preserva los límites finitos.

Proposición 3.4.28. [2, pág. 78] Sea $i : L \rightarrow K$ un morfismo inyectivo en sSet . Entonces, $|i| \in I_{\text{Top}}\text{-cell}$. En particular, es una inclusión T_1 cerrada.

Demostración. Como i es un morfismo inyectivo, por la proposición 3.4.26 tenemos que $i \in I_{\text{sSet}}\text{-cell}$. Por lo tanto, i es composición transfinita de pushouts de morfismos en I_{sSet} . Como la realización geométrica es adjunto a izquierda, preserva colímites y por lo tanto $|i|$ es composición transfinita de pushouts de morfismos en el conjunto $\{|j| : j \in I_{\text{sSet}}\}$. Sea j_n la inclusión $\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n$, entonces podemos ver $|j_n|$ como la inclusión $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ y, por lo tanto, $|i| \in I_{\text{Top}}\text{-cell}$. \square

Observación 3.4.29. En particular, si tomamos $L = \emptyset$, la proposición anterior muestra que $|K|$ es un CW-complejo. Luego, podemos considerar la realización geométrica como un funtor de sSet en una subcategoría de Top con buenas propiedades. Por ejemplo la subcategoría de espacios topológicos Hausdorff generados por compactos o la subcategoría \mathcal{K} de k -espacios, o espacios generados por compactos.

Lema 3.4.30. [2, pág. 77] El morfismo

$$|\Delta^m \times \Delta^n| \longrightarrow |\Delta^m| \times |\Delta^n|$$

es un homeomorfismo.

Demostración. Nos referimos a la demostración del lema 3.1.8 en [2]. \square

Lema 3.4.31. [2, Lema 3.1.8.] El funtor $|-| : \text{sSet} \rightarrow \mathcal{K}$ preserva productos finitos.

Demostración. Sean $X_\bullet, Y_\bullet \in \text{sSet}$. Por el lema de Yoneda tenemos que

$$X_\bullet \cong \int^{[m] \in \Delta} X_m \times \Delta^m, \quad Y_\bullet \cong \int^{[n] \in \Delta} Y_n \times \Delta^n$$

Luego,

$$\begin{aligned}
|X_{\bullet} \times Y_{\bullet}| &\cong \left| \left(\int^{[m] \in \Delta} X_m \times \Delta^m \right) \times \left(\int^{[n] \in \Delta} Y_n \times \Delta^n \right) \right| \\
&\cong \left| \int^{[m] \in \Delta} \int^{[n] \in \Delta} X_m \times Y_n \times (\Delta^m \times \Delta^n) \right| \\
&\cong \int^{[m] \in \Delta} \int^{[n] \in \Delta} X_m \times Y_n \times |\Delta^m \times \Delta^n| \\
&\cong \int^{[m] \in \Delta} \int^{[n] \in \Delta} X_m \times Y_n \times |\Delta^m| \times |\Delta^n| \\
&\cong \left(\int^{[m] \in \Delta} X_m \times |\Delta^m| \right) \times \left(\int^{[n] \in \Delta} Y_n \times |\Delta^n| \right) \\
&\cong \left| \int^{[m] \in \Delta} X_m \times \Delta^m \right| \times \left| \int^{[n] \in \Delta} Y_n \times \Delta^n \right| \\
&\cong |X_{\bullet}| \times |Y_{\bullet}|
\end{aligned}$$

donde el segundo y el quinto isomorfismo se deben a que el producto conmuta con los colímites en las categorías \mathbf{sSet} y \mathcal{K} , el tercer isomorfismo se debe a que la realización geométrica conmuta con colímites por ser adjunto a izquierda y el cuarto isomorfismo es el resultado del lema anterior. \square

Lema 3.4.32. [2, Lema 3.2.4.] *La realización geométrica preserva límites finitos. En particular, preserva pullbacks.*

Demostración. En el lema 3.4.31 vimos que la realización geométrica preserva productos finitos, luego, alcanza con probar que preserva igualadores.

Sean $f, g : L \rightarrow M$ dos morfismos en \mathbf{sSet} con igualador $i : K \rightarrow L$ y sea $j : Z \rightarrow |L|$ el igualador de $|f|, |g| : |L| \rightarrow |M|$ en \mathbf{Top} . Entonces, i y j son inyectivas. Luego, por el lema 3.4.28, tenemos que $|i|$ es una inclusión T_1 cerrada. Por lo tanto, por la propiedad universal del igualador, existe un morfismo $u : |K| \rightarrow Z$ en \mathbf{Top} que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
Z & \xrightarrow{j} & |L| & \begin{array}{c} \xrightarrow{|f|} \\ \xrightarrow{|g|} \end{array} & |M| \\
\uparrow u & \nearrow |i| & & & \\
|K| & & & &
\end{array}$$

Tenemos que u es inyectivo ya que $|i|$ y j son inyectivos. En particular, $|K|$ es homeomorfo a un subespacio de Z . Entonces, para concluir que $Z \cong |K|$ alcanza con ver que u es sobreyectiva. Para ello, veremos que las imágenes de $|i|$ y j coinciden. Sea $z \in Z$, entonces $j(z) \in |x|$ para algún símplice $x \in L$

no degenerado. Por definición de la realización geométrica, $(|f| \circ j)(z) = (|g| \circ j)(z)$ si y solamente si $f(x) = g(x)$. Entonces x resulta ser un símlice no degenerado de la imagen de K en L , y por lo tanto, $j(z)$ está en la imagen de $|k|$ en $|L|$. \square

Proposición 3.4.33. [2, Lema 3.2.5.] *Si $f : K \rightarrow L$ es un morfismo en I_{Set} -iny, entonces $|f|$ es una fibración.*

Demostración. Como f tiene la RLP con respecto a los morfismos de I , por el lema 3.4.26, f tiene la RLP con respecto a todos los morfismos inyectivos de conjuntos simpliciales, en particular con respecto a las inclusiones. Podemos, entonces, encontrar un levantamiento h en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} K & \xlongequal{\quad} & K \\ (1_K, f) \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \\ K \times L & \xrightarrow{p_2} & L \end{array}$$

donde p_2 es la proyección en la segunda coordenada. Obtenemos que f es un retracto de p_2 mediante el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & 1_K & & \\ & \searrow & \text{---} & \nearrow & \\ K & \xrightarrow{(1_K, f)} & K \times L & \xrightarrow{h} & K \\ f \downarrow & & \downarrow p_2 & & \downarrow f \\ L & \xlongequal{\quad} & L & \xlongequal{\quad} & L \end{array}$$

Por lo tanto, $|f|$ es un retracto de $|p_2|$.

Veremos, ahora, que $|p_2|$ es una fibración. Como la realización geométrica preserva productos finitos, tenemos que $|p_2| : |K| \times |L| \rightarrow |L|$ es la proyección en la segunda coordenada. Si tenemos un diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} D^n & \xrightarrow{a} & |K| \times |L| \\ \downarrow & & \downarrow |p_2| \\ D^n \times I & \xrightarrow{b} & |L| \end{array}$$

entonces un levantamiento $c : D^n \times I \rightarrow |K| \times |L|$ estaría dado por $c(x, t) = (|p_1| \circ a)(x) \times b(x, t)$.

Obtuvimos, entonces, que $|f|$ es retracto de una fibración y por lo tanto $|f|$ es una fibración. \square

Lema 3.4.34. [2, Proposición 3.2.6.] *Sea $f : K \rightarrow L$ un morfismo en I_{Set} -iny, entonces f es una fibración trivial.*

Demostración. Ya vimos que $J_{\text{sSet}} \subseteq I_{\text{sSet}}\text{-cof}$ y, por lo tanto, $I_{\text{sSet}}\text{-iny} \subseteq J_{\text{sSet}}\text{-iny}$. Luego, f es una fibración.

Falta ver que $|f|$ es una equivalencia débil en Top . Sea v un vértice de L , es decir un 0-símplice. Tomamos $F = f^{-1}(v)$ la fibra de f sobre v . Tenemos el siguiente diagrama de pullback en sSet .

$$\begin{array}{ccc} F & \hookrightarrow & K \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \Delta^0 & \xrightarrow{v} & L \end{array}$$

Entonces, como la realización geométrica preserva pullbacks, tenemos el siguiente diagrama de pullback en Top

$$\begin{array}{ccc} |F| & \hookrightarrow & |K| \\ \downarrow & & \downarrow |f| \\ * & \xrightarrow{|v|} & |L| \end{array}$$

y, por lo tanto, $|F|$ es la fibra de $|f|$ sobre el punto $|v|$.

Veremos, ahora, que el morfismo $F \rightarrow \Delta^0$ es un elemento de $I_{\text{sSet}}\text{-iny}$. Para ello, queremos ver tiene la RLP con respecto a $\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n$. Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \partial\Delta^n & \longrightarrow & F & \longrightarrow & K \\ \downarrow & & \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \\ \Delta^n & \longrightarrow & \Delta^0 & \xrightarrow{v} & L \end{array}$$

El levantamiento $h : \Delta^n \rightarrow K$ existe porque $f \in I_{\text{sSet}}\text{-iny}$ y, además, la imagen de Δ^n en K está contenida en F por conmutatividad del diagrama. Entonces, existe un levantamiento $\Delta \rightarrow F$ y obtenemos que $F \rightarrow \Delta^0$ es un elemento de I_{sSet} . Por lo tanto, $F \rightarrow \Delta^0$ tiene la LLP con respecto a todos los morfismos inyectivos y, en particular, con respecto a las inclusiones. Luego, F es no vacío y podemos tomar w un 0-símplice en F . Denotamos por c_w a la composición

$$F \longrightarrow \Delta^0 \xrightarrow{w} F$$

Como $F \rightarrow \Delta^0$ tiene la LLP con respecto a las inclusiones, existe un levantamiento $H : F \times \Delta^1 \rightarrow F$ en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 F \times \partial\Delta^1 & \xrightarrow{(1_F, w)} & F \\
 \downarrow & \nearrow H & \downarrow \\
 F \times \Delta^1 & \longrightarrow & \Delta^0
 \end{array}$$

Luego, dado que la realización geométrica preserva productos, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 |F| \times \{0, 1\} & \xrightarrow{(1_{|F|}, |w|)} & |F| \\
 \downarrow & \nearrow |H| & \downarrow \\
 |F| \times [0, 1] & \longrightarrow & *
 \end{array}$$

Entonces, $|H| : |F| \times I \rightarrow |F|$ es una homotopía entre $1_{|F|}$ y el morfismo constante $|w|$. Por lo tanto, $|F|$ es contractible. Consideramos la sucesión exacta larga inducida por los morfismos $|F| \xleftarrow{i} |K| \xrightarrow{|f|} |L|$

$$\cdots \rightarrow \pi_k(|F|, |w|) \rightarrow \pi_k(|K|, |w|) \rightarrow \pi_k(|L|, |v|) \rightarrow \pi_{k-1}(|F|, |w|) \rightarrow \cdots$$

Dado que $|F|$ es contractible, tenemos que $\pi_n(|F|, |w|) = 0$ para todo $n \geq 0$ y, por lo tanto,

$$\pi_n(|f|, |w|) : \pi_n(|K|, |w|) \rightarrow \pi_n(|L|, |v|)$$

es un isomorfismo para todo $n \geq 1$. Falta ver que $\pi_0(|f|, |w|)$ también es un isomorfismo. Por exactitud en

$$0 \longrightarrow \pi_0(|K|, |w|) \xrightarrow{\pi_0(|f|, |w|)} \pi_0(|L|, |v|) \longrightarrow 0$$

tenemos que $\pi_0(|f|, |w|)$ es inyectivo. Luego, falta ver que $|f|$ induce un morfismo sobreyectivo en las componentes arcoconexas. Todo punto de $|L|$ está en la misma componente arcoconexa que la realización geométrica de algún vértice $v \in L_0$. Como f tiene la RLP con respecto a las inclusiones, es sobreyectiva en los vértices ya que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \emptyset & \longrightarrow & K \\
 \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
 \Delta^n & \xrightarrow{v} & L
 \end{array}$$

Por lo tanto, existe un vértice $w \in K_0$ tal que $f(w) = v$ y, entonces, f manda la componente arcoconexa de w en la componente arcoconexa de v , lo que nos da la sobreyectividad en las componentes arcoconexas. \square

Lema 3.4.35. [2, Teorema 3.6.4.] Toda fibración trivial es un elemento de I_{sSet} -iny.

Demostración. Para la demostración de este lema nos referimos al teorema 3.6.4 de [2]. \square

3.4.4. Grupos de homotopía de sSet

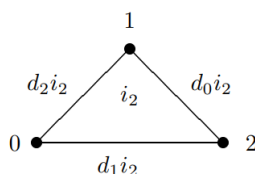
En esta sección construiremos los grupos de homotopía de conjuntos simpliciales. Comenzaremos definiendo $\pi_0(X)$ para un conjunto simplicial fibrante X .

Definición 3.4.36. Sea X un conjunto simplicial fibrante y $x, y \in X_0$. Decimos que x es **homotópico** a y (denotado mediante $x \sim y$) si y solamente si existe un 1-símplice $z \in X_1$ tal que $d_1 z = x$ y $d_0 z = y$.

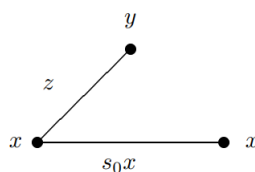
Lema 3.4.37. [2, Lema 3.4.2.] Sea X un conjunto simplicial fibrante. La homotopía de vértices es una relación de equivalencia.

Demostración.

- reflexiva: Sea $x \in X_0$. Consideramos $s_0(x) \in X_1$, entonces $d_0 s_0(x) = x$ y $d_1 s_0(x) = x$.
- simétrica: Sean $x, y \in X_0$ tales que $x \sim y$. Entonces, existe un 1-símplice z tal que $d_1(z) = x$ y $d_0(z) = y$. Luego, tenemos un morfismo $f : \Delta_0^2 \rightarrow X$ que vale $s_0(x)$ en $d_1 i_2$ y z en $d_2 i_2$. Además, viendo Δ^2 como



tenemos que f es la inclusión de

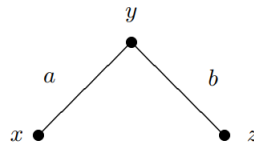


en X . Como X es fibrante, existe una extensión de f a un 2-símplice de X_2 dada por un levantamiento en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_0^2 & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & \nearrow w & \downarrow \\ \Delta^2 & \longrightarrow & \Delta^0 \end{array}$$

Luego, d_0w nos da la homotopía $y \sim x$.

- transitiva: Supongamos que $x \sim y$ y $y \sim z$. Entonces tenemos 1-símplices a y b tales que $d_1(a) = x$, $d_0(a) = d_1(b) = y$, $d_0(b) = z$. Luego, tenemos un morfismo $f : \Lambda_1^2 \rightarrow X$ que se puede ver como la inclusión del siguiente cuerno en X .



Dado que X es fibrante, tenemos una extensión de f a un 2-símplice de X_2 dada como el levantamiento en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_1^2 & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & \nearrow c & \downarrow \\ \Delta^2 & \longrightarrow & \Delta^0 \end{array}$$

Luego, d_1c es una homotopía de x en z .

□

Definición 3.4.38. Sea X un conjunto simplicial fibrante. Denotamos por $\pi_0(X)$ al conjunto de clases de equivalencia de X_0/\sim .

Lema 3.4.39. [2, Lema 3.4.3.] Sea X un conjunto simplicial fibrante. Entonces existe un isomorfismo $\pi_0(X) \simeq \pi_0(|X|)$.

Demostración. Sea $f : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(|X|)$ el morfismo que manda $[v] \in \pi_0(X)$ a la componente arcoconexa de $|X|$ que contiene a $|v|$. Como $|\Delta^n|$ es conexo por caminos para $n \geq 0$, por la construcción de la realización

geométrica, todo punto de $|X|$ está en la componente arconexa de la realización geométrica de algún vértice de X , es decir, f es sobreyectivo. Por otro lado, consideramos para cada $[v] \in \pi_0(X)$ el conjunto $X_{[v]}$ formado por todos los simplices de X que tienen un vértice en $[v]$. Tenemos que cada $X_{[v]}$ es un subconjunto simplicial de X y que $X = \bigsqcup_{[v] \in \pi_0(X)} X_{[v]}$. Entonces, como la realización geométrica preserva colímites, tenemos que

$$|X| = \bigsqcup_{[v] \in \pi_0(X)} |X_{[v]}|$$

donde cada $|X_{[v]}|$ es conexo por caminos. Por lo tanto, f es inyectivo. \square

Este lema muestra porque la notación $\pi_0(X)$ tiene sentido y motiva la siguiente definición.

Definición 3.4.40. Llamamos **componentes arcoconexas** a los elementos de $\pi_0(X)$.

Observación 3.4.41. Notamos que π_0 es un funtor de los conjuntos simpliciales fibrantes en los conjuntos.

Definición 3.4.42. Si v es un vértice de un conjunto simplicial fibrante X , definimos $\pi_0(X, v)$ como el conjunto $\pi_0(X)$ con punto base la clase de equivalencia $[v]$ de v .

Nos interesa, ahora, extender esta noción de homotopía a n -simplices.

Definición 3.4.43. Sea X un conjunto simplicial fibrante y $v \in X_0$ un vértice. Para todo conjunto simplicial Y , el morfismo $v : Y \longrightarrow \Delta^0 \xrightarrow{v} X$ es el **morfismo constante en v** . Sea F la fibra sobre v del morfismo $\text{Hom}_{\text{sSet}}(\Delta^n, X) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{sSet}}(\partial\Delta^n, X)$ que es una fibración por el teorema 3.1.1 de [2]. Definimos el **n -ésimo grupo de homotopía $\pi_n(X, v)$** de X en v como $\pi_0(F, v)$.

No sabemos aún si los grupos de homotopía definidos son efectivamente grupos. Esto lo veremos en la proposición 3.4.47 probando que $\pi_n(X, v) \simeq \pi_n(|X|, [v])$ para todo conjunto simplicial fibrante X . Obtendremos así, que $\pi_n(X, v)$ es un grupo para $n \geq 1$ y que es abeliano para $n \geq 2$.

Observación 3.4.44. Podemos, también, definir $\pi_n(X, v)$ como el conjunto de clases de equivalencia $[\alpha]$ de n -simplices $\alpha : \Delta^n \longrightarrow X$ que mandan $\partial\Delta^n$ en v bajo la siguiente relación de equivalencia: $\alpha \sim \beta$ si existe una homotopía $H : \Delta^n \times \Delta^1$ tal que $H(-, 0)$ es la inclusión de α , $H(-, 1)$ es la inclusión de β y la restricción de H a $\partial\Delta^n \times \Delta^1$ es el morfismo constante v .

Observación 3.4.45. Tenemos que los grupos de homotopía son funtoriales: dados un morfismo $f : X \rightarrow Y$ y un vértice v de X , existe un morfismo $f_* : \pi_n(X, v) \rightarrow \pi_n(Y, f(v))$.

Lema 3.4.46. [2, pág. 97] Sean $K, L \in \text{sSet}$ tales que existe una fibrición trivial $f : K \rightarrow L$. Entonces, K y L tienen los mismos grupos de homotopía.

Demostración. Veremos que el morfismo $\pi_n(f, v)$ inducido por f es una biyección. Para ver que $\pi_n(f, v)$ es inyectivo consideramos $[p]$ y $[q]$ dos elementos de $\pi_n(X)$ que tienen la misma imagen en $\pi_n(L)$, es decir, tales que $[f \circ p] = [f \circ q]$. Tomamos p y q representantes de $[p]$ y $[q]$ respectivamente y buscamos construir una homotopía entre p y q . Consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n \times \partial\Delta^1 & \xrightarrow{(p,q)} & K \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ \Delta^n \times \Delta^1 & \xrightarrow{H} & L \end{array}$$

donde H es la homotopía entre $f \circ p$ y $f \circ q$. La flecha vertical izquierda es inyectiva y por lo tanto, por el lema 3.4.26, es un elemento de $I_{\text{sSet}}\text{-cof}$. Entonces, la flecha punteada existe por la propiedad de levantamiento y obtenemos así una homotopía entre p y q . Por otro lado, para ver que $\pi_n(f, v)$ es sobreyectivo consideramos $[p] \in \pi_n(L)$ y encontramos una preimagen a través del levantamiento en el siguiente diaframa

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & K \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \partial\Delta^n & \xrightarrow{p} & L \end{array}$$

donde usamos, nuevamente, que el morfismo vertical izquierdo es inyectivo y por lo tanto una cofibración. \square

Proposición 3.4.47. [2, Proposición 3.6.3.] Sea X un conjunto simplicial fibrante y v un vértice de X . Entonces, existe un isomorfismo natural $\pi_n(X, v) \simeq \pi_n(|X|, |v|)$ para todo $n \geq 0$.

Demostración. La prueba será por inducción en n . El caso base $n = 0$ corresponde al lema 3.4.39. Supongamos que $\pi_i(L, v) \simeq \pi_i(|L|, |v|)$ para todo $i \leq n$ y para todo conjunto simplicial L . Sea $P_v X$ el conjunto simplicial definido por el siguiente pullback

$$\begin{array}{ccc}
P_v X & \longrightarrow & \text{Hom}_{\text{sSet}}(\Delta^1, X) \\
\downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\text{sSet}}(i, X) \\
X & \xrightarrow{(v, 1_X)} & X \times X \simeq \text{Hom}_{\text{sSet}}(\partial\Delta^1, X)
\end{array}$$

Definimos un segundo conjunto simplicial ΩX como el pullback del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\Omega X & \longrightarrow & P_v X \\
\downarrow & & \downarrow \\
\Delta^0 & \xrightarrow{v} & X
\end{array}$$

Combinando los dos cuadrados conmutativos obtenemos

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega X & \longrightarrow & P_v X & \longrightarrow & \text{Hom}_{\text{sSet}}(\Delta^1, X) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\text{sSet}}(i, X) \\
\Delta^0 & \xrightarrow{v} & X & \xrightarrow{(v, 1_X)} & X \times X \\
& & \downarrow & & \downarrow p_1 \\
& & \Delta^0 & \xrightarrow{v} & X
\end{array}$$

donde $p_1 : X \times X \rightarrow X$ es la proyección sobre la primer coordenada. En el teorema 3.3.2 de [2] Hovey prueba que $p_1 \circ \text{Hom}_{\text{sSet}}(i, X)$ es un elemento de $I_{\text{sSet}} - \text{iny}$ y, por lo tanto, es una fibración trivial. Luego, por ser pullback de una fibración trivial, tenemos que el morfismo

$$f : P_v X \rightarrow X \rightarrow \Delta^0$$

también es una fibración trivial. Entonces, por el lema 3.4.46, todos los grupos de homotopía de $P_v X$ son triviales. Como ΩX es la fibra del morfismo $P_v X \rightarrow X$ sobre v , tenemos una sucesión exacta larga de grupos de homotopía

$$\cdots \rightarrow \pi_{n+1}(X) \rightarrow \pi_n(\Omega X) \rightarrow \pi_n(P_v X) \rightarrow \pi_n(X) \rightarrow \cdots$$

Como los grupos $\pi_n(P_v X)$ son triviales para todo n , obtenemos que

$$\pi_{n+1}(X) \simeq \pi_n(\Omega X)$$

Análogamente, tomando realización geométrica en el diagrama anterior obtenemos que $|f|$ es una equivalencia débil y, por lo tanto, los grupos $\pi_i(|P_v X|)$ son triviales. Luego, por la sucesión exacta larga de homotopía, obtenemos que

$$\pi_{n+1}(|X|) \simeq \pi_n(|\Omega X|)$$

Ahora podemos concluir la inducción: supongamos que para todo conjunto simplicial L tenemos que $\pi_k(L) \simeq \pi_k(|L|)$ para todo $k \leq n$, entonces:

$$\pi_{n+1}(X) \simeq \pi_n(\Omega X) \simeq \pi_n(|\Omega X|) \simeq \pi_{n+1}(|X|)$$

□

3.5. Equivalencia de Quillen entre Top y sSet

En esta sección, veremos que existe una equivalencia de categorías entre la categoría de homotopía de sSet y la categoría de homotopía de Top, ambos con la estructura modelo que definimos anteriormente. En tal sentido, es lo mismo hacer teoría de homotopía en espacios topológicos que en conjuntos simpliciales.

Teorema 3.5.1. [2, Teorema 3.6.7.] *La realización geométrica y el funtor singular definen una equivalencia de Quillen*

$$|-| : \text{sSet} \xrightleftharpoons[\perp]{} \text{Top} \quad \text{Sing}$$

Demostración. Comencemos viendo que $|-|$ y Sing definen una adjunción de Quillen. Para ello, por la proposición 3.2.5 alcanza con ver que

- si $i \in I_{\text{sSet}}$ entonces $|i| \in I_{\text{Top-cof}}$
- si $j \in J_{\text{sSet}}$ entonces $|j| \in J_{\text{Top-cof}}$

Para probar la primera afirmación consideramos $i : \partial\Delta^n \rightarrow \Delta^n$ un elemento de I_{sSet} . Entonces, existe un morfismo en I_{Top} tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} |\partial\Delta^n| & \xrightarrow{\cong} & S^{n-1} \\ |i| \downarrow & & \downarrow \in I_{\text{Top}} \\ |\Delta^n| & \xrightarrow{\cong} & D^n \end{array}$$

y por lo tanto $|i| \in I_{\text{Top-cof}}$. De forma análoga se prueba que si $j \in J_{\text{sSet}}$, entonces $|j| \in J_{\text{Top-cof}}$.

Veamos ahora, que esta adjunción resulta en una equivalencia de Quillen. Para ello, por la proposición 2.3.16 alcanza con probar que

- $|-|$ refleja equivalencias débiles, es decir si f es un morfismo tal que $|f|$ es una equivalencia débil en Top, entonces f es una equivalencia débil en sSet

- para todo X objeto fibrante en Top , el morfismo $|Q \circ \text{Sing}(X)| \rightarrow X$ es una equivalencia débil

La primera afirmación vale por definición de W_{sSet} . Para la segunda afirmación, recordamos que todo espacio topológico es fibrante y además, como Sing es un funtor de Quillen a derecha, tenemos que $\text{Sing}(X)$ es fibrante. Luego, hay que probar que

$$|\text{Sing}(X)| \rightarrow X$$

es una equivalencia débil. En tal sentido, queremos ver que

$$\pi_i(|\text{Sing}(X)|, v) \rightarrow \pi_i(X, v)$$

es un isomorfismo para todo $i \geq 0$ y para todo $v \in X$ ya que los puntos de X están en biyección con los vértices de $\text{Sing}(X)$ y todo punto de $|\text{Sing}(X)|$ está en la misma componente arcoconexa que un vértice. Como $\text{Sing}(X)$ es fibrante, por la proposición 3.4.47, tenemos un isomorfismo

$$\pi_i(\text{Sing}(X), v) \xrightarrow{\cong} \pi_i(|\text{Sing}(X)|, v)$$

Componiendo el morfismo inducido por la adjunción con este isomorfismo obtenemos un morfismo

$$\pi_i(\text{Sing}(X), v) \rightarrow \pi_i(X, v)$$

Consideramos el conjunto simplicial $S[n]$ que se obtiene a través del siguiente pushout

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \hookrightarrow & \Delta^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^0 & \longrightarrow & S[n] \end{array}$$

Entonces, todo elemento de $\pi_i(\text{Sing}(X), v)$ se puede representar como un morfismo $S[n] \rightarrow \text{Sing}(X)$ que manda el único 0-símplice de $S[n]$ en v . Luego, aplicando la adjunción, obtenemos

$$\text{Hom}_{\text{sSet}}(S[n], \text{Sing}(X)) \cong \text{Hom}_{\text{Top}}(S^n, X)$$

donde $|S[n]| \cong S^n$ ya que la realización geométrica preserva pushouts. Finalmente, falta ver que la adjunción manda homotopías en homotopías. Para ello, notamos que como la realización geométrica preserva productos finitos tenemos que

$$\text{Hom}_{\text{sSet}}(S[n] \times \Delta^1, \text{Sing}(X)) \cong \text{Hom}_{\text{Top}}(S^n \times I, X)$$

lo que implica que la adjunción preserva homotopías. \square

Capítulo 4

Teoría de homotopía estable

En este capítulo estudiaremos la estructura de la categoría de homotopía de una categoría modelo. El objetivo será probar que si \mathcal{C} es una categoría modelo estable entonces su categoría de homotopía $\text{Ho}(\mathcal{C})$ es una categoría triangulada. Comenzaremos viendo la definición de categoría modelo estable y luego construiremos las sucesiones de cofibra que formarán los triángulos exactos de la categoría $\text{Ho}(\mathcal{C})$ basándonos en los capítulos 3 y 4 del libro [8].

A lo largo de este capítulo utilizaremos la siguiente notación para los hom sets de la categoría de homotopía de \mathcal{C} :

$$\text{Hom}_{\text{Ho}(\mathcal{C})}(A, B) = [A, B]$$

4.1. Categorías modelo estables

En esta sección veremos la definición de categoría modelo estable. Para ello, comenzamos construyendo los funtores loop y suspensión.

Recordamos que dada una categoría modelo punteada \mathcal{C} , un objeto cilindro para $X \in \mathcal{C}$ es una factorización del morfismo fold $X \sqcup X \rightarrow X$

$$X \sqcup X \xrightarrow{i_0+i_1} \text{Cyl}(X) \xrightarrow{\sim} X$$

Por otro lado, un objeto camino para $X \in \mathcal{C}$ es una factorización del morfismo diagonal $X \rightarrow X \times X$

$$X \xrightarrow{\sim} \text{P}(X) \xrightarrow{(e_0, e_1)} X \times X$$

Definición 4.1.1. Sea \mathcal{C} una categoría modelo punteada.

- Dado un objeto cofibrante X de \mathcal{C} , la **suspensión** ΣX de X está dada por el siguiente pushout

$$\begin{array}{ccc}
X \sqcup X & \xrightarrow{i_0+i_1} & \text{Cyl}(X) \\
\downarrow & & \downarrow \\
* & \dashrightarrow & \Sigma X
\end{array}$$

- Dado un objeto fibrante Y de \mathcal{C} , el **objeto loop** ΩY de Y es el siguiente pullback

$$\begin{array}{ccc}
\Omega Y & \dashrightarrow & * \\
\downarrow & & \downarrow \\
P(Y) & \xrightarrow{(e_0, e_1)} & Y \times Y
\end{array}$$

Dado que las factorizaciones son functoriales, los objetos cilindro y camino también lo son y, por lo tanto, estas construcciones son functoriales en \mathcal{C} . Veremos, además, que en $\text{Ho}(\mathcal{C})$ son independientes de la elección de objeto cilindro o camino.

Proposición 4.1.2. [8, Proposición 3.1.3.] *Sea \mathcal{C} una categoría modelo punteada. Las construcciones suspensión y loop definen funtores en la categoría de homotopía de \mathcal{C}*

$$\Sigma : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C}) \quad \text{y} \quad \Omega : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$$

independientes de la elección de objeto cilindro y camino respectivamente.

Demostración. Sea X un objeto fibrante y tomamos $\text{Cyl}(X)$ y $\text{Cyl}(X)'$ dos objetos cilindro de X . El diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
X \sqcup X & \hookrightarrow & \text{Cyl}(X)' \\
\downarrow & & \downarrow \sim \\
\text{Cyl}(X) & \xrightarrow{\sim} & X
\end{array}$$

admite un levantamiento $c_1 : \text{Cyl}(X) \rightarrow \text{Cyl}(X)'$ que resulta ser una equivalencia débil por el axioma 2-de-3. De forma análoga, se obtiene una equivalencia débil $c_2 : \text{Cyl}(X)' \rightarrow \text{Cyl}(X)$. Además, c_1 y c_2 son inversas en $\text{Ho}(\mathcal{C})$. Consideramos los pushouts

$$\begin{array}{ccc}
X \sqcup X & \longrightarrow & \text{Cyl}(X) & & X \sqcup X & \longrightarrow & \text{Cyl}(X)' \\
\downarrow & & \downarrow p_1 & & \downarrow & & \downarrow p_2 \\
* & \longrightarrow & \Sigma X & & * & \longrightarrow & (\Sigma X)'
\end{array}$$

y queremos ver que ΣX y $(\Sigma X)'$ son isomorfos en $\text{Ho}(\mathcal{C})$. Si un morfismo $f : \text{Cyl}(X) \rightarrow A$ hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup X & \xrightarrow{i_0+i_1} & \text{Cyl}(X) \\ \downarrow & & \downarrow f \\ * & \longrightarrow & A \end{array}$$

entonces, por la propiedad universal del pushout, f induce un único morfismo $\Sigma X \rightarrow A$

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup X & \longrightarrow & \text{Cyl}(X) \\ \downarrow & & \downarrow p_1 \\ * & \longrightarrow & \Sigma X \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \searrow \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \begin{array}{c} \text{Cyl}(X) \\ \\ A \end{array}$$

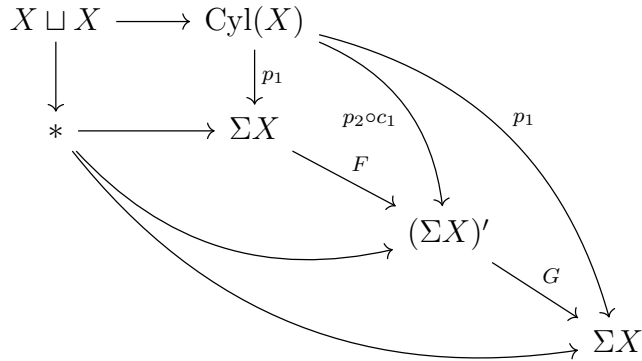
y un único morfismo $(\Sigma X)' \rightarrow A$ precomponiendo f con c_2

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup X & \longrightarrow & \text{Cyl}(X)' \\ \downarrow & & \downarrow p_2 \\ * & \longrightarrow & (\Sigma X)' \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{f \circ c_2} \\ \searrow \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \begin{array}{c} \text{Cyl}(X)' \\ \\ A \end{array}$$

Recíprocamente, cualquier morfismo $g : \text{Cyl}(X)' \rightarrow A$ que induce un morfismo $(\Sigma X)' \rightarrow A$ también induce un morfismo $\Sigma X \rightarrow A$. Entonces, tenemos los siguientes diagramas conmutativos

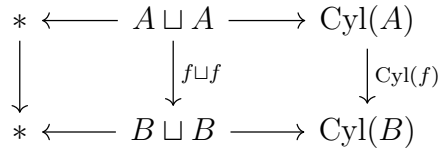
$$\begin{array}{ccc} X \sqcup X & \longrightarrow & \text{Cyl}(X) \\ \downarrow & & \downarrow p_1 \\ * & \longrightarrow & \Sigma X \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{p_2 \circ c_1} \\ \searrow \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \begin{array}{c} \text{Cyl}(X) \\ \\ (\Sigma X)' \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \searrow \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \begin{array}{c} \Sigma X \\ \\ (\Sigma X)' \end{array}$$

Combinando ambos diagramas obtenemos el diagrama



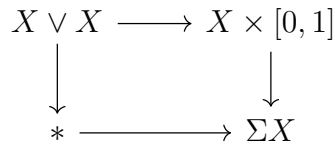
que no conmuta estrictamente, pero como p_1 y $p_1 \circ c_2 \circ c_1$ son homotópicos, y por lo tanto iguales en $\text{Ho}(\mathcal{C})$, el diagrama si conmuta en $\text{Ho}(\mathcal{C})$. Entonces, por la propiedad universal del pushout, $G \circ F = 1$ en $\text{Ho}(\mathcal{C})$ e intercambiando $\text{Cyl}(X)$ con $\text{Cyl}(X)'$ obtenemos que $F \circ G = 1$. Concluimos que ΣX y $(\Sigma X)'$ son canónicamente isomorfos en $\text{Ho}(\mathcal{C})$.

Consideramos, ahora, A y B objetos fibrantes y cofibrantes de \mathcal{C} . Un morfismo $f : A \rightarrow B$ induce un diagrama conmutativo



Luego, por la propiedad universal del pushout obtenemos un morfismo $\Sigma f : \Sigma A \rightarrow \Sigma B$. □

Ejemplo 4.1.3. En espacios topológicos punteados, esta construcción de la suspensión se corresponde con la construcción usual. De hecho, podemos tomar $X \times [0, 1]$ como el objeto cilindro en X siendo $X \vee X \rightarrow X \times [0, 1]$ la inclusión en los extremos del cilindro. Luego, tenemos el siguiente diagrama de pushout



Veremos a continuación que la suspensión es preservada por el adjunto derivado a izquierda de una adjunción de Quillen, es decir, veremos que

$$\mathbb{L}F(\Sigma X) \simeq \Sigma \mathbb{L}F(X)$$

Lema 4.1.4. [3, Proposición A.2.3.2] [1, Proposición 13.1.2] Sean A y B objetos cofibrantes en una categoría modelo \mathcal{C} . Si, en el siguiente diagrama de pushout i es una cofibración y j es una equivalencia débil, entonces v es una equivalencia débil

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{i} & C \\ \sim \downarrow j & & \downarrow v \\ B & \xrightarrow{u} & D \end{array}$$

Corolario 4.1.5. Sean A, A', B, C objetos cofibrantes en una categoría modelo \mathcal{C} . Si, en el siguiente diagrama, h es una cofibración trivial y j, i son cofibraciones, entonces $B \sqcup_{A'} C \rightarrow B \sqcup_A C$ es una equivalencia débil

$$\begin{array}{ccccc} & & A' & & \\ & \swarrow & \downarrow \sim h & \searrow & \\ B & \xleftarrow{j} & A & \xrightarrow{i} & C \end{array}$$

Demostración. Sea P el pushout de $A' \xleftarrow{\nabla} A' \sqcup A' \xrightarrow{\sim} A \sqcup A$

Como h es una cofibración trivial y \sqcup preserva cofibraciones triviales, tenemos que $h \sqcup h$ es una cofibración trivial. Luego, $A' \rightarrow P$ es una cofibración trivial por ser pushout de una cofibración trivial.

$$\begin{array}{ccccc} A' \sqcup A' & \xrightarrow[\sim]{h \sqcup h} & A \sqcup A & \xrightarrow{j \sqcup i} & B \sqcup C \\ \downarrow \nabla & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \xrightarrow{\sim} & P & \xrightarrow{\nabla} & B \sqcup_{A'} C \\ & \searrow h & \downarrow & & \downarrow \\ & & A & \xrightarrow{\sim} & B \sqcup_A C \end{array}$$

Por la propiedad universal del pushout, existe un único morfismo $P \rightarrow A$ que resulta ser una equivalencia débil por el axioma 2-de-3. Dado que $j \sqcup i$ es una cofibración, obtenemos que $P \rightarrow B \sqcup_{A'} C$ es una cofibración por ser pushout de una cofibración. Luego, aplicando el lema anterior, concluimos que

$$B \sqcup_{A'} C \rightarrow B \sqcup_A C$$

es una equivalencia débil por ser pushout de $P \xrightarrow{\sim} A$ por $P \hookrightarrow B \sqcup_{A'} C$. □

Lema 4.1.6. [1, Lema 13.3.3] Si A y B son objetos cofibrantes y tenemos morfismos $B \xleftarrow{i} A \xrightarrow{j} C$ y $A \xleftarrow{i'} B' \xrightarrow{p} B$ tales que $p \circ i' = i$ y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} B' & \xleftarrow{i'} & A & \xrightarrow{j} & C \\ p \downarrow \sim & & \parallel & & \parallel \\ B & \xleftarrow{i} & A & \xrightarrow{j} & C \end{array}$$

entonces, el morfismo

$$B' \sqcup_A C \longrightarrow B \sqcup_A C$$

es una equivalencia débil.

Demostración. Consideramos el siguiente diagrama donde los dos cuadrados son pushouts

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{i'} & B' & \xrightarrow{p} & B \\ \downarrow j & & \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & B' \sqcup_A C & \xrightarrow{\sim} & B \sqcup_A C \end{array}$$

Dado que j es una cofibración, tenemos que $B' \rightarrow B' \sqcup_A C$ es una cofibración. Luego, $B' \sqcup_A C \rightarrow B \sqcup_A C$ es una equivalencia débil por ser pushout de una equivalencia débil por una cofibración. \square

Definición 4.1.7. Dados dos morfismos $j : A \rightarrow B$ y $j' : A \rightarrow C$ en una categoría modelo \mathcal{C} , factorizando i y j como una cofibración seguida de una fibración trivial obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} E(i) & \xleftarrow{i'} & A & \xrightarrow{j'} & E(j) \\ \sim \downarrow p & & \parallel & & \sim \downarrow q \\ B & \xleftarrow{i} & A & \xrightarrow{j} & C \end{array}$$

Definimos el **homotopy pushout** de $B \xleftarrow{i} A \xrightarrow{j} C$ como el pushout de $E(i) \xleftarrow{i'} A \xrightarrow{j'} E(j)$

El diagrama de la definición induce un morfismo

$$E(i) \sqcup_A E(j) \rightarrow B \sqcup_A C$$

Cuando este morfismo es una equivalencia débil, decimos que $B \sqcup_A C$ es un homotopy pushout.

Dado un diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
B' & \xleftarrow{i'} & A' & \xrightarrow{j'} & C' \\
\downarrow p & & \downarrow t & & \downarrow q \\
B & \longleftarrow & A & \longrightarrow & C
\end{array}$$

factorizando i y j como una cofibración seguida de una fibración trivial, obtenemos

$$\begin{array}{ccccc}
E(i') & \longleftarrow & A' & \longrightarrow & E(j') \\
\sim \downarrow E(t,p) & & \downarrow t & & \sim \downarrow E(t,q) \\
E(i) & \xleftarrow{i} & A & \xrightarrow{j} & C
\end{array}$$

y tenemos un morfismo inducido

$$E(i') \sqcup_{A'} E(j') \longrightarrow E(i) \sqcup_A E(j)$$

En la siguiente proposición veremos condiciones que implican que este morfismo sea una equivalencia débil.

Proposición 4.1.8. [1, Proposición 13.3.4] *Si, en el diagrama*

$$\begin{array}{ccccc}
B' & \xleftarrow{i'} & A' & \xrightarrow{j'} & C' \\
\downarrow p & & \downarrow t & & \downarrow q \\
B & \longleftarrow & A & \longrightarrow & C
\end{array}$$

A y A' son cofibrantes y los morfismos verticales son equivalencias débiles, entonces el morfismo inducido

$$E(i') \sqcup_{A'} E(j') \longrightarrow E(i) \sqcup_A E(j)$$

es una equivalencia débil.

Demostración. Notamos, primero, que $E(t,p)$ y $E(t,q)$ son equivalencias débiles por el axioma de 2-de-3:

$$\begin{array}{ccccc}
A' & \longrightarrow & E(j') & \xrightarrow{\sim} & C' \\
\sim \downarrow t & & \downarrow E(t,q) & & \sim \downarrow q \\
A & \longrightarrow & E(j) & \xrightarrow{\sim} & C
\end{array}$$

Por lo tanto, alcanza con probar el caso donde i , j , i' y j' son cofibraciones. En el diagrama siguiente, los dos cuadrados son de pushout

$$\begin{array}{ccccccc}
A' \sqcup A' & \xleftarrow{i' \sqcup j'} & B' \sqcup C' & & & & \\
\downarrow \nabla & & \downarrow & & & & \\
A' & \xrightarrow{\quad} & B' \sqcup_{A'} C' & & & & \\
\sim \downarrow t & & \downarrow & & & & \\
A & \xrightarrow{\quad} & B' \sqcup_A C' & \xrightarrow{B' \sqcup_A q} & B' \sqcup_A C & \xrightarrow{p \sqcup_A C} & B \sqcup_A C
\end{array}$$

y tenemos que $B' \sqcup_{A'} C' \rightarrow B' \sqcup_A C'$ es una equivalencia débil por ser el pushout de una equivalencia débil entre objetos cofibrantes por una cofibración. Además, $B' \sqcup_A C' \rightarrow B' \sqcup_A C$ y $B' \sqcup_A C \rightarrow B \sqcup_A C$ son equivalencias débiles por el lema 4.1.6.

Entonces, la composición $B' \sqcup_{A'} C' \rightarrow B \sqcup_A C$ es una equivalencia débil y coincide con el morfismo $E(i') \sqcup_{A'} E(j') \rightarrow E(i) \sqcup_A E(j)$ ya que componiendo con $B' \rightarrow B' \sqcup_{A'} C'$ se obtiene p y componiendo con $C' \rightarrow B' \sqcup_{A'} C'$ se obtiene q . \square

Proposición 4.1.9. [1, Proposición 13.3.7] Si en el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
B & \xleftarrow{p} & B' & \xleftarrow{i'} & A & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{q} & C \\
& & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow \\
& & & i & & & & j &
\end{array}$$

se tiene que A , B y C son cofibrantes, i' y j' son cofibraciones y p y q son equivalencias débiles, entonces existen equivalencias débiles canónicas tales que

$$\begin{array}{ccccc}
B \sqcup_A C' & \xleftarrow{\sim} & B' \sqcup_A C' & \xrightarrow{\sim} & B' \sqcup_A C \\
\downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\
B \sqcup_A E(j) & \xleftarrow{\sim} & E(i) \sqcup_A E(j) & \xrightarrow{\sim} & E(i) \sqcup_A C
\end{array}$$

Demostración. Dado que i' y j' son cofibraciones, los siguientes diagrama admiten levantamientos que resultan ser equivalencias débiles por el axioma 2-de-3.

$$\begin{array}{ccc}
E(i) \longleftarrow A & & A \longrightarrow E(j) \\
\downarrow \sim \swarrow \sim & \dashrightarrow & \downarrow \sim \\
B \longleftarrow B' & & C' \longrightarrow C
\end{array}$$

Entonces, tenemos

$$\begin{array}{ccccc}
B' & \xleftarrow{i'} & A & \xrightarrow{j'} & C' \\
\downarrow \sim & & \parallel & & \downarrow \sim \\
E(i) & \xleftarrow{\quad} & A & \xrightarrow{\quad} & E(j)
\end{array}$$

y por el lema 4.1.6, el morfismo

$$B' \sqcup_A C' \rightarrow E(i) \sqcup_A E(j)$$

es una equivalencia débil.

Además, por 4.1.4, tenemos que $B \sqcup_A E(j) \xleftarrow{\quad} E(i) \sqcup_A E(j) \xrightarrow{\quad} E(i) \sqcup_A C$

y $B \sqcup_A C \xleftarrow{\quad} B' \sqcup_A C' \xrightarrow{\quad} B' \sqcup_A C$ son equivalencias débiles.

Finalmente, como todos los objetos en el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
E(i) & \xleftarrow{\quad} & A & \xrightarrow{\quad} & E(j) & & \\
\downarrow & & \parallel & & \uparrow \exists \sim & \searrow \sim & \\
B & \xleftarrow{i} & A & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow[q]{\sim} & C
\end{array}$$

son cofibrantes, por el lema 4.1.6, el morfismo $B \sqcup_A C' \rightarrow B \sqcup_A E(j)$ es una equivalencia débil. Simétricamente se ve que $B' \sqcup_A C \rightarrow E(i) \sqcup_A C$ es una equivalencia débil. \square

Corolario 4.1.10. *Si en el diagrama*

$$\begin{array}{ccccc}
B' & \xleftarrow{i'} & A' & \xrightarrow{j'} & C' \\
\downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\
B & \xleftarrow{i} & A & \xrightarrow{j} & C
\end{array}$$

se tiene que A y A' son cofibrantes, que los morfismos horizontales son cofibraciones y que los morfismos verticales son equivalencias débiles, entonces $B' \sqcup_{A'} C' \rightarrow B \sqcup_A C$ es una equivalencia débil.

Demostración. Factorizando los morfismos horizontales como cofibraciones seguidas de fibraciones triviales, obtenemos

$$\begin{array}{ccccccccc}
B' & \xleftarrow{\sim} & E(i') & \xleftarrow{\quad} & A' & \xrightarrow{\quad} & E(j') & \xrightarrow{\sim} & B \\
\downarrow \sim & & \downarrow & & \downarrow \sim & & \downarrow & & \downarrow \sim \\
B & \xleftarrow{\sim} & E(i) & \xleftarrow{\quad} & A & \xrightarrow{\quad} & E(j) & \xrightarrow{\sim} & B'
\end{array}$$

Entonces, los morfismos $E(i') \rightarrow E(i)$ y $E(j') \rightarrow E(j)$ son equivalencias débiles. Luego tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
B' \sqcup_{A'} C' & \xrightarrow{\sim} & E(i') \sqcup_A E(j') \\
\downarrow & & \downarrow \sim \\
B \sqcup_{A'} C' & \xrightarrow{\sim} & E(i) \sqcup_A E(j)
\end{array}$$

y $B' \sqcup_{A'} C' \rightarrow B \sqcup_A C$ es una equivalencia débil por 2-de-3. \square

Definición 4.1.11. Definimos el cono de un objeto X como la factorización de $X \rightarrow *$ como una cofibración seguida de una fibración trivial

$$X \hookrightarrow CX \xrightarrow{\sim} *$$

Notamos que si X es cofibrante entonces CX también.

Definición 4.1.12. Definimos $S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ mediante el siguiente pushout

$$\begin{array}{ccc}
X \sqcup X & \hookrightarrow & \text{Cyl}(X) \\
\downarrow & & \downarrow \\
CX \sqcup CX & \hookrightarrow & S(X)
\end{array}$$

Notamos que si X es cofibrante entonces $S(X)$ también es cofibrante.

Observación 4.1.13. Si X es cofibrante, entonces $S(X) \simeq \Sigma(X)$ en $\text{Ho}(\mathcal{C})$

De hecho, tenemos el siguiente diagrama donde los dos cuadrados y el rectángulo exterior con pushouts

$$\begin{array}{ccc}
X \sqcup X & \hookrightarrow & \text{Cyl}(X) \\
\downarrow & & \downarrow \\
CX \sqcup CX & \hookrightarrow & S(X) \\
\downarrow \sim & & \downarrow \sigma_X \\
* & \longrightarrow & \Sigma X
\end{array}$$

Si X es cofibrante, entonces CX y $CX \sqcup CX$ son cofibrantes. Luego, $\sigma_X : S(X) \rightarrow \Sigma X$ es el pushout de una equivalencia débil entre objetos cofibrantes por una cofibración y, por lo tanto, es una equivalencia débil.

Lema 4.1.14. Si f y g son equivalencias débiles entre objetos cofibrantes, entonces $f \sqcup g$ es una equivalencia débil.

Demostración. Si f y g son cofibraciones triviales entre objetos cofibrantes, entonces $f \sqcup g$ es una cofibración trivial porque las cofibraciones triviales son cerradas bajo pushout. Entonces, por el lema de Ken Brown, \sqcup preserva equivalencias débiles entre objetos cofibrantes. \square

Lema 4.1.15. *S preserva equivalencias débiles entre objetos cofibrantes.*

Demostración. Sean X, Y objetos cofibrantes y $f : X \rightarrow Y$ una cofibración trivial. Por 2-de-3, el morfismo inducido $Cf : CX \rightarrow CY$ es una equivalencia débil

$$\begin{array}{ccc} CX & \xrightarrow{Cf} & CY \\ & \searrow \sim & \swarrow \sim \\ & * & \end{array}$$

Además, por el axioma 2-de-3, el morfismo $\text{Cyl}(f)$ es una equivalencia débil

$$\begin{array}{ccccc} X \sqcup X & \hookrightarrow & \text{Cyl}(X) & \xrightarrow{\sim} & X \\ \downarrow Cf \sqcup Cf & & \downarrow \text{Cyl}(f) & \sim \downarrow f & \\ Y \sqcup Y & \hookrightarrow & \text{Cyl}(Y) & \xrightarrow{\sim} & Y \end{array}$$

Finalmente, el morfismo $S(f) : S(X) \rightarrow S(Y)$ es inducido por

$$\begin{array}{ccccc} CX \sqcup CX & \longleftarrow & X \sqcup X & \longleftarrow & \text{Cyl}(X) \\ Cf \sqcup Cf \downarrow \sim & & f \sqcup f \downarrow \sim & & \text{Cyl} \downarrow \sim \\ CY \sqcup CY & \longleftarrow & Y \sqcup Y & \longleftarrow & \text{Cyl}(Y) \end{array}$$

donde $f \sqcup f$ es una fibación trivial por el lema 4.1.14. Luego $S(f)$ resulta ser una equivalencia débil por el corolario 4.1.10. Entonces, por el lema de Ken Brown, S preserva equivalencia débiles entre objetos cofibrantes. \square

Observación 4.1.16. Si X es cofibrante, entonces SX es cofibrante y existe un levantamiento en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} * & \hookrightarrow & Q\Sigma X \\ \downarrow & \nearrow \text{---} & \downarrow \sim \\ SX & \xrightarrow{\sim \sigma_X} & \Sigma X \end{array}$$

que resulta ser una equivalencia débil por el axioma 2-de-3.

Corolario 4.1.17. *Σ preserva equivalencias débiles ente objetos cofibrantes*

Demostración. Sean $f : X \rightarrow Y$ una equivalencia débil entre X e Y objetos cofibrantes. Tenemos

$$\begin{array}{ccc} SX & \xrightarrow{\sim \sigma_X} & \Sigma X \\ Sf \downarrow \sim & & \downarrow \Sigma f \\ SY & \xrightarrow{\sim \sigma_Y} & \Sigma Y \end{array}$$

entonces por el axioma 2-de-3, resulta que Σf es una equivalencia débil. \square

Luego, tenemos que $\text{Ho}(\sigma)$ es un isomorfismo natural entre los funtores $\text{Ho}(S) : \text{Ho}(\mathcal{C}_c) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$ y $\text{Ho}(\Sigma) : \text{Ho}(\mathcal{C}_c) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$

Observación 4.1.18. Si X es un objeto cofibrante entonces $F(\text{Cyl } X) \simeq \text{Cyl } F(X)$ en $\text{Ho}(\mathcal{C})$. De hecho, si X es cofibrante se tiene que $\text{Cyl}(X)$ también es cofibrante. Luego, en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(X \sqcup X) \simeq F(X) \sqcup F(X) & \longrightarrow & \text{Cyl } F(X) \\ \downarrow & \nearrow \varphi_X & \downarrow \sim \\ F(\text{Cyl } X) & \xrightarrow{\sim} & F(X) \end{array}$$

el morfismo $F(\text{Cyl}(X))$ es una equivalencia débil y, por el axioma 2-de-3, el levantamiento $\varphi_X : F(\text{Cyl}(X)) \rightarrow \text{Cyl}(F(X))$ es una equivalencia débil.

Observación 4.1.19. Si X es un objeto cofibrante entonces $F(\text{C } X) \simeq \text{C } F(X)$ en $\text{Ho}(\mathcal{C})$. De hecho, si X es cofibrante se tiene que $\text{C } X$ también es cofibrante. Luego, en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \longrightarrow & \text{C } X \\ \downarrow & \nearrow \gamma_X & \downarrow \sim \\ F(\text{C } X) & \xrightarrow{\sim} & F(*) \simeq * \end{array}$$

el morfismo $F(\text{C } X)$ es una equivalencia débil y, por el axioma 2-de-3, el levantamiento $\gamma_X : F(\text{C } X) \rightarrow \text{C}(F(X))$ es una equivalencia débil.

Proposición 4.1.20. Si X es cofibrante, entonces $FS(X) \simeq SF(X)$ en $\text{Ho}(\mathcal{C})$.

Demostración. Como X es cofibrante, tenemos equivalencias débiles $\gamma_X : FCX \rightarrow CFX$ y $\varphi_X : F \text{Cyl}(X) \rightarrow \text{Cyl } FX$. Como F es Quillen a izquierda, preserva pushouts y, por lo tanto, el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} F(CX \sqcup CX) & \longleftarrow & F(X \sqcup X) & \longrightarrow & F \text{Cyl } X \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \varphi_X \\ FCX \sqcup FCX & & FX \sqcup FX & & \text{Cyl } FX \\ \downarrow \gamma_X \sqcup \gamma_X & & & & \\ CFX \sqcup CFX & \longleftarrow & FX \sqcup FX & \longrightarrow & \text{Cyl } FX \end{array}$$

induce un morfismo $\phi_X : FSX \rightarrow SFX$ que resulta ser una equivalencia débil por el corolario 4.1.10. \square

Lema 4.1.21. Sean $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ y $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ dos funtores y α una transformación natural de F en G . Sea E una factorización functorial en \mathcal{C} en una cofibración seguida de una equivalencia débil y K una factorización functorial en \mathcal{C} en un morfismo seguido de una fibración trivial.

Para cada $a \in \mathcal{A}$, sea β_a definido mediante el siguiente levantamiento

$$\begin{array}{ccc} Fa & \longrightarrow & K\alpha_a \\ \downarrow & \nearrow \beta_a & \downarrow \sim \\ E\alpha_a & \longrightarrow & Ga \end{array}$$

Entonces los morfismos β_a definen una transformación natural $\bar{\beta}$ entre

$$\mathcal{A} \xrightarrow{E} \mathcal{C} \longrightarrow \text{Ho } \mathcal{C} \quad \text{y} \quad \mathcal{A} \xrightarrow{K} \mathcal{C} \longrightarrow \text{Ho } \mathcal{C}$$

Demostración. Dado un morfismo $f : a \rightarrow b$ en \mathcal{A} tenemos

$$\begin{array}{ccccc} Fa & \xrightarrow{Ff} & Fb & \xlongequal{\quad} & Fb & & Fa & \xlongequal{\quad} & Fa & \xrightarrow{Ff} & Fb \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E\alpha_a & \xrightarrow{E(Ff,Gf)} & E\alpha_b & \xrightarrow{\beta_b} & K\alpha_b & & E\alpha_a & \xrightarrow{\beta_a} & K\alpha_a & \xrightarrow{K(Ff,Gf)} & K\alpha_b \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \sim & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \sim \\ Ga & \xrightarrow{Gf} & Gb & \xlongequal{\quad} & Gb & & Ga & \xlongequal{\quad} & Ga & \xrightarrow{Gf} & Gb \end{array}$$

Tenemos que $\beta_b E(Ff, Gf)$ y $K(Ff, Gf)\beta_a$ son iguales luego de componerlos con la equivalencia débil $K\alpha_b \rightarrow Gb$ y, por lo tanto, son iguales en $\text{Ho}(\mathcal{C})$. \square

Veremos, en el siguiente teorema que la suspensión es preservada por el functor derivado de un functor de Quillen a izquierda. De forma analoga, se ve el loop es preservado por el functor derivado de un functor de Quillen a derecha.

Teorema 4.1.22. Sea F un functor de Quillen a izquierda en una categoría modelo \mathcal{C} . Existe un isomorfismo natural

$$\begin{array}{ccc} \text{Ho}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\text{Ho}(\Sigma)} & \text{Ho}(\mathcal{C}) \\ \downarrow \mathbb{L}F & & \downarrow \mathbb{L}F \\ \text{Ho}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\text{Ho}(\Sigma)} & \text{Ho}(\mathcal{C}) \end{array}$$

Demostración. Primero notamos que alcanza con encontrar un isomorfismo precomponiendo con $\text{Ho}(\mathcal{C}_c) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$. Como

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ho}(\mathcal{C}_c) & \longrightarrow & \text{Ho}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\text{Ho}Q} & \text{Ho}(\mathcal{C}_c) & \xrightarrow{\text{Ho}\Sigma} & \text{Ho}(\mathcal{C}_c) \\ & & & & \searrow & & \nearrow \\ & & & & \simeq & & \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ho}(\mathcal{C}_c) & \longrightarrow & \text{Ho}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\text{Ho}F} & \text{Ho}(\mathcal{C}_c) & \xrightarrow{\text{Ho}\Sigma} & \text{Ho}(\mathcal{C}_c) \\ & & & & \searrow & & \nearrow \\ & & & & \simeq & & \end{array}$$

alcanza con encontrar un isomorfismo natural

$$\begin{array}{ccc} \text{Ho}(\mathcal{C}_c) & \xrightarrow{\text{Ho}(\Sigma)} & \text{Ho}(\mathcal{C}) \\ \text{Ho}F \downarrow & & \downarrow \mathbb{L}F \\ \text{Ho}(\mathcal{C}_c) & \xrightarrow{\text{Ho}(\Sigma)} & \text{Ho}(\mathcal{C}) \end{array}$$

Si X es cofibrante, entonces $\mathbb{L}F \text{Ho} \Sigma X = FQ\Sigma X$, $\text{Ho} \Sigma \text{Ho} F(X) = \Sigma QF(X)$ y ya vimos que tenemos una equivalencia débil $SX \rightarrow Q\Sigma X$. Luego, tenemos

$$FQ\Sigma X \simeq FSX \xrightarrow[\phi_X]{\sim} SFX \xleftarrow{\sim} SQFX \xrightarrow{\sim} \Sigma QFX$$

y cada componente el natural por el lema anterior e invertible. Obtenemos, entonces un isomorfismo natural en $\text{Ho}(\mathcal{C})$. \square

Proposición 4.1.23. [8, Proposición 3.1.7.] Sea \mathcal{C} una categoría modelo punteada. Los funtores loop y suspensión inducen un par de adjunción

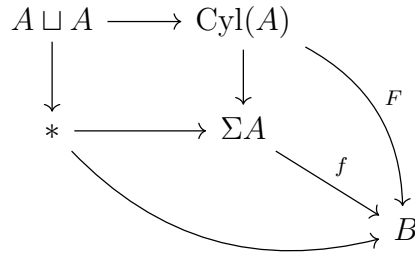
$$\Sigma : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightleftarrows \text{Ho}(\mathcal{C}) : \Omega$$

es decir, para todo par de objetos $A, B \in \text{Ho}(\mathcal{C})$ existe un isomorfismo natural

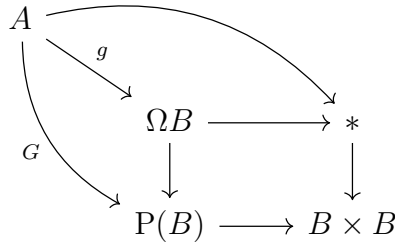
$$\rho_{A,B} : [\Sigma A, B] \xrightarrow{\simeq} [A, \Omega B]$$

Demostración. Para definir el isomorfismo $\rho_{A,B}$ observemos, primero, que todo morfismo $[f] \in [\Sigma A, B]$ está representado por una homotopía a izquierda F entre dos copias del morfismo nulo. De hecho, por la propiedad universal del pushout, $[f]$ está representado por un morfismo $F : \text{Cyl}(A) \rightarrow B$ en C tal que la composición $A \sqcup A \rightarrow \text{Cyl}(A) \xrightarrow{F} B$ es el morfismo nulo

$$A \sqcup A \rightarrow * \rightarrow B$$

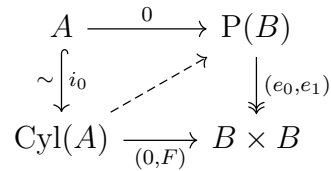


Es decir, F es una homotopía a izquierda entre dos copias del morfismo nulo. Análogamente, por la propiedad universal del pullback, un morfismo $[g] \in [A, \Omega B]$ está representado por un morfismo G en \mathcal{C}



tal que la composición $A \xrightarrow{G} P(B) \rightarrow B \times B$ es el morfismo nulo $A \rightarrow * \rightarrow B \times B$ y, por lo tanto, G es una homotopía a derecha entre dos copias del morfismo nulo $A \rightarrow B$.

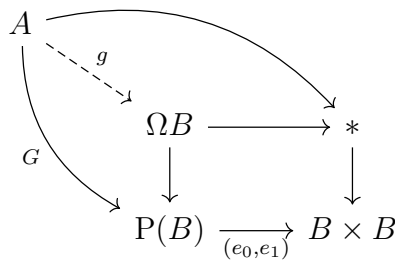
Dado que A y B son fibrantes y cofibrantes, una homotopía a izquierda $F : \text{Cyl}(A) \rightarrow B$ induce una homotopía a derecha $G = H \circ i_1 : A \rightarrow P(B)$ donde H es el levantamiento en el siguiente diagrama



Dado que

$$(e_0, e_1) \circ G = (e_0 \circ H \circ i_1, e_1 \circ H \circ i_1) = (0 \circ i_1, F \circ i_1) = (0, 0)$$

el morfismo G se factoriza sobre el siguiente pullback



y obtenemos un único morfismo $g : A \rightarrow \Omega B$. Además, la elección de H es única en $\text{Ho}(\mathcal{C})$ por lo que otra elección de H resultará en el mismo $[g] \in [A, A, \Omega B]$. Definimos, entonces, ρ mediante

$$\begin{aligned} \rho_{A,B} : [\Sigma A, B] &\longrightarrow [A, \Omega B] \\ [f] &\longmapsto [g] \end{aligned}$$

Para ver que ρ está bien definida consideramos $[f] = [f'] \in [\Sigma A, B]$. Entonces existe una homotopía a derecha $k : \Sigma A \rightarrow P(B)$ de f en f' . Podemos ver a k como un morfismo $K : \text{Cyl}(A) \rightarrow P(B)$ tal que $K \circ i_0 = K \circ i_1 = 0$. Si tomamos otro representante $F' : \text{Cyl}(A) \rightarrow B$ para $[f] \in [\Sigma X, Y]$ entonces K es una homotopía entre F y F' . Repitiendo la construcción que hicimos antes para F con F' , obtenemos un levantamiento $H' : \text{Cyl}(A) \rightarrow P(B)$ tal que $G' = H' \circ i_1$ se factoriza sobre $g' : A \rightarrow \Omega B$. Queremos, entonces, ver que G y G' son homotópicos. Como $e_1 \circ H = F = e_0 \circ K$, podemos concatenar las homotopías H y K obteniendo

$$K \star H : \text{Cyl}(A) \rightarrow P(B)$$

Luego, dado que

$$\begin{aligned} e_0 \circ (H \star K) &= e_0 \circ H = 0 \\ e_1 \circ (H \star K) &= e_1 \circ K = F' \end{aligned}$$

y

$$(H \star K) \circ i_0 = (H \circ i_0) \star (K \circ i_0) = 0 \star 0 = 0$$

podemos tomar $H' = H \star K$. Entonces, por definición, tenemos que $(H \star K) \circ i_1 = (H \circ i_1) \star (K \circ i_1) = G \star 0$ y, por lo tanto, $(H \star K) \circ i_1$ es homotópico a G . Luego, la homotopía a izquierda F' se corresponde con la homotopía a derecha G' y con $G \star 0$. Concluimos que G' y G son homotópicos por lo que $[g] = [g']$.

Mostramos que si dos homotopías a izquierda $F, F' : \text{Cyl}(A) \rightarrow B$ son homotópicas a derecha, entonces sus correspondientes homotopías a derecha $G, G' : A \rightarrow P(B)$ son homotópicas a izquierda. Para ver que ρ es inyectiva tenemos que mostrar el recíproco y la prueba es dual a la prueba de que ρ está bien definida. \square

Veremos, ahora, la definición central de este capítulo.

Definición 4.1.24. Decimos que una categoría modelo punteada \mathcal{C} es **estable** si los funtores $\Sigma : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$ y $\Omega : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$ son equivalencias de categorías.

Ejemplo 4.1.25. La categoría de espacios topológicos punteados Top_* con la estructura modelo que definimos en el capítulo 3 no es estable. De hecho, Σ no es una equivalencia de categorías dado que

$$[S^2, S^1] = \pi_2(S^1) \simeq 0$$

y

$$[\Sigma S^2, \Sigma S^1] = [S^3, S^2] = \pi_3(S^2) \simeq \mathbb{Z}$$

Nos dedicaremos en el resto de esta sección a ver que la categoría de homotopía $Ho(\mathcal{C})$ de una categoría modelo estable \mathcal{C} es una categoría aditiva. Es decir, veremos que los hom sets son grupos abelianos y que la composición es bilineal.

Lema 4.1.26. [8, Lema 3.2.6.] *Si \mathcal{C} es una categoría modelo punteada. Para todo X, Y par de objetos en \mathcal{C} , los conjuntos $[\Sigma X, Y]$ y $[X, \Omega Y]$ son grupos y el isomorfismo de adjunción*

$$\rho : [\Sigma X, Y] \longrightarrow [X, \Omega Y]$$

es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Sean $\alpha, \beta : Cyl(X) \rightarrow Y$ dos homotopías a izquierda tales que $\alpha \circ i_1 = \beta \circ i_0$. La concatenación $\alpha \star \beta$ está dada por la propiedad universal en el siguiente pushout

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{i_0} & Cyl(X) \\
 \downarrow i_1 & & \downarrow \\
 Cyl(X) & \longrightarrow & Cyl(X)' \\
 & \searrow \alpha & \downarrow \alpha \star \beta \\
 & & X
 \end{array}$$

β (curved arrow from $Cyl(X)$ to X)
 α (curved arrow from $Cyl(X)$ to X)

Con esta operación, $[\Sigma X, Y]$ resulta un grupo. De forma dual, considerando pullbacks, obtenemos una operación con la que $[X, \Omega Y]$ es un grupo. El isomorfismo ρ manda una homotopía a izquierda en su correspondiente homotopía a derecha. Luego, como la concatenación y la correspondencia conmutan en $Ho(\mathcal{C})$, obtenemos que ρ es un isomorfismo de grupos. \square

Veremos, a continuación, que ΣX tiene estructura de cogrupo en $Ho(\mathcal{C})$.

Recordar que definimos el cono de un objeto X como la factorización del morfismo $X \rightarrow *$

$$X \hookrightarrow CX \xrightarrow{\sim} *$$

Definición 4.1.27. Definimos $\Sigma' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ mediante el siguiente pushout

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup X & \xrightarrow{\nabla} & X \\ \downarrow i \sqcup i & & \downarrow \\ CX \sqcup CX & \longrightarrow & \Sigma' X \end{array}$$

Lema 4.1.28. Si X es cofibrante, entonces $\Sigma X \simeq \Sigma' X$ en $\text{Ho}(\mathcal{C})$

Demostración. Consideramos el siguiente diagrama donde los tres cuadrados son pushouts

$$\begin{array}{ccccc} X \sqcup X & \longrightarrow & \text{Cyl } X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ CX \sqcup CX & \longrightarrow & P & \longrightarrow & \Sigma' X \\ \downarrow \sim & & \downarrow & & \\ * & \longrightarrow & \Sigma X & & \end{array}$$

Aplicando el corolario 4.1.10 al diagrama

$$\begin{array}{ccccc} CX \sqcup CX & \longleftarrow & X \sqcup X & \longleftarrow & \text{Cyl } X \\ \downarrow \sim & & \parallel & & \parallel \\ * & \longleftarrow & X \sqcup X & \longrightarrow & \text{Cyl } X \end{array}$$

obtenemos que $P \rightarrow \Sigma X$ es una equivalencia débil. Análogamente, aplicando el corolario 4.1.10 al diagrama

$$\begin{array}{ccccc} CX \sqcup CX & \longleftarrow & X \sqcup X & \longleftarrow & \text{Cyl } X \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow \sim \\ CX \sqcup CX & \longleftarrow & X \sqcup X & \xrightarrow{\nabla} & X \end{array}$$

obtenemos que $P \rightarrow \Sigma' X$ es una equivalencia débil. Luego $\Sigma X \simeq \Sigma' X$ en $\text{Ho}(\mathcal{C})$. \square

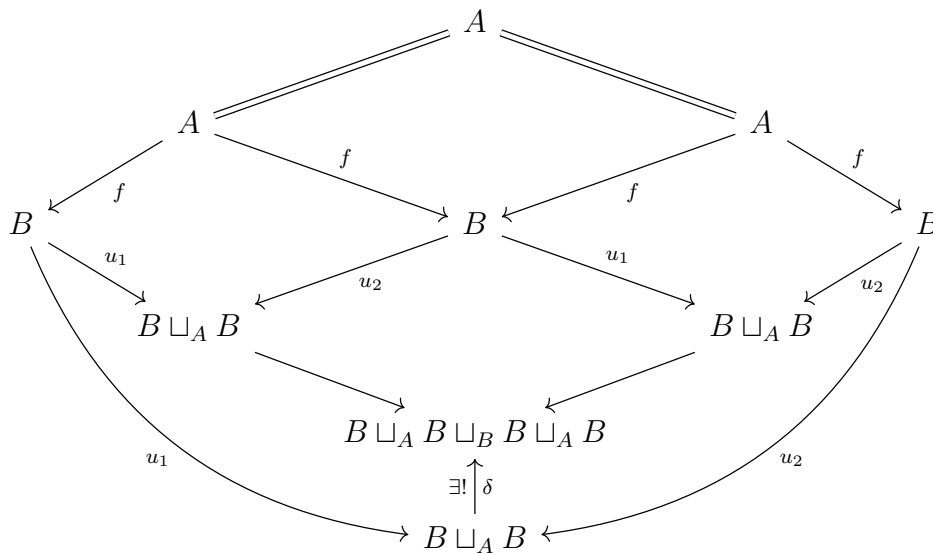
Para ver que ΣX es un cogrupo, le daremos estructura de cogrupo a $\Sigma' X$. Luego, a través del isomorfismo $\Sigma X \simeq \Sigma' X$ obtendremos la estructura de cogrupo en ΣX .

Definición 4.1.29. El par cokernel de un morfismo $f : A \rightarrow B$ es $B \begin{array}{c} \xrightarrow{u_1} \\ \xrightarrow{u_2} \end{array} B \sqcup_A B$ donde

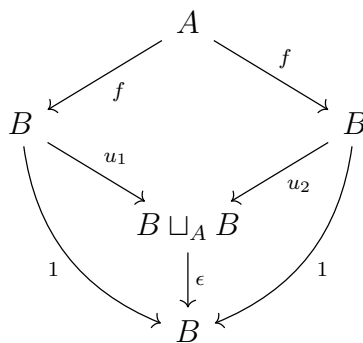
$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 f \downarrow & & \downarrow u_2 \\
 B & \xrightarrow{u_1} & B \sqcup_A B
 \end{array}$$

es un pushout.

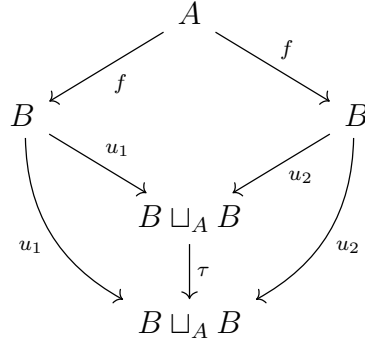
El par cokernel es una corelación de equivalencia. Es decir, definiendo $\delta : B \sqcup_A B \longrightarrow B \sqcup_A B \sqcup_B B \sqcup_A B$ como el morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama



$\epsilon : B \sqcup_A B \longrightarrow B$ como el morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama



y $\tau : B \sqcup_A B \longrightarrow B \sqcup_A B$ como el morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama



Se tiene que para todo $Z \in \mathcal{C}$, $\text{Hom}(B \sqcup_A B, Z)$ es una relación de equivalencia en el conjunto $\text{Hom}(B, Z)$:

- reflexiva:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, Z) & \xrightarrow{-\circ\epsilon} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B \sqcup_A B, Z) \\ \parallel & & \wr \\ \{a: B \rightarrow Z\} & \longrightarrow & \{(a, b): af = bf\} \\ & & \\ & & a \longmapsto (a, a) \end{array}$$

- simétrica:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B \sqcup_A B, Z) & \xrightarrow{-\circ\tau} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B \sqcup_A B, Z) \\ \wr & & \wr \\ \{(a, b): af = bf\} & \longrightarrow & \{(a, b): af = bf\} \\ & & \\ & & (a, b) \longmapsto (b, a) \end{array}$$

- transitiva:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B \sqcup_A B \sqcup_A B, Z) & \xrightarrow{-\circ\delta} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B \sqcup_A B \sqcup_A B, Z) \\ \wr & & \wr \\ \{(a, b, c): af = bf = cf\} & \longrightarrow & \{(a, b): af = bf\} \\ & & \\ & & (a, b, c) \longmapsto (b, a) \end{array}$$

Es decir, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B \sqcup_A B, Z)$ es la relación de equivalencia en el conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, Z)$ de los pares (a, b) tales que $af = bf$.

Definimos $\Sigma'X$ como el pushout

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup X & \xrightarrow{\nabla} & X \\ i \sqcup i \downarrow & & \downarrow \\ CX \sqcup CX & \longrightarrow & \Sigma'X \end{array}$$

es decir, como el pushout

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ i \swarrow & & \searrow i \\ CX & & CX \\ u_1 \searrow & & \swarrow u_2 \\ & \Sigma'X & \end{array}$$

de modo que $CX \xrightarrow[u_2]{u_1} \Sigma'X$ es el par cokernel de $i : X \rightarrow CX$ y, por lo tanto, es una corelación de equivalencia.

Lema 4.1.30. *Si $* \xrightarrow{\sim} A$ es una cofibración trivial, para todo diagrama de cofibraciones $B \leftarrow A \rightarrow C$ el morfismo $\varphi_{B,C} : B \sqcup C \rightarrow B \sqcup_A C$ definido mediante*

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ B & & & & C \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & B \sqcup_A C & & \\ & \searrow & \uparrow \varphi & \swarrow & \\ & & B \sqcup C & & \end{array}$$

es una equivalencia débil.

Demostración. Directo a partir de 4.1.10. □

Teorema 4.1.31. *Sea X un objeto cofibrante en \mathcal{C} , entonces $\Sigma'X$ tiene estructura de cogrupo en $\text{Ho}(\mathcal{C})$.*

Demostración. Dado que $CX \xrightarrow[u_2]{u_1} \Sigma'X$ es el par cokernel de $i : X \rightarrow CX$, tenemos los morfismos $\delta : \Sigma'X \rightarrow \Sigma' \sqcup \Sigma'X$ y $\epsilon : \Sigma'X \rightarrow CX$.

Como X es cofibrante, tenemos que CX es cofibrante y que es contractible ya que $* \xrightarrow{\sim} CX$

Además, dado que φ es invertible, definiremos la comultiplicación en $\text{Ho}(\mathcal{C})$ mediante

$$\delta' : \Sigma'X \xrightarrow{\delta} \Sigma'X \sqcup_{CX} \Sigma'X \xrightarrow{\varphi^{-1}} \Sigma'X \sqcup \Sigma'X$$

A través del siguiente diagrama, obtenemos que δ' es coasociativa

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \Sigma'X \sqcup \Sigma'X & & & & \\
 & \swarrow \varphi & & \searrow \delta \sqcup 1 & & & \\
 \Sigma'X \sqcup \Sigma'X & & & & \Sigma'X \sqcup_{CX} \Sigma'X \sqcup \Sigma'X & & \\
 \delta \swarrow & & \delta \sqcup_{CX} 1 & & \swarrow \varphi & & \swarrow \varphi \sqcup 1 \\
 \Sigma'X & & \Sigma'X \sqcup_{CX} \Sigma'X \sqcup_{CX} \Sigma'X & & \Sigma'X \sqcup \Sigma'X \sqcup \Sigma'X & & \\
 \delta \searrow & & \uparrow 1 \sqcup_{CX} \delta & & \searrow \varphi & & \searrow 1 \sqcup \varphi \\
 \Sigma'X \sqcup \Sigma'X & & & & \Sigma'X \sqcup \Sigma'X \sqcup_{CX} \Sigma'X & & \\
 & \swarrow \varphi & & \swarrow 1 \sqcup \delta & & & \\
 & & \Sigma'X \sqcup \Sigma'X & & & &
 \end{array}$$

Por otro lado, considerando el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Sigma'X & \xrightarrow{\delta} & \Sigma'X \sqcup_{CX} \Sigma'X & \xrightarrow{1 \sqcup_{CX} 1} & \Sigma'X \sqcup_{CX} \Sigma'X & \xrightarrow{\simeq} & \Sigma'X \\
 & \searrow \delta' & \uparrow \varphi & & \uparrow \varphi & & \downarrow \simeq \\
 & & \Sigma'X \sqcup \Sigma'X & \xrightarrow{1 \sqcup \epsilon} & \Sigma'X \sqcup CX & \xrightarrow{1 \sqcup !} & \Sigma'X \sqcup_{CX} * \\
 & & & \longleftarrow 1 \sqcup ! & & &
 \end{array}$$

donde el triangulo inferior conmuta en $\text{Ho}(\mathcal{C})$ ya que $*$ es terminal en $\text{Ho}(\mathcal{C})$, obtenemos que la composición

$$\Sigma'X \xrightarrow{\delta'} \Sigma'X \sqcup \Sigma'X \xrightarrow{1 \sqcup !} \Sigma'X \sqcup * \simeq \Sigma'X$$

es la identidad. De forma similar, se ve que la composición

$$\Sigma'X \xrightarrow{\delta'} \Sigma'X \sqcup \Sigma'X \xrightarrow{! \sqcup 1} * \sqcup \Sigma'X \simeq \Sigma'X$$

también es la identidad.

Finalmente, el coinverso de $\Sigma'X$ resulta ser $\tau : \Sigma'X \rightarrow \Sigma'X$ ya que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & * & & \\
 & & \downarrow \sim & & \\
 & & CX & & \\
 \epsilon \swarrow & & & & \searrow i_2 \\
 \Sigma'X & \xrightarrow{\delta} & \Sigma'X \sqcup_{CX} \Sigma'X & \xrightarrow{\tau \sqcup_{CX} 1} & \Sigma'X \sqcup_{CX} \Sigma'X & \xrightarrow{\nabla} & \Sigma'X \\
 \delta' \searrow & & \uparrow \varphi & & \uparrow \varphi & & \swarrow \nabla \\
 & & \Sigma'X \sqcup \Sigma'X & \xrightarrow{\tau \sqcup 1} & \Sigma'X \sqcup \Sigma'X & &
 \end{array}$$

induce el siguiente diagrama conmutativo en $\text{Ho}(\mathcal{C})$

$$\begin{array}{ccccc}
 \Sigma'X & \longrightarrow & * & \longrightarrow & \Sigma'X \\
 \delta' \searrow & & & & \uparrow \nabla \\
 & & \Sigma'X \sqcup \Sigma'X & \xrightarrow{\tau \sqcup 1} & \Sigma'X \sqcup \Sigma'X
 \end{array}$$

□

Lema 4.1.32. [8, Lema 3.2.8.] Sea \mathcal{C} una categoría modelo punteada. Dados X e Y objetos en \mathcal{C} , los grupos $[\Sigma^2 X, Y]$ y $[X, \Omega^2 Y]$ son abelianos.

Demostración. Veremos que $[\Sigma^2 X, Y]$ es abeliano. Dado que ΣX es un objeto cogrupo en $\text{Ho}(\mathcal{C})$ tenemos

$$\Sigma : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{CoGrp}(\text{Ho}(\mathcal{C}))$$

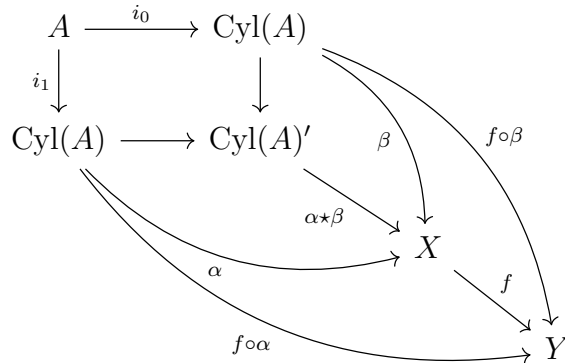
Luego, como Σ es adjunto a izquierda, preserva coproductos y, por lo tanto, preserva objetos cogrupo. Entonces, obtenemos

$$\text{CoGrp}(\Sigma) : \text{CoGrp}(\text{Ho}(\mathcal{C})) \rightarrow \text{CoGrp}(\text{CoGrp}(\text{Ho}(\mathcal{C})))$$

Por el argumento de Eckmann-Hilton, $\text{CoGrp}(\text{CoGrp}(\text{Ho}(\mathcal{C}))) \simeq \text{CoAb}(\text{Ho}(\mathcal{C}))$. En particular, obtenemos que $\Sigma(\Sigma(X))$ es un cogrupo abeliano y, por lo tanto, $[\Sigma^2 X, Y]$ es abeliano. □

Proposición 4.1.33. [8, Proposición 3.2.9.] Sea \mathcal{C} una categoría modelo estable. Entonces $\text{Ho}(\mathcal{C})$ es una categoría aditiva.

Demostración. Por estabilidad, tenemos que $[X, Y] \simeq [\Sigma^2 X, \Sigma^2 Y]$. Entonces, por el lema anterior, obtenemos que $[X, Y]$ es un grupo abeliano. Luego, nos falta ver que la composición de morfismos es bilineal. Consideramos el diagrama conmutativo



Entonces, por la propiedad universal del pushout obtenemos que

$$(f \circ \alpha) \star (f \circ \beta) = f \circ (\alpha \star \beta)$$

Análogamente se ve que $(\alpha \star \beta) \circ g = (\alpha \circ g) \star (\beta \circ g)$ y concluimos que $\text{Ho}(\mathcal{C})$ es una categoría aditiva. \square

4.2. Sucesiones de fibra y cofibra

Nos interesa probar que si \mathcal{C} es una categoría modelo estable entonces $\text{Ho}(\mathcal{C})$ es una categoría triangulada. Con el objetivo de definir los triángulos en la categoría $\text{Ho}(\mathcal{C})$, nos dedicaremos, en esta sección, a estudiar las sucesiones de fibra y las sucesiones de cofibra.

Definición 4.2.1. Sea \mathcal{C} una categoría modelo punteada y $f : A \rightarrow B$ un morfismo en \mathcal{C} . Definimos la **cofibra** de f como el diagrama de pushout

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & \text{Cofib}(f) \end{array}$$

Dualmente, definimos la **fibra** de f como el diagrama de pullback

$$\begin{array}{ccc} \text{Fib}(f) & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow f \\ * & \longrightarrow & B \end{array}$$

Sea

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

una sucesión de morfismos en una categoría modelo punteada \mathcal{C} donde f es una cofibración entre objetos cofibrantes y C es la cofibra de f . Dado un objeto fibrante X de la categoría \mathcal{C} definiremos una acción de grupo a derecha de $[\Sigma A, X]$ en $[C, X]$. Vimos que un elemento de $[\Sigma A, X]$ se puede representar por una homotopía a derecha

$$h : A \rightarrow P(X)$$

entre el morfismo nulo y si mismo. Además, podemos escoger el espacio camino de forma que $e_0 : P(X) \rightarrow X$ sea una fibración trivial. Dado $q : C \rightarrow X$ un elemento de $[C, X]$, tenemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & P(X) \\ f \downarrow & & \sim \downarrow e_0 \\ B & \xrightarrow{q \circ g} & X \end{array}$$

conmuta ya que $e_0 \circ h = 0 = q \circ g \circ f$ dado que $g \circ f = 0$. Luego, como f es una cofibración y e_0 es una fibración trivial, el diagrama admite un levantamiento

$$\phi : B \rightarrow PX$$

Tenemos que $0 = e_1 \circ h = e_1 \circ (\phi \circ f)$, entonces por la propiedad universal del pushout existe un morfismo $w : C \rightarrow X$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & & \\ \downarrow & & \downarrow g & & \searrow e_1 \circ \phi \\ * & \longrightarrow & C & & \\ & & \swarrow w & & \downarrow \\ & & & & X \end{array}$$

Es decir, $e_1 \circ \phi$ se factoriza sobre la cofibra de f :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & & e_1 \circ \phi \downarrow & \swarrow w & \\ & & X & & \end{array}$$

Definimos $[q] \odot [h] := [w]$.

Podemos hacer una construcción dual tomando una sucesión de morfismos

$$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$$

donde p es una fibración entre objetos fibrantes y F es la fibra de p . Dado un objeto cofibrante A de la categoría \mathcal{C} , definiremos una acción de grupo a derecha de $[A, \Omega B]$ en $[A, F]$. Vimos que un elemento de $[A, \Omega B]$ se puede representar por una homotopía a izquierda

$$h : \text{Cyl}(A) \rightarrow B$$

entre el morfismo nulo y si mismo. Además, podemos tomar $\text{Cyl}(A)$ de forma que $i_0 : A \rightarrow \text{Cyl}(A)$ sea una cofibración trivial. Dado $f : A \rightarrow F$ un elemento de $[A, F]$, tenemos que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i \circ f} & E \\ i_0 \sim \downarrow & & \downarrow p \\ \text{Cyl}(A) & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

conmuta ya que $p \circ i \circ f = 0 = h \circ i_0$. Entonces, como i_0 es una cofibración trivial y p es una fibración, el diagrama admite un levantamiento

$$\alpha : \text{Cyl}(A) \rightarrow E$$

Tenemos que $0 = h \circ i_1 = p \circ \alpha \circ i_1$, entonces por la propiedad universal del pullback, existe un morfismo $v : A \rightarrow F$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & & & & \\ & \searrow v & & & \searrow \\ & F & \longrightarrow & * & \\ & \downarrow i & & \downarrow & \\ \alpha \circ i_1 \searrow & E & \xrightarrow{p} & B & \end{array}$$

Es decir, $\alpha \circ i_1$ se factoriza sobre la fibra de p :

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & B \\ & \swarrow v & \uparrow \alpha \circ i_1 & & \\ & & A & & \end{array}$$

Definimos $[f] \odot [h] := [v]$.

Ejemplo 4.2.2. Veamos que en el caso de espacios topológicos, tomando $A = S^0$, esta acción se corresponde con la acción usual del grupo fundamental del espacio base sobre la fibra. Consideramos una fibración $p : E \rightarrow B$ con fibra

F . Un loop en B , es decir un elemento de ΩB , está dado por una función continua

$$\omega : [0, 1] \rightarrow B$$

tal que $\omega(0) = \omega(1) = x_0$ es el punto base. Dado $f \in F$, como las fibraciones en Top tienen la RLP con respecto a morfismos de la forma $Y \xrightarrow{(id_Y, 0)} I \times [0, 1]$, el siguiente diagrama admite un levantamiento $\tilde{\omega}$,

$$\begin{array}{ccc} S^0 & \xrightarrow{i} & E \\ i_0 \downarrow & \nearrow \tilde{\omega} & \downarrow \\ [0, 1] & \xrightarrow{\omega} & B \end{array}$$

donde $\tilde{\omega}$ es el levantado de ω que empieza en f . Luego, $[f] \odot [\omega] = [v]$ donde v es el único morfismo que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & B \\ & \swarrow v & \uparrow \tilde{\omega} \circ i_1 & & \\ & & S^0 & & \end{array}$$

Es decir,

$$\odot : [S^0, F] \times [S^0, \Omega B] \rightarrow [S^0, F]$$

le asigna a un punto $f \in F$ y a un loop ω , el punto final del camino levantado $\tilde{\omega}$, lo que corresponde a la acción usual

$$\pi_0(F) \times \pi_1(B) \rightarrow \pi_0(F)$$

Veremos, en el siguiente teorema, que las dos acciones que definimos son efectivamente acciones de grupo.

Teorema 4.2.3. [8, Teorema 3.3.3.] *Sea \mathcal{C} una categoría modelo punteada y sea $f : A \rightarrow B$ una cofibración entre objetos cofibrantes con cofibra C . El morfismo*

$$\odot : [C, X] \times [\Sigma A, X] \rightarrow [C, X]$$

está bien definido, es natural en $X \in \mathcal{C}$, es asociativo y unital y por lo tanto define una acción de grupo a derecha de $[\Sigma A, X]$ en $[C, X]$. Dualmente, sea $p : E \rightarrow B$ una fibración entre objetos fibrantes con fibra F . El morfismo

$$\odot : [A, F] \times [A, \Omega B] \rightarrow [A, F]$$

está bien definido, es natural en $A \in \mathcal{C}$, es asociativo y unital y por lo tanto define una acción de grupo a derecha de $[A, \Omega B]$ en $[A, F]$.

Demostración. Vamos a probar que se verifican las propiedades para la primer acción, la prueba para la segunda acción es dual.

1. \odot está bien definida

Sea $h' : A \rightarrow P(X)$ un representante de $[h] \in [\Sigma A, X]$ y $q' : C \rightarrow X$ un representante de $[q] \in [C, X]$. Tomamos un levantamiento β en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h'} & P(X) \\ f \downarrow & \nearrow \beta & \sim \downarrow e_0 \\ B & \xrightarrow{q' \circ g} & X \end{array}$$

y un morfismo w' que hace conmutar

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & & e_1 \circ \beta \downarrow & \swarrow w' & \\ & & X & & \end{array}$$

Para ver que \odot está bien definida, tenemos que ver que w' es homotópico al morfismo original w que se obtiene a partir de h y q en vez de h' y q' .

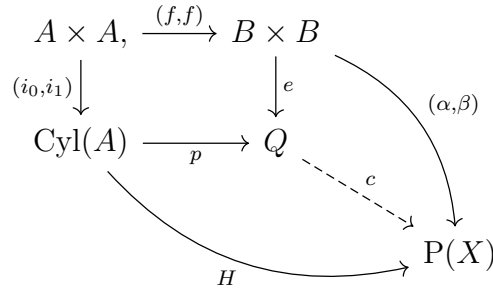
Dado que $[h] = [h']$, existe una homotopía a izquierda $\bar{H} : \Sigma A \rightarrow P(X)$ dada por un morfismo

$$\begin{aligned} H : \text{Cyl}(A) &\rightarrow P(X) \text{ tal que } e_0 \circ H = e_1 \circ H = 0 \\ H \circ i_0 &= h \\ H \circ i_1 &= h' \end{aligned}$$

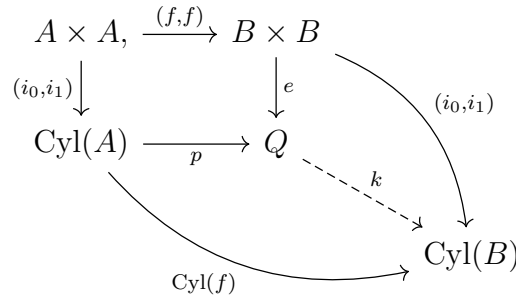
y, dado que $[q'] = [q]$, existe una homotopía a izquierda $K : \text{Cyl}(C) \rightarrow X$ tal que $K \circ i_0 = q$ y $K \circ i_1 = q'$. Sea Q el pushout del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A \times A, & \xrightarrow{(f,f)} & B \times B \\ (i_0, i_1) \downarrow & & \downarrow e \\ \text{Cyl}(A) & \xrightarrow{p} & Q \end{array}$$

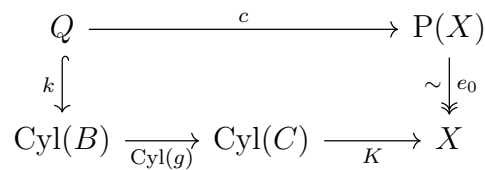
Tenemos un diagrama conmutativo



dato que $\alpha \circ f = h$, $\beta \circ f = h'$ y h y h' son homotópicos via H . Tenemos también, un diagrama conmutativo



donde podemos suponer que k es una cofibración. En el caso de que no lo sea, factorizamos k como una fibración trivial seguida de una cofibración $Q \hookrightarrow \text{Cyl}(B)' \xrightarrow{\sim} \text{Cyl}(B)$ y usamos $\text{Cyl}(B)'$ como objeto cilindro en vez de $\text{Cyl}(B)$. Entonces, tenemos el siguiente diagrama conmutativo



ya que

$$\begin{aligned}
 K \circ \text{Cyl}(g) \circ k \circ e &= K \circ \text{Cyl}(g) \circ (i_0, i_1) \\
 &= (K \circ \text{Cyl}(g) \circ i_0, K \circ \text{Cyl}(g) \circ i_1) \\
 &= (K \circ i_0 \circ g, K \circ i_1 \circ g) \\
 &= (q \circ g, q' \circ g)
 \end{aligned}$$

$$e_0 \circ c \circ e = e_0 \circ (\alpha, \beta) = (q \circ g, q' \circ g)$$

y

$$\begin{aligned} K \circ \text{Cyl}(g) \circ k \circ p &= K \circ \text{Cyl}(g) \circ \text{Cyl}(f) \\ &= K \circ \text{Cyl}(g \circ f) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$e_0 \circ c \circ p = e_0 = 0$$

y, entonces, por la propiedad universal del pushout obtenemos que

$$e_0 \circ c = K \circ \text{Cyl}(g) \circ k$$

Luego, el diagrama anterior admite un levantamiento

$$\Gamma : \text{Cyl}(B) \rightarrow P(X)$$

Dado que $(\Gamma \circ i_0, \Gamma \circ i_1) = \Gamma \circ k \circ e = c \circ e = (\alpha, \beta)$, tenemos que Γ es una homotopía a izquierda entre α y β . Por otro lado, dado que $e_1 \circ \Gamma \circ \text{Cyl}(f) = e_1 \circ \Gamma \circ k \circ p = e_1 \circ c \circ p = e_1 \circ H = 0$, obtenemos que $e_1 \circ \Gamma$ se factoriza sobre la cofibra de $\text{Cyl}(f)$

$$\begin{array}{ccccc} \text{Cyl}(A) & \xrightarrow{\text{Cyl}(f)} & \text{Cyl}(B) & \xrightarrow{\text{Cyl}(g)} & \text{Cyl}(C) \\ & & \downarrow e_1 \circ \Gamma & \swarrow \gamma & \\ & & X & & \end{array}$$

Como Γ es una homotopía a izquierda entre α y β , tenemos que $e_1 \circ \Gamma$ es una homotopía entre $e_1 \circ \alpha$ y $e_1 \circ \beta$. Por lo tanto, $\gamma : \text{Cyl}(C) \rightarrow X$ es una homotopía entre w y w' , por lo que \odot está bien definida.

2. \odot es natural en $X \in \mathcal{C}$

Sea $\varphi : X \rightarrow X'$ un morfismo entre objetos fibrantes. Tomamos $h : A \rightarrow P(X)$ representando un elemento de $[\Sigma A, X]$ y $q : C \rightarrow X$ un elemento de $[C, X]$. Entonces, $P(\varphi) \circ h : A \rightarrow P(X')$ representa un elemento de $[\Sigma A, X']$ y $\varphi \circ q : C \rightarrow P(X')$ representa un elemento de $[C, X']$. Queremos ver que

$$[\varphi \circ v] = [\varphi \circ q] \odot [P(\varphi) \circ h]$$

donde $[v] = [q] \odot [h]$.

Comenzamos calculando $[\varphi \circ q] \odot [P(\varphi) \circ h]$. Para ello, necesitamos un levantamiento en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{P(\varphi) \circ h} & P(X') \\
 f \downarrow & & \sim \downarrow e_0 \\
 B & \xrightarrow{\varphi \circ q \circ g} & X'
 \end{array}$$

Podemos tomar este levantamiento como $P(\varphi) \circ \alpha$, donde α es el levantamiento del primer cuadrado en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{h} & P(X) & \xrightarrow{P(\varphi)} & P(X') \\
 f \downarrow & \nearrow \alpha & \sim \downarrow e_0 & & \sim \downarrow e_0 \\
 B & \xrightarrow{q \circ g} & X & \xrightarrow{\varphi} & X'
 \end{array}$$

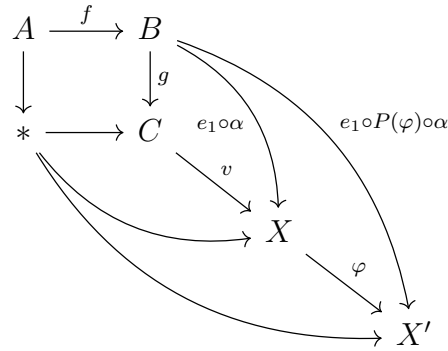
Luego, $[w] = [\varphi \circ q] \odot [P(\varphi) \circ h]$, donde w es el único morfismo que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 \downarrow & & \downarrow g \\
 * & \longrightarrow & C \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & X'
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{---} e_1 \circ P(\varphi) \circ \alpha \\
 \text{---} w
 \end{array}$$

Por otro lado, $[v] = [q] \odot [h]$ donde v es el único morfismo que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 \downarrow & & \downarrow g \\
 * & \longrightarrow & C \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & X
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{---} e_1 \circ \alpha \\
 \text{---} v
 \end{array}$$

Dado que $e_1 \circ P(\varphi) = \varphi \circ e_1$, tenemos que el siguiente diagrama conmuta



Entonces, por la unicidad en la propiedad universal del pushout, tenemos que $w = \varphi \circ v$ y, por lo tanto, $[\varphi \circ v] = [\varphi \circ q] \odot [P(\varphi) \circ h]$.

3. \odot es unital

La unidad de $[\Sigma A, X]$ está representada por la homotopía trivial $0 : A \rightarrow P(X)$. Luego, queremos ver que

$$[q] = [q] \odot [0]$$

para todo $q \in [C, X]$. Denotamos de la siguiente forma los morfismos que definen el objeto camino $P(X)$

$$X \xrightarrow{r} P(X) \xrightarrow{(e_0, e_1)} X \times X$$

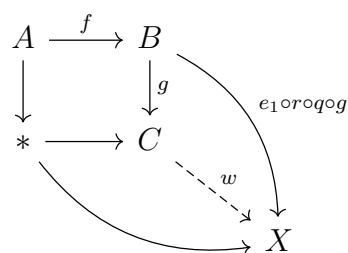
Entonces, por definición, tenemos que $e_1 \circ r = 1_X$ y $e_0 \circ r = 1_X$. Por lo tanto, en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{0} & P(X) \\ f \downarrow & & \downarrow \sim e_0 \\ B & \xrightarrow{q \circ g} & X \end{array}$$

podemos tomar como levantamiento al morfismo $r \circ q \circ g$ dado que

$$e_0 \circ r \circ q \circ g = q \circ g \quad \text{y} \quad r \circ q \circ g \circ f = 0$$

Luego, $[w] = [q] \odot [0]$ donde w es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama



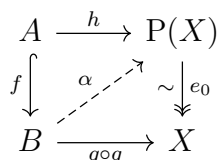
Tenemos que $w \circ q = e_1 \circ r \circ q \circ g = q \circ g$ ya que $e_1 \circ r = Id_X$. Por lo tanto, $w = q$ y concluimos que $[q] = [q] \odot [0]$.

4. \odot es asociativa

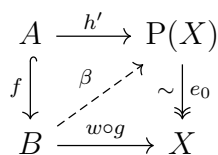
Queremos ver que

$$([q] \odot [h]) \odot [h'] = [q] \odot [h * h']$$

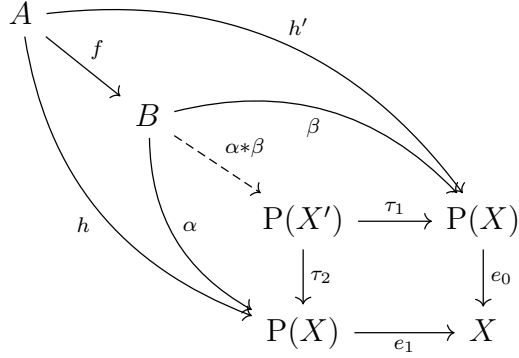
Para ello, comenzamos calculando $[k] = ([q] \odot [h]) \odot [h']$. Para definir $[w] = [q] \odot [h]$ tomamos un levantamiento α en el siguiente diagrama conmutativo



Luego, w es el morfismo $w : C \rightarrow X$ tal que $w \circ g = e_1 \circ \alpha$. Ahora, para definir $[k]$ tomamos un levantamiento β en el diagrama



y definimos k como el morfismo $k : C \rightarrow W$ que verifica $k \circ q = e_1 \circ \beta$. Además, tenemos que $e_0 \circ \beta = w \circ g = e_1 \circ \alpha$ y, por lo tanto, podemos concatenar α y β .



Luego, $(\alpha * \beta) \circ f$ es una concatenación de h y h' y tenemos un objeto camino

$$X \longrightarrow P(X') \xrightarrow{(e'_0, e'_1)} X \times X$$

tal que $e'_0 = e_0 \circ \tau_2$ y $e'_1 = e_1 \circ \tau_1$. Luego, tenemos que

$$e'_0 \circ (\alpha * \beta) = e_0 \circ \tau_2 \circ (\alpha * \beta) = e_0 \circ \alpha = q \circ g$$

$$e'_1 \circ (\alpha * \beta) = e_1 \circ \tau_1 \circ (\alpha * \beta) = e_1 \circ \beta = k \circ g$$

y, por lo tanto, $\alpha * \beta$ es un levantamiento para el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h * h'} & P(X') \\ f \downarrow & \nearrow \alpha * \beta & \sim \downarrow e'_0 \\ B & \xrightarrow{q \circ g} & X \end{array}$$

Entonces, $[q] \odot [h * h']$ va a estar representado por el morfismo k' que verifica

$$k' \circ g = e'_1 \circ (\alpha * \beta) = k \circ g$$

Por lo tanto, $k = k'$ y concluimos que $([q] \odot [h]) \odot [h'] = [q] \odot [h * h']$.

□

Definiremos, a continuación, dos nuevas acciones a partir de las que vimos en el teorema anterior. Sea $p: E \rightarrow B$ una fibración entre objetos fibrantes de \mathcal{C} con fibra F . Por la acción de grupo vista en teorema 4.2.3, tenemos un morfismo

$$[F \times \Omega B, F \times \Omega B] \simeq [F \times \Omega B, F] \times [F \times \Omega B, \Omega B] \xrightarrow{\odot} [F \times \Omega B, F]$$

Luego, el morfismo identidad $1_{F \times \Omega B}$ induce un morfismo en $\text{Ho}(\mathcal{C})(C)$

$$\odot : F \times \Omega B \rightarrow F$$

Dado que la acción del teorema 4.2.3 es asociativa, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} [-, F] \times [-, \Omega B] \times [-, \Omega B] & \xrightarrow{\odot \times id} & [-, F] \times [-, \Omega B] \\ id \times * \downarrow & & \downarrow \odot \\ [-, F] \times [-, \Omega B] & \xrightarrow{\odot} & [-, F] \end{array}$$

que, por el lema de Yoneda, induce el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F \times \Omega B \times \Omega B & \xrightarrow{\odot \times id} & F \times \Omega B \\ id \times m \downarrow & & \downarrow \odot \\ F \times \Omega B & \xrightarrow{\odot} & F \end{array}$$

donde m es la operación de grupo en ΩB , es decir, la composición de loops. Análogamente, como la acción del teorema 4.2.3 es unital, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} [-, F] \times [-, *] & \longrightarrow & [-, F] \times [-, \Omega B] \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \odot \\ [-, F] & \xrightarrow{id} & [-, F] \end{array}$$

que, por el lema de Yoneda, induce el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F \times * & \longrightarrow & F \times \Omega B \\ \downarrow & & \downarrow \odot \\ F & \xrightarrow{id} & F \end{array}$$

donde el único morfismo $* \rightarrow \Omega B$ es la unidad. Obtenemos, entonces, que $\odot : F \times \Omega B \rightarrow F$ define una acción del grupo ΩB sobre F .

Dualmente, sea $f : A \rightarrow B$ una cofibración entre objetos cofibrantes con cofibra C . La acción de grupo del teorema 4.2.3 induce un morfismo

$$\odot : C \rightarrow C \sqcup \Sigma A$$

que, por el lema de Yoneda, resulta una coacción del cogrupo ΣA sobre C en $\text{Ho}(\mathcal{C})$.

Estamos ahora en condiciones de dar las definiciones principales de esta sección.

Definición 4.2.4. Sea \mathcal{C} una categoría modelo punteada. Una **sucesión de fibra** en $\text{Ho}(\mathcal{C})$ es un diagrama

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$$

que es isomorfo en $\text{Ho}(\mathcal{C})$ a un diagrama

$$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$$

donde p es una fibración entre objetos fibrantes y F es la fibra de p . Además, el diagrama tiene una acción a derecha en $\text{Ho}(\mathcal{C})$

$$X \times \Omega Z \rightarrow X$$

que es isomorfa a la acción inducida por el teorema 4.2.3. El **morfismo de borde** de la sucesión de fibra está dado por la composición

$$\partial : \Omega Z \xrightarrow{(0, Id)} X \times \Omega Z \xrightarrow{\circlearrowright} X$$

De esta forma, obtenemos

$$\Omega Z \xrightarrow{\partial} X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$$

Tenemos la siguiente definición dual

Definición 4.2.5. Sea \mathcal{C} una categoría modelo punteada. Una **sucesión de cofibra** en $\text{Ho}(\mathcal{C})$ es un diagrama

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$$

que es isomorfo en $\text{Ho}(\mathcal{C})$ a un diagrama

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

donde f es una cofibración entre objetos cofibrantes y C es la cofibra de f . Además, el diagrama tiene una coacción a derecha en $\text{Ho}(\mathcal{C})$

$$Z \rightarrow Z \sqcup \Omega X$$

que es isomorfa a la coacción inducida por el teorema 4.2.3. El **morfismo de borde** de la sucesión de cofibra está dado por la composición

$$\partial : Z \xrightarrow{\circlearrowright} Z \sqcup \Omega X \xrightarrow{(0, Id)} \Omega X$$

De esta forma, obtenemos

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \xrightarrow{\partial} \Omega X$$

El siguiente lema muestra que una sucesión de fibra se puede correr a la izquierda usando su mapa de borde para obtener una nueva sucesión de fibra.

Lema 4.2.6. [8, Lema 3.5.1.] Sea

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

una sucesión de fibra en $\text{Ho}(\mathcal{C})$, donde \mathcal{C} es una categoría modelo punteada. Entonces

$$\Omega Z \xrightarrow{\partial} X \xrightarrow{f} Y$$

es una sucesión de fibra con la acción

$$\odot : \Omega Z \times \Omega Y \rightarrow \Omega Z$$

dada por

$$\Omega Z \times \Omega Y \xrightarrow{(id, \Omega g)} \Omega Z \times \Omega Z \xrightarrow{(id, -1)} \Omega Z \times \Omega Z \xrightarrow{*} \Omega Z$$

donde $*$ es la operación de grupo en ΩZ y -1 el inverso del grupo. Es decir

$$[-((\Omega g) \circ h)] * [u] = [u] \odot [h]$$

donde $u \in [A, \Omega Z]$ y $[h] \in [A, \Omega Y]$ para $A \in \text{Ho}(\mathcal{C})$.

Demostración. Para la prueba de este resultado nos referimos al lema 3.5.1 de [8]. \square

Corolario 4.2.7. [8, Corolario 3.5.2.] Siguiendo la notación del lema anterior, si

$$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$$

es una sucesión de fibra, entonces

$$\Omega E \xrightarrow{-\Omega p} \Omega B \xrightarrow{\partial} F$$

también es una sucesión de fibra

Demostración. Usando la acción $\odot : \Omega B \times \Omega E \rightarrow \Omega B$ vista en el lema anterior, tenemos que el morfismo de borde asociado a $\Omega B \rightarrow F \rightarrow E$ está dado por

$$\begin{aligned}
[X, \Omega E] &\longrightarrow [X, \Omega B] \times [X, \Omega E] \xrightarrow{\circlearrowright} [X, \Omega B] \\
[f] &\longmapsto ([0], [f]) \longmapsto [0] * [-(\Omega p) \circ f] = [-(\Omega p) \circ f]
\end{aligned}$$

□

Observación 4.2.8. La demostración de este corolario justifica el signo de menos que aparece en las sucesiones de fibra corridas.

Teorema 4.2.9 (Sucesión exacta larga de Puppe). *[8, Teorema 3.6.1.] Sea*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

una sucesión de fibra en $\text{Ho}(\mathcal{C})$, donde \mathcal{C} es una categoría modelo punteada y sea su $\partial : \Omega Z \rightarrow X$ el mapa de borde. Entonces, la sucesión

$$\begin{aligned}
\cdots \longrightarrow [A, \Omega^{n+1} Z] &\xrightarrow{(-1)^n (\Omega^n \partial)_*} [A, \Omega^n X] \xrightarrow{(-1)^n (\Omega^n g)_*} [A, \Omega^n Y] \longrightarrow \cdots \\
\cdots \longrightarrow [A, \Omega Z] &\xrightarrow{\partial_*} [A, X] \xrightarrow{g_*} [A, Y] \xrightarrow{f_*} [A, Z]
\end{aligned}$$

es exacta para todo $A \in \text{Ho}(\mathcal{C})$.

Demostración. Por lema 4.2.6 y el corolario 4.2.7, alcanza con mostrar que

$$[A, X] \xrightarrow{f_*} [A, Y] \xrightarrow{g_*} [A, Z]$$

es exacta. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la sucesión de fibra es de la forma

$$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$$

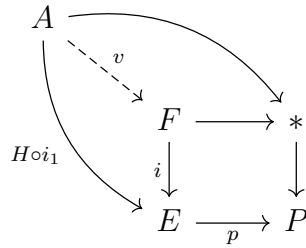
donde p es una fibración entre objetos fibrantes y F es la fibra de p . Veremos, entonces que

$$[A, F] \xrightarrow{i_*} [A, E] \xrightarrow{p_*} [A, B]$$

es exacta. Dado que $p \circ i = 0$, tenemos que $\text{Im}(i_*) \subseteq \text{Ker}(p_*)$. Para ver que $\text{Ker}(p_*) \subseteq \text{Im}(i_*)$, consideramos $u : A \rightarrow E$ tal que $[p \circ u] = 0$. Entonces, existe una homotopía a izquierda $h : \text{Cyl}(A) \rightarrow B$ tal que $h \circ i_0 = p \circ u$ y $h \circ i_1 = 0$. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{u} & E \\
i_0 \downarrow \sim & & \downarrow p \\
\text{Cyl}(A) & \longrightarrow & B
\end{array}$$

Como i_0 es una cofibración trivial y p es una fibración, el diagrama admite un levantamiento $H : \text{Cyl}(A) \rightarrow E$. Luego, dado que $p \circ (H \circ i_1) = h \circ i_1 = 0$, por la propiedad universal del pullback, existe un único morfismo v que hace conmutar el siguiente diagrama



Como H es una homotopía entre $H \circ i_0$ y $H \circ i_1$, tenemos que $[H \circ i_0] = [H \circ i_1]$. Por lo tanto,

$$i_*([v]) = [i \circ v] = [H \circ i_1] = [H \circ i_0] = [u]$$

y, entonces, $[u] \in \text{Im}(i_*)$. □

Tenemos resultados duales a los anteriores para sucesiones de cofibra.

Lema 4.2.10. [8, Lema 3.6.2.] Sea

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

una sucesión de cofibra en $\text{Ho}(\mathcal{C})$, donde \mathcal{C} es una categoría modelo punteada. Entonces,

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\partial} \Sigma X$$

es una sucesión de cofibra con la coacción

$$\odot : \Sigma X \rightarrow \Sigma X \sqcup \Sigma Y$$

dada por

$$[u] \odot [h] = [u] * [-h \circ \Sigma f]$$

Corolario 4.2.11. [8, Corolario 3.6.3.] Si

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

una sucesión de cofibra en $\text{Ho}(\mathcal{C})$, entonces

$$Z \xrightarrow{\partial} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y$$

también es una sucesión de cofibra.

Teorema 4.2.12 (Sucesión exacta larga de Puppe). [8, Teorema 3.6.4.] Sea

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

una sucesión de cofibra en $\text{Ho}(\mathcal{C})$, donde \mathcal{C} es una categoría modelo punteada y sea $\partial : Z \rightarrow \Sigma X$ su mapa de borde. Entonces,

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow [\Sigma^{n+1}X, A] \xrightarrow{(-1)^n(\Sigma^n \partial)^*} [\Sigma^n Z, A] \xrightarrow{(-1)^n(\Sigma^n g)^*} [\Sigma^n Y, A] \rightarrow \cdots \\ \cdots \xrightarrow{\partial^*} [Z, A] \xrightarrow{g^*} [Y, A] \xrightarrow{f^*} [X, A] \end{aligned}$$

es una sucesión exacta para todo $A \in \text{Ho}(\mathcal{C})$.

4.3. Categoría de homotopía de una categoría modelo estable

En esta sección veremos la prueba del siguiente teorema.

Teorema 4.3.1. [8, Teorema 4.2.1.] Sea \mathcal{C} una categoría modelo estable. Entonces, su categoría de homotopía $\text{Ho}(\mathcal{C})$ es una categoría triangulada donde los triángulos exactos están dados por las sucesiones de cofibra y sus morfismos de borde

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \xrightarrow{\partial} \Sigma X$$

Probaremos este resultado viendo que se verifican los axiomas de categoría triangulada en los siguientes lemas.

Lema 4.3.2 (Axioma T1). [8, pág. 138] Se verifican las siguientes afirmaciones:

1. la sucesión de morfismos $* \longrightarrow X \longleftarrow X \longrightarrow *$ es una sucesión de cofibra
2. si una sucesión de morfismos es isomorfa a una sucesión de cofibra, entonces es una sucesión de cofibra
3. todo morfismo $f : X \rightarrow Y$ se puede completar a una sucesión de cofibra de la forma $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{u} \Sigma X$

Demostración.

4.3. CATEGORÍA DE HOMOTOPÍA DE UNA CATEGORÍA MODELO ESTABLE 135

1. Podemos suponer que X es cofibrante, luego $* \rightarrow X$ es una cofibración con cofibra X y el morfismo de borde es el morfismo trivial

$$\partial : X \rightarrow X \sqcup * \rightarrow *$$

Por lo tanto, $* \rightarrow X \xlongequal{\quad} X \xrightarrow{\partial} *$ es una sucesión de cofibra

2. Es trivial por la definición de sucesión de cofibra.
3. Podemos suponer que $f : X \rightarrow Y$ es una cofibración entre objetos cofibrantes. Entonces, tomando su cofibra

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow g \\ * & \longrightarrow & Z \end{array}$$

y la acción asociada a $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ obtenemos una sucesión de cofibra

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\partial} \Sigma X$$

□

Veremos, ahora, la prueba del axioma T3 que utilizaremos luego para ver que se verifica el axioma T2.

Lema 4.3.3 (Axioma T3). [8, Lema 4.2.2.] Sea \mathcal{C} una categoría modelo estable. Supongamos que tenemos un diagrama conmutativo en $\text{Ho}(\mathcal{C})$

$$\begin{array}{ccccccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{u'} & \Sigma X' \\ \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & & & \downarrow \Sigma \phi_1 \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{u} & \Sigma X \end{array}$$

donde las dos filas son sucesiones de cofibra con sus respectivos mapas de borde. Entonces, existe un morfismo $\phi_3 : Z' \rightarrow Z$ que completa el diagrama a un diagrama conmutativo.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, suponemos que f' y f son cofibraciones entre objetos cofibrantes, que Z' es la cofibra de f' y que Z es la cofibra de f . Es decir, Z' y Z están dados por los pushouts

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow g' \\ * & \longrightarrow & Z' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow g \\ * & \longrightarrow & Z \end{array}$$

Consideramos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \\ \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

Tenemos que $g \circ \phi_2 \circ f' = g \circ f \circ \phi_1 = 0$ ya que $g \circ f = 0$. Entonces, por la propiedad universal del pushout, tenemos que $g \circ \phi_2$ se factoriza sobre la cofibra de f'

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow g' \\ * & \longrightarrow & Z' \end{array} \begin{array}{c} \searrow^{g \circ \phi_2} \\ \dashrightarrow^{\phi_3} \\ \downarrow \\ Z \end{array}$$

Es decir, existe $\phi_3 : Z' \rightarrow Z$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \\ \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_3 \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

Falta ver que $\Sigma\phi_1 \circ u' = \phi_3 \circ u$. Para ello, dado que u y u' están definidos a partir de la coacción, veremos que ϕ_3 es compatible con la coacción en las dos sucesiones de cofibra. Es decir, tenemos que ver que el cuadrado izquierdo en el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} & & u' & & \\ & & \curvearrowright & & \\ Z' & \xrightarrow{\circlearrowleft} & Z' \sqcup \Sigma X' & \xrightarrow{(0, id)} & \Sigma X' \\ \downarrow \phi_3 & & \downarrow \phi_3 \circ \Sigma\phi_1 & & \downarrow \Sigma\phi_1 \\ Z & \xrightarrow{\circlearrowleft} & Z \sqcup \Sigma X & \xrightarrow{(0, id)} & \Sigma X \\ & & u & & \end{array}$$

4.3. CATEGORÍA DE HOMOTOPÍA DE UNA CATEGORÍA MODELO ESTABLE 137

Entonces, dados $w : Z \rightarrow A$ y un morfismo $h : X \rightarrow P(A)$ que representa un elemento de $[\Sigma X, A]$, queremos ver que

$$[w \circ \phi_3] \odot [h \circ \phi_1] = ([w] \odot [h]) \circ \phi_3$$

Comenzamos construyendo $[w] \odot [h]$. Para ello, consideramos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & P(A) \\ f \downarrow & \nearrow \alpha & \downarrow \sim e_0 \\ Y & \xrightarrow{w \circ g} & A \end{array}$$

que admite un levantamiento $\alpha : Y \rightarrow P(A)$. Luego, $[w] \odot [h] = [v]$ donde $v : Z \rightarrow A$ es el morfismo que verifica $v \circ g = e_1 \circ \alpha$. Por otro lado, para construir $[w \circ \phi_3] \odot [h \circ \phi_1]$ consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{h \circ \phi_1} & P(A) \\ f' \downarrow & \nearrow \beta & \downarrow \sim e_0 \\ Y' & \xrightarrow{w \circ \phi_3 \circ g'} & A \end{array}$$

que admite un levantamiento $\beta : Y' \rightarrow P(A)$. Luego, $[w \circ \phi_3] \odot [h \circ \phi_1] = [v']$ donde $v' : Z' \rightarrow A$ es el morfismo que verifica $v' \circ g' = e_1 \circ \beta$. Además, como

$$\alpha \circ \phi_2 \circ f' = \alpha \circ f \circ \phi_1 = h \circ \phi_1$$

y

$$e_0 \circ \alpha \circ \phi_2 = w \circ g \circ \phi_2 = w \circ \phi_3 \circ g'$$

podemos tomar $v' = v \circ \phi_3$ y tenemos

$$v \circ \phi_3 \circ g' = v \circ g \circ \phi_2 = e_1 \circ \alpha \circ \phi_2 = e_1 \circ \beta$$

Por lo tanto, por la propiedad universal del pushout $v' = v \circ \phi_3$. Obtuvimos, entonces, que $[v'] = [v] \circ \phi_3$, es decir, $[w \circ \phi_3] \odot [h \circ \phi_1] = ([w] \odot [h]) \circ \phi_3$. \square

En el enunciado del axioma T3 y su prueba usamos únicamente propiedades de las sucesiones de cofibra en la categoría de homotopía de una categoría modelo punteada sin necesitar estabilidad. Para la prueba del axioma T2 sí será fundamental que la categoría modelo sea estable. Denotaremos mediante

$$\epsilon_X : \Sigma \Omega X \rightarrow X \quad \text{y} \quad \eta_X : X \rightarrow \Omega \Sigma X$$

a la counidad y la unidad de la adjunción loop-suspensión en $\text{Ho}(\mathcal{C})$.

Lema 4.3.4 (Axioma T2). [8, Lema 4.2.5.] Sea \mathcal{C} una categoría modelo estable. Entonces

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

es una sucesión de cofibra en $\text{Ho}(\mathcal{C})$ con mapa de borde $u : Z \rightarrow \Sigma X$ si y solamente si

$$\Omega Z \xrightarrow{-\eta_X^{-1} \circ \Omega u} X \xrightarrow{f} Y$$

es una sucesión de cofibra con mapa de borde

$$\epsilon_Z^{-1} \circ g : Y \rightarrow \Sigma(\Omega Z)$$

Demostración. Supongamos que

$$\Omega Z \xrightarrow{-\eta_X^{-1} \circ \Omega u} X \xrightarrow{f} Y$$

es una sucesión de cofibra con mapa de borde $\epsilon_Z^{-1} \circ g : Y \rightarrow \Sigma(\Omega Z)$. Entonces, por el lema 4.2.10, tenemos que

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\epsilon_Z^{-1} \circ g} Z$$

es una sucesión de cofibra con mapa de borde $-\Sigma(-\eta_X^{-1} \circ \Omega u) = \Sigma\eta_X^{-1} \circ \Sigma\Omega u$. Como η_X es natural en X , tenemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Sigma\Omega Z & \xrightarrow{\Sigma\Omega u} & \Sigma\Omega\Sigma X \\ \eta_Z \downarrow & & \downarrow \epsilon_{\Sigma X} \\ Z & \xrightarrow{u} & \Sigma X \end{array}$$

conmuta, es decir $u \circ \epsilon_Z = \epsilon_{\Sigma X} \circ \Sigma\Omega u$. Además, como ϵ_X es la counidad y η_X es la unidad de la adjunción, tenemos que $1_{\Sigma X} = \epsilon_{\Sigma X} \circ \Sigma\eta_X$, es decir $\epsilon_{\Sigma X} = (\Sigma\eta_X)^{-1}$. Luego, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\epsilon_Z^{-1} \circ g} & \Sigma\Omega Z & \xrightarrow{\Sigma\eta_X^{-1} \circ \Sigma\Omega u} & \Sigma X \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow \epsilon_Z & & \parallel \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{u} & \Sigma X \end{array}$$

Como la fila de arriba es una sucesión de cofibra con su mapa de borde y todos los morfismos verticales son isomorfismos, concluimos que la fila de abajo es una sucesión de cofibra.

Recíprocamente, supongamos que

4.3. CATEGORÍA DE HOMOTOPÍA DE UNA CATEGORÍA MODELO ESTABLE 139

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

es una sucesión de cofibra en $\text{Ho}(\mathcal{C})$ con mapa de borde u . Por naturalidad de la counidad de la adjunción, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma\Omega X & \xrightarrow{\Sigma\Omega f} & \Sigma\Omega Y & \xrightarrow{\Sigma\Omega g} & \Sigma\Omega Z & \xrightarrow{\Sigma\epsilon_Y^{-1} \circ \Sigma\eta_X^{-1} \circ \Sigma\Omega u} & \Sigma^2\Omega X \\ \downarrow \epsilon_X & & \downarrow \epsilon_Y & & \downarrow \epsilon_Z & & \downarrow \epsilon_{\Sigma X} \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{u} & \Sigma X \end{array}$$

La fila de abajo es una sucesión de cofibra en $\text{Ho}(\mathcal{C})$ con su mapa de borde. Entonces, como todas las flechas verticales son isomorfismos, obtenemos que la fila de arriba también es una sucesión de cofibra con su mapa de borde. Queremos ver que quitándole la suspensión obtenemos una sucesión de cofibra

$$\Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{\Omega g} \Omega Z \xrightarrow{\epsilon_Y^{-1} \circ \eta_X^{-1} \circ \Omega u} \Sigma\Omega X$$

Tenemos que $\Omega f : \Omega X \rightarrow \Omega Y$ forma parte de una sucesión de cofibra

$$\Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{g'} W \xrightarrow{u'} \Sigma\Omega X$$

Aplicándole Σ obtenemos una nueva sucesión de cofibra

$$\Sigma\Omega X \xrightarrow{\Sigma\Omega f} \Sigma\Omega Y \xrightarrow{\Sigma g'} \Sigma W \xrightarrow{\Sigma u'} \Sigma^2\Omega X$$

que podemos colocar en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma\Omega X & \xrightarrow{\Sigma\Omega f} & \Sigma\Omega Y & \xrightarrow{\Sigma\Omega g} & \Sigma\Omega Z & \xrightarrow{\Sigma\epsilon_Y^{-1} \circ \Sigma\eta_X^{-1} \circ \Sigma\Omega u} & \Sigma^2\Omega X \\ \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ \Sigma\Omega X & \xrightarrow{\Sigma\Omega f} & \Sigma\Omega Y & \xrightarrow{\Sigma g'} & \Sigma W & \xrightarrow{\Sigma u'} & \Sigma^2\Omega X \end{array}$$

Entonces, por el axioma T3, existe $k : \Sigma\Omega Z \rightarrow \Sigma W$ que hace conmutar el diagrama. Luego, la sucesión exacta larga del teorema 4.2.12 nos permite obtener el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} [\Sigma^2\Omega Y, A] & \longrightarrow & [\Sigma^2\Omega X, A] & \longrightarrow & [\Sigma\Omega Z, A] & \longrightarrow & [\Sigma\Omega Y, A] & \longrightarrow & [\Sigma\Omega X, A] \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow k^* & & \parallel & & \parallel \\ [\Sigma^2\Omega Y, A] & \longrightarrow & [\Sigma^2\Omega X, A] & \longrightarrow & [\Sigma W, A] & \longrightarrow & [\Sigma\Omega Y, A] & \longrightarrow & [\Sigma\Omega X, A] \end{array}$$

Por el lema de los cinco, tenemos que $k^* : [\Sigma\Omega Z, A] \longrightarrow [\Sigma W, A]$ es un isomorfismo. Luego, por el lema de Yoneda, $k : \Sigma\Omega Z \longrightarrow \Sigma W$ es un isomorfismo. Por lo tanto, $k = \Sigma k'$ para algún $k' \in \text{Ho}(\mathcal{C})$ que también es un isomorfismo. Específicamente

$$k' = (\eta_W^{-1}) \circ \Omega k \circ \eta_{\Omega Z}$$

Entonces, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega X & \xrightarrow{\Omega f} & \Omega Y & \xrightarrow{\Omega g} & \Omega Z & \xrightarrow{\epsilon_Y^{-1} \circ \eta_X^{-1} \circ \Omega u} & \Sigma \Omega X \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow k' & & \parallel \\ \Omega X & \xrightarrow{\Omega f} & \Omega Y & \xrightarrow{g'} & W & \xrightarrow{u'} & \Sigma \Omega X \end{array}$$

donde todas las flechas verticales son isomorfismos y la fila de abajo es una sucesión de cofibra. Por lo tanto, la fila de abajo también es una sucesión de cofibra. Luego, por el lema 4.2.10 y el corolario 4.2.11, podemos correr la sucesión de cofibra

$$\Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{\Omega g} \Omega Z \xrightarrow{\epsilon_Y^{-1} \circ \eta_X^{-1} \circ \Omega u} \Sigma \Omega X$$

dos lugares a la derecha, obteniendo la siguiente sucesión de cofibra

$$\Omega Z \xrightarrow{\epsilon_Y^{-1} \circ \eta_X^{-1} \circ \Omega u} \Sigma \Omega X \xrightarrow{-\Sigma \Omega f} \Sigma \Omega Y \xrightarrow{-\Sigma \Omega g} \Omega Z$$

Además, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega Z & \xrightarrow{\epsilon_Y^{-1} \circ \eta_X^{-1} \circ \Omega u} & \Sigma \Omega X & \xrightarrow{-\Sigma \Omega f} & \Sigma \Omega Y & \xrightarrow{-\Sigma \Omega g} & \Omega Z \\ \parallel & & \downarrow \epsilon_X & & \downarrow \epsilon_Y & & \parallel \\ \Omega Z & \xrightarrow{\eta_X^{-1} \circ \Omega u} & X & \xrightarrow{-f} & Y & \xrightarrow{-\epsilon_Z^{-1} \circ g} & \Sigma \Omega Z \end{array}$$

Como las flechas verticales son isomorfismos, obtenemos que la fila de abajo es una sucesión de cofibra y su mapa de borde es $\eta_X^{-1} \circ \Omega u$, que es lo que queríamos probar \square

Concluiremos probando que se verifica el axioma T4, para el cual alcanza con pedir que la categoría modelo \mathcal{C} sea punteada.

Lema 4.3.5 (Axioma T4). [8, Lema 4.2.6.] *Sea \mathcal{C} una categoría modelo punteada y supongamos que tenemos tres sucesiones de cofibra*

4.3. CATEGORÍA DE HOMOTOPÍA DE UNA CATEGORÍA MODELO ESTABLE 141

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f_1} & Y & \xrightarrow{f_2} & Z \\ X & \xrightarrow{g_1} & U & \xrightarrow{g_2} & V \\ Y & \xrightarrow{u_1} & U & \xrightarrow{u_2} & W \end{array}$$

tales que $g_1 = u_1 \circ f_1$. Entonces, existen morfismos $v_1 : Z \rightarrow V$, $v_2 : V \rightarrow W$ y $v_3 : W \rightarrow \Omega Z$ que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f_1} & Y & \xrightarrow{f_2} & Z & \xrightarrow{f_3} & \Sigma X \\ \parallel & & \downarrow u_1 & & \downarrow v_1 & & \parallel \\ X & \xrightarrow{g_1} & U & \xrightarrow{g_2} & V & \xrightarrow{g_3} & \Sigma X \\ & & \downarrow u_2 & & \downarrow v_2 & & \\ & & W & \xlongequal{\quad} & W & & \\ & & \downarrow u_3 & & \downarrow v_3 & & \\ & & \Sigma Y & \xrightarrow{\Sigma f_2} & \Sigma Z & & \end{array}$$

Además,

- $Z \xrightarrow{v_1} V \xrightarrow{v_2} W$ es una sucesión de cofibra con mapa de borde v_3
- la coacción de ΣZ en W está dada por la composición

$$W \xrightarrow{\odot} W \sqcup \Sigma Y \xrightarrow{Id \sqcup \Sigma f_2} W \sqcup \Sigma Z$$

donde el primer morfismo es la coacción de ΣY en W de la tercera sucesión de cofibra.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que X , Y y U son objetos fibrantes y cofibrantes en \mathcal{C} y que f_1 y u_1 (y por lo tanto g_1) son cofibraciones. Consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xleftarrow{f_1} & X & \longrightarrow & * \\ u_1 \downarrow & & \parallel & & \parallel \\ U & \xleftarrow{g_1} & X & \longrightarrow & * \\ \parallel & & \downarrow f_1 & & \parallel \\ U & \xleftarrow{u_1} & Y & \longrightarrow & * \end{array}$$

y tomamos el pushout de cada fila.

$$\begin{array}{ccc}
 X \longrightarrow * & X \longrightarrow * & Y \longrightarrow * \\
 f_1 \downarrow & g_1 \downarrow & u_1 \downarrow \\
 Y \xrightarrow{f_2} Z & U \xrightarrow{g_2} V & U \xrightarrow{u_2} W
 \end{array}$$

Como $g_2 \circ u_1 \circ f_1 = g_2 \circ g_1 = 0$, existe un morfismo v_1 que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X \longrightarrow * & & \\
 f_1 \downarrow & & \searrow \\
 Y \xrightarrow{f_2} Z & & V \\
 & \searrow^{v_1} & \\
 & & V
 \end{array}$$

$g_2 \circ u_1$

Análogamente, como $u_2 \circ g_1 = u_2 \circ u_1 \circ f_1 = 0$, existe un morfismo v_2 que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X \longrightarrow * & & \\
 g_1 \downarrow & & \searrow \\
 U \xrightarrow{g_2} V & & W \\
 & \searrow^{v_2} & \\
 & & W
 \end{array}$$

u_2

Luego, obtenemos morfismos entre los pushouts de las filas del primer diagrama $Z \xrightarrow{v_1} V \xrightarrow{v_2} W$

Además, como $u_2 \circ u_1 = 0$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 X \longrightarrow * & & \\
 f_1 \downarrow & & \searrow \\
 Y \xrightarrow{f_2} Z & & V \\
 & \searrow^{v_2 \circ v_1} & \\
 & & W \\
 & \searrow^{u_2 \circ u_1} & \\
 & & W
 \end{array}$$

Por el Patching Lemma (Lema A.7.7. del Apéndice de [8]) tenemos que v_1 es una cofibración con cofibra $v_2 : V \rightarrow W$.

Veamos, ahora, que la coacción asociada a la sucesión de cofibra

$$Z \xrightarrow{v_1} V \xrightarrow{v_2} W$$

está dada por

4.3. CATEGORÍA DE HOMOTOPÍA DE UNA CATEGORÍA MODELO ESTABLE 143

$$\bullet : W \xrightarrow{\odot} W \sqcup \Sigma Y \xrightarrow{Id \sqcup \Sigma f_2} W \sqcup \Sigma Z$$

Es decir, dado $A \in \mathcal{C}$, queremos ver que

$$[f] \bullet [h] = [f] \odot [h \circ f_2]$$

donde $f : W \rightarrow A$ y $h : Z \rightarrow A$ representa un elemento de $[\Sigma Z, A]$. Para calcular $[f] \bullet [h]$ consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & P(A) \\ \downarrow v_1 & \nearrow \alpha & \downarrow \sim e_0 \\ V & \xrightarrow{f \circ v_2} & A \end{array}$$

que admite un levantamiento $\alpha : V \rightarrow P(A)$. Luego, $\alpha \circ e_1$ se factoriza sobre la cofibra de v_1 mediante un morfismo φ :

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{v_1} & V & \xrightarrow{v_2} & W \\ & & \downarrow e_1 \circ \alpha & \swarrow \varphi & \\ & & A & & \end{array}$$

y obtenemos que $[\varphi] = [f] \bullet [h]$. Por otro lado, para calcular $[f] \odot [h \circ f_2]$ consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{h \circ f_2} & P(A) \\ \downarrow u_1 & \nearrow \beta & \downarrow \sim e_0 \\ U & \xrightarrow{f \circ u_2} & A \end{array}$$

que admite un levantamiento $\beta : U \rightarrow P(A)$. Luego, $\beta \circ e_1$ se factoriza sobre la cofibra de u_1

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{u_1} & U & \xrightarrow{u_2} & W \\ & & \downarrow e_1 \circ \beta & \swarrow \psi & \\ & & A & & \end{array}$$

Entonces $[\psi] = [f] \odot [h \circ f_2]$. Como

$$\alpha \circ g_2 \circ u_1 = \alpha \circ v_1 \circ f_2 = h \circ f_2$$

y

$$e_0 \circ \alpha \circ g_2 = f \circ v_2 \circ g_2 = f \circ u_2$$

podemos tomar $\beta = \alpha \circ g_2$ y, por lo tanto,

$$\psi \circ u_2 = e_1 \circ \beta = e_1 \circ \alpha \circ g_2 = \varphi \circ v_2 \circ g_2 = \varphi \circ u_2$$

Luego, por unicidad de factorización, obtenemos que $\psi = \varphi$ y concluimos que $[\psi] = [\varphi]$. \square

Bibliografía

- [1] P. Hirschhorn, Model Categories and Their Localizations *American Mathematical Society (2003)*
- [2] M. Hovey, Model Categories *American Mathematical Society (2007)*
- [3] J. Lurie, Higher Topos Theory *Annals of Mathematics Studies, 170 (2009)*
- [4] S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician *Graduate texts in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, New York (1971)*
- [5] A. Neeman, Triangulated Categories *Annals of Mathematics Studies, Volume 148 (2010)*
- [6] E. Riehl, Category Theory in Context. *Dover modern math originals (2017)*
- [7] E. Riehl, A leisurely introduction to simplicial sets. <http://www.math.jhu.edu/~eriehl/ssets.pdf>
- [8] C. Roitzheim y D. Barnes, Foundations of Stable Homotopy Theory *Cambridge University Press (2020)*