
Cohomología en Especies

Javier Cóppola Rodríguez

Orientadora: Mariana Pereira López

1 de diciembre de 2014

Trabajo de Tesis
Maestría en Matemática
Universidad de la República
Montevideo - Uruguay.

Agradecimientos

A Mariana Pereira, por ser una grande, por ser la Dra. Pereira y también Marianita, por orientarme en la matemática y a veces en más, por el aliento para que salieran las cosas y también cuando no salían, por siempre encontrar el momento, por las reuniones intensas pero distendidas, por bancarme cuando me concentraba en otras cosas, y por hacer siempre de este trabajo algo disfrutable.

A Marcelo Aguiar, por compartir con nosotros esos temas tan lindos para pensar, por estar cerca aún en la distancia, y por hacernos entender a veces hasta nuestras propias ideas.

A Walter Ferrer, por esa claridad al contar lo que sabe, por preguntar en qué ando, y por mostrar que todo está relacionado con lo que estamos estudiando.

A Mariana Haim, por la buena onda de siempre, por prenderse a pensar juntos y por contribuir con el seminario de monografías y tesis a generar un espacio donde todos pudimos apreciar el trabajo de los otros.

A Fede, Sara, Maru y Pau, por estar en ese seminario para escuchar y ser escuchados, y por el “todo bien” cuando no pude ir por estar terminando este trabajo.

A Andrés Abella, por haberme sacado prolijo en la licenciatura, y por estimularme a trabajar con otra gente pero siguiendo en la vuelta.

A Miguel Paternain, por ser un gran orientador al inicio de esta maestría, por ayudarme a darme cuenta qué quería hacer, y por tanto viento en la camiseta.

A todos los asistentes al Seminario de Álgebra del IMERL, que por suerte son tantos que no podría mencionarlos a todos sin olvidarme de nadie. En especial a Marcelo Lanzilotta por generar un espacio que hacía falta, y a Ana González por hacerlo cada vez más abierto sin perder la esencia.

A Lydia Tappa, por saber siempre cómo funcionan las cosas, y por explicar los trámites más aburridos de la forma más simpática.

A Diego Bravo, por bancarse un “ensayo de defensa” que duró el doble de lo previsto, siempre aportando para que la charla se entendiera lo más posible.

A Gustavo Mata, Bojana Femič, Dalia Artenstein y Eugenia Ellis, por el tiempo compartido pensando problemas de lo que andamos estudiando.

A Gustavo Rama, Bruno Yemini, Matilde Martínez, Pilar Lorenzo y Mauro Martínez, entre otros, por el tiempo compartido pensando cosas que nada que ver.

A los estudiantes de Cálculo 1 y Matemática Discreta 1, por estar ahí más allá de la clase y de la matemática y por hacerme sentir viejo y joven a la vez.

A mis compañeros de Murga Foggata y Tuca, Murga Borracha No Vale, Tríquiti Teatro y Metanoia Teatro Espontáneo, por el oxígeno y por aguantar en algún ensayo mi ausencia, física o solamente mental. En especial a Nico Lacoste y Feli Lamolle, por compartir tanto tiempo creativo con algún divague matemático entreverado.

A mis amigos Alejandra Flores, Federico Bolioli, Lucía Duarte, Claudia Muniz, Nicolás Sosa, Pablo Muñoz y Elisa Rocha, por ser tanto como soy y tanto como me gustaría, y por bancar tanto cuando soy lo que no me gustaría.

A toda la gente que considero parte de mi familia, que afortunadamente es mucha, por estar cerca entendiendo o no lo que anda por mi cabeza, por aceptar todos los días algo más de lo que soy yo, y por seguir siendo nosotros. En especial a mis padres, Gabriela y Jorge, porque sin ellos ni siquiera sería.

A todos los que en algún momento preguntaron de qué era la tesis, esperando una respuesta concreta, y a todos los que preguntaron cómo iba la tesis, esperando una respuesta concreta.

A todos los que no menciono directamente pero saben que no los olvidé, y a los que olvidé, lo saben y está todo bien igual.

Y a usted, por estar leyendo este trabajo y darle sentido a que lo haya escrito.

Resumen

El principal objetivo de este trabajo es el estudio de la cohomología de comonoides linealizados en especies desde el punto de vista de la cohomología de objetos cosimpliciales, y la relación de esta cohomología en grados bajos con el torcimiento de ciertas estructuras. Esto último viene inspirado por resultados conocidos en teoría de grupos sobre torcimiento de multiplicación y de asociadores.

En el primer capítulo presentamos nuestro objeto de estudio: las especies, en particular las especies comonoides linealizadas. Daremos las definiciones básicas y los principales ejemplos.

En el segundo capítulo mostramos una familia de ejemplos de cohomologías conocidas, desde un punto de vista en común: los objetos cosimpliciales.

En el tercer capítulo definimos la cohomología de una especie comonoide linealizada dentro del marco presentado en el capítulo anterior, y presentamos algunos ejemplos.

En el cuarto capítulo vinculamos la cohomología en grados bajos con el torcimiento de estructuras algebraicas. Presentamos resultados conocidos para grupos, un resultado conocido para grado 2 en especies, y un resultado original para grado 3 en especies.

En el quinto capítulo mostramos una definición del producto cup en la cohomología de anillos cosimpliciales, y unos primeros resultados obtenidos en este contexto.

Índice general

1. Introducción: Especies, especies linealizadas y comonoides.	2
1.1. Especies.	2
1.2. Estructuras monoidales y comonoides en Sp_k	5
1.3. Functor de linealización y especies linealizadas.	10
2. Objetos cosimpliciales, complejos de cocadenas y cohomología.	15
2.1. Objetos cosimpliciales.	15
2.2. Comohología de objetos cosimpliciales.	18
2.3. Ejemplos.	19
2.3.1. Topología y conjuntos simpliciales.	19
2.3.2. Categorías monoidales, bimódulos y bicomódulos.	21
3. Cohomología en especies.	26
3.1. Cohomología de comonoides linealizados.	26
3.2. Ejemplos.	28
4. Cohomología y torcimientos.	33
4.1. Torcimiento de (co)multiplicación y H^2	33
4.1.1. En cohomología de grupos	33
4.1.2. En cohomología de especies	35
4.2. Torcimiento de asociadores y H^3	39
4.2.1. En cohomología de grupos	41
4.2.2. En cohomología de especies	44
5. Producto cup.	50
5.1. Definición del producto cup.	50
5.2. Ejemplos.	53

Capítulo 1

Introducción: Especies, especies linealizadas y comonoides.

Durante todo el trabajo asumiremos que el lector está familiarizado con las nociones básicas de teoría de álgebras y coálgebras, así como de teoría de categorías. Dos referencias muy útiles sobre estos temas son [Mon93] y [ML98], respectivamente.

Usaremos la letra \mathbb{k} para denotar a un cuerpo cualquiera, los espacios vectoriales serán sobre \mathbb{k} , y llamaremos $\text{Vect}_{\mathbb{k}}$ a la categoría que los tiene como objetos. Sin embargo, todos estos resultados tienen validez si \mathbb{k} es solamente un anillo conmutativo, reemplazando $\text{Vect}_{\mathbb{k}}$ por la categoría $\mathbb{k}\text{-Mod}$ de los \mathbb{k} -módulos (de hecho, en capítulos posteriores esto será necesario).

Usaremos el símbolo \otimes para el producto tensorial de espacios vectoriales sobre \mathbb{k} . Escribiremos $\simeq: \mathbb{k} \otimes V \rightarrow V$ (respectivamente $\simeq: V \otimes \mathbb{k} \rightarrow V$) al isomorfismo que lleva $\lambda \otimes v$ (respectivamente $v \otimes \lambda$) en λv .

En este capítulo definiremos nuestro objeto de estudio. Las definiciones y resultados de esta sección tienen un enunciado simple y formal en lenguaje categórico. Usaremos este lenguaje, pero al mismo tiempo explicitaremos a qué nos referimos en cada caso, con lo cual lograremos una visión más concreta de estos objetos. Este capítulo está enteramente basado en las secciones 8.1, 8.2 y 8.7 de [AM10], donde se puede encontrar una mayor profundidad en la teoría y gran variedad de ejemplos.

1.1. Especies.

La noción de especie tiene como idea “graduar” objetos de una categoría \mathcal{C} , donde la graduación viene dada por conjuntos finitos. Muchas de ellas surgen de asignar a cada conjunto finito un espacio asociado a las distintas formas de darle a este conjunto cierta estructura combinatoria. La categoría de especies con sus operaciones básicas fue introducida por Joyal en [Joy81].

Definición 1.1.1. Definiremos especie para una categoría \mathcal{C} cualquiera, pero la utilizaremos principalmente para $\mathcal{C} = \text{Set}$ y $\mathcal{C} = \text{Vect}_{\mathbb{k}}$.

- Llamaremos Set^\times a la categoría cuyos objetos son los conjuntos finitos y cuyos morfismos son las biyecciones.
- Dada \mathcal{C} una categoría, una **especie** en \mathcal{C} es un functor $\mathbf{p} : \text{Set}^\times \rightarrow \mathcal{C}$. En el caso en que $\mathcal{C} = \text{Set}$ hablaremos de **especie conjuntista**. En el caso en que $\mathcal{C} = \text{Vect}_{\mathbb{k}}$, hablaremos de **especie vectorial**, o simplemente **especie**.
- Un **morfismo de especies** es una transformación natural $f : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$, donde \mathbf{p} y \mathbf{q} son especies.
- La **categoría de especies** es la categoría que tiene como objetos a las especies y como morfismos a los morfismos de especies. Llamaremos Sp a la categoría de las especies conjuntistas, y $\text{Sp}_{\mathbb{k}}$ a la categoría de las especies vectoriales.

Observemos que queda definida la noción de **isomorfismo de especies**. Un isomorfismo en la categoría de especies, es una transformación natural invertible, o sea un isomorfismo natural.

A continuación abordaremos la definición de especie desde un punto de vista más concreto.

Observación 1.1.2. Definir una especie vectorial (resp. conjuntista) es equivalente a definir para cada conjunto finito I un espacio vectorial (resp. conjunto) $\mathbf{p}[I]$, y para cada biyección $\sigma : I \rightarrow J$ una transformación lineal (resp. función) $\mathbf{p}[\sigma] : \mathbf{p}[I] \rightarrow \mathbf{p}[J]$, tales que

- $\mathbf{p}[\text{id}_I] = \text{id}_{\mathbf{p}[I]}$ para todo conjunto finito I ,
- $\mathbf{p}[\sigma \circ \tau] = \mathbf{p}[\sigma] \circ \mathbf{p}[\tau]$, para todos los conjuntos finitos I, J, K y biyecciones $\sigma : J \rightarrow K, \tau : I \rightarrow J$.

Observar que si $\sigma : I \rightarrow J$ es una biyección, de la functorialidad se deduce que $\mathbf{p}[\sigma] : \mathbf{p}[I] \rightarrow \mathbf{p}[J]$ es un isomorfismo de espacios vectoriales (resp. una biyección). De esta forma, la clase de isomorfismo de $\mathbf{p}[I]$ únicamente depende del cardinal de I , por eso podemos decir que el concepto de especie está emparentado con el de espacio vectorial (resp. conjunto) graduado sobre \mathbb{N} .

De la misma forma, si \mathbf{p} y \mathbf{q} son especies, dar un morfismo de especies $f : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ es equivalente a dar una transformación lineal (resp. función) $f_I : \mathbf{p}[I] \rightarrow \mathbf{q}[I]$ para cada conjunto finito I , de tal forma que para cada biyección $\sigma : I \rightarrow J$, el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}[I] & \xrightarrow{f_I} & \mathbf{q}[I] \\ \mathbf{p}[\sigma] \downarrow & & \downarrow \mathbf{q}[\sigma] \\ \mathbf{p}[J] & \xrightarrow{f_J} & \mathbf{q}[J]. \end{array}$$

Para cada I , a f_I la llamaremos **componente I** de f . Un morfismo de especies f es un isomorfismo de especies si cada f_I es un isomorfismo lineal (resp. una biyección).

Ejemplo 1.1.3. La **especie exponencial \mathbf{E}** está definida de la siguiente manera:

- $\mathbf{E}[I] = \mathbb{k}$, para cada conjunto finito I ;
- $\mathbf{E}[\sigma] = \text{id}_{\mathbb{k}}$, para cada biyección $\sigma : I \rightarrow J$.

Es inmediato verificar que se respeta la composición según la Observación 1.1.2, ya que los morfismos a componer son siempre identidades.

Notación 1.1.4. Para ser más claros cuando trabajemos con la especie exponencial, para cada conjunto finito I llamaremos $*_I$ al elemento $1 \in \mathbb{k}$ visto como elemento de $\mathbf{E}[I]$. Esto es, $\mathbf{E}[I] = \mathbb{k}\{*_I\}$.

Ejemplo 1.1.5. Sea V un espacio vectorial. Una generalización del ejemplo anterior es la especie \mathbf{E}_V definida por:

- $\mathbf{E}[I] = V$, para cada conjunto finito I ;
- $\mathbf{E}[\sigma] = \text{id}_V$, para cada biyección $\sigma : I \rightarrow J$.

Además, si $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal, podemos obtener un morfismo de especies $\mathbf{E}_T : \mathbf{E}_V \rightarrow \mathbf{E}_W$ definiendo $(\mathbf{E}_T)_I = T$. Esta construcción nos da un functor de la categoría $\text{Vect}_{\mathbb{k}}$ a la categoría $\text{Sp}_{\mathbb{k}}$.

Ejemplo 1.1.6. La especie vectorial $\mathbb{1}$ está definida de la siguiente manera:

- $\mathbb{1}[\emptyset] = \mathbb{k}$ y $\mathbb{1}[I] = 0$ para cada conjunto finito $I \neq \emptyset$;
- $\mathbb{1}[\text{id}_{\emptyset}] = \text{id}_{\mathbb{k}}$ y $\mathbb{1}[\sigma] = 0$ para cada biyección $\sigma : I \rightarrow J$, si $I \neq \emptyset$.

Es inmediato verificar que se respeta la composición según la Observación 1.1.2, ya que el morfismo nulo es la identidad del espacio nulo, y con esto los morfismos a componer son siempre identidades.

Ejemplo 1.1.7. Sea V un espacio vectorial. Una generalización del ejemplo anterior es la especie $\mathbb{1}_V$ definida por:

- $\mathbb{1}_V[\emptyset] = V$ y $\mathbb{1}_V[I] = 0$ para cada conjunto finito $I \neq \emptyset$;
- $\mathbb{1}_V[\text{id}_{\emptyset}] = \text{id}_V$ y $\mathbb{1}_V[\sigma] = 0$ para cada biyección $\sigma : I \rightarrow J$, si $I \neq \emptyset$.

Además, si $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal, podemos obtener un morfismo de especies $\mathbb{1}_T : \mathbb{1}_V \rightarrow \mathbb{1}_W$ definiendo $(\mathbb{1}_T)_{\emptyset} = T$, y $(\mathbb{1}_T)_I = 0$ para todo $I \neq \emptyset$. Esta construcción nos da un functor de la categoría $\text{Vect}_{\mathbb{k}}$ a la categoría $\text{Sp}_{\mathbb{k}}$. Este functor es la construcción análoga a considerar un espacio vectorial V como espacio vectorial graduado sobre \mathbb{N} , concentrando la graduación en la componente de 0.

Ejemplo 1.1.8. La especie \mathbf{L} , de los **órdenes lineales**, está definida de la siguiente manera:

- Para cada conjunto finito I , $\mathbf{L}[I]$ se define como el espacio vectorial que tiene como base el conjunto de todos los órdenes lineales en I ;

- Para cada biyección $\sigma : I \rightarrow J$, $\mathbf{L}[\sigma] : \mathbf{L}[I] \rightarrow \mathbf{L}[J]$ se define a nivel de las bases como la función que lleva un orden lineal en I al único orden lineal en J para el cual σ es un isomorfismo de órdenes lineales.

Por ejemplo, si $I = \{x, y, z\}$, entonces $\mathbf{L}[I]$ es el espacio vectorial con base

$$\{xyz, yzx, zxy, zy x, yxz, xzy\},$$

donde utilizamos la notación xyz para el orden en I que verifica $x < y < z$. Si $J = \{a, b, c\}$ y $\sigma : I \rightarrow J$ es tal que $\sigma(x) = a$, $\sigma(y) = b$ y $\sigma(z) = c$, entonces $\mathbf{L}[\sigma] : \mathbf{L}[I] \rightarrow \mathbf{L}[J]$ queda definida a nivel de las bases como $\mathbf{L}[\sigma](xyz) = abc$, $\mathbf{L}[\sigma](yzx) = bca$, etc.

1.2. Estructuras monoidales y comonoides en $\text{Sp}_{\mathbb{k}}$.

En la categoría de especies vectoriales aparecen naturalmente dos estructuras monoidales. Daremos su definición para trabajar posteriormente con la noción de comonoide.

Definición 1.2.1. Si \mathbf{p} y \mathbf{q} son especies vectoriales, se define el **producto de Hadamard** $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ mediante:

- $(\mathbf{p} \times \mathbf{q})[I] = \mathbf{p}[I] \otimes \mathbf{q}[I]$, para cada conjunto finito I ;
- $(\mathbf{p} \times \mathbf{q})[\sigma] = \mathbf{p}[\sigma] \otimes \mathbf{q}[\sigma]$, para cada biyección $\sigma : I \rightarrow J$.

Observar que este producto es asociativo, en el sentido que existe un isomorfismo de especies $(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \times \mathbf{r} \simeq \mathbf{p} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{r})$ dado por la asociatividad del producto tensorial. Es inmediato ver que la especie \mathbf{E} es un neutro para este producto y que $(\text{Sp}_{\mathbb{k}}, \times, \mathbf{E})$ resulta una categoría monoidal.

Definición 1.2.2. Si \mathbf{p} y \mathbf{q} son especies, se define el **producto de Cauchy** $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ mediante:

- $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})[I] = \bigoplus_{S \subseteq I} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{q}[I \setminus S]$, para cada conjunto finito I ;
- $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})[\sigma] = \bigoplus_{S \subseteq I} \mathbf{p}[\sigma_S] \otimes \mathbf{q}[\sigma_{I \setminus S}]$, para cada biyección $\sigma : I \rightarrow J$, donde $\sigma_S : S \rightarrow \sigma(S)$ es la biyección que coincide con σ en S .

Notación 1.2.3. Denotaremos $S \sqcup T = I$ a la **descomposición** (unión ordenada disjunta) de S y $T = I \setminus S$. Con esta notación tenemos

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})[I] = \bigoplus_{S \sqcup T = I} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{q}[T], \text{ y } (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})[\sigma] = \bigoplus_{S \sqcup T = I} \mathbf{p}[\sigma_S] \otimes \mathbf{q}[\sigma_T].$$

Observar que este producto es asociativo, debido a la asociatividad de la unión y del producto tensorial. Es fácil verificar que la especie $\mathbb{1}$ es un neutro para este producto resultando $(\text{Sp}_{\mathbb{k}}, \cdot, \mathbb{1})$ una categoría monoidal. En particular, el producto de Cauchy de $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in \text{Sp}_{\mathbb{k}}$, está dado por la fórmula

$$\mathbf{p}_1 \cdot \dots \cdot \mathbf{p}_n[I] = \bigoplus_{S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n = I} \mathbf{p}_1[S_1] \otimes \dots \otimes \mathbf{p}_n[S_n].$$

Notación 1.2.4. Sea $f : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}_1 \cdot \dots \cdot \mathbf{q}_n$ un morfismo de especies. Entonces para cada I tenemos

$$f_I : \mathbf{p}[I] \rightarrow \mathbf{q}_1 \cdot \dots \cdot \mathbf{q}_n[I] = \bigoplus_{S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n = I} \mathbf{q}_1[S_1] \otimes \dots \otimes \mathbf{q}_n[S_n].$$

Para cada descomposición $S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n = I$ llamaremos **componente** S_1, \dots, S_n de f al morfismo f_{S_1, \dots, S_n} que resulta de poscomponer f_I con la proyección sobre el sumando directo $\mathbf{q}_1[S_1] \otimes \dots \otimes \mathbf{q}_n[S_n]$. De esta forma obtenemos que

$$f_I = \sum_{S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n = I} f_{S_1, \dots, S_n}.$$

Ahora estudiaremos los comonoides en estas categorías monoidales. Para empezar, un comonoide en la categoría $(\text{Sp}_{\mathbb{k}}, \times, \mathbf{E})$ es simplemente una especie en la categoría de coálgebras, dado que el producto de Hadamard es simplemente el producto tensorial de $\text{Vect}_{\mathbb{k}}$ “coordenada a coordenada”. Por lo tanto, estudiaremos con más profundidad las especies que son comonoides con el producto de Cauchy.

Definición 1.2.5. Una **especie comonoide**, o comonoide en especies, es un comonoide en la categoría monoidal $(\text{Sp}_{\mathbb{k}}, \cdot, \mathbb{1})$. En otras palabras, \mathbf{p} es un comonoide si existen transformaciones naturales

$$\Delta : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}, \quad \varepsilon : \mathbf{p} \rightarrow \mathbb{1},$$

que hacen conmutar los siguientes diagramas de coasociatividad y counidad:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p} & \xrightarrow{\Delta} & \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \cdot \text{id}_{\mathbf{p}} \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbf{p}} \cdot \Delta} & \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} \cdot \mathbf{p} & \xleftarrow{\varepsilon \cdot \text{id}_{\mathbf{p}}} & \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \\ & \swarrow \simeq & \uparrow \Delta \\ & & \mathbf{p} \\ & \searrow \simeq & \downarrow \Delta \\ \mathbf{p} \cdot \mathbb{1} & \xleftarrow{\text{id}_{\mathbf{p}} \cdot \varepsilon} & \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \end{array}$$

Observación 1.2.6. Utilizando la forma concreta de ver a las especies de la Observación 1.1.2, podemos explicitar también las condiciones de coasociatividad y counidad.

- Tenemos para cada conjunto finito I una transformación lineal $\Delta_I : \mathbf{p}[I] \rightarrow (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})[I]$ tal que para toda biyección $\sigma : I \rightarrow J$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}[I] & \xrightarrow{\Delta_I} & (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})[I] \\ \mathbf{p}[\sigma] \downarrow & & \downarrow (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})[\sigma] \\ \mathbf{p}[J] & \xrightarrow{\Delta_J} & (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})[J]. \end{array}$$

Al ser $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})[I] = \bigoplus_{S \sqcup T = I} \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T]$, usando la Notación 1.2.4 Δ_I se puede escribir como $\Delta_I = \sum_{S \sqcup T = I} \Delta_{S,T}$ con $\Delta_{S,T} : \mathbf{p}[I] \rightarrow \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T]$ tales que para cada biyección entre conjuntos finitos $\sigma : I \rightarrow J$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}[I] & \xrightarrow{\Delta_{S,T}} & \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T] \\ \mathbf{p}[\sigma] \downarrow & & \downarrow \mathbf{p}[\sigma_S] \otimes \mathbf{p}[\sigma_T] \\ \mathbf{p}[J] & \xrightarrow{\Delta_{\sigma(S), \sigma(T)}} & \mathbf{p}[\sigma(S)] \otimes \mathbf{p}[\sigma(T)]. \end{array}$$

- Un morfismo de especies $\varepsilon : 1 \rightarrow p$ equivale a una transformación lineal $\varepsilon_\emptyset : \mathbf{p}[\emptyset] \rightarrow \mathbb{k}$.
- La conmutatividad de los diagramas de coasociatividad y counidad, es equivalente a la conmutatividad de los siguientes diagramas para cada conjunto finito I y para toda descomposición $I = R \sqcup S \sqcup T$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}[I] & \xrightarrow{\Delta_{R \sqcup S, T}} & \mathbf{p}[R \sqcup S] \otimes \mathbf{p}[T] \\ \Delta_{R, S \sqcup T} \downarrow & & \downarrow \Delta_{R, S} \otimes \text{id}_{\mathbf{p}[T]} \\ \mathbf{p}[R] \otimes \mathbf{p}[S \sqcup T] & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbf{p}[R]} \otimes \Delta_{S, T}} & \mathbf{p}[R] \otimes \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{k} \otimes \mathbf{p}[I] & \xleftarrow{\varepsilon_\emptyset \otimes \text{id}_{\mathbf{p}[I]}} & \mathbf{p}[\emptyset] \otimes \mathbf{p}[I] \\ & \swarrow \simeq & \uparrow \Delta_{\emptyset, I} \\ & & \mathbf{p}[I] \\ & \swarrow \simeq & \downarrow \Delta_{I, \emptyset} \\ \mathbf{p}[I] \otimes \mathbb{k} & \xleftarrow{\text{id}_{\mathbf{p}[I]} \otimes \varepsilon_\emptyset} & \mathbf{p}[I] \otimes \mathbf{p}[\emptyset]. \end{array}$$

Notación 1.2.7. La coasociatividad de Δ dice que para cada descomposición $I = R \sqcup S \sqcup T$, las composiciones $(\text{id}_{\mathbf{p}[R]} \otimes \Delta_{S,T}) \Delta_{R,S \sqcup T}$ y $(\Delta_{R,S} \otimes \text{id}_{\mathbf{p}[T]}) \circ \Delta_{R \sqcup S, T}$ coinciden. A este mapa lo llamamos $\Delta_{R,S,T} : \mathbf{p}[I] \rightarrow \mathbf{p}[R] \otimes \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T]$. De forma análoga, para cada descomposición $I = S_1 \sqcup S_2 \sqcup \dots \sqcup S_k$ se define $\Delta_{S_1, S_2, \dots, S_k} : \mathbf{p}[I] \rightarrow \mathbf{p}[S_1] \otimes \mathbf{p}[S_2] \otimes \dots \otimes \mathbf{p}[S_k]$.

Observación 1.2.8. Si (p, Δ, ε) es una especie comonoide, en particular tenemos que los mapas $\Delta_{\emptyset, \emptyset} : \mathbf{p}[\emptyset] \rightarrow \mathbf{p}[\emptyset] \otimes \mathbf{p}[\emptyset]$ y $\varepsilon_{\emptyset} : \mathbf{p}[\emptyset] \rightarrow \mathbb{k}$ verifican que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{p}[I] & \xrightarrow{\Delta_{\emptyset, \emptyset}} & \mathbf{p}[\emptyset] \otimes \mathbf{p}[\emptyset] \\
 \Delta_{\emptyset, \emptyset} \downarrow & & \downarrow \Delta_{\emptyset, \emptyset} \otimes \text{id}_{\mathbf{p}[\emptyset]} \\
 \mathbf{p}[\emptyset] \otimes \mathbf{p}[\emptyset] & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbf{p}[\emptyset]} \otimes \Delta_{\emptyset, \emptyset}} & \mathbf{p}[\emptyset] \otimes \mathbf{p}[\emptyset] \otimes \mathbf{p}[\emptyset],
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{k} \otimes \mathbf{p}[\emptyset] & \xleftarrow{\varepsilon_{\emptyset} \otimes \text{id}_{\mathbf{p}[\emptyset]}} & \mathbf{p}[\emptyset] \otimes \mathbf{p}[\emptyset] \\
 \swarrow \cong & & \uparrow \Delta_{\emptyset, \emptyset} \\
 & & \mathbf{p}[\emptyset] \\
 \nwarrow \cong & & \downarrow \Delta_{\emptyset, \emptyset} \\
 \mathbf{p}[\emptyset] \otimes \mathbb{k} & \xleftarrow{\text{id}_{\mathbf{p}[\emptyset]} \otimes \varepsilon_{\emptyset}} & \mathbf{p}[\emptyset] \otimes \mathbf{p}[\emptyset].
 \end{array}$$

Por lo tanto $(\mathbf{p}[\emptyset], \Delta_{\emptyset, \emptyset}, \varepsilon_{\emptyset})$ es una coálgebra.

Ejemplo 1.2.9. La especie $\mathbb{1}$ del Ejemplo 1.1.6 es naturalmente un comonoide, dado que es el neutro para el producto de Cauchy. Explícitamente, la única componente no nula de la comultiplicación es

$$\Delta_{\emptyset} : \mathbb{1}[\emptyset] \rightarrow (\mathbb{1} \cdot \mathbb{1})[\emptyset] = \mathbb{1}[\emptyset] \otimes \mathbb{1}[\emptyset],$$

dado que la única descomposición del conjunto vacío es $\emptyset = \emptyset \sqcup \emptyset$. Entonces tenemos

$$\Delta_{\emptyset, \emptyset} : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k} \otimes \mathbb{k},$$

la cual está definida por

$$\Delta_{\emptyset, \emptyset}(1) = 1 \otimes 1.$$

La única componente no nula de la counidad es

$$\varepsilon_{\emptyset} = \text{id}_{\mathbb{k}}.$$

A menos de isomorfismos, la recién definida es la única estructura de comonoide que admite la especie $\mathbb{1}$, dado que por la observación anterior estos mapas deben darle a $\mathbb{1}[\emptyset] = \mathbb{k}$ una estructura de coálgebra, y existe una sola coálgebra de dimensión 1 a menos de isomorfismos.

Ejemplo 1.2.10. Toda coálgebra $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ puede verse como una especie comonoide concentrada en la componente del vacío. Consideremos la especie $\mathbb{1}_C$ tal como está definida en el Ejemplo 1.1.7. y definamos $\Delta_{\emptyset, \emptyset} = \Delta_C$, $\varepsilon_{\emptyset} = \varepsilon_C$. Esta construcción es análoga a considerar una coálgebra como coálgebra graduada sobre \mathbb{N} , concentrando toda la graduación en la componente de 0.

Ejemplo 1.2.11. Daremos una estructura de comonoide a la especie exponencial \mathbf{E} del Ejemplo 1.1.3. Siguiendo la notación definida en 1.1.4, para cada descomposición $S \sqcup T = I$ definimos $\Delta_{S,T} : \mathbf{E}[I] \rightarrow \mathbf{E}[S] \otimes \mathbf{E}[T]$ como $\Delta_{S,T}(*_I) = *_S \otimes *_T$ y $\varepsilon_\emptyset : \mathbf{E}(\emptyset) \rightarrow \mathbb{k}$ como $\varepsilon_\emptyset(*_\emptyset) = 1$. Es inmediato ver que $(\mathbf{E}, \Delta, \varepsilon)$ es un comonoide.

Ejemplo 1.2.12. Para dar estructura de comonoide a la especie \mathbf{L} definida en el Ejemplo 1.1.8, usaremos la siguiente notación: si l es un orden lineal en I , y $S \subseteq I$, llamamos $l|_S$ a la restricción del orden l al subconjunto S . Por ejemplo, si $I = \{x, y, z\}$, $S = \{x, z\}$ y $l = zyx \in \mathbf{L}[I]$, entonces $l|_S = zx$. Con esta notación, definimos

$$\Delta_{S,T}(l) = l|_S \otimes l|_T$$

para cada descomposición $S \sqcup T = I$, y

$$\varepsilon_\emptyset(\emptyset) = 1.$$

Por ejemplo, si $I = \{a, b, c, d, e, f\}$, $S = \{a, e\}$ y $T = \{b, c, d, f\}$, entonces $\Delta_{S,T}(abcdef) = ae \otimes bcdf$, $\Delta_{S,T}(debca f) = ea \otimes dbc f$, etc.

Se deduce de las propiedades de la restricción que $(\mathbf{L}, \Delta, \varepsilon)$ es un comonoide, y vale la siguiente igualdad para la comultiplicación:

$$\Delta_{S_1, S_2, \dots, S_k}(l) = l|_{S_1} \otimes l|_{S_2} \otimes \cdots \otimes l|_{S_k}.$$

Definición 1.2.13. Un comonoide (p, Δ, ε) es **coconmutativo** si para todo conjunto I y descomposición $I = S \sqcup T$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{p}[I] & \\ \Delta_{S,T} \swarrow & & \searrow \Delta_{T,S} \\ \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T] & \xrightarrow{\tau_{S,T}} & \mathbf{p}[T] \otimes \mathbf{p}[S], \end{array}$$

en donde $\tau_{S,T}(v \otimes w) = w \otimes v$.

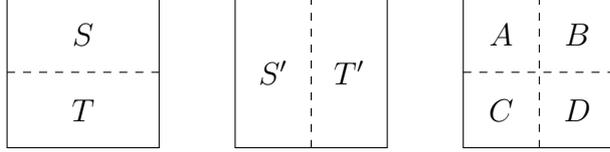
Ejemplo 1.2.14. Los ejemplos anteriores $\mathbb{1}$, \mathbf{E} y \mathbf{L} son comonoides coconmutativos. Podemos dar otra estructura de comonoide a \mathbf{L} , que da como resultado un comonoide no coconmutativo, definiendo

$$\overline{\Delta}_{S,T}(l) = \begin{cases} l|_S \otimes l|_T & \text{si } \forall s \in S, t \in T \ s < t \text{ según } l, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

$$\varepsilon_\emptyset(\emptyset) = 1.$$

En este caso si $I = \{a, b, c\}$, $S = \{a\}$ y $T = \{b, c\}$ tenemos que $\overline{\Delta}_{S,T}(abc) = a \otimes bc$ mientras que $\overline{\Delta}_{T,S} = 0$, lo que muestra que con este coproducto no se obtiene un comonoide coconmutativo. Llamaremos \mathbf{L}^* a este comonoide, dejando la notación \mathbf{L} para el comonoide del Ejemplo 1.2.12.

Ejemplo 1.2.15. Si $(\mathbf{p}, \Delta, \epsilon)$ es un comonoide, tenemos que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$ es un comonoide con la siguiente estructura: dado $I = S \sqcup T$, para definir $(\Delta \cdot \Delta)_{S,T} : (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})[I] \rightarrow (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})[S] \otimes (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})[T]$ utilizaremos la siguiente notación: para cada descomposición $S' \sqcup T' = I$, sean $A = S \cap S'$, $B = S \cap T'$, $C = T \cap S'$, $D = T \cap T'$; observar que $S = A \sqcup B$ y $T = C \sqcup D$, $S' = A \sqcup C$ y $T' = B \sqcup D$ y además, dados cualquier par de descomposiciones $S = U \sqcup V$ y $T = W \sqcup X$, existe una única descomposición $I = S' \sqcup T'$ tales que $U = A$, $B = V$, $W = C$, $X = D$.



Con esta notación, definimos $(\Delta \cdot \Delta)_{S,T}$ mediante la siguiente composición:

$$\begin{array}{ccc}
 \bigoplus_{S' \sqcup T' = I} \mathbf{p}[S'] \otimes \mathbf{p}[T'] & \xrightarrow{\Delta_{A,C} \otimes \Delta_{B,D}} & \bigoplus_{\substack{A \sqcup C = S' \\ B \sqcup D = T'}} \mathbf{p}[A] \otimes \mathbf{p}[C] \otimes \mathbf{p}[B] \otimes \mathbf{p}[D] \\
 \downarrow (\Delta \cdot \Delta)_{S,T} & & \downarrow \bigoplus \text{id}_{\mathbf{p}[A]} \otimes \tau_{C,D} \otimes \text{id}_{\mathbf{p}[D]} \\
 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})[S] \otimes (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})[T] & \xlongequal{\quad} & \bigoplus_{\substack{A \sqcup B = S \\ C \sqcup D = T}} \mathbf{p}[A] \otimes \mathbf{p}[B] \otimes \mathbf{p}[C] \otimes \mathbf{p}[D].
 \end{array}$$

La counidad es $(\epsilon \cdot \epsilon)_{\emptyset} : (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})[\emptyset] \rightarrow \mathbb{k}$ está dada por $\mathbf{p}[\emptyset] \otimes \mathbf{p}[\emptyset] \xrightarrow{\epsilon_{\emptyset}^{\otimes 2}} \mathbb{k} \otimes \mathbb{k} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{k}$.

Observación 1.2.16. Si $(\mathbf{p}, \Delta^{\mathbf{p}}, \epsilon^{\mathbf{p}})$ y $(\mathbf{q}, \Delta^{\mathbf{q}}, \epsilon^{\mathbf{q}})$ son especies comonoides, un morfismo de especies $f : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ es un **morfismo de comonoides** si para todo conjunto finito I y toda descomposición $I = S \sqcup T$ los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{p}[I] & \xrightarrow{\Delta_{S,T}^{\mathbf{p}}} & \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T] \\
 f_I \downarrow & & \downarrow f_S \otimes f_T \\
 \mathbf{q}[I] & \xrightarrow{\Delta_{S,T}^{\mathbf{q}}} & \mathbf{q}[S] \otimes \mathbf{q}[T]
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{p}[\emptyset] & \xrightarrow{f_{\emptyset}} & \mathbf{q}[\emptyset] \\
 \searrow \epsilon_{\emptyset}^{\mathbf{p}} & & \downarrow \epsilon_{\emptyset}^{\mathbf{q}} \\
 & & \mathbb{k}.
 \end{array}$$

1.3. Functor de linealización y especies linealizadas.

En los ejemplos anteriores, varias veces hemos definido especies vectoriales y morfismos entre ellas usando bases definidas en cada componente. Esto es, definimos especies vectoriales “linealizando” construcciones que podríamos haber definido previamente como especies conjuntistas. Esto es lo que formalizaremos a continuación.

Definición 1.3.1. Para cada conjunto A , sea $\mathbb{k}A$ el espacio vectorial con base A . Para cada función $f : A \rightarrow B$ sea $\mathbb{k}f : \mathbb{k}A \rightarrow \mathbb{k}B$ la extensión de f por linealidad. Esto define un functor $\mathbb{k}(-) : \text{Set} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{k}}$.

Definiremos el **functor de linealización** de la categoría de especies conjuntistas a la categoría de especies vectoriales, como la poscomposición con el functor $\mathbb{k}(-)$ definido arriba. Denominaremos este functor, abusando de notación, como $\mathbb{k}(-) : \text{Sp} \rightarrow \text{Sp}_{\mathbb{k}}$.

Concretamente, si P es una especie conjuntista, la especie $\mathbb{k}P$ queda definida como $(\mathbb{k}P)[I] = \mathbb{k}(P[I])$, $(\mathbb{k}P)[\sigma] = \mathbb{k}(P[\sigma])$.

Definición 1.3.2. Diremos que una especie vectorial \mathbf{p} es una **especie linealizada**, si existe una especie conjuntista P tal que $\mathbf{p} = \mathbb{k}P$.

Observación 1.3.3. Si \mathbf{p} es una especie linealizada, quiere decir que podemos elegir para cada I una base de $\mathbf{p}[I]$, que llamamos $P[I]$, de forma que para toda biyección $\sigma : I \rightarrow J$ se cumple que $\mathbf{p}[\sigma]$ lleva $P[I]$ en $P[J]$.

Ejemplo 1.3.4. Las especies $\mathbb{1}$, \mathbf{E} y \mathbf{L} definidas anteriormente son ejemplos de especies linealizadas.

- $\mathbb{1} = \mathbb{k}\mathbb{1}$, donde $\mathbb{1}[\emptyset] = \{1\}$ y $\mathbb{1}[I] = \emptyset$ para cada conjunto finito $I \neq \emptyset$;
- $\mathbf{E} = \mathbb{k}E$, donde $E[I] = \{1\}$ para cada conjunto finito I . También podemos usar la Notación 1.1.4 y escribir $E[I] = \{*_I\}$.
- $\mathbf{L} = \mathbb{k}L$, donde para cada conjunto finito I , $L[I]$ es el conjunto de los órdenes lineales en I .

Mostraremos a continuación un ejemplo de una especie que no admite estructura de especie linealizada.

Ejemplo 1.3.5. Dado un espacio vectorial V y un número natural n , denotaremos por $\Lambda^n(V)$ a la n -ésima potencia exterior de V . Recordemos que esta construcción es functorial: dados V y W espacios vectoriales y $f : V \rightarrow W$ lineal, podemos construir $\Lambda^n(f) : \Lambda^n(V) \rightarrow \Lambda^n(W)$ lineal, de forma que se respetan las identidades y la composición.

La **especie exponencial signada** \mathbf{E}^- está definida de la siguiente manera:

- $\mathbf{E}^-[I] = \Lambda^n(\mathbb{k}I)$, para cada conjunto finito I , donde $n = |I|$;
- $\mathbf{E}^-[\sigma] = \Lambda^n(\mathbb{k}\sigma)$, para cada biyección $\sigma : I \rightarrow J$, donde $n = |I| = |J|$.

La functorialidad de \mathbf{E}^- se deduce de la functorialidad de Λ^n fijado un $n \in \mathbb{N}$ (observemos que dos biyecciones que se pueden componer corresponden al mismo valor de n).

Explícitamente, si $I = \{i_1, \dots, i_n\}$, $\mathbf{E}^-[I]$ es un espacio vectorial de dimensión 1 generado por el elemento $i_1 \wedge \dots \wedge i_n$, y si $I = \{i'_1, \dots, i'_n\}$ es otra enumeración de los elementos de I se verifica que $i_1 \wedge \dots \wedge i_n = \text{signo}(\pi) i'_1 \wedge \dots \wedge i'_n$, donde π es la

biyección de I en sí mismo que manda i_k en i'_k .

Si $\sigma : I \rightarrow J$ es una biyección, vale que $\mathbf{E}^-[\sigma](i_1 \wedge \cdots \wedge i_n) = \sigma(i_1) \wedge \cdots \wedge \sigma(i_n)$.

Supongamos que \mathbf{E}^- es linealizada, es decir que existe una especie conjuntista P tal que $\mathbf{E}^- = \mathbb{k}P$. Para todo conjunto finito I vale que $\mathbf{E}^-[I]$ es de dimensión 1, entonces $P[I]$ tiene un solo elemento, y por lo tanto la única biyección de $P[I]$ en sí mismo es la identidad. Por lo tanto, para toda permutación $\pi : I \rightarrow I$ vale que $\mathbf{E}^-[\pi] = \mathbb{k}P[\pi] = \mathbb{k}\text{id}_{P[I]} = \text{id}_{\mathbf{E}^-[I]}$.

Por otra parte, si $I = \{a, b\}$ y π es la permutación de I que intercambia a y b , vale que $\mathbf{E}^-[\pi](a \wedge b) = \pi(a) \wedge \pi(b) = b \wedge a = -a \wedge b$, con lo cual llegamos a un absurdo.

Observación 1.3.6. En la categoría Sp también se pueden definir estructuras monoidales análogas a los productos de Hadamard y Cauchy, cambiando la suma directa y el producto tensorial por la unión disjunta y el producto cartesiano respectivamente, de forma que el functor de linealización es un functor monoidal fuerte para ambas estructuras monoidales. Esto viene del hecho de que dados conjuntos A y B podemos ver a su unión disjunta (formal) $A \sqcup B$ como base de $\mathbb{k}A \oplus \mathbb{k}B$, y a su producto cartesiano $A \times B$ como base de $\mathbb{k}A \otimes \mathbb{k}B$.

En el caso de Hadamard los únicos comonoides que se obtienen son los triviales, y en el caso de Cauchy los únicos comonoides son triviales en la componente del vacío y vacíos en las otras. Por esto daremos la definición de comonoide linealizado directamente en especies vectoriales, siguiendo la idea de la Observación 1.3.3.

Definición 1.3.7. Un **comonoide linealizado** es una especie linealizada $\mathbf{p} = \mathbb{k}P$, con una estructura de comonoide que verifica

- $\forall z \in P[S \sqcup T] \exists z|_S \in P[S], z/_S \in P[T] \Delta_{S,T}(z) = z|_S \otimes z/_S,$
- $\forall z \in P[\emptyset] \varepsilon_\emptyset(z) = 1.$

Observación 1.3.8. Con la notación definida anteriormente, evaluando en elementos de la base los diagramas de coasociatividad y counidad de la Observación 1.2.6, obtenemos que la coasociatividad de Δ es equivalente a que se verifiquen las siguientes igualdades para todo $z \in P[I]$ y para toda descomposición $I = R \sqcup S \sqcup T$:

$$(z|_{R \sqcup S})|_R = z|_R, \quad (1.1)$$

$$(z|_{R \sqcup S})/_R = (z/_R)|_S, \quad (1.2)$$

$$z/_R \sqcup S = (z/_R)/_S; \quad (1.3)$$

y las condiciones de counidad son equivalentes a que para todo $z \in P[I]$ se verifiquen las siguientes igualdades:

$$z|_I = z, \quad (1.4)$$

$$z/_\emptyset = z. \quad (1.5)$$

Las especies $\mathbb{1}$, \mathbf{E} y \mathbf{L} de los ejemplos anteriores son comonoides linealizados. Por otra parte, la especie \mathbf{L}^* definida en el Ejemplo 1.2.14 es una especie linealizada y un comonoide, pero no es un comonoide linealizado. Esto es porque existen descomposiciones $I = S \sqcup T$ y órdenes l en I para los cuales $\overline{\Delta}_{S,T}(l) = 0$, el cual no es un

elemento de ninguna base de $\mathbf{L}^*[I]$.

Definición 1.3.9. Un **comonoide conjuntista** es una especie conjuntista P , junto con una estructura de comonoide linealizado en la especie $\mathbb{k}P$.

En particular, las especies conjuntistas 1 , E y L del Ejemplo 1.3.4 son comonoides conjuntistas.

Observación 1.3.10. Dar una estructura de comonoide conjuntista a una especie conjuntista P es equivalente a dar para cada descomposición $I = S \sqcup T$ una función $\delta_{S,T} : P[I] \rightarrow P[S] \times P[T]$, definida por la igualdad $\delta_{S,T}(z) = (z|_S, z/_S)$, tal que para toda biyección $\sigma : I \rightarrow J$, todo $z \in P[I]$ y toda descomposición $I = S \sqcup T$ valga que

$$(P[\sigma](z))|_S = P[\sigma_S](z|_S), \quad (1.6)$$

$$(P[\sigma](z))/_S = P[\sigma_T](z/_S); \quad (1.7)$$

y tal que además se verifiquen las ecuaciones (1.1) a (1.5).

Observemos que la caracterización recién dada de un comonoide conjuntista P es intrínseca del mismo, sin intervenir en ella la especie \mathbf{p} , ni siquiera el cuerpo de base \mathbb{k} .

El objetivo de este trabajo es definir y estudiar una cohomología asociada a los comonoides linealizados (o, equivalentemente, a los comonoides conjuntistas). En los capítulos siguientes presentaremos las herramientas necesarias para ello.

Capítulo 2

Objetos cosimpliciales, complejos de cocadenas y cohomología.

Con frecuencia, la definición de los grupos de cohomología asociados a determinado objeto matemático, pasa por asociarle a dicho objeto una estructura de *conjunto simplicial*. Este concepto fue introducido bajo el nombre de “complejo semisimplicial” por Eilenberg y Zilber en [EZ50]. En este trabajo, por ser más útil y natural para nuestro contexto, utilizaremos el concepto de *conjunto cosimplicial*, dual del anterior. Las definiciones y primeros ejemplos de este capítulo se pueden encontrar en el Capítulo 8 de [Wei95].

2.1. Objetos cosimpliciales.

Definición 2.1.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$. Llamaremos Δ a la categoría definida por:

$$\text{Obj}(\Delta) = \{[n] : n \in \mathbb{N}\},$$

$$\text{Hom}_{\Delta}([n], [m]) = \{f : [n] \rightarrow [m] : f \text{ preserva el orden}\}.$$

Definición 2.1.2. Dada una categoría \mathcal{C} , un **objeto cosimplicial** en \mathcal{C} es un functor covariante $X : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$.

Si \mathcal{C} es la categoría Set , al objeto cosimplicial se le llama **conjunto cosimplicial**. Si la categoría \mathcal{C} es una categoría de módulos, anillos, (co,bi)álgebras, espacios topológicos, etc, a un objeto cosimplicial en \mathcal{C} se le llama, respectivamente, módulo cosimplicial, anillo cosimplicial, (co,bi)álgebra cosimplicial, espacio topológico cosimplicial, etc.

A continuación veremos una forma más concreta de definir este tipo de objetos. Dado un objeto cosimplicial X , observaremos las imágenes por X de un conjunto de funciones que genera la categoría Δ en un sentido que explicitaremos más adelante.

Comencemos considerando, para cada $i, j \in \mathbb{N}$ las funciones $f^i, s^j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, definidas por:

$$f^i(k) = \begin{cases} k, & \text{si } k \leq i - 1 \\ k + 1, & \text{si } k \geq i \end{cases}$$

$$s^j(k) = \begin{cases} k, & \text{si } k \leq j \\ k - 1, & \text{si } k \geq j + 1. \end{cases}$$

Proposición 2.1.3. *Las funciones recién definidas verifican las siguientes igualdades:*

$$f^j f^i = f^i f^{j-1} \quad \text{si } i < j \quad (2.1)$$

$$s^j s^i = s^i s^{j+1} \quad \text{si } i \leq j \quad (2.2)$$

$$s^j f^i = \begin{cases} f^i s^{j-1} & \text{si } i < j \\ \text{id}_{\mathbb{N}} & \text{si } i = j, j + 1 \\ f^{i-1} s^j & \text{si } i > j + 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Demostración: Demostraremos las igualdades evaluando las funciones en un $k \in \mathbb{N}$ cualquiera.

Para la igualdad (2.1):

Si $k \leq i - 1$, entonces $f^j f^i(k) = f^j(k) = k$, y $f^i f^{j-1}(k) = f^i(k) = k$.

Si $i \leq k \leq j - 2$, entonces $f^j f^i(k) = f^j(k + 1) = k + 1$, y $f^i f^{j-1}(k) = f^i(k) = k + 1$.

Si $j - 1 \leq k$, entonces $f^j f^i(k) = f^j(k + 1) = k + 2$, y $f^i f^{j-1}(k) = f^i(k + 1) = k + 2$.

Para la igualdad (2.2):

Si $k \leq i$, entonces $s^j s^i(k) = s^j(k) = k$, y $s^i s^{j+1}(k) = s^i(k) = k$.

Si $i + 1 \leq k \leq j + 1$, entonces $s^j s^i(k) = s^j(k - 1) = k - 1$, y $s^i s^{j+1}(k) = s^i(k) = k - 1$.

Si $j + 2 \leq k$, entonces $s^j s^i(k) = s^j(k - 1) = k - 2$, y $s^i s^{j+1}(k) = s^i(k - 1) = k - 2$.

Para la igualdad (2.3):

■ Caso $i < j$:

Si $k \leq i - 1$, entonces $s^j f^i(k) = s^j(k) = k$, y $f^i s^{j-1}(k) = f^i(k) = k$.

Si $i \leq k \leq j - 1$, entonces $s^j f^i(k) = s^j(k + 1) = k + 1$, y $f^i s^{j-1}(k) = f^i(k) = k + 1$.

Si $j \leq k$, entonces $s^j f^i(k) = s^j(k + 1) = k$, y $f^i s^{j-1}(k) = f^i(k - 1) = k$.

■ Caso $i = j, j + 1$ (esto es, $j = i, i - 1$):

Si $k \leq i - 1$, entonces $s^j f^i(k) = s^j(k) = k$.

Si $i \leq k$, entonces $s^j f^i(k) = s^j(k + 1) = k$.

■ Caso $i > j + 1$:

Si $k \leq j$, entonces $s^j f^i(k) = s^j(k) = k$, y $f^{i-1} s^j(k) = f^{i-1}(k) = k$.

Si $j + 1 \leq k \leq i - 1$, entonces $s^j f^i(k) = s^j(k) = k - 1$, y $f^{i-1} s^j(k) = f^{i-1}(k - 1) = k$.

Si $i \leq k$, entonces $s^j f^i(k) = s^j(k + 1) = k$, y $f^{i-1} s^j(k) = f^{i-1}(k - 1) = k$.

□

Podemos interpretar f^i como “saltar el lugar i ”, y s^j como “pegar el lugar j con el $j + 1$ ”. Restringiendo dominio y codominio, obtenemos para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $i \leq n + 1$ una función inyectiva $f_n^i : [n] \rightarrow [n + 1]$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $j \leq n$ una función sobreyectiva $s_n^j : [n + 1] \rightarrow [n]$. Dichas funciones son morfismos en la categoría Δ .

Corolario 2.1.4. *Los morfismos recién definidos verifican las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned} f_{n+1}^j f_n^i &= f_{n+1}^i f_n^{j-1} & \text{si } i < j \\ s_{n-1}^j s_n^i &= s_{n-1}^i s_n^{j+1} & \text{si } i \leq j \\ s_n^j f_n^i &= \begin{cases} f_{n-1}^i s_{n-1}^{j-1} & \text{si } i < j \\ \text{id}_{[n]} & \text{si } i = j, j + 1 \\ f_{n-1}^{i-1} s_{n-1}^j & \text{si } i > j + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Definición 2.1.5. Sea $X : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$ un objeto cosimplicial. Sea $X^n = X([n])$

- Las **cocaras** de X son los morfismos $\partial_n^i : X^n \rightarrow X^{n+1}$ dados por $\partial_n^i = X(f_n^i)$.
- Las **codegeneraciones** de X son los morfismos $\sigma_n^j : X^{n+1} \rightarrow X^n$ dados por $\sigma_n^j = X(s_n^j)$.

Del hecho de que X es un functor covariante, obtenemos las relaciones que satisfacen sus cocaras y codegeneraciones.

Proposición 2.1.6. *Sea X un conjunto cosimplicial, con cocaras $\{\partial_n^i\}_{n \in \mathbb{N}, i \in [n+1]}$, y codegeneraciones $\{\sigma_n^j\}_{n \in \mathbb{N}, j \in [n]}$. Se verifican las siguientes igualdades:*

$$\partial_{n+1}^j \partial_n^i = \partial_{n+1}^i \partial_n^{j-1} \quad \text{si } i < j \quad (2.4)$$

$$\sigma_{n-1}^j \sigma_n^i = \sigma_{n-1}^i \sigma_n^{j+1} \quad \text{si } i \leq j \quad (2.5)$$

$$\sigma_n^j \partial_n^i = \begin{cases} \partial_{n-1}^i \sigma_{n-1}^{j-1} & \text{si } i < j \\ \text{id}_{X^n} & \text{si } i = j, j + 1 \\ \partial_{n-1}^{i-1} \sigma_{n-1}^j & \text{si } i > j + 1. \end{cases} \quad (2.6)$$

El siguiente lema nos dice que para dar un objeto cosimplicial es suficiente definir un conjunto de cocaras y codegeneraciones que verifiquen las relaciones anteriores.

Lema 2.1.7. *Sea $\{X^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una colección de objetos en \mathcal{C} . Sean para cada $n \in \mathbb{N}$, $i \in [n + 1]$, $j \in [n]$, morfismos $\partial_n^i : X^n \rightarrow X^{n+1}$ y $\sigma_n^j : X^{n+1} \rightarrow X^n$, tales que se verifican las igualdades de la proposición 2.1.6. Entonces existe un único objeto cosimplicial en \mathcal{C} tal que $X(f_n^i) = \partial_n^i$ y $X(s_n^j) = \sigma_n^j$ para todo n, i, j .*

La demostración de este lema es análoga a la hecha para objetos simpliciales en [Wei95]. Dadas las cocaras y las codegeneraciones, se trata de definir $X(h)$ para toda $h : [n] \rightarrow [m] \in \Delta$.

Sea $p = |\text{Im}(h)| - 1$. Entonces existe una única factorización de h en funciones crecientes, $h = fs$, donde $s : [n] \rightarrow [p]$ es sobreyectiva y $f : [p] \rightarrow [m]$ es inyectiva.

A su vez, si $i_1 \leq \dots \leq i_{m-p}$ son los elementos de $[m]$ que no están en la imagen de f , podemos factorizar

$$f = f_m^{i_{m-p-1}} \dots f_p^{i_1}.$$

De manera similar, si $j_1 \leq \dots \leq j_{n-p}$ son los elementos del conjunto $\{j \in [p] : s(j) = s(j+1)\}$, podemos factorizar

$$s = s_p^{j_1} \dots s_{n-1}^{j_{n-p}}.$$

De esta forma tenemos que

$$h = fs = f_m^{i_{m-p-1}} \dots f_p^{i_1} s_p^{j_1} \dots s_{n-1}^{j_{n-p}},$$

entonces la imagen de h por X queda determinada como

$$\begin{aligned} X(h) = X(fs) &= X(f_m^{i_{m-p-1}} \dots f_p^{i_1} s_p^{j_1} \dots s_{n-1}^{j_{n-p}}) \\ &= X(f_m^{i_{m-p-1}}) \dots X(f_p^{i_1}) X(s_p^{j_1}) \dots X(s_{n-1}^{j_{n-p}}) \\ &= \partial_m^{i_{m-p-1}} \dots \partial_p^{i_1} \sigma_p^{j_1} \dots \sigma_{n-1}^{j_{n-p}}. \end{aligned}$$

El hecho de que X preserve cualquier composición proviene del hecho de que los morfismos ∂_n^i, σ_n^j verifican las mismas relaciones que las funciones f_n^i, s_n^j .

Observación 2.1.8. Si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un functor covariante y $X : \mathbf{\Delta} \rightarrow \mathcal{C}$ es un objeto cosimplicial, entonces la composición $FX : \mathbf{\Delta} \rightarrow \mathcal{D}$ resulta un objeto cosimplicial. Por ejemplo, consideremos el functor de linealización $F = \mathbb{Z}(-) : \text{Set} \rightarrow \text{Ab}$, definido de la siguiente forma: para cada conjunto S , $\mathbb{Z}(S)$ es el grupo abeliano libre que tiene a S como base, y para cada función $f : S \rightarrow T$ definimos $\mathbb{Z}(f) : \mathbb{Z}(S) \rightarrow \mathbb{Z}(T)$ como la única extensión aditiva de f . Este functor manda conjuntos cosimpliciales en grupos abelianos cosimpliciales.

2.2. Comohología de objetos cosimpliciales.

Comencemos por recordar las definiciones básicas de cohomología de complejos de cocadenas:

Definición 2.2.1. Un **complejo de cocadenas** es una sucesión de grupos abelianos $\{C^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, junto con mapas aditivos $d^n : C^n \rightarrow C^{n+1}$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $d^{n+1}d^n = 0$ (esto es, $\text{Im}(d^n) \subseteq \text{Ker}(d^{n+1})$). Los mapas d^n se llaman **diferenciales**.

La **cohomología** del complejo de cocadenas $\{C^n, d^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es la sucesión de grupos abelianos $\{H^n(C)\}_{n \in \mathbb{N}}$, dados por

$$H^0(C) = \text{Ker}(d^0), \quad H^n(C) = \frac{\text{Ker}(d^n)}{\text{Im}(d^{n-1})} \quad \forall n \geq 1.$$

A continuación construiremos un complejo de cocadenas a partir de un grupo abeliano cosimplicial. Si queremos obtenerlo a partir de un conjunto cosimplicial, podemos pasar previamente por el functor de linealización $\mathbb{Z}(-)$ definido en la Observación 2.1.8.

Proposición 2.2.2. Sea $X = \{X^n, \partial_n^i, \sigma_n^j\}_{n,i,j}$ un grupo abeliano cosimplicial. Entonces $\{X^n, d^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un complejo de cocadenas, siendo

$$d^n = \sum_{i \in [n+1]} (-1)^i \partial_n^i. \quad (2.7)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} d^{n+1}d^n &= \sum_{j \in [n+2]} (-1)^j \partial_{n+1}^j \sum_{i \in [n+1]} (-1)^i \partial_n^i = \sum_{\substack{j \in [n+2] \\ i \in [n+1]}} (-1)^{i+j} \partial_{n+1}^j \partial_n^i \\ &= \sum_{\substack{j \in [n+2] \\ i \in [n+1] \\ i < j}} (-1)^{i+j} \partial_{n+1}^i \partial_n^{j-1} + \sum_{\substack{j \in [n+1] \\ i \in [n+1] \\ i \geq j}} (-1)^{i+j} \partial_{n+1}^j \partial_n^i \\ &= \sum_{\substack{j \in [n+2] \\ i \in [n+1] \\ i < j}} (-1)^{i+j} \partial_{n+1}^j \partial_n^i + \sum_{\substack{j \in [n+1] \\ i \in [n+1] \\ i \geq j}} (-1)^{i+j} \partial_{n+1}^j \partial_n^i \\ &= \sum_{\substack{k=j-1 \in [n+1] \\ l=i \in [n+1] \\ l \leq k}} (-1)^{l+k+1} \partial_{n+1}^l \partial_n^k + \sum_{\substack{l=j \in [n+1] \\ k=i \in [n+1] \\ k \geq l}} (-1)^{k+l} \partial_{n+1}^l \partial_n^k = 0. \end{aligned}$$

□

2.3. Ejemplos.

2.3.1. Topología y conjuntos simpliciales.

Presentaremos un ejemplo de objeto cosimplicial y su cohomología asociada provenientes de la Topología Algebraica. Para ello, primero construiremos un espacio topológico simplicial y veremos su imagen al aplicarle ciertos funtores.

Ejemplo 2.3.1. Se define el **símplice geométrico** Δ^n como el subespacio topológico de \mathbb{R}^{n+1} definido por

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq t_i \leq 1, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}.$$

Vamos a definir un espacio topológico simplicial X , tal que $X(n) = \Delta^n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $v_0^n, v_1^n, \dots, v_n^n$ los vértices de Δ^n , enumerados de la siguiente forma: $v_0^n = (1, 0, \dots, 0)$, $v_1^n = (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $v_n^n = (0, 0, \dots, 1)$. Observemos que Δ^n es la envolvente convexa del conjunto $\{v_0^n, v_1^n, \dots, v_n^n\}$, y estos son sus vértices. Ahora, para cada $f : [n] \rightarrow [m]$, sea $X(f)$ la restricción a Δ^n de la transformación lineal que manda cada v_i^n en $v_{f(i)}^m$. Es claro que X respeta la composición y las identidades, por lo tanto es un functor.

La cocara ∂_n^i es una forma de ver Δ^n como la cara de Δ^{n+1} opuesta al vértice v_i^{n+1} .

De esta forma, la igualdad $\sigma_n^j \partial_n^j = \text{id}_{\Delta^n}$, obtenida de la compatibilidad entre cocaras y codegeneraciones, nos dice que σ_n^j es la proyección lineal de Δ^{n+1} sobre la cara opuesta a v_j^{n+1} , que manda este vértice en v_{j+1}^{n+1} .

Como vimos en la Observación 2.1.8, los funtores covariantes llevan objetos cosimpliciales de una categoría en objetos cosimpliciales de otra. Como aplicaremos funtores contravariantes, necesitaremos considerar la versión dual de un objeto cosimplicial.

Definición 2.3.2. Un **objeto simplicial** en una categoría \mathcal{C} es un functor contravariante $X : \mathbf{\Delta} \rightarrow \mathcal{C}$.

Observación 2.3.3. Análogamente a lo visto para conjuntos cosimpliciales, para definir un conjunto simplicial alcanza con dar una familia $\{X^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de objetos de \mathcal{C} , junto con morfismos $\partial_i^n : X^{n+1} \rightarrow X^n$ para cada $i \in [n+1]$ y morfismos $\sigma_j^n : X^{n+1} \rightarrow X^n$ para cada $j \in [n]$, que verifiquen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \partial_i^{n-1} \partial_j^n &= \partial_{j-1}^{n-1} \partial_i^n & \text{si } i < j \\ \sigma_i^{n+1} \sigma_j^n &= \sigma_{j+1}^{n+1} \sigma_i^n & \text{si } i \leq j \\ \partial_i^n \sigma_j^n &= \begin{cases} \sigma_{j-1}^{n-1} \partial_i^{n-1} & \text{si } i < j \\ \text{id}_{X^n} & \text{si } i = j, j+1 \\ \sigma_j^{n-1} \partial_{i-1}^{n-1} & \text{si } i > j+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Los morfismos ∂_i^n son llamados **caras**, y los morfismos σ_i^n son llamados **degeneraciones**.

Observación 2.3.4. Si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un functor contravariante, y $X : \mathbf{\Delta} \rightarrow \mathcal{C}$ es un objeto cosimplicial, entonces la composición $FX : \mathbf{\Delta} \rightarrow \mathcal{D}$ resulta un objeto simplicial. De la misma forma, si X es un objeto simplicial, FX resulta un objeto cosimplicial.

Ejemplo 2.3.5. Un ejemplo de lo anterior es el siguiente conjunto simplicial: sea Z un espacio topológico. Entonces el functor $\text{Hom}_{\text{Top}}(-, Z) : \text{Top} \rightarrow \text{Set}$ lleva el espacio topológico cosimplicial definido en el ejemplo (2.3.1), a un conjunto simplicial. La cara $\partial_i^n : \text{Hom}_{\text{Top}}(\Delta^{n+1}, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Top}}(\Delta^n, Z)$ lleva una función continua de Δ^{n+1} en Z a su restricción a la i -ésima cara, mientras que la codegeneración $\sigma_i^n : \text{Hom}_{\text{Top}}(\Delta^n, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Top}}(\Delta^{n+1}, Z)$, extiende a todo Δ^{n+1} una función continua definida en su i -ésima cara, obteniendo como resultado la misma imagen (un “símplice degenerado”). Este y otros ejemplos son los que motivaron los nombres “cara” y “degeneración”.

Análogamente a lo hecho en la sección anterior, dado un conjunto simplicial podemos definir un **complejo de cadenas**, y a partir de éste una **homología**. La homología de este conjunto simplicial se llama **homología singular** del espacio topológico Z . Se puede encontrar un estudio en profundidad de estos temas en [Hat02].

Ahora, si elegimos un grupo abeliano G , podemos aplicarle al conjunto simplicial recién definido el functor $\text{Hom}_{\text{Set}}(-, G) : \text{Set} \rightarrow \text{Ab}$, y obtenemos un grupo abeliano cosimplicial, a partir del cual se define la llamada **cohomología singular** del espacio topológico Z , con coeficientes en el grupo abeliano G .

2.3.2. Categorías monoidales, bimódulos y bicomódulos.

Si bien daremos una definición precisa de categoría monoidal en la Sección 4.2, tanto en el capítulo anterior como en éste escribimos una categoría monoidal como una terna $(\mathcal{C}, \diamond, I)$, donde \mathcal{C} es una categoría, $\diamond : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ es un functor, e I es un elemento de \mathcal{C} , tales que para todos $A, B, C \in \mathcal{C}$ vale que $(A \diamond B) \diamond C \simeq A \diamond (B \diamond C)$ (esto es, \diamond es asociativo a menos de isomorfismos) y para todo $A \in \mathcal{C}$ vale que $I \diamond A \simeq A \simeq A \diamond I$ (esto es, I es un neutro a menos de isomorfismos para \diamond).

En este contexto, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier $A \in \mathcal{C}$ queda definida a menos de isomorfismos la potencia n -ésima del objeto A , esto es el producto $A \diamond \cdots \diamond A$ n veces, que denotamos $A^{\diamond n}$. De la misma forma, si $f : A \rightarrow B$ es un morfismo de \mathcal{C} , definimos $f^{\diamond n} : A^{\diamond n} \rightarrow B^{\diamond n}$ como el producto $f \diamond \cdots \diamond f$ n veces.

Teorema 2.3.6. *Sean $(\mathcal{C}, \diamond, I)$ una categoría monoidal, (C, Δ, ε) un comonoides en \mathcal{C} y (M, χ^l, χ^r) un bicomódulo sobre C , en donde $\chi^l : M \rightarrow C \diamond M$ y $\chi^r : M \rightarrow M \diamond C$ son respectivamente las coacciones a izquierda y derecha. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos*

$$X^n = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, C^{\diamond n}).$$

Para cada $i \in [n+1]$ definimos $\partial_n^i : X^n \rightarrow X^{n+1}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \partial_n^0(\alpha) &= (\text{id}_C \diamond \alpha) \circ \chi^l \\ \partial_n^i(\alpha) &= \left(\text{id}_C^{\diamond(i-1)} \diamond \Delta \diamond \text{id}_C^{\diamond(n-i)} \right) \circ \alpha, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ \partial_n^{n+1}(\alpha) &= (\alpha \diamond \text{id}_C) \circ \chi^r. \end{aligned}$$

Para cada $j \in [n]$ definimos $\sigma_n^j : X^{n+1} \rightarrow X^n$ de la siguiente forma:

$$\sigma_n^j(\alpha) = \left(\text{id}_C^{\diamond j} \diamond \varepsilon \diamond \text{id}_C^{\diamond(n-j)} \right) \circ \alpha$$

Entonces, el functor $X : \Delta \rightarrow \text{Set}$ definido por $\{X^n, \partial_n^i, \sigma_n^j\}_{n,i,j}$ es un conjunto cosimplicial.

Demostración: Verificaremos las igualdades de la proposición 2.1.6.

Para la igualdad (2.4):

- En el caso $i = 0, j = 1$, vale que $\partial_{n+1}^1 \partial_n^0 = \partial_{n+1}^0 \partial_n^0$ porque χ^l es una coacción a izquierda.
- En el caso $i = 0, j \in \{2, \dots, n+1\}$, vale que
$$\partial_{n+1}^j \partial_n^0(\alpha) = \partial_{n+1}^0 \partial_n^{j-1}(\alpha) = \left(\text{id}_C^{\diamond(j-1)} \diamond \Delta \diamond \text{id}_C^{\diamond(n+1-j)} \right) \circ (\text{id}_C \diamond \alpha) \circ \chi^l.$$

- En el caso $i = 0, j = n + 2$, vale que $\partial_{n+1}^{n+2}\partial_n^0 = \partial_{n+1}^0\partial_n^{n+1}$ por la compatibilidad entre las coacciones χ^l y χ^r .
- En el caso $i \in \{1, \dots, n\}, j = i + 1$, vale que $\partial_{n+1}^{i+1}\partial_n^i = \partial_{n+1}^i\partial_n^i$ por la coasociatividad de Δ .
- En el caso $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{i + 2, \dots, n + 1\}$, vale que
$$\partial_{n+1}^j\partial_n^i(\alpha) = \partial_{n+1}^i\partial_n^{j-1}(\alpha) = \left(\text{id}_C^{\circ(i-1)} \diamond \Delta \diamond \text{id}_C^{\circ(j-2-i)} \diamond \text{id}_C^{\circ(n-(j-1))} \right) \circ \alpha.$$
- En el caso $i \in \{1, \dots, n\}, j = n + 2$, vale que
$$\partial_{n+1}^{n+2}\partial_n^i(\alpha) = \partial_{n+1}^i\partial_n^{n+1}(\alpha) = \left(\text{id}_C^{\circ(i-1)} \diamond \Delta \diamond \text{id}_C^{\circ(n+1-i)} \right) \circ (\alpha \diamond \text{id}_C) \circ \chi^r.$$
- En el caso $i = n + 1, j = n + 2$, vale que $\partial_{n+1}^{n+2}\partial_n^{n+1} = \partial_{n+1}^{n+1}\partial_n^{n+1}$ porque χ^r es una coacción a derecha.

Para la igualdad (2.5):

Para todo $i \leq j$ vale $\sigma_{n-1}^j\sigma_n^i(\alpha) = \sigma_{n-1}^i\sigma_n^{j+1}(\alpha) = \left(\text{id}_C^{\circ i} \diamond \varepsilon \diamond \text{id}_C^{\circ(j-i)} \diamond \varepsilon \diamond \text{id}_C^{\circ(n-j)} \right) \circ \alpha.$

Para la igualdad (2.6):

- En el caso $i = 0, j = 0$, vale que $\sigma_n^0\partial_n^0 = \text{id}_{X^n}$ por la compatibilidad de la coacción χ^l con la counidad ε .
- En el caso $i = 0, j \in \{1, \dots, n\}$, vale que
$$\sigma_n^j\partial_n^0(\alpha) = \partial_{n-1}^0\sigma_{n-1}^{j-1}(\alpha) = \left(\text{id}_C^{\circ j} \diamond \varepsilon \diamond \text{id}_C^{\circ(n+1-j)} \right) \circ (\text{id}_C \diamond \alpha) \circ \chi^l.$$
- En el caso $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{0, \dots, i - 2\}$, vale que
$$\sigma_n^j\partial_n^i(\alpha) = \partial_{n-1}^{i-1}\sigma_{n-1}^j(\alpha) = \left(\text{id}_C^{\circ j} \diamond \varepsilon \diamond \text{id}_C^{\circ(i-j-2)} \diamond \Delta \text{id}_C^{\circ(n-i)} \right) \circ \alpha.$$
- En el caso $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{i - 1, i\}$, vale que $\sigma_n^j\partial_n^i = \text{id}_{X^n}$ porque ε es counidad para Δ .
- En el caso $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{i + 1, \dots, n\}$, vale que
$$\sigma_n^j\partial_n^i(\alpha) = \partial_{n-1}^i\sigma_{n-1}^{j-1}(\alpha) = \left(\text{id}_C^{\circ(i-1)} \diamond \Delta \diamond \text{id}_C^{\circ(j-i-1)} \diamond \varepsilon \diamond \text{id}_C^{\circ(n-j)} \right) \circ \alpha.$$
- En el caso $i = n + 1, j \in \{0, \dots, n - 1\}$, vale que
$$\sigma_n^j\partial_n^{n+1}(\alpha) = \partial_{n-1}^n\sigma_{n-1}^j(\alpha) = \left(\text{id}_C^{\circ j} \diamond \varepsilon \diamond \text{id}_C^{\circ(n+1-j)} \right) \circ (\alpha \diamond \text{id}_C) \circ \chi^r.$$
- En el caso $i = n + 1, j = n$, vale que $\sigma_n^n\partial_n^{n+1} = \text{id}_{X^n}$ por la compatibilidad de la coacción χ^r con la counidad ε .

□

Ejemplo 2.3.7. En la categoría monoidal $(\text{Vect}_{\mathbb{k}}, \otimes_{\mathbb{k}}, \mathbb{k})$, si C es una coalgebra y M es un bicomódulo sobre C , de la construcción definida en el teorema anterior se obtiene un espacio vectorial cosimplicial. Olvidando el producto por escalares, tenemos un grupo abeliano cosimplicial que mediante la Proposición 2.2.2 nos permite definir

un complejo de cocadenas. La cohomología así definida se llama **cohomología de Cartier** de C con coeficientes en M , y fue introducida por Cartier en [Car55].

Ejemplo 2.3.8. En el capítulo siguiente definiremos una cohomología a partir de un comonoide linealizado en especies, pero no viéndolo como comonoide, sino como un bicomódulo en $(\mathbf{Sp}_{\mathbb{k}}, \cdot, 1)$ sobre la especie comonoide \mathbf{E} .

De forma similar al teorema anterior podemos formular el siguiente teorema, que involucra los conceptos de monoide y bimódulo, duales a los involucrados anteriormente. La demostración es análoga.

Teorema 2.3.9. *Sea (A, m, u) un monoide en una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \diamond, I)$, y (M, ρ_l, ρ_r) un bimódulo sobre A . Entonces $\{X^n, \partial_n^i, \sigma_n^j\}_{n,i,j}$ es un conjunto cosimplicial, donde $X^n = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A^{\diamond n}, M)$ y las cocaras y codegeneraciones están definidas de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned}\partial_n^0(\alpha) &= \rho_l \circ (\text{id}_C \diamond \alpha), \\ \partial_n^i(\alpha) &= \alpha \circ \left(\text{id}_C^{\diamond(i-1)} \diamond m \diamond \text{id}_C^{\diamond(n-i)} \right), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \\ \partial_n^{n+1}(\alpha) &= \rho_r \circ (\alpha \diamond \text{id}_C), \\ \sigma_n^j(\alpha) &= \alpha \circ \left(\text{id}_C^{\diamond j} \diamond u \diamond \text{id}_C^{\diamond(n-j)} \right).\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.10. Veamos el caso particular del Teorema 2.3.9 en el caso de la categoría $(\text{Vect}_{\mathbb{k}}, \otimes_{\mathbb{k}}, \mathbb{k})$. Si A es un álgebra y $(M, \rightharpoonup, \leftharpoonup)$ es un A -bimódulo, de la construcción definida en el teorema anterior se obtiene un espacio vectorial cosimplicial. Olvidando el producto por escalares, tenemos un grupo abeliano cosimplicial que mediante la Proposición 2.2.2 nos permite definir un complejo de cocadenas. La cohomología así definida se llama **cohomología de Hochschild** de A a con coeficientes en M , y fue introducida por Hochschild en [Hoc45]. Explícitamente, el complejo de cadenas está dado por $C^n = \text{Hom}_{\text{Vect}_{\mathbb{k}}}((A)^{\otimes n}, M)$ y los mapas $d^n : C^n \rightarrow C^{n+1}$ están dados por la fórmula

$$\begin{aligned}(d^n \alpha)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) &= a_1 \rightharpoonup \alpha(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) + \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i \alpha(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) + \\ &+ (-1)^{n+1} \alpha(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \leftharpoonup a_{n+1}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.11. Si Γ es un monoide en Set y (M, \rightharpoonup) es un Γ -módulo a izquierda, podemos considerarlo como un bimódulo sobre el anillo $\mathbb{Z}\Gamma$ viendo como acción a izquierda la extensión aditiva de \rightharpoonup y como acción a derecha la extensión aditiva de la acción trivial. De esta forma podemos aplicar el Teorema 2.3.9 en la categoría $(\text{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$, obteniendo un grupo abeliano cosimplicial. La cohomología que definimos a partir de él es la llamada cohomología del monoide Γ con coeficientes en M .

Explícitamente, el complejo de cadenas está dado por $C^n = \text{Hom}_{\text{Ab}}((\mathbb{Z}\Gamma)^{\otimes_{\mathbb{Z}} n}, M) \simeq \text{Hom}_{\text{Set}}(\Gamma^{\times n}, M)$, y los mapas $d^n : C^n \rightarrow C^{n+1}$ están dados por la fórmula

$$(d^n \alpha)(g_1, \dots, g_{n+1}) = g_1 \rightarrow \alpha(g_2, \dots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i \alpha(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} \alpha(g_1, \dots, g_n). \quad (2.8)$$

La llamada **cohomología de grupos** es la recién descrita en el caso en que Γ es un grupo.

Capítulo 3

Cohomología en especies.

En este capítulo estudiaremos, a partir de la cohomología para bicomódulos definida en el capítulo anterior, una cohomología que se puede definir a partir de una especie con estructura de comonoide linealizado, que llamaremos $(\mathbf{p} = \mathbb{k}P, \Delta, \varepsilon)$, o simplemente $\mathbf{p} = \mathbb{k}P$. Estas definiciones y resultados también se encuentran en las secciones 8.2.3 y 9.6 de [AM10].

3.1. Cohomología de comonoides linealizados.

Nos será útil ver a los comonoides linealizados como bicomódulos para utilizar el Teorema 2.3.6.

Lema 3.1.1. *Si $(\mathbf{p} = \mathbb{k}P, \Delta, \varepsilon)$ es un comonoide linealizado, sean $\chi^l : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{p}$ y $\chi^r : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ definidas por componentes según la Notación 1.2.4 de la siguiente forma, para todo $z \in P[I]$ y toda descomposición $I = S \sqcup T$:*

- $\chi_{S,T}^l(z) = *_S \otimes z/_S,$
- $\chi_{S,T}^r(z) = z|_S \otimes *_T,$

entonces $(\mathbf{p}, \chi^r, \chi^l)$ es un \mathbf{E} -bicomódulo

Demostración: Todas las propiedades son consecuencia de las condiciones de coasociatividad y counidad vistas en la Observación 1.3.8. Más precisamente, las igualdades (1.3) y (1.5) son equivalentes a que χ^l sea coacción a izquierda, las igualdades (1.1) y (1.4) son equivalentes a que χ^r sea coacción a derecha, y la igualdad (1.2) es equivalente a la compatibilidad entre ambas. \square

Observación 3.1.2. De forma similar a la noción de comonoide linealizado, podemos definir la de **bicomódulo linealizado en especies**. Esto es, un bicomódulo en especies es linealizado si es una especie linealizada y para cada descomposición $I = S \sqcup T$ las componentes de las coacciones preservan las bases. La construcción anterior parte de un comonoide linealizado y obtiene un \mathbf{E} -bicomódulo linealizado. Las equivalencias vistas en el teorema anterior nos permiten enunciar un teorema recíproco: si $(p = \mathbb{k}P, \chi^l, \chi^r)$ es un \mathbf{E} -bicomódulo linealizado, se puede definir

una estructura de comonoide linealizado en p , tal que $\Delta_{S,T}(z) = x \otimes y$, donde $\chi_{S,T}^r(z) = x \otimes *T$ y $\chi_{S,T}^l(z) = *S \otimes y$.

Observación 3.1.3. Ahora estamos en las hipótesis del Teorema 2.3.6, con lo cual podemos definir un conjunto cosimplicial X tal que $X^n = \text{Hom}_{\text{Sp}_{\mathbb{k}}}(\mathbf{p}, \mathbf{E}^n)$. Al ser X^n espacios vectoriales, su estructura aditiva nos permite, mediante la Proposición 2.2.2, definir sobre los mismos X^n un complejo de cocadenas.

Para ver de forma concreta una n -cocadena $\alpha : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{E}^n$, nos alcanza con ver sus componentes según la Notación 1.2.4 y evaluarlas en la base P . Esto es, α queda determinada si para cada $z \in P[I]$ y para cada descomposición $I = S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_n$ conocemos

$$\alpha_{S_1, \dots, S_n}(z) \in \mathbf{E}[S_1] \otimes \cdots \otimes \mathbf{E}[S_n] = \mathbb{k} \otimes \cdots \otimes \mathbb{k} = \mathbb{k}.$$

La condición de que α sea morfismo de especies es equivalente a que para cada conjunto finito I conmute el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}[I] & \xrightarrow{\alpha_I} & \mathbf{E}^n[I] \\ \mathbf{p}[\sigma] \downarrow & & \downarrow \mathbf{E}^n[\sigma] \\ \mathbf{p}[J] & \xrightarrow{\alpha_J} & \mathbf{E}^n[J]. \end{array}$$

Tomando componentes, esto equivale a que para toda biyección $\sigma : I \rightarrow J$ y toda descomposición $I = S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_n$ conmute el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}[I] & \xrightarrow{\alpha_{S_1, \dots, S_n}} & \mathbf{E}[S_1] \otimes \cdots \otimes \mathbf{E}[S_n] \\ \mathbf{p}[\sigma] \downarrow & & \downarrow \mathbf{E}[\sigma_{S_1}] \otimes \cdots \otimes \mathbf{E}[\sigma_{S_n}] \\ \mathbf{p}[J] & \xrightarrow{\alpha_{\sigma(S_1), \dots, \sigma(S_n)}} & \mathbf{E}[\sigma(S_1)] \otimes \cdots \otimes \mathbf{E}[\sigma(S_n)], \end{array}$$

que equivale a la siguiente igualdad en \mathbb{k} :

$$\alpha_{S_1, \dots, S_n}(z) = \alpha_{\sigma(S_1), \dots, \sigma(S_n)}(\mathbf{p}[\sigma](z)). \quad (3.1)$$

Con esta forma de expresar las n -cocadenas, estamos en condiciones de enunciar el teorema que define la cohomología de especies.

Teorema 3.1.4. Sea $(\mathbf{p} = \mathbb{k}P, \Delta, \varepsilon)$ un comonoide linealizado en especies. Entonces $X = \{X^n, \partial_n^i, \sigma_n^j\}_{n,i,j}$ es un grupo abeliano cosimplicial, donde

$$X^n = \text{Hom}_{\text{Sp}_{\mathbb{k}}}(\mathbf{p}, \mathbf{E}^n)$$

y las cocaras y codegeneraciones son las dadas por las siguientes fórmulas:

- $(\partial_n^0(\alpha))_{S_1, \dots, S_{n+1}}(z) = \alpha_{S_2, \dots, S_{n+1}}(z/S_1)$
- $(\partial_n^i(\alpha))_{S_1, \dots, S_{n+1}}(z) = \alpha_{S_1, \dots, S_{i-1}, S_i \sqcup S_{i+1}, S_{i+2}, \dots, S_{n+1}}(z) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$
- $(\partial_n^{n+1}(\alpha))_{S_1, \dots, S_{n+1}}(z) = \alpha_{S_1, \dots, S_n}(z|_{S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_n})$

$$\blacksquare (\sigma_n^i(\alpha))_{S_1, \dots, S_n}(z) = \alpha_{S_1, \dots, S_i, \emptyset, S_{i+1}, \dots, S_n}(z) \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}.$$

En consecuencia, $\{X^n, d^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un complejo de cocadenas, donde el diferencial $d : \text{Hom}_{\text{Sp}_{\mathbb{k}}}(\mathbf{p}, \mathbf{E}^n) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Sp}_{\mathbb{k}}}(\mathbf{p}, \mathbf{E}^{(n+1)})$ es el dado por la siguiente fórmula:

$$(d^n \alpha)_{S_1, \dots, S_{n+1}}(z) = \alpha_{S_2, \dots, S_{n+1}}(z/S_1) + \sum_{i=1}^n (-1)^i \alpha_{S_1, \dots, S_{i-1}, S_i \sqcup S_{i+1}, S_{i+2}, \dots, S_{n+1}}(z) + (-1)^{n+1} \alpha_{S_1, \dots, S_n}(z|_{S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n}). \quad (3.2)$$

Demostración: Las fórmulas de las cocaras y codegeneraciones provienen de las del Teorema 2.3.6, aplicadas a la estructura de bicomódulo definida en el Lema 3.1.1. Al expresarlas concretamente según la Observación 3.1.3, para una n -cocadena $\alpha : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{E}^n$, fijados $z \in P[I]$ y una descomposición $I = S_1 \sqcup \dots \sqcup S_{n+1}$ tomando componentes y evaluando obtenemos las fórmulas deseadas. \square

Notación 3.1.5. Llamaremos $C^n(\mathbf{p})$ a los grupos del complejo de cocadenas, y $H^n(\mathbf{p})$ a los grupos de cohomología obtenidos de este complejo.

Observación 3.1.6. Sea \mathbb{A} otro anillo conmutativo. Al ser P un comonoide conjuntista, las componentes $\Delta_{S,T}$ preservan bases, entonces podemos utilizarlas para dar una estructura de comonoide linealizado a la especie $\mathbb{A}P \in \text{Sp}_{\mathbb{A}}$, que será un bicomódulo \mathbb{A} -linealizado sobre la especie $\mathbf{E}_{\mathbb{A}}$. Las cocadenas del complejo asociado tendrán entonces valores en \mathbb{A} . Llamaremos a esta operación **cambio de coeficientes**, y denotaremos por $C^n(P, \mathbb{A})$ a los grupos del complejo de cocadenas, y $H^n(P, \mathbb{A})$ a los grupos de cohomología obtenidos.

3.2. Ejemplos.

A continuación veremos algunos ejemplos de cocadenas, cociclos y cobordes, así como el cálculo de algunos grupos de cohomología para los comonoides linealizados presentados en el Capítulo 1.

Ejemplo 3.2.1. Una especie linealizada $\mathbf{p} = \mathbb{k}P$ se dice **conexa** si $P[\emptyset]$ tiene un solo elemento $*$, con lo cual $\mathbf{p}[\emptyset] = \mathbb{k}\{*\}$. Las especies $\mathbb{1}$, \mathbf{E} y \mathbf{L} definidas anteriormente son conexas.

Sea $\mathbf{p} = \mathbb{k}P$ una especie conexa. El grupo abeliano de las 0-cocadenas es

$$C^0(\mathbf{p}) = \text{Hom}_{\text{Sp}_{\mathbb{k}}}(\mathbf{p}, \mathbf{E}^0) = \text{Hom}_{\text{Sp}_{\mathbb{k}}}(\mathbf{p}, \mathbb{1}).$$

Esto es, una 0-cocadena es un morfismo de especies $\alpha : \mathbf{p} \rightarrow \mathbb{1}$, que viene determinado por

$$\alpha_{(\emptyset)} : \mathbf{p}[\emptyset] \rightarrow \mathbb{k},$$

donde (\emptyset) indica la “descomposición vacía” del conjunto vacío. Una 0-cocadena α queda determinada por el valor $\alpha_{(\emptyset)} \in \mathbb{k}$, con lo cual $C^0(\mathbf{p}) \simeq \mathbb{k}$.

Ahora, la fórmula del diferencial nos da

$$(d^0 \alpha)_I(z) = \alpha_{(\emptyset)}(z/I) - \alpha_{(\emptyset)}(z|\emptyset) = \alpha_{(\emptyset)}(*) - \alpha_{(\emptyset)}(*) = 0,$$

con lo cual $d^0 = 0$ y

$$H^0(\mathbf{p}) = \text{Ker}(d^0) = C^0(\mathbf{p}) \simeq \mathbb{k}.$$

Ejemplo 3.2.2. La cohomología de la especie $\mathbb{1}$ se puede calcular fácilmente, dado que toda n -cocadena α queda determinada por el valor $\alpha_{\emptyset, \dots, \emptyset}(1) \in \mathbb{k}$. Esto es, podemos identificar $C^n(\mathbb{1})$ con \mathbb{k} . Evaluando la ecuación (3.2) en 1 (y $S_i = \emptyset$) obtenemos

$$(d^n \alpha)_{\emptyset, \dots, \emptyset}(1) = \alpha_{\emptyset, \dots, \emptyset}(1) + \sum_{i=1}^n (-1)^i \alpha_{\emptyset, \dots, \emptyset}(1) + (-1)^{n+1} \alpha_{\emptyset, \dots, \emptyset}(1).$$

Si n es par se cancelan todos los sumandos y por lo tanto $d^n \alpha = 0$, y si n es impar se cancelan todos menos uno resultando $d^n \alpha = \alpha$. Obtenemos entonces el siguiente complejo de cocadenas

$$\mathbb{k} \xrightarrow{0} \mathbb{k} \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{k}}} \mathbb{k} \xrightarrow{0} \mathbb{k} \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{k}}} \mathbb{k} \xrightarrow{0} \dots$$

De esto se deduce que $H^0(\mathbb{1}) \simeq \mathbb{k}$ y $H^n(\mathbb{1}) = 0$ para todo $n \geq 1$.

Ejemplo 3.2.3. Para calcular la cohomología de la especie \mathbf{E} es útil considerar la condición de naturalidad de las cocadenas expresada en la ecuación (3.1).

Sea α una n -cocadena; si $I = S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n$ y $J = T_1 \sqcup \dots \sqcup T_n$ son tales que $|S_i| = |T_i|$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, entonces existe una biyección $\sigma : I \rightarrow J$ tal que $\sigma(S_i) = T_i$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, de donde

$$\alpha_{S_1, \dots, S_n}(*_I) = \alpha_{T_1, \dots, T_n}(*_J).$$

Entonces podemos definir una función $\tilde{\alpha} : \mathbb{N}^{\times n} \rightarrow \mathbb{k}$ mediante la igualdad

$$\tilde{\alpha}(k_1, \dots, k_n) = \alpha_{T_1, \dots, T_n}(*_J),$$

donde T_1, \dots, T_n son conjuntos que verifican $|T_i| = k_i$ y $J = T_1 \sqcup \dots \sqcup T_n$. Ahora,

$$\begin{aligned} (d^n \alpha)_{S_1, \dots, S_{n+1}}(z) &= \alpha_{S_2, \dots, S_{n+1}}(*_{S_1}) + \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i \alpha_{S_1, \dots, S_{i-1}, S_i \sqcup S_{i+1}, S_{i+2}, \dots, S_{n+1}}(*_I) + \\ &+ (-1)^{n+1} \alpha_{S_1, \dots, S_n}(*_{S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n}) = \\ &= \tilde{\alpha}(k_2, \dots, k_{n+1}) + \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i \tilde{\alpha}(k_1, \dots, k_{i-1}, k_i + k_{i+1}, k_{i+2}, \dots, k_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} \tilde{\alpha}(k_1, \dots, k_n) = \\ &= (d^n \tilde{\alpha})(k_1, \dots, k_{n+1}), \end{aligned}$$

donde el último d^n es el diferencial dado por la fórmula del Ejemplo 2.3.11, considerando \mathbb{N} como monoide con la suma y \mathbb{k} como un \mathbb{N} -módulo trivial. La igualdad de arriba nos dice que el mapa que a α le asigna $\tilde{\alpha}$ es un morfismo de complejos de

cadena, que ya vimos que es biyectivo y por lo tanto induce isomorfismos entre los grupos $H^n(\mathbf{E})$ y $H^n(\mathbb{N}, \mathbb{k})$ para todo natural n .

Como consecuencia de la Proposición 4.1 de [CE99] obtenemos que

$$H^n(\mathbf{E}) \simeq H^n(\mathbb{N}, \mathbb{k}) \simeq H^n(\mathbb{Z}, \mathbb{k}) = \begin{cases} \mathbb{k} & \text{si } n \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 3.2.4. Para calcular el grupo $H^1(\mathbf{L})$ solamente falta calcular $\text{Ker}(d^1)$, dado que la especie \mathbf{L} es conexa y por lo tanto ya dedujimos que $d^0 = 0$ en el Ejemplo 3.2.1, con lo cual $\text{Im}(d^0) = 0$.

Sea $\alpha : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{E}$ una 1-cocadena. Entonces α queda determinada por los valores $\alpha_I(l) \in \mathbb{k}$, para cada conjunto finito I y cada orden lineal l en I .

Sean I y J dos conjuntos finitos del mismo cardinal k . Sean $l = i_1 \dots i_k$ un orden lineal en I y $l' = j_1 \dots j_k$ un orden lineal en J . Entonces la biyección $\sigma : I \rightarrow J$ dada por $\sigma(i_1) = j_1, \dots, \sigma(i_k) = j_k$ verifica $\mathbf{L}[\sigma](l) = l'$. De la condición de naturalidad de la ecuación (3.1) aplicada a σ , se deduce que $\alpha_I(l) = \alpha_J(l')$. Esto es, a partir de α podemos definir una función $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{k}$ tal que $h(k) = \alpha_I(l)$ para cualquier I de cardinal k y cualquier $l \in L[I]$.

Si α es un cociclo, entonces para cada descomposición $I = S \sqcup T$ y cada $l \in L[I]$ tenemos:

$$(d\alpha)_{S,T}(l) = \alpha_T(l|_T) - \alpha_I(l) + \alpha_S(l|_S) = 0.$$

Ahora, dados $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, sean S, T conjuntos finitos disjuntos tales que $|S| = k_1$ y $|T| = k_2$, y l un orden cualquiera en $S \sqcup T$. De la igualdad anterior se deduce que

$$h(k_1 + k_2) = h(k_1) + h(k_2).$$

Esto implica que h , y en consecuencia α , quedan determinadas por el valor $h(1) \in \mathbb{k}$, con lo cual $\text{Ker}(d^1) \simeq \mathbb{k}$. Como $\text{Im}(d^0) = 0$, obtenemos que

$$H^1(\mathbf{L}) \simeq \mathbb{k}.$$

Ejemplo 3.2.5. Para cada l orden lineal en un conjunto finito I , y para cada descomposición $I = S \sqcup T$, definimos el siguiente número entero:

$$\text{Sch}_{S,T}(l) = |\{(s, t) \in S \times T / t < s \text{ según } l\}|.$$

Esta igualdad define una cocadena $\text{Sch} \in C^2(L, \mathbb{Z})$.

Es fácil verificar que para cualesquiera R, S, T conjuntos disjuntos y cualquier $l \in L[R \sqcup S \sqcup T]$ se verifican

$$\text{Sch}_{R,S \sqcup T}(l) = \text{Sch}_{R,S}(l|_{R \sqcup S}) + \text{Sch}_{R,T}(l|_{R \sqcup T}),$$

$$\text{Sch}_{R \sqcup S, T}(l) = \text{Sch}_{R,T}(l|_{R \sqcup T}) + \text{Sch}_{S,T}(l|_{S \sqcup T}).$$

Mediante un cálculo directo sustituyendo estas igualdades en la ecuación (3.2) obtenemos que $d\text{Sch} = 0$, con lo cual Sch es un 2-cociclo en \mathbf{L} con coeficientes en \mathbb{Z} . Este es el llamado **cociclo de Schubert**, que define una clase en $H^2(L, \mathbb{Z})$.

Ejemplo 3.2.6. Siguiendo con ejemplos de cocadenas en \mathbf{L} , definiremos una 3-cocadena $\beta \in C^3(L, \mathbb{Z})$ de la siguiente forma:

$$\beta_{R,S,T}(l) = |R|\text{Sch}_{S,T}(l|S \sqcup T),$$

para cada l orden lineal en un conjunto finito I , y para cada descomposición $I = R \sqcup S \sqcup T$, en donde Sch es el cociclo de Schubert definido en el ejemplo anterior. Es fácil verificar que para cualesquiera Q, R, S, T conjuntos disjuntos y cualquier $l \in L[Q \sqcup R \sqcup S \sqcup T]$ se verifican

$$\beta_{Q \sqcup R, S, T}(l) = \beta_{Q, S, T}(l|_{Q \sqcup S \sqcup T}) + \beta_{R, S, T}(l|_{R \sqcup S \sqcup T}),$$

$$\beta_{Q, R \sqcup S, T}(l) = \beta_{Q, R, T}(l|_{Q \sqcup R \sqcup T}) + \beta_{Q, S, T}(l|_{Q \sqcup S \sqcup T}),$$

$$\beta_{Q, R, S \sqcup T}(l) = \beta_{Q, R, S}(l|_{Q \sqcup R \sqcup S}) + \beta_{Q, R, T}(l|_{Q \sqcup R \sqcup T}),$$

Mediante un cálculo directo sustituyendo estas igualdades en la ecuación (3.2) obtenemos que $d\beta = 0$, con lo cual β es un 3-cociclo en L con coeficientes en \mathbb{Z} .

Observemos que, si κ es la 1-cocadena definida por $\kappa_I(l) = |I|$ (que es un cociclo por argumentos similares a los usados en el Ejemplo 3.2.4), en particular se verifica

$$\beta_{R,S,T}(l) = \kappa_R(l|_R)\text{Sch}_{S,T}(l|_{S \sqcup T}),$$

esto es, el 3-cociclo β se obtiene del 1-cociclo κ y del 2-cociclo Sch “evaluando en componentes de l y multiplicando”. En el último capítulo de este trabajo abordaremos con generalidad este procedimiento, definiendo el **producto cup**.

Capítulo 4

Cohomología y torcimientos.

En este capítulo veremos algunas aplicaciones relacionadas a los grupos de cohomología en grados 2 y 3. Dichos resultados son análogos a los conocidos para cohomología de grupos, por lo cual nos detendremos a repasar estos últimos al comienzo de cada sección.

4.1. Torcimiento de (co)multiplicación y H^2 .

4.1.1. En cohomología de grupos

Sea (Γ, \cdot, e) un grupo. En esta parte repasaremos algunos resultados sobre el uso de 2-cociclos con coeficientes en \mathbb{Z} para torcer la estructura multiplicativa usual del álgebra $\mathbb{k}\Gamma$. Existen resultados más generales, (por ejemplo con coeficientes en \mathbb{k}^\times y considerando acciones no triviales, ver sección 1.1 de [Mas99]) pero nos centraremos en mostrar un ejemplo análogo al que veremos en cohomología de especies. Las cocadenas con las que trabajamos en esta parte son las del Ejemplo 2.3.11. Si bien generalmente se consideran torcimientos que preservan la unidad del álgebra (esto es, torcimientos por 2-cociclos normalizados), en este trabajo escribiremos una versión que no involucra preservar la unidad. De todas formas, cabe destacar que no estamos agregando generalidad a la teoría, como veremos en la Observación 4.1.5.

Proposición 4.1.1. *Sean $q \in \mathbb{k}$ y $\alpha : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$ una 2-cocadena. Si q es invertible o α solamente toma valores no negativos, consideramos la operación bilineal $\cdot_\alpha : \mathbb{k}\Gamma \otimes \mathbb{k}\Gamma \rightarrow \mathbb{k}\Gamma$ dada por*

$$a \cdot_\alpha b = q^{\alpha(a,b)} a \cdot b, \quad \forall a, b \in \Gamma.$$

Entonces:

- *Si α es un 2-cociclo, la operación \cdot_α es asociativa.*
- *Si q no es una raíz de la unidad en \mathbb{k} (esto es, si el mapa de \mathbb{Z} en \mathbb{k} dado por $k \mapsto q^k$ es inyectivo), vale el recíproco de la afirmación anterior.*

- Si α es un 2-cociclo, y si además q es invertible o $\alpha(e, e) = 0$, el elemento

$$e^\alpha = q^{-\alpha(e,e)}e \in \mathbb{k}\Gamma$$

es neutro para \cdot_α .

Decimos que el álgebra $(\mathbb{k}\Gamma, \cdot_\alpha, e^\alpha)$ es un q -**torcimiento** del álgebra $(\mathbb{k}\Gamma, \cdot, e)$.

Proposición 4.1.2. Sean α, α' dos 2-cociclos tales que $\alpha = \alpha' + d\eta$ para cierta 1-cocadena $\eta : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$. Si f, α, α', η solamente toman valores no negativos, o si q es invertible, entonces la transformación lineal $f_\eta : \mathbb{k}\Gamma \rightarrow \mathbb{k}\Gamma$ dada por

$$f_\eta(g) = q^{\eta(g)}g, \quad \forall g \in \Gamma$$

es un morfismo de álgebras entre $(\mathbb{k}\Gamma, \cdot_\alpha, e^\alpha)$ y $(\mathbb{k}\Gamma, \cdot_{\alpha'}, e^{\alpha'})$. Es claro que f_η es un isomorfismo si q es invertible.

Corolario 4.1.3. Si q es invertible, la asignación $\alpha \mapsto (\mathbb{k}\Gamma, \cdot_\alpha, e^\alpha)$ induce una función que lleva elementos de $H^2(\Gamma, \mathbb{Z})$ en clases de isomorfismo de q -torcimientos del álgebra $(\mathbb{k}\Gamma, \cdot, e)$.

Observación 4.1.4. La noción de q -torcimiento cuando q no es invertible tiene sentido, puesto que existen cociclos no triviales que solamente toman valores no negativos. Por ejemplo, sea n un entero mayor o igual a 2, $\Gamma = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ y consideremos la cocadena $\alpha : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$ la cocadena definida por

$$\alpha((\bar{s}, \bar{t}), (\bar{u}, \bar{v})) = tu \bmod n,$$

donde $x \bmod n$ es el resto de la división entera de x entre n . Es claro que α está bien definida y que toma solamente valores enteros entre 0 y $n - 1$. Mediante un cálculo directo puede verse que $d\alpha = 0$, con lo cual α es un 2-cociclo. Por otra parte, si $\eta : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$ es una 1-cocadena, para todos $s, t, u, v \in \mathbb{Z}$ se verifica que

$$d\eta((\bar{s}, \bar{t}), (\bar{u}, \bar{v})) = \eta(\bar{u}, \bar{v}) - \eta(\bar{s} + \bar{u}, \bar{t} + \bar{v}) + \eta(\bar{s}, \bar{t}) = d\eta((\bar{u}, \bar{v}), (\bar{s}, \bar{t})).$$

Es decir que los 2-cobordes son simétricos y α claramente no lo es, con lo cual α no es un 2-coborde.

Observación 4.1.5. Decimos que un 2-cociclo γ es **normalizado** si

$$\gamma(e, g) = \gamma(g, e) = 0, \quad \forall g \in \Gamma.$$

Si γ es normalizado, se verifica directamente que la multiplicación de cualquier q -torcimiento por γ sigue teniendo al elemento e como neutro.

Por otra parte, dado un 2-cociclo α , consideremos la 1-cocadena η definida por

$$\eta(g) = \alpha(e, e), \quad \forall g \in \Gamma,$$

y el 2-cociclo γ definido por

$$\gamma = \alpha - d\eta,$$

con lo cual las clases de γ y α en $H^2(\Gamma, \mathbb{Z})$ coinciden. Concretamente, al aplicar la fórmula de d y evaluar, obtenemos que

$$\gamma(a, b) = \alpha(a, b) - \alpha(e, e), \quad \forall a, b \in \Gamma.$$

Ahora, sea $g \in \Gamma$ cualquiera. Del hecho de que α es un cociclo obtenemos que

$$d\alpha(g, e, e) = \alpha(e, e) - \alpha(g, e) + \alpha(g, e) - \alpha(g, e) = 0,$$

de donde

$$\gamma(g, e) = \alpha(g, e) - \alpha(e, e) = 0.$$

Similarmente, evaluando en la terna (e, e, g) obtenemos que $\gamma(e, g) = 0$, de lo cual deducimos que γ es normalizado.

En conclusión, cualquier clase en $H^2(\Gamma, \mathbb{Z})$ tiene un representante normalizado. Si q es invertible, esto nos dice que cualquier q -torcimiento de $(\mathbb{k}\Gamma, \cdot, e)$ es isomorfo como álgebra a un q -torcimiento que también tiene a e como unidad.

4.1.2. En cohomología de especies

Los resultados siguientes son análogos a los de la parte anterior. Dada una especie comonoide linealizada $\mathbf{p} = \mathbb{k}P$, usaremos 2-cociclos de la cohomología definida en el capítulo anterior para torcer la estructura de comonoide de \mathbf{p} . Los resultados para 2-cociclos normalizados (esto es, 2-cociclos α tales que $\alpha_{\emptyset, I}(z) = \alpha_{I, \emptyset}(z) = 0$ para todo conjunto finito I y todo $z \in P[I]$) sobre torcimientos que preservan la counidad son las Proposiciones 9.16 y 9.17 de [AM10]. En este trabajo no se requiere esta hipótesis, pero no se está agregando generalidad, como veremos en la Observación 4.1.9.

Proposición 4.1.6. *Sean $q \in \mathbb{k}$ y $\alpha \in C^2(P, \mathbb{Z})$ una 2-cocadena. Si q es invertible o α solamente toma valores no negativos, podemos definir un morfismo de especies $\Delta^\alpha : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$ por componentes y en elementos de las bases, mediante la siguiente fórmula:*

$$\Delta_{S, T}^\alpha(z) = q^{\alpha_{S, T}(z)} \Delta_{S, T}(z) = q^{\alpha_{S, T}(z)} z|_S \otimes z|_T, \quad \forall z \in P[S \sqcup T].$$

Entonces:

- Si α es un 2-cociclo, Δ^α es coasociativo.
- Si q no es una raíz de la unidad en \mathbb{k} , vale el recíproco de la afirmación anterior.
- Si α es un 2-cociclo, y si además q es invertible o $\alpha_{\emptyset, \emptyset}(z) = 0$ para todo $z \in P[\emptyset]$, el morfismo $\varepsilon^\alpha : \mathbf{p} \rightarrow \mathbb{1}$ dado por

$$\varepsilon_\emptyset^\alpha(z) = q^{-\alpha_{\emptyset, \emptyset}(z)}, \quad \forall z \in P[\emptyset]$$

es una counidad para Δ^α .

Demostración: Por un lado, que α sea un 2-cociclo es equivalente a que para toda descomposición $I = R \sqcup S \sqcup T$ y todo $z \in P[I]$ se verifique

$$\alpha_{S,T}(z/R) - \alpha_{R \sqcup S,T}(z) + \alpha_{R,S \sqcup T}(z) - \alpha_{R,S}(z|_{R \sqcup S}) = 0. \quad (4.1)$$

Por otro lado, como vimos en la Observación 1.2.6, la coasociatividad de Δ^α es equivalente a la conmutatividad de los siguientes diagramas, para toda descomposición $I = R \sqcup S \sqcup T$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}[I] & \xrightarrow{\Delta_{R \sqcup S, T}^\alpha} & \mathbf{p}[R \sqcup S] \otimes \mathbf{p}[T] \\ \Delta_{R, S \sqcup T}^\alpha \downarrow & & \downarrow \Delta_{R, S}^\alpha \otimes \text{id}_{\mathbf{p}[T]} \\ \mathbf{p}[R] \otimes \mathbf{p}[S \sqcup T] & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbf{p}[R]} \otimes \Delta_{S, T}^\alpha} & \mathbf{p}[R] \otimes \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T]. \end{array}$$

Evaluando las distintas composiciones en elementos de la base $P[I]$, obtenemos que la coasociatividad es equivalente a que para todo $z \in P[I]$ se verifique

$$q^{\alpha_{R \sqcup S, T}(z) + \alpha_{R, S}(z|_{R \sqcup S})} = q^{\alpha_{R, S \sqcup T}(z) + \alpha_{S, T}(z/R)}.$$

Es inmediato ver que la ecuación (4.1) implica estas igualdades, y que además si q no es una raíz de la unidad también se cumple la implicancia recíproca.

En caso afirmativo, los diagramas de counidad son equivalentes a que para todo I conmute el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{k} \otimes \mathbf{p}[I] & \xleftarrow{\varepsilon_\emptyset^\alpha \otimes \text{id}_{\mathbf{p}[I]}} & \mathbf{p}[\emptyset] \otimes \mathbf{p}[I] \\ & \searrow \simeq & \uparrow \Delta_{\emptyset, I}^\alpha \\ & & \mathbf{p}[I] \\ & \swarrow \simeq & \downarrow \Delta_{I, \emptyset}^\alpha \\ \mathbf{p}[I] \otimes \mathbb{k} & \xleftarrow{\text{id}_{\mathbf{p}[I]} \otimes \varepsilon_\emptyset^\alpha} & \mathbf{p}[I] \otimes \mathbf{p}[\emptyset]. \end{array}$$

y esto es equivalente a que para todo $z \in P[I]$ se verifique

$$q^{\alpha_{\emptyset, I}(z) - \alpha_{\emptyset, \emptyset}(z|_\emptyset)} = 1 = q^{\alpha_{I, \emptyset}(z) - \alpha_{\emptyset, \emptyset}(z/I)}.$$

Por otra parte, de evaluar la ecuación (4.1) en la descomposición $I = \emptyset \sqcup \emptyset \sqcup I$ y usando que $z/\emptyset = z$ obtenemos que

$$\alpha_{\emptyset, I}(z) - \alpha_{\emptyset, \emptyset}(z|_\emptyset) = 0,$$

y de evaluar la ecuación (4.1) en la descomposición $I = I \sqcup \emptyset \sqcup \emptyset$ y usando que $z|_I = z$ obtenemos que

$$\alpha_{I, \emptyset}(z) - \alpha_{\emptyset, \emptyset}(z/I) = 0,$$

con lo cual quedan demostradas igualdades que queremos. \square

Decimos que el comonoide $(\mathbf{p}, \Delta^\alpha, \varepsilon^\alpha)$ es un q -**torcimiento** del comonoide $(\mathbf{p}, \Delta, \varepsilon)$.

Proposición 4.1.7. Sean α, α' dos 2-cociclos tales que $\alpha + d\eta = \alpha'$ para cierta 1-cocadena $\eta \in C^1(P, \mathbb{Z})$. Si η, α, α' solamente toman valores no negativos, o si q es invertible, entonces el morfismo de especies $f^\eta : \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$ dado en componentes por

$$f_I^\eta(z) = q^{\eta_I(z)}z, \quad \forall z \in P[I],$$

es un morfismo de especies comonoides entre $(\mathbf{p}, \Delta^\alpha, \varepsilon^\alpha)$ y $(\mathbf{p}, \Delta^{\alpha'}, \varepsilon^{\alpha'})$. Es claro que f^η es un isomorfismo si q es invertible.

Demostración: Según la Observación 1.2.16, para ver que f^η es un morfismo de comonoides debemos verificar en componentes la conmutatividad de los diagramas de compatibilidad de f^η con las comultiplicaciones y con las counidades. La compatibilidad de f^η con las comultiplicaciones es equivalente a la conmutatividad del siguiente diagrama para cada descomposición $I = S \sqcup T$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}[I] & \xrightarrow{\Delta_{S,T}^\alpha} & \mathbf{p}[S] \otimes \mathbf{p}[T] \\ f_I^\eta \downarrow & & \downarrow f_S^\eta \otimes f_T^\eta \\ \mathbf{q}[I] & \xrightarrow{\Delta_{S,T}^{\alpha'}} & \mathbf{q}[S] \otimes \mathbf{q}[T]. \end{array}$$

Evaluando en elementos de la base, esto equivale a que para todo $z \in P[I]$ se verifique

$$q^{\alpha_{S,T}(z) + \eta_S(z|_S) + \eta_T(z|_T)} = q^{\eta_I(z) + \alpha'_{S,T}(z)}.$$

Por otro lado, evaluando la igualdad $\alpha + d\eta = \alpha'$ en una descomposición $I = S \sqcup T$ y en un $z \in P[I]$, obtenemos que

$$\alpha_{S,T}(z) + \eta_T(z|_T) - \eta_I(z) + \eta_S(z|_S) = \alpha'_{S,T}(z),$$

de lo cual se deduce inmediatamente la igualdad que queremos.

Ahora, la compatibilidad de f^η con las counidades es equivalente a la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}[\emptyset] & \xrightarrow{f_\emptyset^\eta} & \mathbf{q}[\emptyset] \\ & \searrow \varepsilon_\emptyset^\alpha & \downarrow \varepsilon_\emptyset^{\alpha'} \\ & & \mathbb{k}. \end{array}$$

Evaluando en elementos de la base, esto equivale a que para todo $z \in P[\emptyset]$ se verifique

$$q^{\eta_\emptyset(z) - \alpha'_{\emptyset,\emptyset}(z)} = q^{-\alpha_{\emptyset,\emptyset}(z)}.$$

Por otro lado, evaluando la igualdad $\alpha + d\eta = \alpha'$ en la descomposición $\emptyset = \emptyset \sqcup \emptyset$ y en un $z \in P[\emptyset]$, y usando que $z|_\emptyset = z = z/\emptyset$, obtenemos que

$$\alpha_{\emptyset,\emptyset}(z) + \eta_\emptyset(z) = \alpha'_{\emptyset,\emptyset}(z),$$

de lo cual se deduce inmediatamente la igualdad que queremos. \square

Corolario 4.1.8. Si q es invertible, la asignación $\alpha \mapsto (\mathbf{p}, \Delta^\alpha, \varepsilon^\alpha)$ induce una función que lleva elementos de $H^2(P, \mathbb{Z})$ en clases de isomorfismo de q -torcimientos del comonoide $(\mathbf{p}, \Delta, \varepsilon)$.

Observación 4.1.9. Decimos que un 2-cociclo γ es **normalizado** si

$$\gamma_{\emptyset, I}(z) = \gamma_{I, \emptyset}(z) = 0, \quad \forall z \in P[I].$$

Si γ es normalizado, se verifica directamente que la comultiplicación de cualquier q -torcimiento por γ sigue teniendo a ε como counidad.

Por otra parte, dado un 2-cociclo α , consideremos cualquier 1-cocadena η que verifique

$$\eta_{\emptyset}(x) = \alpha_{\emptyset, \emptyset}(x), \quad \forall x \in P[\emptyset]$$

(por ejemplo, podemos definirlo de esta forma en $P[\emptyset]$ y como 0 en $P[I]$ si $I \neq \emptyset$). Sea el 2-cociclo γ definido por

$$\gamma = \alpha - d\eta,$$

con lo cual las clases de γ y α en $H^2(P, \mathbb{Z})$ coinciden. Ahora, evaluando la igualdad anterior para $z \in P[I]$ cualquiera y la descomposición $I = I \sqcup \emptyset$, obtenemos que

$$\gamma_{I, \emptyset}(z) = \alpha_{I, \emptyset}(z) - \eta_{\emptyset}(z|_I) + \eta_I(z) - \eta_I(z|_I) = \alpha_{I, \emptyset}(z) - \alpha_{\emptyset, \emptyset}(z|_I),$$

dado que por la condición de counidad vale que $z|_I = z$. Del hecho de que α es un cociclo, evaluando en z y la descomposición $I = I \sqcup \emptyset \sqcup \emptyset$ obtenemos que

$$d\alpha_{I, \emptyset, \emptyset}(z) = \alpha_{\emptyset, \emptyset}(z|_I) - \alpha_{I, \emptyset}(z) + \alpha_{I, \emptyset}(z) - \alpha_{I, \emptyset}(z|_I) = 0,$$

de donde

$$\gamma_{I, \emptyset}(z) = \alpha_{I, \emptyset}(z) - \alpha_{\emptyset, \emptyset}(z|_I) = 0.$$

De forma similar, evaluando respectivamente en descomposiciones $I = \emptyset \sqcup I$ e $I = \emptyset \sqcup \emptyset \sqcup I$ obtenemos que $\gamma_{\emptyset, I}(z) = 0$, de lo cual deducimos que γ es normalizado.

En conclusión, cualquier clase en $H^2(P, \mathbb{Z})$ tiene un representante normalizado. Si q es invertible, esto nos dice que cualquier q -torcimiento de $(\mathbf{p}, \Delta, \varepsilon)$ es isomorfo como comonoide a un q -torcimiento que también tiene a ε como counidad.

Ejemplo 4.1.10. Del cálculo de la cohomología del comonoide \mathbf{E} en el Ejemplo 3.2.3 obtenemos que $H^2(E, \mathbb{Z}) = 0$, por lo cual el comonoide \mathbf{E} no admite q -torcimientos no triviales, es decir, que no sean isomorfos a $(\mathbf{E}, \Delta, \varepsilon)$.

Ejemplo 4.1.11. Consideremos la especie \mathbf{L} y tomemos $q = 0$ y $\alpha = \text{Sch}$ el cociclo de Schubert definido en el Ejemplo 3.2.5. Al estar definido como el cardinal de un conjunto, sabemos que Sch solamente toma valores no negativos. Por otra parte, si η es una 1-cocadena, para cualquier descomposición $I = S \sqcup T$ y cualquier $l \in L[I]$ vale que

$$d\eta_{S, T}(l) = \eta_T(l|_T) - \eta_I(l) + \eta_S(l|_S) = d\eta_{T, S}(l).$$

Esta condición de simetría claramente no es verificada por Sch , con lo cual Sch no es un 2-coborde.

Ahora, sea $I = S \sqcup T$ una descomposición y l un orden total en I . Asumiendo la convención de que $0^0 = 1$, entonces $\Delta_{S,T}^{\text{Sch}}(l) \neq 0$ si y solamente si $\text{Sch}_{S,T}(l) = 0$, esto es, si no existen $s \in S$ y $t \in T$ tales que $t < s$ según l . Entonces

$$\Delta_{S,T}^{\text{Sch}}(l) = \begin{cases} l|_S \otimes l|_T & \text{si } \forall s \in S, t \in T \ s < t \text{ según } l, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Con lo cual $\Delta^{\text{Sch}} = \overline{\Delta}$, la comultiplicación del comonoide \mathbf{L}^* que definimos en el Ejemplo 1.2.14.

Además $\text{Sch}_{\emptyset, \emptyset}((\emptyset)) = 0$, con lo cual $\varepsilon^{\text{Sch}} = \varepsilon$.

Entonces el comonoide \mathbf{L}^* es un 0-torcimiento del comonoide \mathbf{L} .

4.2. Torcimiento de asociadores y H^3 .

Hasta el momento veníamos trabajando con categorías monoidales para las cuales las transformaciones naturales de asociatividad y unidad son “cambios de paréntesis”, por lo cual simplemente no las habíamos mencionado. En esta sección torceremos esas transformaciones naturales, y por eso necesitamos la definición de categoría monoidal. Algunos de los primeros artículos sobre categorías monoidales son de Bénabou [Bén65], Kelly [Kel64] y Mac Lane [ML63].

Definición 4.2.1. Una *categoría monoidal* es una séxtupla $(\mathcal{C}, \diamond, I, \Phi, \lambda, \rho)$ donde:

- \mathcal{C} es una categoría,
- $\diamond : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ es un functor,
- I es un objeto de \mathcal{C} (que llamaremos **neutro** de \diamond),
- $\Phi : \diamond(\diamond \times \text{id}_{\mathcal{C}}) \Rightarrow \diamond(\text{id}_{\mathcal{C}} \times \diamond)$ es un isomorfismo natural, que llamamos **asociador**, dado en objetos por morfismos en \mathcal{C}

$$\Phi_{A,B,C} : (A \diamond B) \diamond C \rightarrow A \diamond (B \diamond C),$$

- $\lambda : \diamond(I \times \text{id}_{\mathcal{C}}) \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$ y $\rho : \diamond(\text{id}_{\mathcal{C}} \times I) \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$ son isomorfismos naturales dados en objetos por morfismos en \mathcal{C}

$$\lambda_A : I \diamond A \rightarrow A, \quad \rho_A : A \diamond I \rightarrow A,$$

tales que para todos A, B, C, D objetos de \mathcal{C} se verifica el siguiente **diagrama pentagonal**

$$\begin{array}{ccc} ((A \diamond B) \diamond C) \diamond D & \xrightarrow{\Phi_{A \diamond B, C, D}} & (A \diamond B) \diamond (C \diamond D) \xrightarrow{\Phi_{A, B, C \diamond D}} A \diamond (B \diamond (C \diamond D)) \\ \Phi_{A, B, C \diamond \text{id}_D} \downarrow & & \uparrow \text{id}_A \diamond \Phi_{B, C, D} \\ (A \diamond (B \diamond C)) \diamond D & \xrightarrow{\Phi_{A, B \diamond C, D}} & A \diamond ((B \diamond C) \diamond D), \end{array}$$

y para todos A, B objetos de \mathcal{C} se verifica el siguiente **diagrama triangular**

$$\begin{array}{ccc} (A \diamond I) \diamond B & \xrightarrow{\Phi_{A,I,B}} & A \diamond (I \diamond B) \\ & \searrow \rho_A \diamond \text{id}_B & \downarrow \text{id}_A \diamond \lambda_B \\ & & A \diamond B. \end{array}$$

Es claro que un ejemplo de categoría monoidal es $(\text{Vect}_{\mathbb{k}}, \otimes, \mathbb{k}, \Phi, \lambda, \rho)$, donde $\Phi_{U,V,W}((u \otimes v) \otimes w) = u \otimes (v \otimes w)$, $\lambda_U(t \otimes u) = tu = \rho_U(u \otimes t)$. De forma análoga, la categoría de especies tiene estructuras monoidales con el producto de Hadamard y con el de Cauchy, tal como vimos en las Definiciones 1.2.1 y 1.2.2 respectivamente.

Definición 4.2.2. Sean $(\mathcal{C}, \diamond, I, \Phi, \lambda, \rho)$ y $(\mathcal{C}', \diamond', I', \Phi', \lambda', \rho')$ dos categorías monoidales. Un **functor monoidal fuerte** de \mathcal{C} a \mathcal{C}' es una terna (F, ψ, ψ_0) donde

- $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ es un functor,
- $\psi : \diamond'(F \times F) \Rightarrow F(\diamond)$ es un isomorfismo natural, dado en objetos por isomorfismos en \mathcal{C}'

$$\psi_{A,B} : F(A) \diamond' F(B) \rightarrow F(A \diamond B),$$

- $\psi_0 : I' \rightarrow F(I)$ es un isomorfismo en \mathcal{C}' ,

tales que para todos $A, B, C \in \mathcal{C}$ conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} (F(A) \diamond' F(B)) \diamond' F(C) & \xrightarrow{\Phi'_{F(A),F(B),F(C)}} & F(A) \diamond' (F(B) \diamond' F(C)) \\ \psi_{A,B} \diamond' \text{id}_{F(C)} \downarrow & & \downarrow \text{id}_{F(A)} \diamond' \psi_{B,C} \\ F(A \diamond B) \diamond' F(C) & & F(A) \diamond' F(B \diamond C) \\ \psi_{A \diamond B, C} \downarrow & & \downarrow \psi_{A, B \diamond C} \\ F((A \diamond B) \diamond C) & \xrightarrow{F(\Phi_{A,B,C})} & F(A \diamond (B \diamond C)), \end{array}$$

y tales que para todo $A \in \mathcal{C}$ conmutan los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccccc} I' \diamond' F(A) & \xrightarrow{\lambda'_{F(A)}} & F(A) & \xleftarrow{\rho'_{F(A)}} & F(A) \diamond' I' \\ \psi_0 \diamond' \text{id}_{F(A)} \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \text{id}_{F(A)} \diamond' \psi_0 \\ F(I) \diamond' F(A) & & & & F(A) \diamond' F(I) \\ \psi_{I,A} \downarrow & \nearrow F(\lambda_A) & & \nwarrow F(\rho_A) & \downarrow \psi_{A,I} \\ F(I \diamond A) & & & & F(A \diamond I). \end{array}$$

A continuación, para los casos de cohomología de grupos y de especies, mostraremos categorías monoidales con sus asociadores “usuales”, cuya estructura torceremos mediante 3-cociclos, y encontraremos funtores monoidales fuertes entre torcimientos por 3-cociclos que difieran en un 3-coborde.

4.2.1. En cohomología de grupos

Sea (Γ, \cdot, e) un grupo. En esta parte repasaremos un resultado sobre el uso de 3-cociclos para torcer el asociador usual de la categoría de espacios Γ -graduados.

Definición 4.2.3. Llamamos Vect_Γ a la categoría cuyos objetos son los espacios vectoriales Γ -graduados,

$$V = \bigoplus_{g \in \Gamma} V_g,$$

y cuyos morfismos son las transformaciones lineales que preservan graduación,

$$f : V \rightarrow W : f(V_g) \subseteq W_g, \forall g \in \Gamma.$$

Observar que si U y V son dos espacios vectoriales Γ -graduados, entonces $U \otimes V$ también es Γ -graduado:

$$U \otimes V = \bigoplus_{g \in \Gamma} (U \otimes V)_g, \text{ donde } (U \otimes V)_g = \bigoplus_{\substack{a, b \in \Gamma \\ ab=g}} U_a \otimes V_b.$$

Claramente \mathbb{k} es Γ -graduado con $\mathbb{k}_e = \mathbb{k}$ y $\mathbb{k}_g = 0$ si $g \neq e$. Además, el asociador usual $\Phi_{U,V,W} : (U \otimes V) \otimes W \rightarrow U \otimes (V \otimes W)$, y los isomorfismos $\lambda_V : V \otimes \mathbb{k} \rightarrow V$ y $\rho_V : \mathbb{k} \otimes V \rightarrow V$ preservan graduación.

Por lo tanto tenemos que $(\text{Vect}_\Gamma, \otimes, \mathbb{k}, \Phi, \lambda, \rho)$ es una categoría monoidal.

Proposición 4.2.4. Sean $q \in \mathbb{k}$ invertible y $\alpha : \Gamma \times \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$ una 3-cocadena. Consideremos la transformación natural Φ^α tal que dados $U, V, W \in \text{Vect}_\Gamma$, $\Phi_{U,V,W}^\alpha : (U \otimes V) \otimes W \rightarrow U \otimes (V \otimes W)$ es el morfismo en Vect_Γ dado por

$$\Phi_{U,V,W}^\alpha((u \otimes v) \otimes w) = q^{\alpha(a,b,c)} u \otimes (v \otimes w), \forall u \in U_a, v \in V_b, w \in W_c.$$

Entonces:

- Si α es un 3-cociclo, Φ^α verifica el diagrama pentagonal.
- Si q no es una raíz de la unidad en \mathbb{k} , vale el recíproco de la afirmación anterior.
- Si α es un 3-cociclo, sean λ^α y ρ^α transformaciones naturales tales que $\lambda_U^\alpha : \mathbb{k} \otimes U \rightarrow U$ y $\rho_U^\alpha : U \otimes \mathbb{k} \rightarrow U$ quedan respectivamente definidas por

$$\lambda_U^\alpha(t \otimes u) = q^{-\alpha(e,e,a)} tu, \quad \forall t \in \mathbb{k}, u \in U_a,$$

$$\rho_U^\alpha(u \otimes t) = q^{\alpha(a,e,e)} tu, \quad \forall t \in \mathbb{k}, u \in U_a.$$

Entonces Φ^α , λ^α y ρ^α verifican el diagrama triangular.

Demostración: Si α es un 3-cociclo, para todos $a, b, c, d \in \Gamma$ vale la siguiente igualdad

$$\alpha(b, c, d) - \alpha(ab, c, d) + \alpha(a, bc, d) - \alpha(a, b, cd) + \alpha(a, b, c) = 0. \quad (4.2)$$

Dados $U, V, W, X \in \text{Vect}_\Gamma$, el diagrama pentagonal que debe verificar Φ^α es el siguiente

$$\begin{array}{ccc} ((U \otimes V) \otimes W) \otimes X & \xrightarrow{\Phi_{U \otimes V, W, X}^\alpha} & (U \otimes V) \otimes (W \otimes X) \xrightarrow{\Phi_{U, V, W \otimes X}^\alpha} U \otimes (V \otimes (W \otimes X)) \\ \Phi_{U, V, W}^\alpha \otimes \text{id}_X \downarrow & & \uparrow \text{id}_U \otimes \Phi_{V, W, X}^\alpha \\ (U \otimes (V \otimes W)) \otimes X & \xrightarrow{\Phi_{U, V \otimes W, X}^\alpha} & U \otimes ((V \otimes W) \otimes X). \end{array}$$

Para todos $a, b, c, d \in \Gamma$, evaluando ambas composiciones en un tensor elemental de elementos homogéneos $((u \otimes v) \otimes w) \otimes x$, donde $u \in U_a, v \in V_b, w \in W_c, x \in X_d$, la conmutatividad del diagrama es equivalente a

$$q^{\alpha(ab, c, d) + \alpha(a, b, cd)} = q^{\alpha(a, b, c) + \alpha(a, bc, d) + \alpha(b, c, d)},$$

la cual se deduce inmediatamente de la ecuación (4.2). Si además q no es una raíz de la unidad, la implicancia recíproca también es cierta.

Ahora, dados $U, V \in \text{Vect}_\Gamma$, el diagrama triangular a verificar por $\Phi^\alpha, \lambda^\alpha$ y ρ^α es el siguiente

$$\begin{array}{ccc} (U \otimes \mathbb{k}) \otimes V & \xrightarrow{\Phi_{U, \mathbb{k}, V}^\alpha} & U \otimes (\mathbb{k} \otimes V) \\ & \searrow \rho_U^\alpha \otimes \text{id}_V & \downarrow \text{id}_U \otimes \lambda_V^\alpha \\ & & U \otimes V. \end{array}$$

Para todos $a, b \in \Gamma$, evaluando ambas composiciones en un tensor elemental de elementos homogéneos $(u \otimes t) \otimes v$, donde $u \in U_a, v \in V_b, t \in \mathbb{k} = \mathbb{k}_e$, la conmutatividad del diagrama es equivalente a

$$q^{\alpha(a, e, b) - \alpha(e, e, b)} = q^{\alpha(a, e, e)},$$

la cual se deduce inmediatamente de la ecuación (4.2) evaluada en los elementos a, e, e, b . □

En consecuencia, si α es un 3-cociclo, $(\text{Vect}_\Gamma, \otimes, \mathbb{k}, \Phi^\alpha, \lambda^\alpha, \rho^\alpha)$ es una categoría monoidal. Decimos que la categoría monoidal $(\text{Vect}_\Gamma, \otimes, \mathbb{k}, \Phi^\alpha, \lambda^\alpha, \rho^\alpha)$ es un **q -torcimiento** de la categoría monoidal $(\text{Vect}_\Gamma, \otimes, \mathbb{k}, \Phi, \lambda, \rho)$.

Proposición 4.2.5. Sean α, α' son dos 3-cociclos tales que $\alpha = \alpha' + d\eta$ para cierta 2-cocadena $\eta : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$. Si q es invertible, sea $\psi^\eta : \otimes \Rightarrow \otimes$ la transformación natural dada por

$$\psi_{U, V}^\eta(u \otimes v) = q^{\eta(a, b)} u \otimes v, \quad \forall u \in U_a, v \in V_b,$$

y sea $\psi_0^\eta : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$ definida por

$$\psi_0^\eta(t) = q^{-\eta(e,e)}t, \quad \forall t \in \mathbb{k}.$$

Entonces la terna $(\text{id}_{\text{Vect}_\Gamma}, \psi^\eta, \psi_0^\eta)$ es un functor monoidal fuerte entre las categorías monoidales $(\text{Vect}_\Gamma, \otimes, \mathbb{k}, \Phi^\alpha, \lambda^\alpha, \rho^\alpha)$ y $(\text{Vect}_\Gamma, \otimes, \mathbb{k}, \Phi^{\alpha'}, \lambda^{\alpha'}, \rho^{\alpha'})$. Además, al ser el functor la identidad, $(\text{id}_{\text{Vect}_\Gamma}, \psi^\eta, \psi_0^\eta)$ resulta una equivalencia de categorías monoidales.

Demostración: Dados $U, V, W \in \text{Vect}_\Gamma$, el diagrama de compatibilidad de ψ^η con los asociadores es el siguiente

$$\begin{array}{ccc} (U \otimes V) \otimes W & \xrightarrow{\Phi_{U,V,W}^{\alpha'}} & U \otimes (V \otimes W) \\ \psi_{U,V}^\eta \otimes \text{id}_W \downarrow & & \downarrow \text{id}_U \otimes \psi_{V,W}^\eta \\ (U \otimes V) \otimes W & & U \otimes (V \otimes W) \\ \psi_{U \otimes V, W}^\eta \downarrow & & \downarrow \psi_{U, V \otimes W}^\eta \\ (U \otimes V) \otimes W & \xrightarrow{\Phi_{U,V,W}^\alpha} & U \otimes (V \otimes W). \end{array}$$

Para todos $a, b, c \in \Gamma$, evaluando ambas composiciones en un tensor elemental de elementos homogéneos $(u \otimes v) \otimes w$, donde $u \in U_a, v \in V_b, w \in W_c$, la conmutatividad del diagrama es equivalente a

$$q^{\alpha'(a,b,c) + \eta(b,c) + \eta(a,bc)} = q^{\eta(a,b) + \eta(ab,c) + \alpha(a,b,c)},$$

lo cual se deduce inmediatamente de evaluar la igualdad $\alpha = \alpha' + d\eta$ en los elementos a, b, c .

Ahora, dado $U \in \text{Vect}_\Gamma$, el diagrama de compatibilidad para ψ_0^η es el siguiente

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{k} \otimes U & \xrightarrow{\lambda_U^{\alpha'}} & U & \xleftarrow{\rho_U^{\alpha'}} & U \otimes \mathbb{k} \\ \psi_0^\eta \otimes \text{id}_U \downarrow & & \nearrow & & \downarrow \text{id}_U \otimes \psi_0^\eta \\ \mathbb{k} \otimes U & & & & U \otimes \mathbb{k} \\ \psi_{\mathbb{k}, U}^\eta \downarrow & & \nearrow \lambda_U^\alpha & & \searrow \rho_U^\alpha \\ \mathbb{k} \otimes U & & & & U \otimes \mathbb{k} \\ & & & & \downarrow \psi_{U, \mathbb{k}}^\eta \\ & & & & U \otimes \mathbb{k}. \end{array}$$

Para todo $a \in \Gamma$, evaluando en un tensor elemental de elementos homogéneos $t \otimes u$, donde $t \in \mathbb{k} = \mathbb{k}_e, u \in U_a$, la conmutatividad de la parte izquierda del diagrama es equivalente a

$$q^{-\alpha'(e,e,a)} = q^{-\eta(e,e) + \eta(e,a) - \alpha(e,e,a)},$$

lo cual se deduce inmediatamente de evaluar la igualdad $\alpha = \alpha' + d\eta$ en los elementos e, e, a .

Para todo $a \in \Gamma$, evaluando en un tensor elemental de elementos homogéneos $u \otimes t$,

donde $u \in U_a, t \in \mathbb{k} = \mathbb{k}_e$, la conmutatividad de la parte derecha del diagrama es equivalente a

$$q^{\alpha'(a,e,e)} = q^{-\eta(e,e)+\eta(a,e)+\alpha(a,e,e)},$$

lo cual se deduce inmediatamente de evaluar la igualdad $\alpha = \alpha' + d\eta$ en los elementos a, e, e . \square

Corolario 4.2.6. *La asignación $\alpha \mapsto (\text{Vect}_\Gamma, \otimes, \mathbb{k}, \Phi^\alpha, \lambda^\alpha, \rho^\alpha)$ induce una función que lleva elementos de $H^3(\Gamma, \mathbb{Z})$ en clases de equivalencia por funtores monoidales fuertes de los q -torcimientos de la categoría monoidal $(\text{Vect}_\Gamma, \otimes, \mathbb{k}, \Phi, \lambda, \rho)$.*

4.2.2. En cohomología de especies

Lo primero que haremos en esta parte es mostrar un contexto análogo al de los espacios vectoriales graduados sobre un grupo. Vamos a definir una categoría monoidal que luego torceremos con 3-cociclos.

Definición 4.2.7. Sea P una especie conjuntista. La categoría de **elementos de P** , que llamaremos $\text{El}(P)$, es la categoría que tiene por objetos los pares (I, z) para cada conjunto finito I y cada $z \in P[I]$, y los siguientes morfismos:

$$\text{Hom}_{\text{El}(P)}((I, z), (J, w)) = \{\sigma : I \rightarrow J \text{ biyección} : P[\sigma](z) = w\}.$$

La categoría de **especies P -graduadas**, que llamaremos Sp_P , es la categoría de funtores de $\text{El}(P)$ a $\text{Vect}_{\mathbb{k}}$.

Observación 4.2.8. Concretamente, dar una especie P -graduada \mathbf{V} es dar para cada conjunto finito I y cada $z \in P[I]$ un espacio vectorial $\mathbf{V}[I, z]$, y para cada morfismo $\sigma \in \text{Hom}_{\text{El}(P)}((I, z), (J, w))$ una transformación lineal $\mathbf{V}[\sigma]$, tales que se respeten las identidades y la composición como en la observación 1.1.2.

Observación 4.2.9. Si \mathbf{V} es una especie P -graduada, podemos definir una especie, que llamaremos también \mathbf{V} , de la siguiente forma:

- $\mathbf{V}[I] = \bigoplus_{z \in P[I]} \mathbf{V}[I, z]$, para cada I ;
- $\mathbf{V}[\sigma] = \bigoplus_{z \in P[I]} \mathbf{V}[\sigma_z]$, para cada $\sigma : I \rightarrow J$, donde σ_z es σ vista como elemento de $\text{Hom}_{\text{El}(P)}((I, z), (J, P[\sigma](z)))$.

Esto nos permite pensar una especie P -graduada como una especie \mathbf{V} en donde para cada I el espacio $\mathbf{V}[I]$ está graduado por el conjunto $P[I]$, y tal que para cada σ la transformación lineal $\mathbf{V}[\sigma]$ lleva componentes homogéneas en componentes homogéneas, induciendo la misma biyección que $P[\sigma]$.

Definición 4.2.10. Si P es un comonoide conjuntista, esto es, $(\mathbf{p} = \mathbb{k}P, \Delta, \varepsilon)$ es un comonoide linealizado, podemos definir una estructura monoidal en Sp_P . Dadas dos especies P -graduadas \mathbf{V} y \mathbf{W} , la especie P -graduada $\mathbf{V} * \mathbf{W}$ viene dada por

- $(\mathbf{V} * \mathbf{W})[I, z] = \bigoplus_{S \subseteq I} \mathbf{V}[S, z|_S] \otimes \mathbf{W}[I \setminus S, z/S]$, para cada I y cada $z \in P[I]$;
- $(\mathbf{V} * \mathbf{W})[\sigma] = \bigoplus_{S \subseteq I} \mathbf{V}[\sigma_S] \otimes \mathbf{W}[\sigma_{I \setminus S}]$, para cada $\sigma \in \text{Hom}_{\text{El}(P)}((I, z), (J, w))$,

donde por la naturalidad de la comultiplicación (igualdades (1.6) y (1.7)) podemos considerar $\sigma_S \in \text{Hom}_{\text{El}(P)}((S, z|_S), (\sigma(S), w|_{\sigma(S)}))$ y $\sigma_{I \setminus S} \in \text{Hom}_{\text{El}(P)}((I \setminus S, z/S), (\sigma(I \setminus S), w|_{\sigma(I \setminus S)}))$.

Dados morfismos de especies P -graduadas $f : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$, $g : \mathbf{W}_1 \rightarrow \mathbf{W}_2$, definimos $f * g : \mathbf{V}_1 * \mathbf{W}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2 * \mathbf{W}_2$ como

$$(f * g)[I, z] = \bigoplus_{S \subseteq I} f[S, z|_S] \otimes g[I \setminus S, z/S].$$

Para definir el asociador, dadas $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W} \in \text{Sp}_P$ escribamos el resultado de las dos formas de multiplicarlas:

$$\begin{aligned} ((\mathbf{U} * \mathbf{V}) * \mathbf{W})[I, z] &= \bigoplus_{T \subseteq I} (\mathbf{U} * \mathbf{V})[I \setminus T, z|_{I \setminus T}] \otimes \mathbf{W}[T, z/I \setminus T] \\ &= \bigoplus_{R \sqcup S \sqcup T = I} (\mathbf{U}[R, (z|_{R \sqcup S})|_R] \otimes \mathbf{V}[S, (z|_{R \sqcup S})/R]) \otimes \mathbf{W}[T, z/R \sqcup S]; \\ (\mathbf{U} * (\mathbf{V} * \mathbf{W})) [I, z] &= \bigoplus_{R \subseteq I} \mathbf{U}[R, z|_R] \otimes (\mathbf{V} * \mathbf{W})[I \setminus R, z/R] \\ &= \bigoplus_{R \sqcup S \sqcup T = I} \mathbf{U}[R, z|_R] \otimes (\mathbf{V}[S, (z/R)|_S] \otimes \mathbf{W}[T, (z/R)/S]). \end{aligned}$$

Notemos que, por las igualdades de la Observación 1.3.8 provenientes de la coasociatividad de Δ , los sumandos de cada expresión correspondientes a la misma descomposición $I = R \sqcup S \sqcup T$ son iguales salvo un cambio de paréntesis, con lo cual podemos definir un asociador $\Phi_{\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}}$ que en cada componente es el asociador usual de $\text{Vect}_{\mathbb{k}}$. Esto es, $\Phi_{\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}}((u \otimes v) \otimes w) = u \otimes (v \otimes w)$.

El neutro de este producto es la especie P -graduada que denominamos $\mathbb{1}_P$, definida de la siguiente manera:

- $\mathbb{1}[\emptyset, z] = \mathbb{k}$ para todo $z \in P[\emptyset]$ y $\mathbb{1}[I, z] = 0$ siempre que $I \neq \emptyset$;
- $\mathbb{1}[\text{id}_{\emptyset}] = \text{id}_{\mathbb{k}}$ y $\mathbb{1}[\sigma] = 0$ para toda $\sigma \in \text{Hom}_{\text{El}(P)}((I, z), (J, w))$ si $I \neq \emptyset$.

Dada una especie P -graduada \mathbf{U} ,

$$(\mathbb{1}_P * \mathbf{U})[I, z] = \bigoplus_{S \subseteq I} \mathbb{1}_P[S, z|_S] \otimes \mathbf{U}[I \setminus S, z/S] = \mathbb{k} \otimes \mathbf{U}[I, z],$$

con lo cual para definir $\lambda_{\mathbf{U}} : \mathbb{1}_P * \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$ alcanza con definir $\lambda_{\mathbf{U}}(t \otimes u) = tu$, $\forall u \in \mathbf{U}[I, z], t \in \mathbb{k}$.

De la misma forma,

$$(\mathbf{U} * \mathbb{1}_P)[I, z] = \bigoplus_{S \subseteq I} \mathbf{U}[S, z|_S] \otimes \mathbb{1}_P[I \setminus S, z/S] = \mathbf{U}[I, z] \otimes \mathbb{k},$$

con lo cual para definir $\rho_{\mathbf{U}} : \mathbf{U} * \mathbb{1}_P \rightarrow \mathbf{U}$ alcanza con definir $\rho_{\mathbf{U}}(u \otimes t) = tu$, $\forall u \in \mathbf{U}[I, z], t \in \mathbb{k}$.

Es fácil deducir que $(\text{Sp}_P, *, \mathbb{1}_P, \Phi, \lambda, \rho)$ es una categoría monoidal, dado que su estructura monoidal es “componente a componente” la de $(\text{Vect}_{\mathbb{k}}, \otimes, \mathbb{k}, \Phi, \lambda, \rho)$. Esta es la estructura monoidal que vamos a torcer mediante 3-cociclos.

Proposición 4.2.11. *Sean $q \in \mathbb{k}$ invertible y $\alpha \in C^3(P, \mathbb{Z})$ una 3-cocadena. Consideremos la transformación natural Φ^α tal que dados $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W} \in \text{Sp}_P$, $\Phi_{\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}}^\alpha : (\mathbf{U} * \mathbf{V}) * \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{U} * (\mathbf{V} * \mathbf{W})$ es el morfismo en Sp_P dado por*

$$\Phi_{\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}}^\alpha((u \otimes v) \otimes w) = q^{\alpha_{R, S, T}(z)} u \otimes (v \otimes w),$$

$$\forall u \in \mathbf{U}[R, (z|_{R \sqcup S})|_R], v \in \mathbf{V}[S, (z/R)|_S], w \in \mathbf{W}[T, z/R \sqcup S].$$

Entonces:

- Si α es un 3-cociclo, Φ^α verifica el diagrama pentagonal.
- Si q no es una raíz de la unidad en \mathbb{k} , vale el recíproco de la afirmación anterior.
- Si α es un 3-cociclo, sean λ^α y ρ^α transformaciones naturales tales que $\lambda_{\mathbf{U}}^\alpha : \mathbb{1}_P * \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$ y $\rho_{\mathbf{U}}^\alpha : \mathbf{U} * \mathbb{1}_P \rightarrow \mathbf{U}$ quedan respectivamente definidas por

$$\lambda_{\mathbf{U}}^\alpha(t \otimes u) = q^{-\alpha_{\emptyset, \emptyset, I}(z)} tu, \quad \forall t \in \mathbb{k}, u \in \mathbf{U}[I, z],$$

$$\rho_{\mathbf{U}}^\alpha(u \otimes t) = q^{\alpha_{I, \emptyset, \emptyset}(z)} tu, \quad \forall t \in \mathbb{k}, u \in \mathbf{U}[I, z].$$

Entonces Φ^α , λ^α y ρ^α verifican el diagrama triangular.

Demostración: Por un lado, que α sea un 3-cociclo es equivalente a que para toda descomposición $I = Q \sqcup R \sqcup S \sqcup T$ y todo $z \in P[I]$ se verifique

$$\alpha_{R, S, T}(z/Q) - \alpha_{Q \sqcup R, S, T}(z) + \alpha_{Q, R \sqcup S, T}(z) - \alpha_{Q, R, S \sqcup T}(z) + \alpha_{Q, R, S}(z|_{Q \sqcup R \sqcup S}) = 0. \quad (4.3)$$

Por otro lado, dadas $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{X} \in \text{Sp}_P$ el diagrama pentagonal a verificar es el siguiente:

$$\begin{array}{ccc} ((\mathbf{U} * \mathbf{V}) * \mathbf{W}) * \mathbf{X} & \xrightarrow{\Phi_{\mathbf{U} * \mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{X}}^\alpha} & (\mathbf{U} * \mathbf{V}) * (\mathbf{W} * \mathbf{X}) \xrightarrow{\Phi_{\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W} * \mathbf{X}}^\alpha} \mathbf{U} * (\mathbf{V} * (\mathbf{W} * \mathbf{X})) \\ \Phi_{\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}}^\alpha * \text{id}_{\mathbf{X}} \downarrow & & \uparrow \text{id}_{\mathbf{U}} * \Phi_{\mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{X}}^\alpha \\ (\mathbf{U} * (\mathbf{V} * \mathbf{W})) * \mathbf{X} & \xrightarrow{\Phi_{\mathbf{U}, \mathbf{V} * \mathbf{W}, \mathbf{X}}^\alpha} & \mathbf{U} * ((\mathbf{V} * \mathbf{W}) * \mathbf{X}). \end{array}$$

Tomando componentes (I, z) , una descomposición $I = Q \sqcup R \sqcup S \sqcup T$ y evaluando en un tensor elemental $((u \otimes v) \otimes w) \otimes x \in ((\mathbf{U}[Q, ((z|_{Q \sqcup R \sqcup S})|_{Q \sqcup R})|_Q] \otimes \mathbf{V}[R, ((z|_{Q \sqcup R \sqcup S})|_{Q \sqcup R})/Q]) \otimes \mathbf{W}[S, (z|_{Q \sqcup R \sqcup S})/Q \sqcup R]) \otimes \mathbf{X}[T, z/Q \sqcup R \sqcup S]$, la conmutatividad del diagrama es equivalente a

$$q^{\alpha_{Q \sqcup R, S, T}(z) + \alpha_{Q, R, S \sqcup T}(z)} = q^{\alpha_{Q, R, S}(z|_{Q \sqcup R \sqcup S}) + \alpha_{Q, R \sqcup S, T}(z) + \alpha_{R, S, T}(z/Q)}$$

Es inmediato ver que la ecuación (4.3) implica estas igualdades, y que además si q no es una raíz de la unidad también se cumple la implicancia recíproca. Ahora, dadas $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \text{Sp}_P$, el diagrama triangular a verificar por $\Phi^\alpha, \lambda^\alpha$ y ρ^α es el siguiente

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{U} * \mathbb{1}_P) * \mathbf{V} & \xrightarrow{\Phi_{\mathbf{U}, \mathbb{1}_P, \mathbf{V}}^\alpha} & \mathbf{U} * (\mathbb{1}_P * \mathbf{V}) \\ & \searrow \rho_{\mathbf{U}}^\alpha * \text{id}_{\mathbf{V}} & \downarrow \text{id}_{\mathbf{U}} * \lambda_{\mathbf{V}}^\alpha \\ & & \mathbf{U} * \mathbf{V}. \end{array}$$

Tomando componentes (I, z) y una descomposición $I = S \sqcup \emptyset \sqcup T$ y evaluando ambas composiciones en un tensor elemental $(u \otimes t) \otimes v$, donde $u \in \mathbf{U}[S, z|_S], t \in \mathbb{1}_P[\emptyset, (z/S)|_\emptyset], v \in \mathbf{V}[T, z/S]$, la conmutatividad del diagrama es equivalente a

$$q^{\alpha_{S, \emptyset, T}(z) - \alpha_{\emptyset, \emptyset, T}(z/S)} = q^{\alpha_{S, \emptyset, \emptyset}(z|_S)},$$

la cual se deduce inmediatamente de la ecuación (4.3) evaluada en $z \in P[I]$ para una descomposición $I = S \sqcup \emptyset \sqcup \emptyset \sqcup T$. □

En consecuencia, si α es un 3-cociclo, $(\text{Sp}_P, *, \mathbb{1}_P, \Phi^\alpha, \lambda^\alpha, \rho^\alpha)$ es una categoría monoidal. Decimos que la categoría monoidal $(\text{Sp}_P, *, \mathbb{1}_P, \Phi^\alpha, \lambda^\alpha, \rho^\alpha)$ es un q -**torcimiento** de la categoría monoidal $(\text{Sp}_P, *, \mathbb{1}_P, \Phi, \lambda, \rho)$.

Proposición 4.2.12. *Sean α, α' son dos 3-cociclos tales que $\alpha = \alpha' + d\eta$ para cierta 2-cocadena $\eta \in C^2(P, \mathbb{Z})$. Si q es invertible, sea $\psi^\eta : * \Rightarrow *$ la transformación natural dada por*

$$\psi_{\mathbf{U}, \mathbf{V}}^\eta(u \otimes v) = q^{\eta_{S, T}(z)} u \otimes v, \quad \forall u \in \mathbf{U}[S, z|_S], v \in \mathbf{V}[T, z/S],$$

y sea $\psi_0^\eta : \mathbb{1}_P \rightarrow \mathbb{1}_P$ definida por

$$\psi_0^\eta(t) = q^{-\eta_{\emptyset, \emptyset}(z)} t, \quad \forall t \in \mathbb{1}_P[\emptyset, z].$$

Entonces la terna $(\text{id}_{\text{Sp}_P}, \psi^\eta, \psi_0^\eta)$ es un functor monoidal fuerte entre las categorías monoidales $(\text{Sp}_P, *, \mathbb{1}_P, \Phi^\alpha, \lambda^\alpha, \rho^\alpha)$ y $(\text{Sp}_P, *, \mathbb{1}_P, \Phi^{\alpha'}, \lambda^{\alpha'}, \rho^{\alpha'})$. Además, al ser el functor la identidad, $(\text{id}_{\text{Sp}_P}, \psi^\eta, \psi_0^\eta)$ resulta una equivalencia de categorías monoidales.

Demostración: Dadas $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W} \in \text{Sp}_P$, el diagrama de compatibilidad de ψ^η con los asociadores es el siguiente

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{U} * \mathbf{V}) * \mathbf{W} & \xrightarrow{\Phi_{\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}}^{\alpha'}} & \mathbf{U} * (\mathbf{V} * \mathbf{W}) \\ \psi_{\mathbf{U}, \mathbf{V}}^\eta * \text{id}_{\mathbf{W}} \downarrow & & \downarrow \text{id}_{\mathbf{U}} * \psi_{\mathbf{V}, \mathbf{W}}^\eta \\ (\mathbf{U} * \mathbf{V}) * \mathbf{W} & & \mathbf{U} * (\mathbf{V} * \mathbf{W}) \\ \psi_{\mathbf{U} * \mathbf{V}, \mathbf{W}}^\eta \downarrow & & \downarrow \psi_{\mathbf{U}, \mathbf{V} * \mathbf{W}}^\eta \\ (\mathbf{U} * \mathbf{V}) * \mathbf{W} & \xrightarrow{\Phi_{\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}}^\alpha} & \mathbf{U} * (\mathbf{V} * \mathbf{W}). \end{array}$$

Tomando componentes (I, z) y evaluando ambas composiciones en un tensor elemental $(u \otimes v) \otimes w$, donde $u \in \mathbf{U}[R, (z|_{R \sqcup S})|_R]$, $v \in \mathbf{V}[S, (z/R)|_S]$, $w \in \mathbf{W}[T, z/R \sqcup S]$, la conmutatividad del diagrama es equivalente a

$$q^{\alpha'_{R,S,T}(z) + \eta_{S,T}(z/R) + \eta_{R,S \sqcup T}(z)} = q^{\eta_{R,S}(z/R \sqcup S) + \eta_{R \sqcup S,T}(z) + \alpha_{R,S,T}(z)},$$

lo cual se deduce inmediatamente de evaluar la igualdad $\alpha = \alpha' + d\eta$ en $z \in P[I]$ para una descomposición $I = R \sqcup S \sqcup T$.

Ahora, dada $\mathbf{U} \in \text{Sp}_P$, el diagrama de compatibilidad para ψ_0^η es el siguiente

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1}_P * U & \xrightarrow{\lambda_U^{\alpha'}} & U & \xleftarrow{\rho_U^{\alpha'}} & U * \mathbb{1}_P \\ \psi_0^\eta * \text{id}_U \downarrow & & & & \downarrow \text{id}_U * \psi_0^\eta \\ \mathbb{1}_P * U & & & & U * \mathbb{1}_P \\ \psi_{\mathbb{1}_P, U}^\eta \downarrow & \nearrow \lambda_U^\alpha & & \nwarrow \rho_U^\alpha & \downarrow \psi_{U, \mathbb{1}_P}^\eta \\ \mathbb{1}_P * U & & & & U * \mathbb{1}_P. \end{array}$$

Tomando componentes (I, z) y evaluando en un tensor elemental $t \otimes u$, donde $t \in \mathbb{1}_P[\emptyset, z|\emptyset]$, $u \in \mathbf{U}[I, z]$, la conmutatividad de la parte izquierda del diagrama es equivalente a

$$q^{-\alpha'_{\emptyset, \emptyset, I}(z)} = q^{-\eta_{\emptyset, \emptyset}(z|\emptyset) + \eta_{\emptyset, I}(z) - \alpha_{\emptyset, \emptyset, I}(z)},$$

lo cual se deduce inmediatamente de evaluar la igualdad $\alpha = \alpha' + d\eta$ en $z \in P[I]$ para la descomposición $I = \emptyset \sqcup \emptyset \sqcup I$.

Tomando componentes (I, z) y evaluando en un tensor elemental $u \otimes t$, donde $u \in \mathbf{U}[I, z]$, $t \in \mathbb{1}_P[\emptyset, z/I]$, la conmutatividad de la parte derecha del diagrama es equivalente a

$$q^{\alpha'_{I, \emptyset, \emptyset}(z)} = q^{-\eta_{\emptyset, \emptyset}(z/I) + \eta_{I, \emptyset}(z) + \alpha_{I, \emptyset, \emptyset}(z)},$$

lo cual se deduce inmediatamente de evaluar la igualdad $\alpha = \alpha' + d\eta$ en $z \in P[I]$ para la descomposición $I = I \sqcup \emptyset \sqcup \emptyset$. \square

Corolario 4.2.13. *La asignación $\alpha \mapsto (\text{Sp}_P, *, \mathbb{1}_P, \Phi^\alpha, \lambda^\alpha, \rho^\alpha)$ induce una función que lleva elementos de $H^3(P, \mathbb{Z})$ en clases de equivalencia por funtores monoidales fuertes de los q -torcimientos de la categoría monoidal $(\text{Sp}_P, *, \mathbb{1}_P, \Phi, \lambda, \rho)$.*

Ejemplo 4.2.14. Consideremos el comonoide $\mathbf{E} = \mathbb{k}E$. Los objetos de la categoría $\text{El}(E)$ son simplemente pares $(I, *_I)$ para cada conjunto finito I , y toda biyección $\sigma : I \rightarrow J$ cumple que $E[\sigma](*_I) = *_J$, con lo cual para todo $I, J \in \text{Set}^\times$ vale que $\text{Hom}_{\text{El}(E)}((I, *_I), (J, *_J)) \simeq \text{Hom}_{\text{Set}^\times}(I, J)$, esto es, las categorías $\text{El}(E)$ y Set^\times son isomorfas. Tomando categorías de funtores de estas especies a $\text{Vect}_{\mathbb{k}}$, obtenemos que las categorías Sp_E y $\text{Sp}_{\mathbb{k}}$ son isomorfas. Identificando objetos de una y de otra, además se puede verificar que para todo par de objetos \mathbf{V}, \mathbf{W} vale que $\mathbf{V} * \mathbf{W} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{W}$, y que $\mathbb{1}_E = \mathbb{1}$.

Por otra parte, del cálculo de la cohomología de \mathbf{E} en el Ejemplo 3.2.3 obtenemos que $H^3(E, \mathbb{Z}) = 0$, por lo cual la estructura monoidal de Sp_E no admite q -torcimientos no triviales. En consecuencia, no se puede torcer no trivialmente de esta forma el asociador usual del producto de Cauchy en $\text{Sp}_{\mathbb{k}}$.

Capítulo 5

Producto cup.

En varios contextos donde existe una noción de cohomología (por ejemplo grupos y espacios topológicos), se tiene también un producto llamado “producto cup”, $\cup : H^n \times H^m \rightarrow H^{n+m}$, que le da a $H = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H^n$ estructura de anillo graduado. Las primeras definiciones de este producto aparecieron en los trabajos de Eilenberg y Mac Lane ([EM47]), Whitney ([Whi38]) y Čech ([Čec37]).

Sea X un anillo cosimplicial dado por anillos $\{(C^n, \mu_n, 1_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ y morfismos de anillos $\{\partial_n^i\}_{n \in \mathbb{N}, i \in [n+1]}$, $\{\sigma_n^i\}_{n \in \mathbb{N}, i \in [n]}$. En este capítulo mostraremos cómo definir un producto con el cual el complejo de cocadenas asociado tiene estructura de anillo diferencial graduado. Esto induce un producto en la cohomología asociada al complejo, que llamamos producto cup. En particular, al final veremos el caso de la cohomología de un comonoide linealizado en especies.

5.1. Definición del producto cup.

Comencemos considerando para cada par $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ los morfismos $\iota_{n,m} : C^n \rightarrow C^{n+m}$ y $\tau_{n,m} : C^m \rightarrow C^{n+m}$ dados por

$$\begin{aligned}\iota_{n,m} &= \partial_{n+m-1}^{n+m} \circ \cdots \circ \partial_{n+1}^{n+2} \circ \partial_n^{n+1}, \\ \tau_{n,m} &= \partial_{m+n-1}^0 \circ \cdots \circ \partial_{m+1}^0 \circ \partial_m^0.\end{aligned}$$

Esto es, $\iota_{n,m}$ es la imagen por el functor X de la única función estrictamente creciente que manda el conjunto $[n]$ en $\{0, \dots, n\} \subseteq [n+m]$, y $\tau_{n,m}$ es la imagen por el functor X de la función estrictamente creciente que manda el conjunto $[m]$ en $\{m, \dots, n+m\} \subseteq [n+m]$.

De las relaciones verificadas por las cocaras y codegeneraciones de la Proposición 2.1.6, obtenemos que

$$\partial_{n+m}^i \circ \iota_{n,m} = \begin{cases} \iota_{n+1,m} \circ \partial_n^i & \text{si } i \leq n+1 \\ \iota_{n,m+1} & \text{si } i \geq n, \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\partial_{n+m}^i \circ \tau_{n,m} = \begin{cases} \tau_{n,m+1} \circ \delta_m^{i-n} & \text{si } i \geq n \\ \tau_{n+1,m} & \text{si } i \leq n. \end{cases} \quad (5.2)$$

Definición 5.1.1. Para cada par $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definimos el producto $\cup_{n,m} : C^n \times C^m \rightarrow C^{n+m}$ mediante la igualdad

$$\cup_{n,m} = \mu_{m+n} \circ (\iota_{n,m} \otimes \tau_{n,m}).$$

Mientras no genere confusión, escribiremos \cup en vez de $\cup_{n,m}$. Si escribimos $\mu_{n+m}(x \otimes y) = xy$, dados $\alpha \in C^n$ and $\beta \in C^m$ vale que

$$\alpha \cup \beta = \iota_{n,m}(\alpha)\tau_{n,m}(\beta).$$

Teorema 5.1.2. *El producto \cup es asociativo en el siguiente sentido: sean $\alpha \in C^n, \beta \in C^m, \gamma \in C^l$, entonces*

$$(\alpha \cup_{n,m} \beta) \cup_{m+n,l} \gamma = \alpha \cup_{n,m+l} (\beta \cup_{m+l} \gamma).$$

Demostración: El miembro izquierdo de la igualdad es

$$\begin{aligned} (\alpha \cup_{n,m} \beta) \cup_{m+n,l} \gamma &= \iota_{n+m,l}((\iota_{n,m}(\alpha)\tau_{n,m}(\beta)))\tau_{n+m,l}(\gamma) \\ &= (\iota_{n+m,l}(\iota_{n,m}(\alpha)))(\iota_{n+m,l}(\tau_{n,m}(\beta)))\tau_{n+m,l}(\gamma), \end{aligned}$$

esto último porque $\iota_{n+m,l}$ es morfismo de anillos.

El miembro derecho de la igualdad es

$$\begin{aligned} \alpha \cup_{n,m+l} (\beta \cup_{m+l} \gamma) &= \iota_{n,m+l}(\alpha)\tau_{n,m+l}(\iota_{m,l}(\beta)\tau_{m,l}(\gamma)) \\ &= \iota_{n,m+l}(\alpha)(\tau_{n,m+l}(\iota_{m,l}(\beta)))(\tau_{n,m+l}(\tau_{m,l}(\gamma))), \end{aligned}$$

esto último porque $\tau_{n,m+l}$ es morfismo de anillos.

Por otra parte, tenemos que

- $\iota_{n+m,l} \circ \iota_{n,m} = \iota_{n,m+l}$, ambas son la imagen por X de la función estrictamente creciente que manda $[n]$ en $\{0, \dots, n\} \subseteq [n+m+l]$,
- $\iota_{n+m,l} \circ \tau_{n,m} = \tau_{n,m+l} \circ \iota_{m,l}$, ambas son la imagen por X de la función estrictamente creciente que manda $[m]$ en $\{n, \dots, n+m\} \subseteq [n+m+l]$,
- $\tau_{n+m,l} = \tau_{n,m+l} \circ \tau_{m,l}$, ambas son la imagen por X de la función estrictamente creciente que manda $[l]$ en $\{m+n, \dots, m+n+l\} \subseteq [n+m+l]$,

de lo cual evaluando respectivamente en α, β, γ y multiplicando en C^{n+m+l} concluimos la igualdad que queríamos demostrar. \square

El siguiente resultado es conocido en contextos similares como **regla de Leibniz graduada**.

Teorema 5.1.3. *Para cada par $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vale que*

$$d_{n+m} \circ \cup_{n,m} = \cup_{n+1,m} \circ (d_n \otimes \text{id}) + (-1)^n \cup_{n,m+1} \circ (\text{id} \otimes d_m).$$

Esto es, si $\alpha \in C^n$ y $\beta \in C^m$, entonces

$$d(\alpha \cup \beta) = (d\alpha) \cup \beta + (-1)^n \alpha \cup (d\beta).$$

Demostración:

$$d_{n+m} \circ \cup_{n,m} = \sum_{i=0}^{n+m+1} (-1)^i \partial_{n+m}^i \circ \cup_{n,m} = \sum_{i=0}^{n+m+1} (-1)^i \partial_{n+m}^i \circ \mu_{n+m} \circ (\iota_{n,m} \otimes \tau_{n,m}) =$$

(porque ∂_{n+m}^i es un morfismo de anillos)

$$= \sum_{i=0}^{n+m+1} (-1)^i \mu_{n+m+1} \circ (\partial_{n+m}^i \circ \iota_{n,m} \otimes \partial_{n+m}^i \circ \tau_{n,m}).$$

Por los casos $i \leq n$ de las ecuaciones (5.1) y (5.2), vale que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n (-1)^i \mu_{n+m+1} (\partial_{n+m}^i \circ \iota_{n,m} \otimes \partial_{n+m}^i \circ \tau_{n,m}) = \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \mu_{n+m+1} (\iota_{n+1,m} \circ \partial_n^i \otimes \tau_{n+1,m}) \\ &= \mu_{n+m+1} \left(\iota_{n+1,m} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_n^i \right) \otimes \tau_{n+1,m} \right) \\ &= \mu_{n+m+1} \left(\iota_{n+1,m} \left(\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial_n^i \right) \otimes \tau_{n+1,m} \right) - (-1)^{n+1} \mu_{n+m+1} \iota_{n+1,m} \partial_n^{n+1} \\ &= \cup_{n+1,m}(d_n \otimes \text{id}) + (-1)^n \mu_{n+m+1} (\iota_{n+1,m} \partial_n^{n+1} \otimes \tau_{n+1,m}). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Similarmente, por los casos $i \geq n+1$ de las ecuaciones (5.1) y (5.2), vale que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=n+1}^{n+m+1} (-1)^i \mu_{n+m+1} (\partial_{n+m}^i \iota_{n,m} \otimes \partial_{n+m}^i \tau_{n,m}) = \\ &= \sum_{i=n+1}^{n+m+1} (-1)^i \mu_{n+m+1} (\iota_{n,m+1} \otimes \tau_{n,m+1} \partial_m^{i-n}) \\ &= \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^{n+j} \mu_{n+m+1} (\iota_{n,m+1} \otimes \tau_{n,m+1} \partial_m^j) \\ &= (-1)^n \mu_{n+m+1} \left(\iota_{n,m+1} \otimes \tau_{n,m+1} \left(\sum_{j=1}^{m+1} (-1)^j \partial_m^j \right) \right) \\ &= (-1)^n \mu_{n+m+1} \left(\iota_{n,m+1} \otimes \tau_{n,m+1} \left(\sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \partial_m^j \right) \right) - (-1)^n \mu_{n+m+1} (\iota_{n,m+1} \otimes \tau_{n,m+1} \partial_m^0) \\ &= (-1)^n \cup_{n,m+1} (\text{id} \otimes d_m) - (-1)^n \mu_{n+m+1} (\iota_{n,m+1} \otimes \tau_{n,m+1} \partial_m^0) \end{aligned} \quad (5.4)$$

De las ecuaciones (5.3) y (5.4) obtenemos que

$$\begin{aligned} d_{n+m} \circ \cup_{n,m} &= \cup_{n+1,m}(d_n \otimes \text{id}) + (-1)^n \mu_{n+m+1} (\iota_{n+1,m} \partial_n^{n+1} \otimes \tau_{n+1,m}) + \\ &+ (-1)^n \cup_{n,m+1} (\text{id} \otimes d_m) - (-1)^n \mu_{n+m+1} (\iota_{n,m+1} \otimes \tau_{n,m+1} \partial_m^0). \end{aligned}$$

Ahora, como $\iota_{n+1,m}\partial_n^{n+1} = \iota_{n,m+1}$ y $\tau_{n,m+1}\partial_m^0 = \tau_{n+1,m}$, vale que

$$\begin{aligned} (-1)^n \mu_{n+m+1} \iota_{n+1,m} \partial_n^{n+1} \otimes \tau_{n+1,m} &= (-1)^n \mu_{n+m+1} \iota_{n,m+1} \otimes \tau_{n+1,m} \\ &= (-1)^n \mu_{n+m+1} \iota_{n,m+1} \otimes \tau_{n,m+1} \partial_m^0, \end{aligned}$$

de donde

$$d_{n+m} \circ \cup_{n,m} = \cup_{n+1,m} (d_n \otimes \text{id}) + (-1)^n \cup_{n,m+1} (\text{id} \otimes d_m).$$

□

Corolario 5.1.4. *Se puede definir en cohomología un producto*

$\bar{\cup}_{n,m} : H^n(C) \otimes H^m(C) \rightarrow H^{n+m}(C)$, que llamamos **producto cup**, mediante la igualdad

$$\bar{\cup}_{n,m}(\bar{\alpha} \otimes \bar{\beta}) = \overline{\cup_{n,m}(\alpha \otimes \beta)}.$$

Demostración: La regla de Leibniz graduada implica que si α y β son cociclos, entonces

$$d(\alpha \cup \beta) = d\alpha \cup \beta + (-1)^n \alpha \cup d\beta = 0 \cup \beta + (-1)^n \alpha \cup 0 = 0;$$

con lo cual $\alpha \cup \beta$ es un cociclo en C^{n+m} . Si además α es un coborde, esto es $\alpha = d\eta$ para cierta cocadena $\eta \in C^{n-1}$, vale que

$$d(\eta \cup \beta) = d\eta \cup \beta + (-1)^{n-1} \eta \cup 0 = d\eta \cup \beta = \alpha \cup \beta.$$

Entonces $\alpha \cup \beta$ también es un coborde. De manera similar, si α es un cociclo y β es un coborde, también se deduce que $\alpha \cup \beta$ es un coborde.

Entonces $\bar{\cup}_{n,m}$ está bien definido.

□

Abusaremos de notación llamando $\cup_{n,m}$, o simplemente \cup , al producto $\bar{\cup}_{n,m}$.

Observar que como $\iota_{0,m} : C^0 \rightarrow C^m$ es un morfismo de anillos y $\tau_{0,m} = \text{id}_{C^m}$ obtenemos que si $\beta \in C^m$ entonces $1_0 \cup \beta = \iota_{0,m}(1_0) \tau_{0,m}(\beta) = 1_m \beta = \beta$. De forma análoga, al ser $\tau_{n,0}$ un morfismo de anillos y $\iota_{n,0} = \text{id}_{C^n}$, tenemos que si $\alpha \in C^n$ entonces $\alpha \cup 1_0 = \alpha$. Por lo tanto tenemos que

Corolario 5.1.5. $\left(H^*(C) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H^n(C), \cup, \bar{1}_0 \right)$ es un anillo graduado.

5.2. Ejemplos.

En esta sección veremos cómo queda el producto cup explícitamente en ejemplos de conjuntos cosimpliciales vistos en los capítulos anteriores.

Ejemplo 5.2.1. Sean Γ un grupo y \mathbb{A} un anillo, al que también veremos como un Γ -módulo con su estructura aditiva y con la acción trivial de Γ . Consideremos el complejo de cocadenas dado por $C^n(\Gamma, \mathbb{A}) = \text{Hom}_{\text{Set}}(\Gamma^{\times n}, \mathbb{A})$, como se definió en el Ejemplo 2.3.11. Entonces $(C^n, \mu_n, 1_n)$ es un anillo, donde μ_n es la multiplicación

punto a punto y 1_n es la función constante igual a la unidad de \mathbb{A} . Recordemos que dada $\xi \in C^k$ valen las siguientes fórmulas de cocaras:

$$(\partial_k^{k+1})(\xi)(g_1, \dots, g_{k+1}) = \xi(g_1, \dots, g_k),$$

$$(\partial_k^0)(\xi)(g_1, \dots, g_{k+1}) = \xi(g_2, \dots, g_{k+1}).$$

De aplicar lo anterior sucesivamente, deducimos que dada $\alpha \in C^n$

$$(\iota_{n,m}(\alpha))(g_1, \dots, g_{n+m}) = \alpha(g_1, \dots, g_n),$$

y dada $\beta \in C^m$

$$(\tau_{n,m}(\beta))(g_1, \dots, g_{n+m}) = \beta(g_{n+1}, \dots, g_{n+m}),$$

con lo cual

$$(\alpha \cup \beta)(g_1, \dots, g_{n+m}) = \alpha(g_1, \dots, g_n)\beta(g_{n+1}, \dots, g_{n+m}),$$

coincidiendo con la fórmula ya conocida del producto cup en cohomología de grupos.

Ejemplo 5.2.2. Sean Z un espacio topológico y \mathbb{A} un anillo. Entonces el conjunto cosimplicial del Ejemplo 2.3.5, dado por $X^n = \text{Hom}_{\text{Set}}(\text{Hom}_{\text{Top}}(\Delta^n, Z), \mathbb{A})$ es un anillo cosimplicial con las operaciones punto a punto. El producto cup obtenido es el conocido para la cohomología de espacios topológicos, tal como está definido por ejemplo en la Sección 3.2 de [Hat02].

Ejemplo 5.2.3. Sea $(\mathbf{p} = \mathbb{k}P, \Delta, \varepsilon)$ un comonoide linealizado en especies. Observemos que $C^n(\mathbf{p}) = \text{Hom}_{\text{Spk}}(\mathbf{p}, \mathbf{E}^n)$ es un anillo con la estructura aditiva usual y con la multiplicación “punto a punto”, esto es, dadas $\xi, \eta \in C^k$, definimos

$$(\xi\eta)_{S_1, \dots, S_k}(z) = \xi_{S_1, \dots, S_k}(z)\eta_{S_1, \dots, S_k}(z).$$

Recordemos que dada $\xi \in C^k$ valen las siguientes fórmulas de cocaras:

$$(\partial_k^{k+1}(\xi))_{S_1, \dots, S_{k+1}}(z) = \xi_{S_1, \dots, S_k}(z|_{S_1 \sqcup \dots \sqcup S_k}),$$

$$(\partial_k^0(\xi))_{S_1, \dots, S_{k+1}}(z) = \xi_{S_2, \dots, S_{k+1}}(z/S_1).$$

De aplicar lo anterior sucesivamente, deducimos que dada $\alpha \in C^n$

$$\iota_{n,m}(\alpha)_{S_1, \dots, S_{n+m}}(z) = \alpha_{S_1, \dots, S_n}(z|_{S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n}),$$

y dada $\beta \in C^m$

$$\tau_{n,m}(\beta)_{S_1, \dots, S_{n+m}}(z) = \beta_{S_{n+1}, \dots, S_{n+m}}(z/S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n),$$

con lo cual

$$(\alpha \cup \beta)_{S_1, \dots, S_{n+m}}(z) = \alpha_{S_1, \dots, S_n}(z|_{S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n})\beta_{S_{n+1}, \dots, S_{n+m}}(z/S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n).$$

Esta fórmula también es válida si cambiamos coeficientes a cualquier anillo \mathbb{A} tal como lo definimos en la Observación 3.1.6.

Con esto finalmente encontramos un marco general al Ejemplo 3.2.6, donde definimos una cocadena $\beta \in C^3(L, \mathbb{Z})$ como

$$\beta_{R,S,T}(z) = |R| \text{Sch}_{S,T}(l|S \sqcup T),$$

para toda descomposición $I = R \sqcup S \sqcup T$ y todo $l \in L[I]$.

Si κ es el 1-cociclo definido por $\kappa_I(l) = |I|$, recordando que en \mathbf{L} vale $l/_R = l|_{I \setminus R}$ obtenemos que

$$\beta = \kappa \cup \text{Sch},$$

con lo cual ya sabemos que es un cociclo, puesto que κ y Sch lo son.

Bibliografía

- [AM10] Marcelo Aguiar and Swapneel Mahajan. *Monoidal functors, species and Hopf algebras*, volume 29 of *CRM Monograph Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [Bén65] Jean Bénabou. Catégories avec multiplication. *C.R Acad. Sci. Paris*, 256(9):1887, 1965.
- [Car55] Pierre Cartier. Cohomologie des coalgèbres. *Séminaire “Sophus Lie”*, 2:1–18, 1955.
- [CE99] Henri Cartan and Samuel Eilenberg. *Homological algebra*. Princeton University Press, 1999.
- [Čec37] Eduard Čech. Multiplications on a complex. *Annals of Mathematics*, 37:681–697, 1937.
- [EM47] Samuel Eilenberg and Saunders MacLane. Cohomology theory in abstract groups. i. *Annals of Mathematics*, pages 51–78, 1947.
- [EZ50] Samuel Eilenberg and Joseph A Zilber. Semi-simplicial complexes and singular homology. *Annals of Mathematics*, pages 499–513, 1950.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Hoc45] Gerhard Hochschild. On the cohomology groups of an associative algebra. *Annals of Mathematics*, pages 58–67, 1945.
- [Joy81] André Joyal. Une théorie combinatoire des séries formelles. *Advances in mathematics*, 42(1):1–82, 1981.
- [Kel64] G. M. Kelly. On MacLane’s conditions for coherence of natural associativities, commutativities, etc. *J. Algebra*, 1:397–402, 1964.
- [Mas99] Akira Masuoka. Extensions of Hopf algebras. *Trabajos de Matemática*, 41:99, 1999.
- [ML63] Saunders Mac Lane. Natural associativity and commutativity. *Rice Univ. Studies*, 49(4):28–46, 1963.

- [ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5. Springer, 1998.
- [Mon93] Susan Montgomery. *Hopf algebras and their actions on rings*, volume 82 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.
- [Wei95] Charles A Weibel. *An introduction to homological algebra*. Number 38. Cambridge University Press, 1995.
- [Whi38] Hassler Whitney. On products in a complex. *Annals of Mathematics*, pages 397–432, 1938.