Trabajo Monográfico
Vectores de rotación en $\mathbb{T}^2$

Adriana da Luz

Orientador: Nancy Guelman

Licenciatura en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Uruguay

Resumen

La noción de número de rotación fue introducida por Poincaré, para homeomorfismos de S^1 que preservan orientación. Dado que esta resultó ser muy útil, fue generalizada para varios otros contextos. El objetivo de este trabajo monográfico es presentar las posibles generalizaciones de aquella definición de Poincaré para el contexto de homeomorfismos homotópicos a la identidad en el toro bidimensional y las propiedades que se obtienen para una u otra definición, siguiendo el trabajo de M. Misiurewicz y K. Ziemian [MZ1]. Además estudiaremos condiciones que garanticen la existencia puntos periódicos que se corresponden con determinados vectores de rotación (siguiendo los trabajos de Franks [Fr1] y de M.Misiurewicz y K.Ziemian [MZ2])

Abstract

The notion of the rotation number of an orientation preserving homeomorphism was introduced by Poincaré and since then it has proved to be very useful. This notion was generalized later, for a wide variety of contexts. In this work we aim to present some possible generalizations of that first definition given by Poincaré for our context, that is homeomorphism which are homotopic to the identity of the bi dimensional tori. We study the properties that one can get for each definition as in M.Misiurewicz and K.Ziemian 's work [MZ1]. We will also study conditions for the existence of periodic points realizing some rotation vectors following the works of Franks [Fr1] and of M.Misiurewicz and K.Ziemian [MZ2] .

Índice

1. Introducción **1**

1.1. Preliminares . . . 1

1.2. Notaciones . . . 2

1.3. Homeomorfismos del Toro y levantados . . . 3

2. Dinámica de homeomorfismos **6**

2.1. Pares atractor-repulsor y recurrencia por cadenas . . . 6

2.2. Puntos fijos en el Plano . . . 14

2.2.1. Arcos de Desborde . . . 14

2.2.2. Puntos fijos y Arcos de Traslación . . . 16

2.3. Otras propiedades relevantes de la dinámica en el plano . . . 19

2.4. Clase de Nielsen de un punto fijo . . . 22

2.4.1. Caminos . . . 25

2.4.2. Clases de puntos fijos . . . 26

2.4.3. Invarianza por homotopías . . . 33

3. Definiciones de Conjunto de Rotación **38**

3.1. Definiciones . . . 38

3.2. Propiedades de los Conjuntos de Rotación . . . 40

3.3. $\rho(F)$ es convexo . . . 42

3.4. Ejemplos . . . 46

3.4.1. $\rho_P(F)$ puede no ser convexo. . . . 46

3.4.2. $\rho(F)$ puede no ser convexo en dimensiones mayores. . . . 47

4. Vectores de Rotación y puntos periódicos **49**

4.1. El caso $\delta-$transitivo . . . 49

4.2. El caso general . . . 53

1. Introducción

La noción de número de rotación para homeomorfismos del círculo que preservan orientación fue definida por primera vez por Henri Poincaré en 1885, en relación con la precesión del perihelio (el punto más cercano de la órbita de un cuerpo celeste alrededor del Sol) de la órbita planetaria. Poincaré demostró más adelante un teorema que caracteriza la existencia de órbitas periódicas en términos de la racionalidad del número de rotación.

Posteriormente otros autores Kim, MacKay y Guckenheimer (1989, ver [Kim]), Llibre y McKay (1991, ver [Llib]) y Herman (1988, ver[Her]), generalizaron esta noción para el Toro bi dimensional. La definición del conjunto de rotación para el Toro n-dimensional fue presentada por Misiurewicz y Ziemian (1989).

Presentaremos posibles generalizaciones de aquella definición de Poincaré para el contexto de homeomorfismos homotópicos a la identidad en el toro bidimensional y las propiedades que se obtienen para una u otra definición, siguiendo el trabajo de M. Misiurewicz y K. Ziemian [MZ1].

Estudiaremos, un resultado que nos garantiza la existencia puntos periódicos toda vez que un vector de coordenadas racionales se encuentre en el interior del conjunto de rotación que definiremos. Este resultado es de, alguna manera, similar al de Poincaré en el círculo.

Junto con esto se presentaran también varias nociones y resultados necesarios para comprender la prueba del resultado mencionado.

1.1. Preliminares

Aunque la intención es que este trabajo sea auto-contenido, la realidad y la práctica hacen que esto sea posible sólo en alguna medida acotada. Algunos teoremas serán enunciados sin demostración en esta sección ya que si bien son necesarios, incluir su demostración haría el trabajo demasiado extenso.

Teorema (de Punto Fijo de Brouwer). *Sea D un conjunto homeomorfo a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $f : D \to D$ una función continua. Entonces, existe $x \in D$ tal que $f(x) = x$.*

Teorema (de Jordan). *Sea I es un intervalo compacto de $\mathbb{R}$ y $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ un mapa continuo e inyectivo excepto en sus extremos donde valen lo mismo. Entonces $\mathbb{R}^2 - \gamma(I)$ tiene exactamente dos componentes conexas, una acotada y la otra no.*

Teorema (Número de Lebesgue). *Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto (M, d). Entonces existe un δ tal que cualquier subconjunto de M con diámetro menor que δ está contenido en algún abierto de $\mathcal{A}$. Llamamos a este δ número de Lebesgue.*

Teorema (Oxtoby). *Sea U un abierto del plano, sean $F_1 \dots, F_n$ subconjuntos disjuntos y finitos de U y sean $D_1, \dots, D_n$ discos abiertos y disjuntos. Entonces se tiene que existen arcos poligonales disjuntos $A_1, \dots, A_n$ tales que $F_j \subset A_j \subset D_j \cap U$ con $j = 1, \dots, n$ sí y solo sí todo F_j está completamente contenido en una sola componente conexa de $D_j \cap U$*

Para una prueba de este teorema ver [Ox]

Teorema (Jung). *Sea F un subconjunto acotado y cerrado del plano con diámetro $d > 0$. Existe un disco D que contiene a F de diámetro mínimo, y este diámetro es a lo sumo $2d/\sqrt{3}$*

Para una prueba de este teorema ver [Nagy]

Teorema (Birkhoff). *Sea $T : X \to X$ una transformación que preserva la medida en un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, con $\mu(X) < \infty$. Sea $f \in L^1(\mu)$, entonces el siguiente límite existe:*

$$\widehat{f}(x) = \text{lím}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)\,,$$

para μ casi todo punto en X. Si además T es ergódica,

$$\frac{1}{\mu(X)} \int_X f \, d\mu = \widehat{f}\,,$$

para μ casi todo punto en X

Teorema (Recurrencia). *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita y $f : X \to X$ una transformación que preserva la medida. Si X tiene una base de entornos numerable, es Hausdorff y $\mathcal{A}$ contiene a la sigma algebra de Borel, entonces casi todo punto es recurrente.*

1.2. Notaciones

Llamaremos *disco* de $\mathbb{R}^2$ a cualquier subconjunto del plano, homeomorfo al conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

Llamaremos $\text{Conv}\,(A)$ a la cápsula convexa del conjunto A

Llamaremos *arco* a todo mapa de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (un intervalo compacto) en $\mathbb{R}^2$ continuo e inyectivo a menos de los bordes

En general I denotara el intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, a menos que se explicite lo contrario.

Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$ llamamos intervalo cerrado $\overline{ab}$ al segmento de recta que una a con b e intervalo abierto ab al segmento de recta que una a con b sin a ni b.

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\delta \in \mathbb{R}^+$ a definimos la bola de centro A y radio δ como

$$B(A, \delta) = \cup_{a\in A} B(a, \delta)$$

1.3. Homeomorfismos del Toro y levantados

Definimos el toro bidimensional como $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ y llamaremos π a la proyección natural para este cociente. Al igual que en el caso de S^1 muchas veces resulta útil para el estudio de los homeomorfismos en el toro, considerar homeomorfismos en $\mathbb{R}^2$ que se correspondan con éstos vía proyección.

Con este fin definimos:

Definición 1.3.1. Llamamos levantado de un homeomorfismo del toro f, a un homeomorfismo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $fo\pi = \pi oF$

Observar que dado un homeomorfismo del toro, el levantado no es único.

Definición 1.3.2. Decimos que dos funciones continuas $f, g : X \to Y$ son homotópicas si existe una función continua $H : X \times I \to Y$ tal que:

- $H(x, 0) = f(x)$
- $H(x, 1) = g(x)$.

Al considerar homeomorfismos que son homotópicos a la identidad, tenemos las siguientes propiedades para los levantados.

Propiedades 1.3.3. *1. Sean F y F' dos levantados de f un homeomorfismo del toro homotópico a la identidad, entonces $F - F'(x) = k$ con $k \in \mathbb{Z}^2$ $\forall x \in \mathbb{R}^2$*

2. *Sean f un homeomorfismo del toro homotópico a la identidad y F un levantado de f, entonces $F(x+k) = F(x) + k$ $\forall k \in \mathbb{Z}^2$*

3. *Sean f un homeomorfismo del toro homotópico a la identidad y F un levantado de f, entonces $F^n(x+k) = F^n(x) + k$ $\forall k \in \mathbb{Z}^2$*

Demostración. 1) Como F y F' son levantados de la misma función entonces $F - F' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{Z}^2$. Pero al ser ambos homeomorfismos tenemos que la resta es continua y por ser $\mathbb{Z}^2$ discreto debe ser una función constante

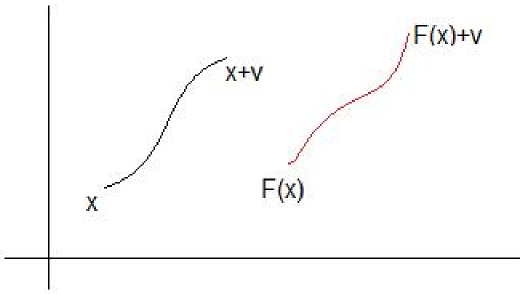


Figura 1: Curva de x a $x + v$ y su imagen por F.

2) Observamos primero que para todo $x \in R^2$ puedo escribir x como $x = x' + v$ con $v \in Z^2$.

Por otra parte tenemos que si F es un levantado de f, entonces

$$fo\pi(x) = fo\pi(x+v) = \pi oF(x+v) \;\; v \in \mathbb{Z}^2, \tag{1}$$

por lo que si escribimos

$$F(x) = F(x'+v) = F(x') + K(x', v)$$

para alguna función k. Por ser F un levantado de un homeomorfismo del toro, tenemos que

- K es continua ,
- La imagen de K está incluida en Z^2 por (1),
- Como consecuencia de los puntos anteriores fijando v y variando x', K es constante.

Como f es homotópica a Id entonces existen $f_t : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ que varia continuamente con $t \in [0, 1]$ y tal que $f_0 = Id$ y $f_1 = f$ y considero para cada t el levantado F_t. Puedo escribir

$$F_t(x+v) = F_t(x) + K(t, x, v)$$

con K como antes y tenemos que,

$$f_t o\pi(x) = f_t o\pi(x+v) = \pi o F_t(x+v) \;\; v \in \mathbb{Z}^2 \,.$$

Como además $K(t,x,v)$ es continua respecto de t, nos queda que K solo depende de v, y a partir de ahora la puedo escribir como $K(v)$.

Consideremos ahora Id, la identidad en R^2, que es un levantado de la identidad en el toro. Hay un levantado de f que es homotópico a esta por la homotopía anterior. Pero como

$$x+v = Id(x+v) = F_0(x+v) = F_0(x) + K(v) = Id(x) + K(v) = x + K(v)\,,$$

entonces $v = K(v)$ para cualquier t ya que es constante respecto de t. Si tomara otros levantados a partir de (a) tenemos que si F y F' son dos levantados de f,

$$F'(x+v) = F(x+v) + c = F(x) + v + c = F'(x) + v\,.$$

3) Razonando por inducción en n, y por la parte anterior, queda probar que si $F^n(x+k) = F^n(x) + k \;\; \forall k \in \mathbb{Z}^2$ entonces $F^{n+1}(x+k) = F^{n+1}(x) + k \;\; \forall k \in \mathbb{Z}^2$. Como $F^{n+1}(x+k) = F^n o F(x+k)$ tenemos que $F^{n+1}(x+k) = F^n(F(x)+k)$ y por hipótesis de inducción $F^n(F(x)+k) = F^n(F(x)) + k = F^{n+1}(x) + k$. □

En vista de que en el progreso de este trabajo recurriremos a esta herramienta muy frecuentemente, resultará conveniente introducir algunas nociones del comportamiento de los homeomorfismos tanto en espacios métricos compactos en general como en el plano.

2. Dinámica de homeomorfismos

2.1. Pares atractor-repulsor y recurrencia por cadenas

En esta subsección mostraremos algunas herramientas de la teoría atractor-repulsor desarrollada por Charles Conley en [C], y a lo largo de esta X denotará un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ un homeomorfismo.

Definición 2.1.1. Decimos que una sucesión de puntos $x_1 \dots x_n$ en X es una ε-cadena si cumplen

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon \quad \forall\, 1 \leq i \leq n-1\,.$$

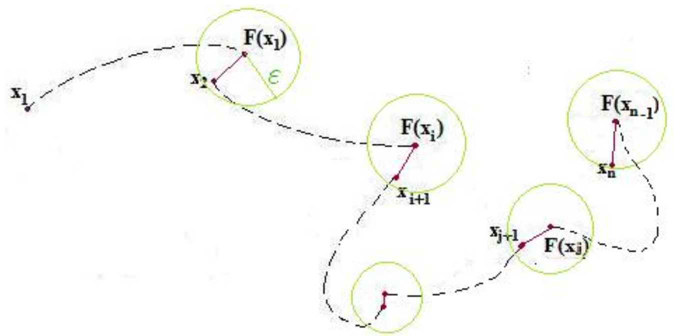


Figura 2: ε-cadena

Diremos que un punto $x \in X$ es *recurrente por cadenas* si para todo $\varepsilon > 0$ hay un n_ε y una $\varepsilon-$cadena $x_1 \dots x_{n_\varepsilon}$ con $x_1 = x = x_{n_\varepsilon}$. El conjunto $\mathcal{R}$ de los puntos recurrentes por cadenas se llama el conjunto recurrente por cadenas, y es compacto e invariante por f.

Definición 2.1.2. Sea A un subconjunto compacto de X. Si existe U un entorno abierto de A tal que $f(\overline{U}) \subset U$ y $\bigcap_{n\geq 0} f^n(\overline{U}) = A$ entonces decimos que A es un *atractor* y que U es su entorno de aislación.

Claramente si llamamos V a $V = X - \overline{U}$ y consideramos $\bigcap_{n\geq 0} f^{-n}(\overline{U}) = A^*$ entonces A^* es un atractor para f^{-1} con entorno de aislación V.

Definición 2.1.3. En las condiciones anteriores diremos que A^* es el *repulsor* dual de A.

Para ambos conjuntos tenemos que $f(A^*) = A^*$ y $f(A) = A$.

Lema 2.1.4. *Los entornos de aislación de dos atractores disjuntos, son disjuntos.*

Demostración. Sean U y U' los entornos de aislación de los atrctores A y A' y supongamos que $U \cap U' \neq \phi$. $U \cap U'$ es abierto y $\overline{U \cap U'}$ compacto entonces,

$$\phi \neq \bigcap_{n\geq 0} f^n(\overline{U \cap U'}) \subset \bigcap_{n\geq 0} f^n(\overline{U}) = A$$

y

$$\bigcap_{n\geq 0} f^n(\overline{U \cap U'}) \subset \bigcap_{n\geq 0} f^n(\overline{U'}) = A'$$

por lo tanto $A \cap A' \neq \phi$

Lema 2.1.5. *El conjunto de los atractores disjuntos de f es numerable.*

Demostración. Sea $B = \{ V_n \}_{n=1}^{\infty}$ una base numerable para la topología de X. Si A es un atractor con entorno de aislación U, entonces U es unión numerable de conjuntos de B. Como A es compacto, existen $V_{i_1} \dots V_{i_k}$ tales que $A \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k} \subset U$. Entonces tenemos

$$\bigcap_{n\geq 0} f^n(\overline{U}) = A = \bigcap_{n\geq 0} f^n(V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k}) = A$$

por lo que como además los entornos de atracción de dos atractores disjuntos son disjuntos no podría haber más atractores disjuntos que elementos en B.

□

Lema 2.1.6. *Si $\{ A_n \}_{n=1}^{\infty}$ son los atractores de f y $\{ A_n^* \}_{n=1}^{\infty}$ sus repulsores duales, entonces el conjunto*

$$\mathcal{R}(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup A_n^*)\,.$$

Demostración. Veamos primero que $\mathcal{R} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup A_n^*)$, o lo que es lo mismo, que si $x \notin A \cup A^*$ para algún atractor A entonces $x \notin \mathcal{R}$.

Si U es el entorno de aislación de A, un atractor y x es tal que $x \notin A \cup A^*$, entonces $x \in U$ o $x \in \overline{V}$. Supongamos que $x \in U$ ya que el otro caso es análogo. Como $x \notin A$ entonces $x \notin f^n(U)$ para algún n. Sea m el menor de tales n, entonces $x \in f^{m-1}(U) - f^m(U)$.

Ahora elegimos un ε_0 de modo que cualquier ε_0-cadena que empieza en $x = x_1$ tenga a x_3 en $f^{m+1}(U)$ (ver figura 3).

Llamando

$$\varepsilon_1 = d(f^{m-1}(U) - f^m(U), f^{m+1}(U))\,, \tag{2}$$

y eligiendo

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \operatorname{mín}\{\varepsilon_1, \varepsilon_0\}\,, \tag{3}$$

tenemos que no existe una $\varepsilon-$cadena de x a x ya que una tal cadena no puede conectar un punto de $f^{m+1}(U)$ con uno de $f^{m-1}(U) - f^m(U)$. Esto es porque

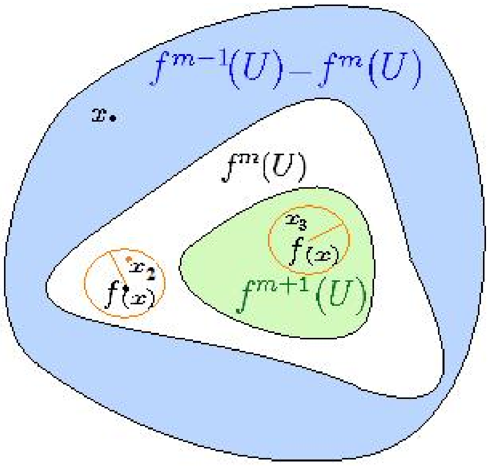


Figura 3: La cadena que empieza en x y tiene a x_3 en $f^{m+1}(U)$, no puede volver a x

$f^{m+2}(U) \subset f^{m+1}(U)$ y como $x_3 \in f^{m+1}(U)$ tenemos que $f(x_3) \in f^{m+1}(U)$. Además por (2) y (3) tenemos que $B(f(x_3), \varepsilon) \cap \{ f^{m-1}(U) - f^m(U) \} = \phi$.

Veamos ahora la otra inclusión. Supongamos que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup A_n^*)$. Si $x \notin \mathcal{R}(f)$ entonces hoy un ε_0 para el que no hay una ε_0-cadena de x a sí mismo.

Sea $\Omega(x, \varepsilon)$ el conjunto de los $y \in X$ tal que hay una $\varepsilon-$cadena de x a y, y sea $V = \Omega(x, \varepsilon_0)$. Este conjunto es abierto y además $f(\overline{V}) \subset V$ ya que si $z \in f(\overline{V})$, existe $z_0 \in V$ tal que $d(f(z), f(z_0)) < \varepsilon_0$ y por lo tanto si tengo una ε_0-cadena de x a z_0 tengo una a $f(z)$ agregando un paso más. De esto tenemos que,

$$\bigcap_{n \geq 0} f^n(\overline{V}) = A$$

es un atractor con entorno de aislación V y existe un i tal que $A = A_i$.

Por hipótesis $x \in A_i$ ó $x \in A_i^*$, pero como supusimos que no hay una ε_0-cadena de x a sí mismo, entonces $x \notin A$. Por otro lado

$$\omega(x) = \left\{ \text{puntos de acumulación de } \{ f^n(x) \}_{n \geq 0} \right\}$$

claramente debe estar incluido en V. Pero si $x \in A_i^*$ como A_i^* es cerrado e invariante, tendríamos que $\omega(x) \in A_i^*$, llegando así a una contradicción.

$\square$

Definamos ahora una relación de equivalencia $\sim$ en $\mathcal{R}$ de la siguiente manera: $x \sim y$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe una $\varepsilon-$cadena de x a y y otra de y a x. Es claro que es una relación de equivalencia.

Definición 2.1.7. Llamamos *Componentes transitivas por cadenas* a las clases de equivalencia en $\mathcal{R}(f)$ de la relación de equivalencia $\sim$ definida anteriormente.

Proposición 2.1.8. *Si x e $y \in \mathcal{R}$ entonces x e y están en la misma componente transitiva por cadenas si y solo si no hay ningún atractor que contenga a x y cuyo repulsor dual contenga a y y viceversa.*

Demostración. Supongamos primero que x e y están en la misma componente transitiva por cadenas y que $x \in A$, un atractor. Por 2.1.6 $y \in A \cup A^*$.

Por otro lado si U es el entorno de aislación de A,

$$d(X - U, f(U)) > \varepsilon$$

para algún ε, por lo que no hay $\varepsilon/2-$cadenas de ningún punto de $f(U)$ a ningún punto de $X - U$. De esto tenemos que no puede haber ninguna $\varepsilon/2-$cadena entre puntos de A y A^* y entonces $y \in A$.

Para probar el recíproco supongamos que esisten dos puntos $x, y \in \mathcal{R}$ tales que $x \in A$ con A un atractor sí y solo sí $y \in A$. Dado un ε, sea $V = \Omega(x, \varepsilon)$ el conjunto de los puntos que se pueden conectar con x por una $\varepsilon-$cadena. Como $x \in \mathcal{R}$ entonces $x \in V \quad \forall \varepsilon$. Como en 2.1.6 V es el entorno de aislación de un atractor A_0, y como $x \in A_0 \cup A_0^*$ entonces $x \in A_0$. Por hipótesis tenemos que $y \in A_o \subset V$ y entonces x se puede conectar con y por una $\varepsilon-$cadena.

Análogamente se prueba que y puede conectarse con x por una $\varepsilon-$cadena, y como esto vale para todo ε, x e y están en la misma componente transitiva por cadenas. □

Definición 2.1.9. Una ***Función de Lyapunov completa*** para $f : X \to X$ es una función continua $g : X \to \mathbb{R}$ que satisface:

1. Si $x \notin \mathcal{R}(f)$ entonces $g(f(x)) < g(x)$.
2. Si x e $y \in \mathcal{R}(f)$ entonces $g(x) = g(y)$ si y solo si $x \sim y$.
3. $g(\mathcal{R}(f))$ es un subconjunto compacto y nunca denso de $\mathbb{R}$.

Por analogía con el contexto derivable se le llama a los elementos de $g(\mathcal{R}(f))$, valores críticos de g

Veamos ahora que debe existir una tal función para un homeomorfismo de un espacio compacto, siguiendo la demostración que aparece en [Fr2], [Fr1].

Lema 2.1.10. *Existe una función continua $g : X \to [0,1]$ tal que $g^{-1}(0) = A$, $g^{-1}(1) = A^*$ y es estrictamente decreciente en las órbitas de los puntos de $X - A \cup A^*$.*

Demostración. Definimos $g_0 : X \to [0,1]$ como:

$$g_0(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, A^*)}$$

Sea $g_1(x) = \sup \{ g_o(f^n(x)) \text{ con } n \geq 0 \}$. Entonces $g_1 : X \to [0,1]$ y $g_1(f(x)) \leq g_1(x)$ para todo x.

Veamos que $g_1(x)$ es continua. Si $\lim x_i = x \in A$ entonces $\lim(g_1(x_i)) = 0$, y es análogo con A^*. Esto me dice que g_1 es continua en los puntos de $A \cup A^*$ por lo que falta ver que pasa en los otros puntos. Sea $N = U - f(\overline{U})$, y $r = \inf\{\, g_o(x) \;\; x \in N \,\}$. Como $f^n(N) \subset f^n(\overline{U})$ y $\bigcap_{n\geq 0} f^n(\overline{U}) = A$ entonces existe un n_0 tal que para todo n mayor, $g_0(f^n(N)) \subset [0, r/2]$. Entonces para todo $x \in \mathbb{N}$ tenemos que,

$$g_1(x) = \max\{\, g_0(f^n(x)) \;\; 0 \leq n \leq n_0 \,\}\ ,$$

Por lo que g_1 es continua en N y en $X - (A \cup A^*)$ ya que

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} f^n(N) = X - (A \cup A^*)\,.$$

Finalmente definamos

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_1(f^n(x))}{2^{n+1}}\,.$$

Esta función es decreciente a lo largo de las órbitas de los puntos de $X - (A \cup A^*)$ y es continua porque la serie converge uniformemente y g_1 es continua. Además $g^{-1}(0) = A$, $g^{-1}(1) = A^*$.

□

Teorema 2.1.11. *Si $f : X \to X$ es un homeomorfismo de un espacio métrico compacto, entonces existe una función de Lyapunov completa $g : X \to \mathbb{R}$ para f.*

Demostración. Por el lema 2.1.5 solo hay una cantidad numerable de atractores. Por el lema 2.1.10, puedo encontrar funciones $g_n : X \to [0,1]$ con $g_n^{-1}(0) = A_n$, $g^{-1}(1) = A_n^*$ y estrictamente decrecientes en las órbitas de los puntos de $X - (A_n \cup A_n^*)$.

Definamos

$$g(x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{2g_n(x)}{3^n}\,.$$

Como esta serie converge uniformemente tenemos que $g(x)$ es continua y si $x \notin \mathcal{R}(f)$, entonces hay un A_i tal que $x \notin A_i \cup A_i^*$ y $g(f(x)) < g(x)$.

También tenemos que si $x \in \mathcal{R}(f)$ entonces $x \in A_n \cup A_n^*$ para todo n y por lo tanto los valores de las g_n solo pueden ser 0 o 1, por lo que la expresión ternaria de $g(x)$ puede ser escrita únicamente con 0 o 2 y por lo tanto $g(x) \in C$ donde C es el conjunto de cantor.

Por último si x e $y \in \mathcal{R}(f)$ para que $g(x) = g(y)$ tenemos que tener que $g_n(x) = g_n(y)$ para todo n, y además para todo n, $g_n(x) \in \{\, 0, 1 \,\}$ y $g_n(y) \in \{\, 0, 1 \,\}$ por estar ambos en $\mathcal{R}(f)$. Por lo tanto $g(x) = g(y)$ sí y solo sí no existe n tal que $x \in A_n$ e $y \in A_n^*$ que por 2.1.8 es equivalente a que x e y estén en la misma componente transitiva por cadenas.

□

En general la cantidad de componentes transitivas por cadenas para un homeomorfismo puede ser infinita, incluso no numerable. Por lo tanto definiremos una noción que resultará más útil.

Definición 2.1.12. Para un δ fijo, decimos que x e y son $\delta-$equivalentes si existe una $\delta-$cadena de x a y, y otra de y a x.

Definición 2.1.13. Llamamos *Componentes* $\delta-$*transitivas* a las clases de equivalencia resultantes de cocientar $\mathcal{R}(f)$ por la relación de equivalencia recién definida.

Lema 2.1.14. *Dado un $\delta > 0$ y un homeomorfismo $f : X \to X$, un espacio compacto, existe solo una cantidad finita de componentes $\delta-$transitivas.*

Demostración. Supongamos que existen x e y en componentes δ transitivas distintas, y tales que $d(x, y) < \delta/4$.

Como $x \in \mathcal{R}$ considero una $\delta/4-$cadena que una a x consigo mismo, llamémosle $x = x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$. Tenemos que

$$d(f(x_{n-1}), y) \leq d(f(x_{n-1}), x_n) + d(x_n, y) \leq \delta$$

con lo que habría una δ-cadena de x a y.

Análogamente puedo construir una de y a x con lo que probamos que la distancia entre dos componentes δ transitivas distintas debe ser mayor que $\delta/4$. Dado que estamos en un compacto esto último implica que no puede haber infinitas componentes. $\square$

Observación 2.1.15. Las componentes $\delta-$transitivas son cerradas, ya que cualquier punto en la frontera está a menos de δ de un punto de la componente y por lo tanto está en la componente. Por estar en un compacto entonces son compactas y además son invariantes ya que los puntos que se pueden conectar con x por una $\delta-$cadena, también se pueden conectar con $f(x)$ por definición de cadena.

Teorema 2.1.16. *Dado un $\delta > 0$ y un homeomorfismo $f : X \to X$ existe una función de Lyapunov $g : X \to \mathbb{R}$ y valores para g, $c_0 < c_1 < \ldots < c_n$ tales que si $\Delta_i = \mathcal{R}(f) \cap g^{-1}([c_{i-1}, c_i])$, entonces Δ_i con $0 \leq i \leq n$ son las componentes $\delta-$transitivas de f.*

Demostración. Sean $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ las componentes $\delta-$transitivas de f. Podemos ordenarlas de modo que si $i < j$ no haya ninguna $\delta-$cadena desde Δ_i a Δ_j. Esto es posible ya que si no, podríamos encontrar una $\delta-$cadena que sale de Δ_i y vuelve a Δ_i y porque las piezas son finitas (ver figura 4 y figura 5).

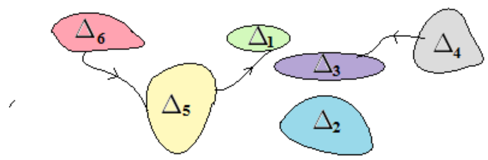


Figura 4: Como ordenar las piezas de modo que si $i < j$ no haya ninguna $\delta-$cadena desde Δ_i a Δ_j.

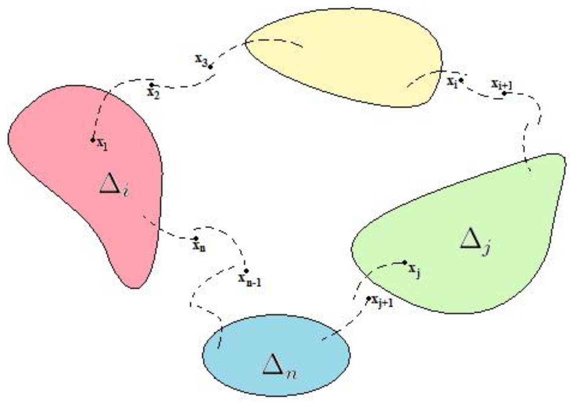


Figura 5: No hay una $\delta-$cadena que sale de Δ_i y vuelve, ya que si fuera asi podria conectar por $\delta-$cadenas un elemento $x \in \Delta_i$ con un elemento $y \in \Delta_j$ y tambien y con x pero esto no es posible porque las clases de equivalencia son disjuntas.

Sea U_i el conjunto de los $z \in X$ tal que hay una $\delta-$cadena de Δ_i a z. Claramente U_i es abierto y además tenemos que $f(\overline{U_i}) \subset U_i$. Esto es porque si $z \in \overline{U_i}$, existe un $z_0 \in U_i$ tal que $d(f(z), f(z_0)) < \delta$ y entonces agregándole a la $\delta-$cadena que une algún x con z_0 a $f(z)$ como último paso tenemos una $\delta-$cadena de x a $f(z)$.

Consideremos

$$A_i = \bigcap_{n \geq 0} f^n(\overline{U_i}) \text{ y } A_i^* = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(X - U_i).$$

Tenemos que A_i y, A_i^* son un par atractor repulsor con $\Delta_i \subset A_i$. Usando el resultado del lema 2.1.10 tenemos que existe una función continua $g_i : X \to [0,1]$ tal que $A_i = g_i^{-1}(0)$, $A_i^* = g_i^{-1}(1)$ y $g_i(f(x)) < g_i(x)$ para todo $x \in X - (A_i \cup A_i^*)$. Entonces si $i < j$ como no hay una $\delta-$cadena de Δ_i a Δ_j, $\Delta_j \subset A_i^*$ y $g_i(\Delta_j) = 1$.

Definiendo $h(x) = \Sigma_{i=1}^n 2^i g_i(x)$ queda que $h(f(x)) \leq h(x)$ para todo $x \in X - \mathcal{R}(f)$. Además tenemos que para todo $x \in \mathcal{R}(f) = \cup \Delta_i$, $h(x)$ es un par entre 0 y 2^{n+1}, y que para todo par $x, y \in \mathcal{R}(f)$, $h(x) = h(y)$ si y solo si $g_i(x) = g_i(y)$ para todo i. Por lo tanto x e y están en la misma componente δ-transitiva si y solo si $h(x) = h(y)$.

Sea g_0 una función de Lyapunov completa, entonces $g(x) = g_0(x) + h(x)$ es la función deseada ya que

- Si $x \notin \mathcal{R}(f)$ entonces $g(f(x)) < g(x)$, porque $h(f(x)) \leq h(x)$ y g_0 lo cumple.
- Si x e $y \in \mathcal{R}(f)$ entonces $g(x) = g(y)$ sí y solo sí $x \sim y$. Porque si $x \sim y$ entonces $g_0(x) = g_0(y)$ ya que g_0 es de Lyapunov y x e y están en la misma componente δ-transitiva, por lo tanto $h(x) = h(y)$. Por otro lado , si $g(x) = g(y)$ supongamos que $x \in \Delta_j$ e $y \in \Delta_i$ con $i < j$ entonces $\mid h(x) - h(y) \mid \ > 1$ y $\mid g_0(x) - g_0(y) \mid \ < 1$. Y si $x, y \in \Delta_j$ pero $x \nsim y$ entonces $h(x) = h(y)$ pero $g_0(x) \neq g_0(y)$.
- $g(\mathcal{R}(f))$ es un subconjunto compacto y nunca denso de $\mathbb{R}$, porque g_0 lo cumple y si $x \in \mathcal{R}(f)$, $h(x)$ es un par entre 0 y 2^{n+1}.

Sean $\left\{ k_m 2^{l_m} \ \ m = 1 \ldots n \right\}$ el conjunto de valores que toma h en $\mathcal{R}(f)$ ordenados crecientemente. Sea j tal que $\Delta_i \subset h^{-1}(k_j 2^{l_j})$, como $g_0(\mathcal{R}(f)) \subset [0, 1]$ entonces,

$$\Delta_i = \mathcal{R}(f) \cap g^{-1}([k_j 2^{l_j}, k_j 2^{l_j} + 1]) \,.$$

$\square$

2.2. Puntos fijos en el Plano

Nos interesa ahora encontrar condiciones para que un homeomorfismo del plano que preserva orientación tenga puntos fijos, por lo que nos dedicaremos a probar varios resultados que apuntan en esta dirección. Estos nos aportarán herramientas útiles que iremos utilizando a lo largo de este trabajo, dado que la información que recabemos sobre la dinámica en el plano podremos después traducirla a resultados sobre la dinámica en el toro.

Introduciremos algunas definiciones convenientes, la primera de esta es la de los arcos de desborde.

Definición 2.2.1. Sean C y D dos discos (en un sentido topológico) compactos del plano tales que $\mathring{C} \cap \mathring{D} \neq \phi$. Si J es una componente conexa de la intersección, donde $\mathring{J} \neq \phi$, decimos que D *desborda* a C a lo largo de un arco $\gamma \subset \partial C$ si:

- $\mathring{\gamma} \subset \partial J$
- los extremos de γ son la intersección de ∂D y γ
- existe un arco $\delta \subset \partial D$ determinado por γ que verifica:
  - $\mathring{\delta} \bigcap J = \phi$
  - $\gamma \cup \delta$ son la frontera de un disco Δ donde $\mathring{\Delta} \bigcap \mathring{J} = \phi$

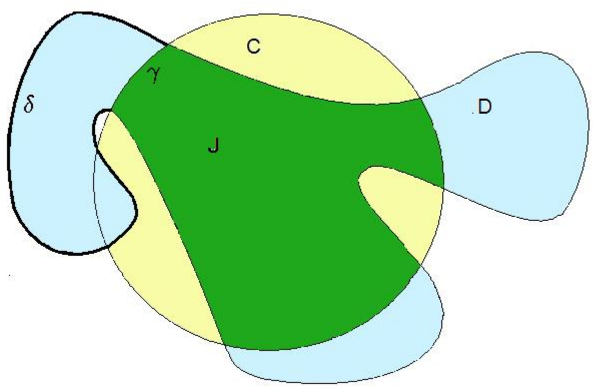


Figura 6: Discos de Desborde

Con esto definido pasamos al primer teorema de puntos fijos.

2.2.1. Arcos de Desborde

Teorema 2.2.2 (Puntos fijos y Arcos de desborde)**.** *Si* $D = f(C)$ *donde* $f(\gamma_i) \nsubseteq \delta_i$ *y* $\delta_i \nsubseteq f(\gamma_i)$ $\forall i \in \mathbb{N}$ *entonces* f *tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Dado $i \in \mathbb{N}$, existe l_i un arco tal que $l_i \subset \overset{\circ}{\delta_i}$ y $l_i \cap f(\gamma_i) = \phi$. Como Δ_i es un disco, sea $h_i : \Delta_i \to [0,1]^2$ un homeomorfismo que preserva orientación donde $h(\gamma_i) = [0,1] \times \{0\}$ y por lo tanto $h(\delta_i) = \{0\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{1\} \cup \{1\} \times [0,1]$. Podemos suponer además que $h(l_i) = [0,1] \times \{1\}$. Definimos $r : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ tal

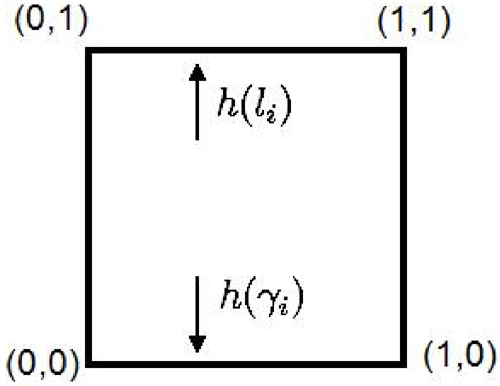


Figura 7: imagen de h_i

que $r(x,y) = (x,0)$, y luego $g : C \to \overline{J}$ de la siguiente forma:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \in J \\ h_i^{-1}\left(r\left(h_i\left(f(x)\right)\right)\right), & \text{si } f(x) \in \Delta_i \end{cases}$$

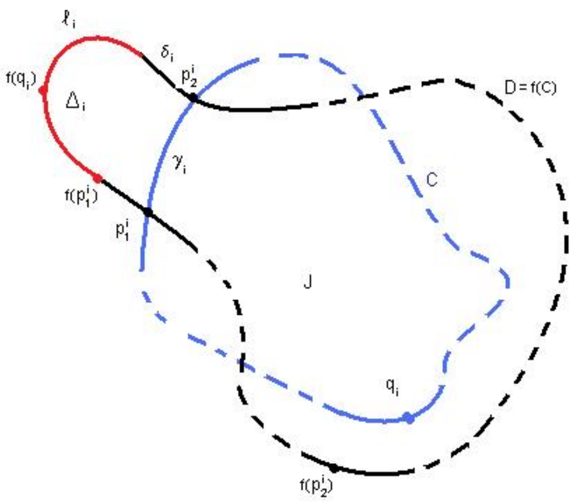
Veamos que g está bien definida y que es continua. Basta estudiar la función en los puntos $x \in J$ tales que $f(x) \in \gamma_i$. Por la construcción de h_i y r, es claro que para un x en dicha condición se tiene que $h_i^{-1}\left(r\left(h_i\left(f(x)\right)\right)\right) = f(x)$ y por lo tanto queda g bien definida y continua.

Como J es un disco y g es continua, por el teorema de punto fijo de Brouwer, existe $x_0 \in J$ tal que $g(x_0) = x_0$.

Veamos ahora que $f(x_0) \in J$. Supongamos que $f(x_0) \in \Delta_i$ y lleguemos a un absurdo. Si $f(x_0) \in \Delta_i$ entonces $g(x_0) \in \gamma_i$ o sea que $x_0 \in \gamma_i$ y por lo tanto $f(x_0) \in f(\gamma_i) \subset d$, como $f(\gamma_i) \cap l_i = \phi$, entonces $h_i\left(f\left(\gamma_i\right)\right) \subset \{0,1\} \times [0,1]$. De esto, por la definición de g, concluimos que $x_0 \in p_1^i, p_2^i$ donde p_1^i y p_2^i son los extremos de γ_i.

Veamos que esto no puede pasar. Supongamos sin perder generalidad, que $x_0 = p_1^i$ con $h_i\left(x_0\right) = (0,0)$. Si $g(x_0) = x_0$, tenemos que $h_i\left(f(x_0)\right) \in 0 \times [0,1]$. Hay entonces dos casos:

- Si $h_i(f(p_2^i)) \in \{0\} \times [0,1]$ y además si $h_i(f(p_2^i)) = (0,t_2), h_i(f\left(p_1^i\right)) = (0,t_1)$ y $t_1 < t_2$ entonces, $h_i(f(\gamma_i)) \subset \{0\} \times [0,1]$ y por lo tanto $f(\gamma_i) \subset \delta_i$ lo cual es absurdo.
- Sino ocurre el caso anterior tomando un punto $q_i \in f^{-1}(l_i)$ deducimos que f manda la orientación dada por $p_1^i\, p_2^i\, q_i$ en la orientación dada por $f(p_1^i)\, f(q_i)\, f(p_2^i)$ contradiciendo que f preserva orientación.



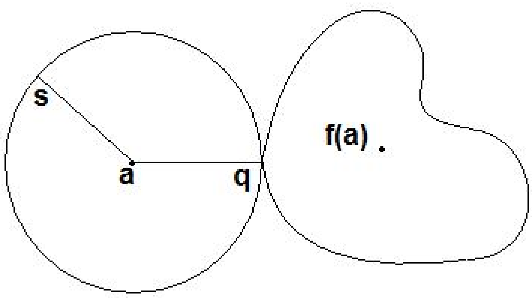
Como el absurdo proviene de suponer que $f(x_0) \in \Delta_i$ entonces tenemos que $f(x_0) \in J$, y por lo tanto $f(x_0) = g(x_0) = x_0$, y he aquí nuestro punto fijo. $\square$

2.2.2. Puntos fijos y Arcos de Traslación

Definición 2.2.3. Decimos que $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ es un *arco de traslación* si $f(\alpha(0)) = \alpha(1)$ y además $f(\alpha) \cap \alpha \subset \{f(\alpha(0)), \alpha(0)\}$.

Lema 2.2.4. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo que preserva orientación y sin puntos fijos, entonces por todo punto pasa un arco de traslación*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}^2$, como f no tiene puntos fijos, $f(a) \neq a$. Considero $R = \sup\{\, r \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } B(a,r) \cap f(B(a,r)) = \phi \,\}$ donde $B(a,r)$ es el disco de centro a y radio r. Para R tenemos que $q = B(a,R) \bigcap f(B(a,R)) \in \partial B(a,R)$. Para $s = f^{-1}(q)$ tenemos, $s \in \partial B(a,R)$ y nos queda que $\alpha = \gamma \cup \beta$ donde γ es el segmento que une a s con a y β el que une a a con q , es un arco de traslación. $\square$



Teorema 2.2.5 (Arcos de traslación)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo que preserva orientación y sin puntos fijos. Entonces $f^n(\alpha - \{\alpha(1)\}) \cap \alpha - \{\alpha(1)\} = \phi \quad \forall n > 0$*

Demostración. Supongamos que $\exists n > 0$ tal que $f^n(\alpha - \{\alpha(1)\}) \cap \alpha - \{\alpha(1)\} \neq \phi$ sea $k = \min\{\, n$ tal que $f^n(\alpha - \{\alpha(1)\}) \cap \alpha - \{\alpha(1)\} \neq \phi\,\}$.Llamamos $p = \alpha(0)$ por comodidad. Orientando α de p a $f(p)$ llamo q al primer punto de, $f^k(p)$ a $f^{k+1}(p)$, en que $f^k(\alpha)$ intersecta a α (ver figura 8).

Tomo

$$[q, f(p)] \cup [f(p)f^2(p)] \cup ... \cup [f^k(p), q] = c,$$

entonces c es una curva cerrada y orientada de q a $f(p)$. Por el teorema de Jordan 1.1 nos queda que el interior de la curva c es un disco al que llamaremos C. Sea ahora $D = f(C)$ y $d := \partial D$ entonces d debe ser

$$d = [f(q), f^2(p)] \cup [f^2(p)f^3(p)] \cup ... \cup [f^k(p), q] \cup [q, f(q)].$$

Observemos que, en particular el arco

$$[f(q), f^2(p)] \cup [f^2(p), f^3(p)] \cup \cdots \cup [f^k(p), q]$$

se encuentra contenido en ambas fronteras con la misma orientación. Si el caso fuera $\overset{\circ}{C} \cap \overset{\circ}{D} = \phi$, tendríamos que f no preserva orientación lo cual es absurdo. Sea J el disco compacto tal que $\overset{\circ}{J}$ es la componente conexa de $\overset{\circ}{C} \cap \overset{\circ}{D}$ que tiene al arco que va desde $f(q)$ hasta q. Si no hay puntos fijos entonces hay arcos de desborde ya que si no hay arcos de desborde tenemos que $D = f(C) \subset C$ y por el teorema de punto fijo de Brouwer tenemos un punto fijo en C. Veamos que pasa si hay arcos de desborde. De haberlos estos tendrían que estar en $[q, f(p)] \cup [f(p), f(q)]$ porque el resto de la frontera es compartida. Por el teorema anterior 2.2.2 bastaría probar que $\delta \nsubseteq f(\gamma)$ y $f(\gamma) \nsubseteq \delta$.

En esta situación tenemos 2 casos posibles:

- Caso 1 $\gamma \cap ([f(p), f(q)] - \{f(p)\}) \neq \phi$.
  - Veamos que $\delta \nsubseteq f(\gamma)$.
    Como $\gamma \subset [q, f(p)] \cup [f(p), f(q)]$, tenemos $f(\gamma) \subset [f(q), f^2(p)] \cup [f^2(p), f^2(q)]$.
    Luego $\delta \subset [q, f^{k+1}(p)] \cup [f^{k+1}(p), f(q)]$. Observamos que $f^{k+1}(p) \notin \overset{\circ}{J}$ ya que si $f^{k+1}(p) \in \overset{\circ}{J}$ existiría un punto l tal que

    $$l = f^k(\alpha) \cap \{\, f(\alpha)\,\}\ ,$$

    pero entonces

    $$f^{-1}(l) = f^{k-1}(\alpha) \cap \{\, \alpha\,\}\ ,$$

    contradiciendo le definición de k.
    Veamos que $[f^{k+1}(p), f(q)] \subset \delta$
    Como $f^{k+1}(p) \notin \overset{\circ}{J}$ si $[f^{k+1}(p), f(q)] \nsubseteq \delta$, existiría un punto

    $$o = (f^{k+1}(p), f(q)) \cap \{\, f(\alpha) - \{\, f(p) \cup f(q)\,\}\,\}$$

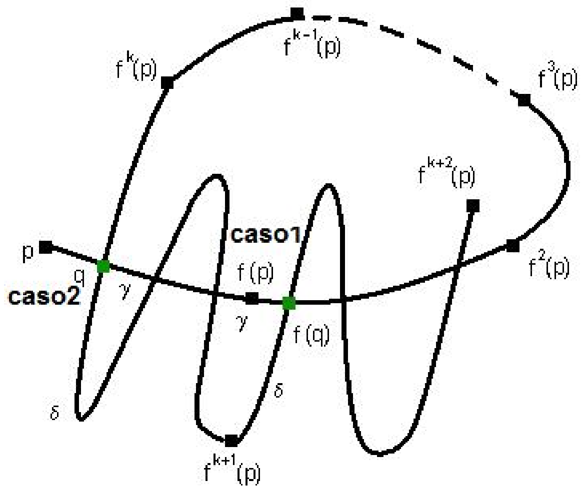


Figura 8: Arco de traslación que se corta por primera vez en el k-ésimo iterado

y por lo tanto

$$f^{-1}(o) = (f^k(p), q) \cap \{\, \alpha - \{\, p \cup q \,\}\,\}$$

lo que contradice la definicion de q.

Como $[f^{k+1}(p), f(q)] \subset \delta$ tenemos que $f^{k+1}(p) \in \delta$ pero $f^{k+1}(p) \notin f(\gamma)$, por lo que $\delta \nsubseteq f(\gamma)$.

- $f(\gamma) \nsubseteq \delta$. Como $f^2(p) \in f(\gamma)$ y si $f^2(p) \in \delta$ que estaría contradiciendo que k es mínimo.

- Caso 2 $\gamma \subset [q, f(p)]$. De esto concluimos que $f(\gamma) \subset [f(q), f^2(p)]$. Probemos que $\delta \nsubseteq f(\gamma)$ y $f(\gamma) \nsubseteq \delta$
  - Veamos que $\delta \nsubseteq f(\gamma)$. Es consecuencia de que existe r extremo de δ en $\alpha - \{f(p)\}$ y $f(\gamma) \subset f(\alpha)$.
  - $f(\gamma) \nsubseteq \delta$. Si no fuera cierto, tengo $r \in f^k(\alpha - \{f(p)\}) \cap f(\alpha - \{f(p)\})$ y por lo tanto $f^{k-1}(\alpha - \{f(p)\}) \cap \alpha - \{f(p)\} \neq \phi$ que estaría contradiciendo que k es mínimo.

□

Corolario 2.2.6 (Punto periódico implica puntos fijos). *Si f tiene puntos periódicos, entonces tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Por absurdo supongamos que no tiene puntos fijos. Sea p un punto periódico, por 2.2.4, existe α un arco de traslación y $t \in (0,1)$ tal que $\alpha(t) = p$. Luego si n es el período de p entonces $\{p\} = f^n(\alpha - \{\alpha(1)\}) \cap \alpha - \{\alpha(1)\}$ contradiciendo el Teorema 2.2.5. □

2.3. Otras propiedades relevantes de la dinámica en el plano

Definiremos primero el índice de una curva con respecto a un punto en el plano. En la próxima sección veremos otras definiciones de índice para otros contextos. El índice de una curva cerrada en el plano alrededor de un punto dado, es un entero que representa el número total de vueltas que da curva en sentido anti horario alrededor del punto.

Definición 2.3.1. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva cerrada que no pasa por el origen. Podemos escribir la curva en coordenadas polares $(r(t), \theta(t))$ con $r(t)$ y $\theta(t))$ continuas, y $r(t) > 0$ para todo t. Como $\alpha(1) = \alpha(0)$, $\theta(1) - \theta(0) = k2\pi$ para algún k. Llamamos ***índice de una curva respecto de 0*** y lo notamos como $ind_0(\alpha)$ a este número k. Definimos el ***índice de una curva respecto de un punto*** p de manera análoga, trasladando el sistema de coordenadas.

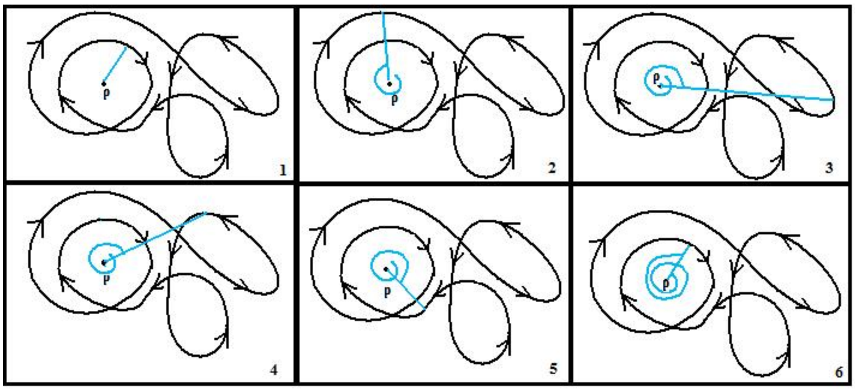


Figura 9: Una curva α que da -2 vueltas al punto p

Lema 2.3.2. *Sean a y b en $\mathbb{R}^2$ y sea T_v la traslación de vector v. Sea γ una curva simple que une a con b y no intersecta a ab. Si γ no intersecta a $T_v(\gamma)$ entonces $T_v(a)$ no pertenece al disco D delimitado por $ab \cup \gamma$.*

Demostración. Consideramos γ como un mapa continuo de I en $\mathbb{R}^2$ sin perdida de generalidad supongamos que $a = (0, 0)$. Como γ no intersecta a $T_v(\gamma)$ entonces la ecuación $\gamma(s) = \gamma(t) + T_v(0, 0)$ no tiene solución $(s, t) \in I^2$. Definamos el mapa $\psi : I^2 \to \mathbb{R}^2$ como

$$\psi(s, t) = \gamma(s) - \gamma(t)\,,$$

entonces $T_v(0, 0) \notin \psi(I^2)$.

Definimos ahora la curva cerrada α como: (ver figura 10)

$$g(x) = \begin{cases} (3t, 0), & \text{si } t \in [0, 1/3] \\ (1, 3t-1), & \text{si } t \in [1/3, 2/3] \\ (3-3t, 3-3t), & \text{si } t \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

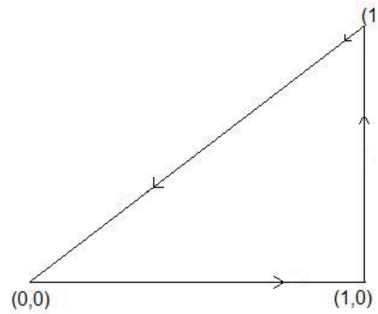


Figura 10: La curva cerrada α

La curva $\psi(\alpha)$ es la concatenación de las curvas γ y $b-\gamma$. Pero además si definimos $\beta = tb$ para t en I podemos escribir $\psi(\alpha)$ como la concatenación de dos curvas cerradas δ y ζ, donde δ es la concatenación de β^{-1} con γ y ζ es la concatenación de $b - \gamma$ con β (ver figura 11).

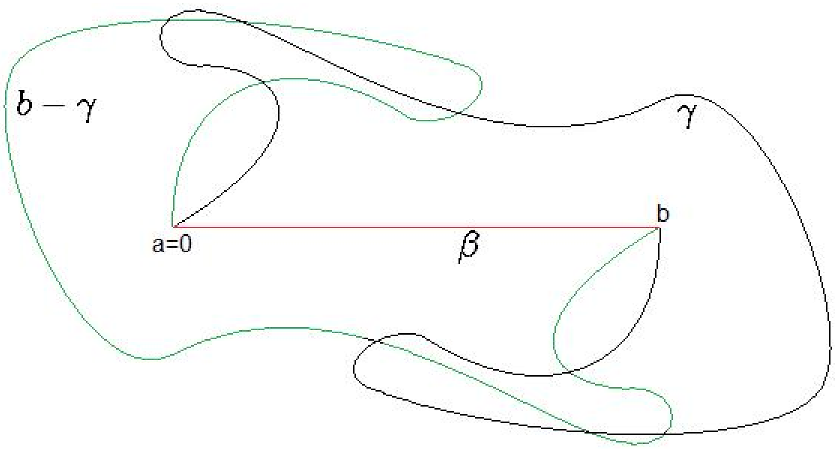


Figura 11: $\psi(\alpha)$

Al ser δ una curva simple, si $T_v(0,0) \in D$, donde D es el disco delimitado por δ, el índice de delta con respecto a $T_v(0,0) = v$, $ind_v(\delta)$ es o 1 o -1. Como ζ es simétrica a δ con respecto al punto $1/2b$, sea D' el disco delimitado por ζ tenemos que

$$ind_v(\zeta) = ind_v(\delta)$$

si $b - v \in D$ ó

$$ind_v(\zeta) = 0$$

si $b - v \notin D$. Entonces el índice de $\psi(\alpha)$ con respecto a v es distinto de cero ya que es

$$ind_v(\zeta) + ind_v(\delta)\,.$$

Con esto tenemos que v es imagen de algún punto del triángulo delimitado por α que contradice lo que supusimos. $\square$

Lema 2.3.3. *Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$, sean U y V abiertos que contienen al segmento $\overline{xy}$ y tal que $\overline{xy} \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Entonces existe $h : U \to U$ un homeomorfismo isotópico a la identidad tal que $h(x) = y$ y $h_{|U-V} \equiv Id$.*

Demostración. Sea $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo de vectores constante $v(p) = y - x$. Sea Φ_t el flujo asociado a la ecuación diferencial inducida por el campo v. En particular $\Phi_t(p) = p + t(y - x)$. Tomemos ahora W un abierto tal que $\overline{xy} \subset W \subset \overline{W} \subset V$ y sea $\rho : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ una función chichón, es decir diferenciable y tal que $\rho_{|W} \equiv 1$ y $\rho_{|V^c} \equiv 0$. Definimos $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo de vectores dado por la relación $u(p) = \rho(p)v(p)$ y nos tomamos Ψ_t el flujo asociado a la ecuación diferencial, que es inducida por el campo u. Definimos finalmente $h : U \to U$ como $h = \Psi_1$. Por ser el tiempo 1 de un flujo, h es isotópico a la identidad. Además, se tiene que $h(x) = \Psi_1(x) = \Phi_1(x) = y$ porque $u_{|W} = v_{|W}$ y $\forall t \in [0, 1]$ $\Psi_t(x) \in \overline{xy} \subset W$ y por lo tanto $\Psi_t(x) = \Phi_t(x)$. Por último $h_{|U-V} = \Psi_{1|U-V} \equiv Id$ porque $u_{|U-V} \equiv 0$. $\square$

2.4. Clase de Nielsen de un punto fijo

A lo largo de esta subsección X denotará una sub variedad de dimensión m compacta de $\mathbb{R}^n$ dotada de una métrica que notaremos como d' para diferenciarla de la métrica de $\mathbb{R}^n$.

Si llamamos $f : X \to X$ a una función continua con finitos puntos fijos, podemos dar una definición de índice de un punto fijo e índice de un abierto de la siguiente manera.

Definición 2.4.1. Sea x un punto fijo y U_i un abierto homeomorfo a una bola B_i tal que x es el único punto fijo en $\overline{U}$. Definimos el ***índice de un punto fijo*** como una función

$$ind_x(f) = deg(v)$$

donde $v : \partial B_i \to S^{m-1}$ es el mapa dado por

$$v(x) = \frac{f(x) - x}{\| f(x) - x \|}$$

Definiremos ahora el índice de un abierto para una función f en las condiciones anteriores.

Definición 2.4.2. Llamamos $\mathfrak{C}'$ a el conjunto de todos los pares (f, U) con f homeomorfismo de X y $U \subset X$ abierto que no tiene puntos fijos de f en su borde.

Observación 2.4.3. (f, X) y (f, ϕ) siempre están en $\mathfrak{C}'$

Definición 2.4.4. Sean U un abierto sin puntos fijos en su borde y $x_1, \ldots, x_h$ los puntos fijos en el interior de U. Definimos el ***índice de un abierto U*** como una función $ind : \mathfrak{C}' \to \mathbb{Q}$ dada por

$$ind(f, U) = \sum_{i=1}^{h} ind_{x_i}(f)$$

.

Propiedades 2.4.5. *En las condiciones anteriores tenemos las siguientes propiedades para el índice:*

- *Propiedad 1 (Local): Si $(f, U) \in \mathfrak{C}'$ y existe g tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in \overline{U}$, entonces*
$$ind(f, U) = ind(g, U)\,.$$
- *Propiedad 2 (Homotopía): Sea $H : X \times I \to X$ una homotopía y definimos $f_t(x) = H(x, t)$. Si $(f_t, U) \in \mathfrak{C}'$ para todo t, entonces*
$$ind(f_0, U) = ind(f_1, U)\,.$$

- *Propiedad 3 (Aditividad): Sea $(f, U) \in \mathfrak{C}'$ y sean $U_1 \dots U_s$ una familia de subconjuntos abiertos de U mutuamente disjunta y tal que $f(x) \neq x$ para todo x en $\left[U - \bigcup_{j=1}^{s} U_j\right]$, entonces*

$$ind(f, U) = \sum_{j=1}^{s} ind(f, U_j)\,.$$

Demostración. Las propiedades (1) y (2) salen directamente de la definición. La propiedad 2 es una consecuencia de la invarianza por homotopía del grado de v (ver [**?**]). Notar que

$$v_t(x) = \frac{f_t(x) - x}{\| f_t(x) - x \|}$$

es una homotopía entre v_0 y v_1.

Corolario 2.4.6. *Sea $(f, U) \in \mathfrak{C}'$ tal que no hay puntos fijos de f en $\overline{U}$, entonces $i(f, U) = 0$.*

En estas condiciones se tiene el siguiente resultado (que no demostraremos):

Teorema 2.4.7. *(Punto Fijo de Lefschetz) Para toda función continua $f : X \to X$ cuyos puntos fijos son aislados, existe un número $L(f)$ que depende únicamente de la clase de homotopía que verifica*

$$L(f) = \sum_{f(x)=x} ind_x(f)\,.$$

Daremos una definición de índice que extiende a la anterior en el sentido de que no se necesitará que la cantidad de puntos fijos sea finita y que coincida con ésta en el caso de que lo sea. Pero daremos esta definición de forma axiomática, es decir, el índice será una función que cumple una serie de propiedades.

Podemos dar una tal definición ya que en [Br78] se prueba la existencia y algún tipo de unicidad de una función que cumple con esas cuatro propiedades y de un "Número de Lefchetz", con propiedades similares al mencionado anteriormente, para una amplia variedad de contextos entre los cuales está incluido el que nos interesa.

De aquí en lo que queda de esta subsección consideremos a X como una subvariedad compacta de $\mathbb{R}^n$ y a $f : X \to X$ una función continua (esta vez no pedimos ninguna condición sobre la cantidad de puntos fijos).

Definición 2.4.8. Definimos el ***índice*** como una función $i : \mathfrak{C}' \to \mathbb{Q}$ que satisface las siguientes propiedades:

- Axioma 1 (Local): Si $(f, U) \in \mathfrak{C}'$ y existe g tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in \overline{U}$, entonces
$$i(f, U) = i(g, U)\,.$$

- Axioma 2 (Homotopía): Sea $H : X \times I \to X$ una homotopía y definimos $f_t(x) = H(x, t)$. Si $(f_t, U) \in \mathfrak{C}'$ para todo t, entonces
$$i(f_0, U) = i(f_1, U)\,.$$

- Axioma 3 (Aditividad): Sea $(f, U) \in \mathfrak{C}'$ y sean $U_1 \ldots U_s$ una familia de subconjuntos abiertos de U mutuamente disjunta y tal que $f(x) \neq x$ para todo x en $\left[U - \bigcup_{j=1}^{s} U_j\right]$, entonces
$$i(f, U) = \sum_{j=1}^{s} i(f, U_j)\,.$$

- Axioma 4 (Normalización): Para toda función continua f, de X en X, tenemos que
$$i(f, X) = L(f)\,.$$

  Donde $L(f)$ es el número de Lefschetz (definido en [Br78]).

Corolario 2.4.9. *Sea $(f, U) \in \mathfrak{C}'$ tal que no hay puntos fijos de f en $\overline{U}$, entonces $i(f, U) = 0$.*

Demostración. Primero veamos que $i(f, \phi) = 0$. Considero $U_1 = U_2 = U_3 = \phi$ es claro que son abiertos disjuntos y no hay puntos fijos en $U_1 - [U_2 \cup U_3]$, por lo que el axioma de aditividad (2.4.8) nos dice que
$$i(f, \phi) = i(f, U_1) = i(f, U_2) + i(f, U_3) = i(f, \phi) + i(f, \phi) = 2i(f, \phi)\,,$$
por lo que $i(f, \phi) = 0$. Ahora veamos que $i(f, U) = 0$. Considero la familia de subconjuntos de U abiertos y disjuntos formada exclusivamente por ϕ. Como no hay puntos fijos en $U = U - \phi$ puedo usar el axioma de aditividad que nos dice que $i(f, U) = i(f, \phi) = 0$. □

Para X y $f : X \to X$ como antes, y valiéndonos de la definición de índice, definiremos un entero no negativo $N(f)$ al que llamaremos número de Nielsen de f. El número de Nielsen es una cota inferior para la cantidad de puntos fijos de f. Además es el objetivo de estas subsección probar que si g es homotópica a f entonces $N(f) = N(g)$.

2.4.1. Caminos

Llamamos camino a una función continua de $C : I \to X$. Dado un camino C podemos definir C^{-1} como $C^{-1} : I \to X$ $C^{-1}(t) = C(1-t)$ para todo $t \in I$. También si tenemos dos caminos C y D tal que $C(1) = D(0)$, puedo formar un nuevo camino al que llamaré CD de la siguiente manera:

$$CD(t) = \begin{cases} C(2t), & \text{si } t \leq 1/2; \\ D(2t-1), & \text{si } 1/2 < t \leq 1. \end{cases} \tag{4}$$

Definición 2.4.10. Decimos que dos caminos C y D son homotópicos con puntos finales fijos, si hay una función continua $\psi : I \times I \to X$ tal que

$$\begin{array}{ll} \psi(s,0) = D(0) = C(0) & \forall \ \ s \in I \\ \psi(s,1) = D(1) = C(1) & \forall \ \ s \in I \\ \psi(0,t) = C(t) & \forall \ \ t \in I \\ \psi(1,t) = D(t) & \forall \ \ t \in I \end{array}$$

Definimos una relación de equivalencia $\sim$ en el espacio de todos los caminos en X de la siguiente manera: diremos que dos caminos C y D estan relacionados si hay una homotopía con puntos finales fijos entre ellos. Notamos la clase de equivalencia que contiene al camino C como $\{ C \}$. Observamos que las clases $\{ C^{-1} \}$ y $\{ CD \}$ son independientes de los elementos C y D en $\{ C \}$ y $\{ D \}$.

Definiremos ahora otra operación con caminos que resultará útil. Sea C un camino en X y r, s pertenecientes a I. Definimos $C_s^r : I \to X$ como

$$C_s^r(t) = C(s + t(r-s))$$

Esto es la restricción de C al intervalo $[s, r] \subset I$ reparametrizado para que siga siendo un camino.

Lema 2.4.11. *Sea $C : I \to X$ un camino en X, entonces*

- $(C_q^r)^{-1} = C_r^q$
- $\{ C_q^r C_r^s \} = \{ C_q^s \}$.

Demostración. La primera afirmación sale de que

$$(C_q^r)^{-1}(t) = (C_q^r)(1-t) = C(q + (1-t)(r-q) = C(r + t(q-r)) = C_r^q(t)$$

Para la segunda definamos la homotopía con puntos finales fijos, $\psi : I \times I \to X$ como:

$$\psi(u,t) = \begin{cases} C[u(q + t(s-q) + (1-u))(q + 2t(r-q))], & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2; \\ C[u(q + t(s-q)) + (1-u)(r + (2t-1)(s-r))], & \text{si } 1/2 < t \leq 1. \end{cases}$$

Veamos que efectivamente ψ es una homotopía con puntos finales fijos En primer lugar calculemos

$$\psi(u,0) = C[uq + (1-u)q] = C(q)\,.$$

Como por (4) tenemos que $C_q^r C_r^s(0) = C_q^r(0) = C(q)$ y $C_q^s(0) = C(q)$, se cumple el primer punto. El segundo, $\psi(u, 1)$, es análogo. El tercer punto es verificar $\psi(0, t)$, si $t \leq 1/2$ tenemos

$$\psi(0, t) = C[q + 2t(r - q)].$$

Si $t > 1/2$ tenemos

$$\psi(0, t) = C[r + (2t - 1)(s - r)]\,.$$

por lo que $\psi(0, t) = C_q^r C_r^s(t)$. El último punto es análogo al anterior. □

2.4.2. Clases de puntos fijos

Sea $f : X \to X$ una función continua en una subvariedad X de $\mathbb{R}^n$ dotada de una métrica d. Decimos que dos puntos fijos x_0 y x_1 de f son $f-$equivalentes si existe un camino $C : I \to X$ tal que $C(0) = x_0$, $C(1) = x_1$ tal que $fC : I \to X$ cumple que $\{\, fC \,\} = \{\, C \,\}$.

Llamemos $\Theta(f)$ al conjunto de los puntos fijos de f, entonces la anterior es una clase de equivalencia en $\Theta(f)$ y a las clases de equivalencia las llamamos clases de puntos fijos.

Sub-Lema 2.4.12. *Todo par de funciones continuas $f, g : R^n \to R^n$ son homotópicos*

Demostración. Basta considerar la homotopía $h(x, t) = f(x)t + (1 - t)g(x)$. □

Proposición 2.4.13. *Sea $f : X \to X$ una función continua, entonces hay una cantidad finita de clases de puntos fijos.*

Demostración. Por ser X una variedad consideremos un abierto $U \subset X$ de la carta que se corresponde con una bola de $\mathbb{R}^n$ a la que llamamos B de modo que $\varphi^{-1}(U) \subset B$. Sea ε' el número de Lebesgue para el cubrimiento por abiertos del atlas. Por ser X localmente arco conexo y métrico si $x, y \in X$ y $d'(x, y) < \delta$, puedo unir x con y por un camino C que cumple que $diam(C(I)) \leq \delta$.

Por continuidad uniforme de f tenemos que para todo ε existe $\delta < \varepsilon'/2$ tal que si $d'(x', y') < \delta$ entonces

$$d(f(x'), f(y')) < \varepsilon'/2\,.$$

Supongamos que $x, x' \in \Theta(f)$ y $d'((x), (x')) < \delta$. Sea C un camino de x y x' como antes. Entonces foC tiene diámetro menor que $\varepsilon'/2$ y

$$d(C(t), foC(t)) < \varepsilon'$$

para todo t . Como dos curvas cuales quiera en $\mathbb{R}^n$ son homotópicas y como $x, x' \in$

$\Theta(f)$, sea $H : I \times I \to \mathbb{R}^n$ tal que

- $H(0,t) = \varphi^{-1} o f o C(t)$
- $H(1,t) = \varphi^{-1} o C(t)$
- $H(s,0) = \varphi^{-1} o f o C(0) = \varphi^{-1} o C(0)$
- $H(s,1) = \varphi^{-1} o f o C(1) = \varphi^{-1} o C(1)$

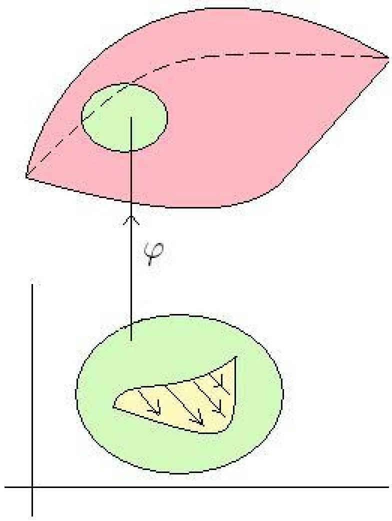


Figura 12: La imagen de H está contenida en $\varphi^{-1}(U)$

Observar que la imagen de H siempre está contenida en $\varphi^{-1}(U)$. Sea $H' = \varphi o H$, entonces H' es una homotopía entre C y $f o C$ que deja los puntos finales fijos. Hemos probado que las clases de puntos son abiertas, y como $\Theta(f)$ es compacto entonces solo puede haber finitas. $\square$

Observación 2.4.14. De la prueba anterior se deduce que las clases de puntos fijos son abiertos relativos de $\Theta(f)$ y por lo tanto resultan de la intersección de algún abierto de X con $\Theta(f)$.

Definición 2.4.15. Llamamos $\Theta'(f)$ al conjunto de las clases de puntos fijos de f.

Definición 2.4.16. Sea $f : X \to X$ y $F_1 \ldots F_n, \in \Theta'(f)$ sus clases de puntos fijos. Y sean U_j con $j = 1 \ldots n$ los abiertos de X tales que $F_j \subset U_j$ y $\overline{U_j} \cap \Theta(f) = F_j$ defino $i(F_j) = i(f, U_j)$.

Proposición 2.4.17. *La definición de $i(F_j)$ es independiente de la elección del abierto U_j.*

Demostración. Sean U y V en las condiciones del teorema, y sea $x \in U - U \cap V$. Como $x \in U$ entonces para todo $n \neq j$, $x \notin F_n$. Ahora como $F_j \subset U \cap V$ tenemos que $x \notin F_j$ y con esto $x \notin \Theta(f)$. Usando el axioma de aditividad (2.4.8) para la familia de subconjuntos abiertos disjuntos formada exclusivamente por $U \cap V$, tenemos que $i(f, U) = i(f, U \cap V)$. Un razonamiento análogo nos permite probar que $i(f, V) = i(f, U \cap V)$. □

Definición 2.4.18. Decimos que una clase de puntos fijos F es *esencial* si $i(F) \neq 0$ y decimos que es *no esencial* si $i(F) = 0$

Definición 2.4.19. Llamamos ***Número de Nielsen*** al número de clases de puntos fijos de una función continua f que son esenciales y lo notamos $\mathcal{N}(f)$.

Observación 2.4.20. Si f es una función continua en las condiciones anteriores hay al menos $\mathcal{N}(f)$ puntos fijos de f en X

Llamamos $\mathcal{C}_0(X, X)$ al conjunto de todas las funciones continuas que van de X en X. Sea $H' : X \times I \to I$ una homotopía en X. Podemos definir una función continua $H : I \to \mathcal{C}_0(X, X)$ como $H'(x, t) = H(t)(x)$, por lo que un homotopía puede ser vista como un camino en $\mathcal{C}_0(X, X)$.

Sea H un camino en $\mathcal{C}_0(X, X)$ y sea C un camino en X. Definimos un nuevo camino a partir de estos dado por $< H, C > (t) = H(t)(C(t))$

En el siguiente lema probaremos que esta operación se comporta bien con respecto al inverso y la composición de caminos.

Lema 2.4.21. *Sean H_1 y H_2 dos caminos en $\mathcal{C}_0(X, X)$ tales que $H_1(1) = H_2(0)$, y sean C_1 y C_2 caminos en X tales que $C_1(1) = C_2(0)$. Entonces:*

- $< H_1^{-1}, C_1^{-1} >=< H_1, C_1 >^{-1}$
- $< H_1H_2, C_1C_2 >=< H_1C_1 >< H_2, C_2 >$

Demostración. Por definición, para $t \in I$,

$$< H_1^{-1}, C_1^{-1} > (t) = H(1-t)(C(1-t)) =< H_1, C_1 >^{-1} (t)\,.$$

Para la composición tenemos que por definición,

$$\begin{aligned}
< H_1H_2, C_1C_2 > (t) &= H_1H_2(t)(C_1C_2(t)) \\
&= \begin{cases} H_1H_2(t)(C_1(2t)), & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2; \\ H_1H_2(t)(C_2(2t-1)), & \text{si } 1/2 < t \leq 1. \end{cases} \\
&= \begin{cases} H_1(2t)(C_1(2t)), & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \text{, ver definición (4)} \\ H_2(2t-1)(C_2(2t-1)), & \text{si } 1/2 < t \leq 1. \end{cases} \\
&= \begin{cases} < H_1C_1 > (2t), & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2; \\ < H_2C_2 > (2t-1), & \text{si } 1/2 < t \leq 1. \end{cases} \\
&= < H_1C_1 >< H_2, C_2 > (t).
\end{aligned}$$

□

El próximo resultado es para mostrar que la operación $< H, C >$ también se comporta bien con respecto a la homotopía con puntos finales fijos.

Observación 2.4.22. Otra forma de ver la homotopía con puntos finales fijos para C y C' dos caminos en X, es a través de la existencia o no de un camino $\gamma \in \mathcal{C}_0(I, X)$ tal que:

$$\begin{aligned}
&\gamma(t)(0) = C(0) = C'(0) \ \ \forall t \in I \\
&\gamma(t)(1) = C(1) = C'(1) \ \ \forall t \in I \\
&\gamma(0) = C \\
&\gamma(1) = C'
\end{aligned}$$

Lema 2.4.23. *Si H y H' son caminos en $\mathcal{C}_0(X, X)$ tales que $\{ H \} = \{ H' \}$ y C y C' son caminos en X tales que $\{ C \} = \{ C' \}$, entonces $\{ < H, C > \} = \{ < H', C' > \}$.*

Demostración. Por hipótesis existe un camino Ψ en $\mathcal{C}_0(I, \mathcal{C}_0(X, X))$ con:

$$\begin{aligned}
&\Psi(t)(0) = H(0) = H'(0) \ \ \forall t \in I \\
&\Psi(t)(1) = H(1) = H'(1) \ \ \forall t \in I \\
&\Psi(0) = H \\
&\Psi(1) = H',
\end{aligned}$$

y un camino $\gamma \in \mathcal{C}_0(I, X)$ tal que:

$$\begin{aligned}
&\gamma(t)(0) = C(0) = C'(0) \ \ \forall t \in I \\
&\gamma(t)(1) = C(1) = C'(1) \ \ \forall t \in I \\
&\gamma(0) = C \\
&\gamma(1) = C'
\end{aligned}$$

Definamos ahora el camino α en $\mathcal{C}_0(I, X)$ de manera que $\alpha(t) =< \Psi(t), \gamma(t) >$ para cada $t \in I$. Veamos que α es una homotopía de puntos finales fijos entre $< H, C >$ y $< H', C' >$.

- $\alpha(t)(0) =< \Psi(t), \gamma(t) > (0) = \Psi(t)(0)(\gamma(t)(0)) = \begin{cases} H(0)(C(0)) =< H, C > (0), \\ H'(0)(C'(0)) =< H', C' > (0), \end{cases}$
- $\alpha(t)(1) =< \Psi(t), \gamma(t) > (1) = \Psi(t)(1)(\gamma(t)(1)) = \begin{cases} H(1)(C(1)) =< H, C > (1), \\ H'(1)(C'(1)) =< H', C' > (1), \end{cases}$
- $\alpha(0) =< \Psi(0), \gamma(0) >=< H, C >$
- $\alpha(1) =< \Psi(1), \gamma(1) >=< H', C' >$.

$\square$

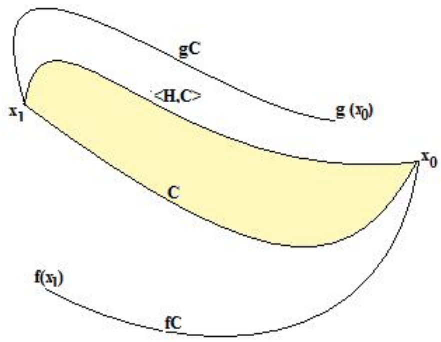


Figura 13: Un punto fijo x_0 de f y un punto fijo x_1 de g que están H-relacionados.

Sean f y g dos funciones continuas $f, g : X \to X$ y homotópicos. Considerando la homotopía entre f y g como un camino en $\mathcal{C}_0(X, X)$, tenemos que existe H tal que $H(0) = f$ y $H(1) = g$.

Sean $x_0 \in \Theta(f)$ y $x_1 \in \Theta(g)$, decimos que x_0 y x_1 están H*-relacionados* si existe un camino $C : I \to X$ con $C(0) = x_0$ y $C(1) = x_1$ que cumple que $\{< H, C >\} = \{C\}$ (ver 13). La notación que usaremos para esto es "$x_0 H x_1$".

A continuación probaremos varias propiedades de la "H-relación". Si bien esta no es una relación de equivalencia los siguientes lemas mostrarán que cumple propiedades similares

Lema 2.4.24. *Sea $f : X \to X$ una función continua y H un camino constante en $\mathcal{C}_0(X, X)$, Si $x \in \Theta(f)$ entonces xHx*

Demostración. Sea C un camino constante de x a x, entonces

$$< H, C > (t) = H(t)(C(t)) = f(x) = x = C(t)\,,$$

para todo $t \in I$. Entonces $< H, C >= C$. $\square$

Lema 2.4.25. *Sea H un camino en $\mathcal{C}_0(X, X)$ de f a g, y $x_0 \in \Theta(f)$, $x_1 \in \Theta(g)$ entonces $x_0 H x_1$ implica $x_1 H^{-1} x_0$*

Demostración. Por hipótesis tenemos un camino C, que une x_0 con x_1, tal que $\{< H, C >\} = \{C\}$. Como C^{-1} une x_1 con x_0 y valiéndonos de la primera parte de 2.4.21, tenemos $\{< H^{-1}, C^{-1} >\} = \{< H, C >^{-1}\} = \{C^{-1}\}$. $\square$

Lema 2.4.26. *Supongamos que H y H' son caminos en $\mathcal{C}_0(X, X)$ tales que $H(0) = f$, $H(1) = H'(0) = g$ y $H'(1) = h$. Si $x_0 \in \Theta(f)$, $x_1 \in \Theta(g)$ y $x_2 \in \Theta(h)$ son tales que $x_0 H x_1$ y $x_1 H' x_2$, entonces $x_0 H H' x_2$.*

Demostración. Sea C el camino que une x_0 con x_1, tal que $\{<H, C>\} = \{C\}$ y sea C', el camino que une x_1 con x_2, tal que $\{<H', C'>\} = \{C'\}$. Se tiene que HH' es un camino de f a h y CC' es un camino de x_0 a x_2. Por la segunda parte de 2.4.21 tenemos que $\{<HH', CC'>\} = \{<H, C><H'C'>\} = \{CC'\}$. $\square$

Lema 2.4.27. *Sean H y H' caminos en $\mathcal{C}_0(X, X)$ tales que $H(0) = H'(0) = f$, $H(1) = H'(1) = g$ y $\{H\} = \{H'\}$. Si $x_0 \in \Theta(f)$ y $x_1 \in \Theta(g)$ son tales que x_0Hx_1 entonces $x_0H'x_1$.*

Demostración. Sea C el camino que une x_0 con x_1, tal que $\{<H, C>\} = \{C\}$. Por el lema 2.4.23 tenemos que $\{<H, C>\} = \{<H', C>\}$ y por lo tanto $\{<H', C>\} = \{C\}$. $\square$

La siguiente proposición muestra que la "H-relación"no solo relaciona puntos fijos individuales, si no que también relaciona clases de equivalencia de puntos fijos enteras.

Proposición 2.4.28. *Sea H un camino en $\mathcal{C}_0(X, X)$ de f a g. Sean $x_0 \in \Theta(f)$ contenido en una clase de puntos fijos F de f, y $x_1 \in \Theta(g)$ y $G \in \Theta'(g)$ con $x_1 \in G$. Si x_0Hx_1 entonces $x_0'Hx_1'$ para cualquier $x_0' \in F$ y $x_1' \in G$*

Demostración. Sea J un camino constante en $\mathcal{C}_0(X, X)$ en f y K un camino constante en $\mathcal{C}_0(X, X)$ en g. Ahora consideremos $x_0, x_0' \in F$. Si x_0, y x_0' están en la misma clase de puntos fijos quiere decir que existe un camino C_0 de x_0, a x_0', tal que $\{fC_0\} = \{C_0\}$. Pero para todo $t \in I$ se tiene que

$$< J, C_0 > (t) = J(t)(C_0(t)) = fC_0(t)$$

entonces $< J, C_0 >= fC_0$, $\{C_0\} = \{< J, C_0 >\}$ y x_0Jx_0'. Análogamente se tiene x_1Kx_1'.

Por el lema 2.4.25 $x_0'J^{-1}x_0$. Además, por el lema 2.4.26 y como por hipótesis x_0Hx_1, entonces x_0HKx_1', aplicando el lema 2.4.26 nuevamente tenemos que $x_0'J^{-1}(HK)x_1' = x_0'JHKx_1'$ ya que por ser J constante $J = J^{-1}$.

Definamos ahora un camino Ψ en $\mathcal{C}_0(I, X)$ de esta forma:

$$\Psi(t)(s) = \begin{cases} J\left(\frac{2s}{1-t}\right), & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2},\ t \neq 1; \\ H\left(\frac{4s+2(t-1)}{3t+1}\right), & \text{si } \frac{1-t}{2} \leq s \leq \frac{t+3}{4}; \\ K\left(\frac{4s-t-3}{1-t}\right), & \text{si } \frac{t+3}{4} \leq s \leq 1,\ t \neq 1. \end{cases}$$

Observamos que $\Psi(t)(0) = J(0) = f = H(0)$, análogamente $\Psi(t)(1) = H(1) = g$. Veamos ahora $\Psi(0)$:

$$\Psi(0)(s) = \begin{cases} J(2s), & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2},\ t \neq 1; \\ H(4s-2), & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4}; \\ K(4s-3), & \text{si } \frac{3}{4} \leq s \leq 1,\ t \neq 1. \end{cases}$$

Por lo tanto $\Psi(0) = J(HK)$. Como además es fácil ver que $\Psi(1) = H$ tenemos que $\{JHK\} = \{H\}$ y por el lema 2.4.27 nos queda que $x_0'Hx_1'$ $\square$

Definición 2.4.29. Sean f y g dos funciones continuas de X en X y sean $F \in \Theta'(f)$ y $G \in \Theta'(g)$. Decimos que F y G están H relacionadas y lo notamos como FHG si existen $x_0 \in F$ y $x_1 \in G$ tales que $x_0 H x_1$.

Observación 2.4.30. La definición anterior es independiente del $x_0 \in F$ y $x_1 \in G$ que se elijan gracias a la proposición 2.4.28

Los siguientes lemas son análogos a los últimos 3 lemas pero para clases de puntos fijos en lugar de para puntos fijos individuales.

Lema 2.4.31. *Sea $f : X \to X$ una función continua y sea J un camino constante en $\mathcal{C}_0(X,X)$,dado por $J(t) = f$ para todo $t \in I$. Dos clases de equivalencia de puntos fijos de f, F y F' están J-relacionadas sí y solo sí son la misma.*

Demostración. Supongamos que $F = F'$ y sea $x \in F$. Por el lema 2.4.24, xJx, y entonces por definición FJF'.

Por otra parte supongamos que FJF', entonces xJx' para algún $x \in F$ y $x' \in F'$. Por definición existe un camino C en X que va de x a x' talque $\{ < J, C > \} = \{ C \}$, pero $< J, C >= fC$ y entonces $\{ fC \} = \{ C \}$. Eso es por definición que x y x' están en $F \cap F'$, pero como F y F' son clases de equivalencia $F = F'$. □

Lema 2.4.32. *Sea H un camino en $\mathcal{C}_0(X,X)$ que una f con g. Sea $F \in \Theta'(f)$ y $G \in \Theta'(g)$, tales que FHG, entonces $GH^{-1}F$.*

Demostración. Por definición hay un $x \in F$ y un $x' \in G$ tales que xHx'. Por el lema 2.4.25 tenemos que $x'H^{-1}x$ lo que por definición significa que $GH^{-1}F$. □

Los siguientes dos lemas son consecuencia inmediata de la ultima definición y de los lemas 2.4.26 y 2.4.27 respectivamente.

Lema 2.4.33. *Sean J y J' caminos en $\mathcal{C}_0(X,X)$ tales que $J(0) = f$, $J(1) = J'(0) = g$ y $J'(1) = h$. Sean $F \in \Theta'(f)$, $G \in \Theta'(g)$ y $H \in \Theta'(h)$. Si FJG y $GJ'H$, entonces $FJJ'H$.*

Lema 2.4.34. *Sean $f, g : X \to X$ dos funciones continuas y, H y H' dos caminos en $\mathcal{C}_0(X,X)$ de f a g y tales que $\{ H \} = \{ H' \}$. Si $F \in \Theta'(f)$ y $G \in \Theta'(g)$ y FHG entonces $FH'G$.*

Proposición 2.4.35. *Sea H un camino en $\mathcal{C}_0(X,X)$ de f a g. Sean $F, F' \in \Theta'(f)$ y $G, G' \in \Theta'(g)$. Si FHG' y FHG entonces $G = G'$ y si $F'HG$ y FHG entonces $F = F'$.*

Demostración. Si FHG y FHG' entonces por el lema 2.4.32 tenemos que $GH^{-1}F$. Por el lema 2.4.33 $GH^{-1}HG'$. Definimos el camino constante $J : I \to \mathcal{C}_0(X, X)$ dado por $J(t) = g$ para todo $t \in I$ y el camino Ψ en $\mathcal{C}_0(I, \mathcal{C}_0(X, X))$ dado por:

$$\Psi(t)(s) = \begin{cases} J(s), & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{t}{2}; \\ H^{-1}(2s - t), & \text{si } \frac{t}{2} \leq s \leq \frac{1}{2}; \\ H(2s + t - 1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{2-t}{2}; \\ J(s), & \text{si } \frac{2-t}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Observamos que $\Psi(t)(0) = H^{-1}(0) = g = J(0)$, análogamente $\Psi(t)(1) = H(1) = g = J(1)$ Veamos ahora $\Psi(0)$ y $\Psi(1)$:

$$\Psi(0)(s) = \begin{cases} H^{-1}(2s), & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}; \\ H(2s - 1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1; \end{cases}$$

Entonces $\Psi(0) = H^{-1}H$.

$$\Psi(1)(s) = \begin{cases} J(s), & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}; \\ J(s), & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Con lo que $\Psi(1) = J$ y por lo tanto $\{ H^{-1}H \} = \{ J \}$. Por el lema 2.4.34 y 2.4.31 nos queda que GJG' y $G = G'$. Para la segunda parte de la proposición basta usar el lema 2.4.32 para ver que si FHG y $F'HG$ entonces $GH^{-1}F$ y $GH^{-1}F'$ y nos queda el caso que ya probamos. $\square$

Esta proposición establece una correspondencia uno a uno entre las clases de puntos fijos de dos funciones homotópicas, a través de la homotopía. El objetivo ahora es ver que esta correspondencia lleva clases esenciales en clases esenciales.

2.4.3. Invarianza por homotopías

Lema 2.4.36. *Sea $H : I \to \mathcal{C}_0(X, X)$ y sean $s, r, q \in I$. Supongamos que F_q, F_r y F_s son clases de puntos fijos de $H(q)$, $H(r)$ y $H(s)$ respectivamente. Si $F_q H_q^r F_r$ y $F_r H_r^s F_s$ entonces $F_q H_q^s F_s$*

Demostración. Por 2.4.33 tenemos que $F_q H_q^r H_r^s F_s$ y por 2.4.11 tenemos que $\{ H_q^r H_r^s \} = \{ H_q^s \}$ combinando esto con 2.4.34 tenemos el resultado. $\square$

Proposición 2.4.37. *Sea H un camino $H : I \to \mathcal{C}_0(X,X)$ y sea $r \in I$. Llamamos a las clases de puntos fijos de $H(r)$, $F_1(r), \dots, F_n(r)$. Existen abiertos $U_1, \dots, U_n$ y un $\varepsilon > 0$ tal que*

1. *$F_j(r) \subset U_j$,*
2. *Si $j \neq k$ entonces $U_j \cap U_k = \phi$,*
3. *Si $|\, r - s\,| < \varepsilon$ y $F(s)$ es una clase de puntos fijos de $H(s)$ existe un j tal que $F(s) \subset U_j$ y $F(s) H^r_s F_j(r)$,*
4. *Si $|\, r - s\,| < \varepsilon$ entonces $(H(s), U_j) \in \mathfrak{C}'$ para todo $j = 1, \dots, n$*

Demostración. Por la observación 2.4.14 tenemos que existen abiertos $U'_1, \dots, U'_n$ que cumplen las condiciones (1) y (2). Sea $2\varepsilon' > 0$ el número de Lebesgue para el cubrimiento por abiertos dado por los abiertos de las cartas. Por continuidad uniforme de H tenemos que si $d'(x, x') < \delta < \varepsilon'/4$ y $|\, r - s\,| < \delta$ entonces

$$d'(H(r)(x), H(s)(x')) < \varepsilon'/4 \,.$$

Para cada $x \in \Theta(H(r))$ Sea j tal que $x \in F_j(r)$. Elijo ε_x de modo que $\varepsilon_x < \delta$ y

$$\{\, y \in X \;\mid\; d'(x, y) < \varepsilon_x \,\} = U(x, \varepsilon_x) \subset U'_j.$$

Como $\Theta(H(r))$ es compacto existen finitos abiertos $U(x_1, \varepsilon_{x_1}), \dots, U(x_m, \varepsilon_{x_m})$ tales que

$$\Theta(H(r)) \subset \bigcup_{k=1}^{m} U(x_k, \varepsilon_{x_k}) \,.$$

Para cualquier $j = 1, \dots, n$ sea $x \in F_j(r)$, entonces existe k tal que $x \in U(x_k, \varepsilon_{x_k})$. Sea $\varepsilon_1 = \text{mín}\,\{\, \varepsilon_{x_1} \dots, \varepsilon_{x_m} \,\}$

Queremos ver que x_k pertenece a $F_j(r)$. Se tiene que $x_k, x \in U(x_k, \varepsilon_{x_k})$ y sea C un camino que une x_k con x y $d'(C(t), x) < \varepsilon_{x_k} < \delta$. Esto implica que

$$d'(H(r)(C(t)), H(r)(x)) = d'(H(r)(C(t)), x) < \varepsilon'/4 \,,$$

y por lo tanto $d'(H(r)(C(t)), C(t)) < \varepsilon'/2$ para todo $t \in I$. Por lo tanto por el lema de Lebesgue (ver sección (1.1)) existe un abierto de la carta al que llamamos U que contiene a C y a $H(r)(C)$. Esto permite construir una homotopía entre $\varphi^{-1}(H(r)(C))$ y $\varphi^{-1}(C)$ con puntos finales fijos, sin salirse de $\varphi^{-1}(U)$ que me determina una homotopía en X a través de φ. Con esto tenemos que $\{\, H(r)(C) \,\} = \{\, C \,\}$ y que x y x_k están en la misma clase de puntos fijos.

Llamemos $U(x, \varepsilon) \subset X$ a la bola de centro x y radio ε con la distancia de X. Llamamos $U_j = \bigcup U(x_k, \varepsilon_{x_k})$ donde la unión es sobre los $x_k \in F_j(r)$. Como para cada $U(x_k, \varepsilon_{x_k})$ con $x_k \in F_j(r)$ tenemos que $U(x_k, \varepsilon_{x_k}) \subset U'_j$ y entonces los U_j cumplen con los puntos (1) y (2) de la proposición. Veamos que cumplen con la condición (3). Como $\Theta(H(r)) \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k$ entonces si $x \in X - \bigcup_{k=1}^{n} U_k$ entonces existe η tal que

$$x \notin U(H(r)(x), \eta) \,.$$

Usando nuevamente la continuidad uniforme de H existe un ε_2 tal que si $|\, r-s\,| < \varepsilon_2$ se tiene que

$$H(s)(x) \in U(H(r)(x), \eta)\,.$$

Por lo tanto si $|\, r-s\,| < \varepsilon_2$ y $x \in X - \bigcup_{k=1}^{n} U_k$ entonces $H(s)(x) \neq x$ o lo que es lo mismo $\Theta(H(s)) \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k$.

Llamamos $\varepsilon = \text{mín}\{\,\varepsilon_1, \varepsilon_2\,\}$ y supongamos que $|\, r-s\,| < \varepsilon$ y $x_s \in F(s)$. Como $\varepsilon \leq \varepsilon_2$ se tiene que $x_s \in U_j$ para algún $j = 1, \ldots, n$, y por lo tanto $x_s \in U(x_k, \varepsilon_{x_k})$ para algún k con x_k en $F_j(r)$. Como $x_s \in U(x_k, \varepsilon_{x_k})$ sea C un camino que une x_s con x_k. Para todo $t \in I$ defino $t' = s + t(r-s)$ con lo que $H_s^r(t) = H(t')$. En estas condiciones

$$|\, r - t'\,| = |\, 1-t\,|\,|\, r-s\,| \leq |\, r-s\,| < \varepsilon$$

Además como $\varepsilon \leq \varepsilon_1 \leq \delta \leq \varepsilon'/2$ tenemos :

$$\begin{aligned} d'(H_s^r(t)(C(t)), C(t)) &= d'(H(t')(C(t)), C(t)) \\ &\leq d'\left(H(r)(C(t)), H(t')(C(t))\right) + d'\left(H(r)(C(t)), C(t)\right) \\ &< \frac{\varepsilon'}{4} + \frac{\varepsilon'}{2} < \varepsilon' \end{aligned}$$

Como ya hemos visto anteriormente como ε' es menor que el número de Lebesgue tenemos que $\{ < H_s^r, C > \} = \{\, C\,\}$ y por lo tanto $x_s H_s^r x_k$. Por definición $F(s) H_s^r F_j(r)$ y además si hubiera algún $x_s' \in F(s)$ tal que $x_s' \in U_k$ el mismo razonamiento llevaría a que $F(s) H_s^r F_k(r)$ y por 2.4.35 tendríamos que $j = k$. Con esto tenemos probado el punto (3) ya que $F(s) \subset U_j$. Para el punto (4) basta recordar que como $\varepsilon \leq \varepsilon_2$ teníamos que si $|\, r-s\,| < \varepsilon$ entonces $H(s)$ no tiene puntos fijos en $X - \bigcup_{j=1}^{n} U_j$ y en particular $H(s)$ no tiene puntos fijos en $\bigcup_{j=1}^{n} \partial U_j$. Por lo tanto $(H(s), U_j) \in \mathfrak{C}'$ para todo $j = 1, \ldots, n$. □

El próximo teorema nos muestra que una clase esencial de puntos fijos, no se puede deshacer moviendo f por una homotopía. Aun más nos dice que si dos clases de puntos fijos de corresponden a través de la homotopía, entonces se preserva el índice.

Teorema 2.4.38. *Sea H un camino $H : I \to \mathcal{C}_0(X, X)$ que va de f a g. Sea $F \in \Theta'(f)$. Si F esta H-relacionada con alguna $G \in \Theta'(g)$, entonces $i(F) = i(G)$. Si F no está relacionada con ninguna clase de puntos fijos de g entonces $i(F) = 0$.*

Demostración. Sea $x \in F$, y llamémosle K_s al conjunto de los puntos $x' \in \Theta(H(s))$ que están H_0^s-relacionados con x. Por 2.4.35, K_s puede ser o vacío o una sola clase de puntos fijos. Si $K_s = \phi$ tenemos que $i(K_s) = i(H(s), K_s)$ y por 2.4.9 $i(K_s) = 0$. Probaremos que $i(F) = i(K_1)$ sin importar si K_1 es vacio o no y así tenemos ambas partes del teorema a la vez. Probaremos entonces que existe un $\varepsilon > 0$ tal que si $|\, r-s\,| < \varepsilon$ entonces $i(K_s) = i(K_r)$ y como I es conexo tendremos que $i(F) = i(K_1)$.

Afirmación. *Dado un* $r \in I$ *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que si* $|\, r - s\,| < \varepsilon$ *entonces*

$$i(K_s) = i(K_r)$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ como en 2.4.37. Si $K_s \neq \phi$ tenemos que $K_s H_s^r F_j(r)$ para algún $F_j(r) \in \Theta'(H(r))$ osea existe $x' \in K_s$ e $y \in F_j(r)$ tales que $xH_s^r y$ en particular $F_j(r) \neq \phi$. Por definición de K_s tenemos que $FH_0^s K_s$ (recordar que si $K_s \neq \phi$, K_s es una clase de puntos fijos). Combinando el lema 2.4.36 con la proposición 2.4.35 tenemos que $FH_0^r F_j(r)$ y $F_j(r) = K_r$. En particular si $K_s \neq \phi$ entonces $K_r \neq \phi$ y recíprocamente haciendo un razonamiento análogo.

Si $K_s = K_r = \phi$ tenemos que $i(K_r) = i(K_s) = 0$, por lo que nos queda probar para el caso en que $K_s \neq \phi$.

Probaremos primero que si U es uno de los abiertos como en el lema 2.4.37 que contiene a K_r entonces

$$U \cap \Theta(H(s)) = K_s. \tag{5}$$

Como estamos suponiendo que $K_s \neq \phi$, por el lema 2.4.37 tenemos que existe un j tal que $K_s \subset U_j$ y $K_s H_s^r F_j(r)$. Pero ya vimos que $K_r = F_j(r)$ por lo que $H(s) \subset U$. Esto implica que

$$K_s \subset U \cap \Theta(H(s))$$

y en particular $U \cap \Theta(H(s)) \neq \phi$.

Sea $x_s \in U \cap \Theta(H(s))$, entonces $x_s \in J$ para algún $J \in \Theta'(H(s))$. Por el lema 2.4.37 $J \subset U_j$ para algún j pero entonces $x_s \in U \cap U_j$, por lo que $U = U_j$ y $JH_s^r K_(r)$. Usando la proposición 2.4.35 tenemos que $J = K_s$ y

$$U \cap \Theta(H(s)) \subset K_s\,.$$

Por definición $i(K_r) = i(H(r), U)$, nuevamente por el lema 2.4.37 tenemos que

$$i(H(s), U) \in \mathfrak{C}'$$

y $i(K_s) = i(H(s), U)$ si $|\, r - s\,| < \varepsilon$. Finalmente H_s^r es una homotopía de $H(s)$ a $H(r)$, llamándole $t' = s + t(r - s)$ nos queda que $|\, r - t'\,| \leq |\, r - s\,| < \varepsilon$ por lo que

$$i(H_s^r(t), U) \in \mathfrak{C}'$$

y por el axioma de homotopía 2.4.8, tenemos que

$$i(K_s) = i(H(s), U) = i(H(r), U) = i(K_r)\,.$$

□

Finalmente llegamos al resultado que era el objetivo de este capítulo.

Teorema 2.4.39. *Sean* $f, g : X \to X$ *dos funciones continuas y homotópicos, entonces*

$$\mathcal{N}(f) = \mathcal{N}(g)\,.$$

Demostración. Sea H la homotopía entre f y g. Combinando el teorema 2.4.38 con la proposición 2.4.35 tenemos que cada clase de puntos fijos esencial de f se corresponde con una única clase de puntos fijos de g que además debe ser esencial porque se preserva el índice. Esto nos dice que

$$\mathcal{N}(f) \leq \mathcal{N}(g)\,.$$

Haciendo el mismo razonamiento para H^{-1} obtenemos $\mathcal{N}(f) \geq \mathcal{N}(g)$ y por lo tanto

$$\mathcal{N}(f) = \mathcal{N}(g)\,.$$

□

3. Definiciones de Conjunto de Rotación

A partir de ahora F denotará un homeomorfismo del plano que es levantado de f un homeomorfismo del toro homotópico a la identidad. El principal objetivo de esta sección es definir varias nociones de conjunto de rotación y estudiar las propiedades de éstas.

3.1. Definiciones

Una generalización directa de la noción de número de rotación en el círculo para el caso del toro sería la siguiente:

Definición 3.1.1. Para cada punto $z \in \mathbb{R}$ definimos $\rho_F(z)$ como:

$$\rho_F(z) = \left\{ \text{ puntos de acumulación de } \frac{F^n(z) - (z)}{n} \right\}.$$

Definición 3.1.2. Llamamos **Conjunto de Rotación Puntual** ó $\rho_p(F)$ a

$$\rho_p(F) = \bigcup_{z \in \mathbb{R}^2} \rho_F(z).$$

Observación 3.1.3. Como f es isotópico a la identidad y dado $v \in \mathbb{Z}^2$ tenemos que:

$$\frac{F^n(z+v) - (z+v)}{n} = \frac{F^n(z) - (z)}{n},$$

por lo que $\rho_p(F) = \bigcup_{z \in \mathbb{R}^2} \rho_F(z) = \bigcup_{z \in [0,1]^2} \rho_F(z)$.

Pero la motivación de definir un conjunto de rotación es de alguna manera medir el movimiento promedio de cualquier punto, midiendo el promedio de movimiento en partes finitas de las órbitas y haciendo tender este largo a infinito. Por lo tanto no es necesario para esto fijar el punto desde el principio. Por lo que podemos definir el **Conjunto de Rotación de** F de la siguiente manera.

Definición 3.1.4. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y F como antes definimos $D_n(F)$ como

$$D_n(F) = \left\{ \frac{F^n(z) - (z)}{n} \; : z \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ \frac{F^n(z) - (z)}{n} \; : z \in [0,1]^2 \right\}.$$

Observamos que en estas condiciones el conjunto $D_n(F)$ es compacto.

Definición 3.1.5. Llamamos **Conjunto de Rotación de F** ó $\rho(F)$ a

$$\rho(F) = \limsup_n D_n(F) = \bigcap_{h=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{n \geq h} D_n(F)}.$$

En estas condiciones el conjunto de rotación de F es cerrado, pero probaremos que además es conexo y convexo, cosa que no ocurre con el conjunto de rotación puntual como veremos más adelante.

Observación 3.1.6. Esta definición de conjunto de rotación es equivalente a considerar los puntos de acumulación de las sucesiones de la forma

$$\left(\frac{F^{n_i}(z_i) - (z_i)}{n_i} \right)_{i=1}^{\infty} \qquad z_i \in [0,1]^2 \quad n_i \to \infty$$

Observación 3.1.7. Tenemos que si $v \in \rho_p(F)$ entonces existe un $z \in [0,1]^2$ y una subsucesión de los naturales $n_k \to \infty$ de modo que $\frac{F^{n_k}(z)-(z)}{n_k} \to v$ con k. Por lo tanto $\rho_p(F) \subset \rho(F)$

Definiremos también otra noción relacionada con los conjuntos de rotación. Sea F un levantado de un homeomorfismo del toro que preserva orientación. Definimos un mapa $\phi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^2$ como $\phi(x) = F(y) - y$ donde y $y \in \pi^{-1}(x)$ (no depende del y ya que $F(y+k) = F(y) + k$ para todo $k \in \mathbb{Z}^2$) Denotamos el espacio de las medidas de probabilidad f-invariantes en $\mathbb{T}^2$ como $\mathcal{M}(f)$ y el subespacio de las medidas ergódicas como $\mathcal{M}_E(f)$. Si $\mu \in \mathcal{M}_E(f)$ entonces por el teorema de Birkhoff tenemos que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi o f \;{}_{n\to\infty} \longrightarrow \int \phi \, d\mu \quad \mu \text{ casi todo punto} \tag{6}$$

Por otra parte si $\pi(y) = x$ entonces

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi o f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F^{k+1}(y) - F^k(y) = \frac{F^n(y) - (y)}{n} \,. \tag{7}$$

Definición 3.1.8. Llamamos ρ_{mes} al conjunto

$$\rho_{mes}(F) = \left\{ \int \phi \, d\mu \ : \mu \in \mathcal{M}_E(f) \right\}$$

Llamaremos $f_*(\mu)$ a la medida que cumple que

$$\int \psi \, df_*(\mu) = \int \psi o f \, d\mu \,,$$

para toda función continua $\psi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$.

Observación 3.1.9. De 6 y 7 tenemos que para μ-casi todo $x \in \mathbb{T}^2$ y para todo $y \in \pi^{-1}(x)$ tenemos que la sucesión $\left(\frac{F^n(y)-(y)}{n} \right)_{n=1}^{\infty}$ converge a $\int \phi \, d\mu$ con lo que $\int \phi \, d\mu \in \rho_p(F)$.

Por otro lado como por el teorema de Recurrencia (ver sección (1.1)) tenemos que μ-casi todo $x \in \mathbb{T}^2$ es recurrente para f entonces $\int \phi \, d\mu \in \bigcup_{x \in \pi^{-1}(\Omega f)} \rho(F, x)$

3.2. Propiedades de los Conjuntos de Rotación

Propiedades 3.2.1. *Sea F el levantado de f un homeomorfismo del toro homotópico a la identidad,$m \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{Z}^2$, entonces tenemos:*

1. $\rho_p(F^m - q) = m\rho_p(F) - q$
2. $\rho(F^m - q) = m\rho(F) - q$

Demostración. (2)

Sea $v \in \rho(F^m - q)$. Queremos ver que $(v+q)/m \in \rho(F)$. Como $v \in \rho(F^m - q)$ tenemos que existe n_k y z_k tal que

$$\frac{(F^m - q)^{n_k}(z_k) - z_k}{n_k} \to v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(F^m - q)^{n_k}(z_k) - z_k}{mn_k} \to \frac{v}{m}\,. \tag{8}$$

Por otro lado por 1.3.3 tenemos que

$$(F^m - q)^{n_k}(z_k) = (F^m - q)^{n_k - 1} o (F^m - q)(z_k) = (F^m - q)^{n_k - 1}(F^m(z_k) - q).$$

Reiterando este procedimiento n_k veces

$$(F^m - q)^{n_k}(z_k) = (F^m)^{n_k}(z_k) - n_k q.$$

Combinando esto último con (8) nos queda

$$\frac{(F^m - q)^{n_k}(z_k) - z_k}{n_k} \to v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(F^m)^{n_k}(z_k) - z_k}{mn_k} \to \frac{v+q}{m}\,. \tag{9}$$

Consideramos ahora la subsucesión de los naturales mn_k entonces tenemos que $(v + q/m \in \rho(F))$. Por lo tanto $\rho(F^m - q) \subset m\rho(F) - q$.

Veamos la otra inclusión. Sea $v \in \rho(F)$, existen n_k y z_k tal que $\frac{F^{n_k}(z_k) - z_k}{n_k} \to v$.

Escribiendo $n_k = ml_k + r_k$, con $0 \leq r_k < m$ tenemos que si $n_k \to \infty$ con k entonces $l_k \to \infty$. Probaremos que

$$\parallel \frac{F^{n_k}(z_k) - z_k}{n_k} - \frac{F^{ml_k}(z_k) - z_k}{ml_k} \parallel \to 0 \quad \text{con } k\,.$$

$$\begin{aligned}
&\parallel \frac{F^{n_k}(z_k) - z_k}{n_k} - \frac{F^{ml_k}(z_k) - z_k}{ml_k} \parallel \leq \\
&\parallel \frac{F^{n_k}(z_k) - z_k}{n_k} - \frac{F^{n_k}(z_k) - z_k}{ml_k} \parallel + \parallel \frac{F^{n_k}(z_k) - z_k}{ml_k} - \frac{F^{ml_k}(z_k) - z_k}{ml_k} \parallel = \\
&\parallel F^{n_k}(z_k) - z_k \parallel \parallel \frac{1}{(n_k)} - \frac{1}{(ml_k)} \parallel + \parallel \frac{F^{r_k}(F^{ml_k}(z_k)) - F^{ml_k}(z_k)}{ml_k} \parallel = \\
&\parallel \frac{F^{n_k}(z_k) - z_k}{n_k} \parallel \left| \frac{r_k}{(ml_k)} \right| + \parallel \frac{r_k}{(ml_k)} \frac{F^{r_k}(F^{ml_k}(z_k)) - F^{ml_k}(z_k)}{r_k} \parallel
\end{aligned}$$

Como $|\frac{r_k}{(ml_k)}| \to 0$, bastaría ver que $\frac{F^{r_k}(F^{ml_k}(z_k))-F^{ml_k}(z_k)}{r_k}$ está acotado. Asumiendo que ésto es así (lo demostraremos a continuación) tendríamos que $\frac{(F^m)^{l_k}(z_k)-z_k}{l_k} \to mv$ y por lo tanto

$$\frac{(F^m-q)^{l_k}(z_k)-z_k}{l_k} \to mv-q\,.$$

$\square$

Sub-Lema 3.2.2. *El conjunto*

$$A=\left\{\frac{F^j(z)-(z)}{j} \;:z\in\mathbb{R}^2,\;\; 0\le j\le n\right\}=\left\{\frac{F^j(z)-(z)}{j} \;:z\in[0,1]^2\right\},\;\; j\le n\,,$$

está acotado.

Demostración. Esto es cierto por continuidad de $\frac{F^j(z)-(z)}{j}$ porque los j son finitos y por ser $[0,1]^2$ compacto. $\square$

3.3. $\rho(F)$ es convexo

Nuestro objetivo ahora es demostrar que el conjunto de rotación de un levantado de un homeomorfismo f en el toro $\mathbb{T}^2$ homotópico a la identidad, es convexo. Veremos en la siguiente sección que el conjunto de rotación puntual no solo no tiene por qué ser convexo sino que también puede no ser conexo y que para el toro $\mathbb{T}^n$ $n > 2$ si definimos el conjunto de rotación análogamente este tampoco tiene por qué ser convexo. Recordamos que

$$D_n(F) = \left\{ \frac{F^n(z) - (z)}{n} \ : z \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ \frac{F^n(z) - (z)}{n} \ : z \in [0,1]^2 \right\}.$$

Lema 3.3.1. *Si F es un levantado de f en las condiciones anteriores entonces $\rho(F) \subset Conv(D_n(F))$ para todo n natural.*

Demostración. Fijemos n natural. Como $D_n(F)$ es cerrado tenemos que $\mathrm{Conv}(D_n(F))$ es cerrado. Sea $v \in \rho(F)$ queremos encontrar $v_k \in \mathrm{Conv}(D_n(F))$ que tienda a v con k.

Como $v \in \rho(F)$ existen n_k y z_k tal que $\frac{F^{n_k}(x_k)-x_k}{n_k} \to v$. Escribimos $n_k = nq_k + r_k$ con $0 \leq r_k < n$. Como $n_k \to \infty$ entonces $q_k \to \infty$. Con esto podemos escribir

$$\begin{aligned}
&\frac{F^{n_k}(x_k) - x_k}{n_k} = \\
&\frac{n}{n_k}\sum_{i=1}^{q_k} \frac{F^n(F^{(i-1)_n}(x_k)) - F^{(i-1)_n}(x_k)}{n} + \frac{r_k}{n_k}\frac{F^{r_k}(F^{nq_k}(x_k)) - F^{nq_k}(x_k)}{r_k} = \\
&\frac{nq_k}{n_k}\frac{1}{q_k}\sum_{i=1}^{q_k} \frac{F^n(F^{(i-1)_n}(x_k)) - F^{(i-1)_n}(x_k)}{n} + \frac{r_k}{n_k}\frac{F^{r_k}(F^{nq_k}(x_k)) - F^{nq_k}(x_k)}{r_k}.
\end{aligned}$$

Definimos v_k como:

$$v_k = \frac{1}{q_k}\sum_{i=1}^{q_k} \frac{F^n(F^{(i-1)_n}(x_k)) - F^{(i-1)_n}(x_k)}{n}.$$

Se tiene que v_k pertenece a $\mathrm{Conv}\,(D_n)$.

Como $\frac{nq_k}{n_k} \to 1$, y dado que $\frac{r_k}{n_k} \to 0$ y 3.2.2, tenemos que el segundo sumando tiende a cero con k y que

$$\lim_k v_k = \lim_k \frac{F^{n_k}(x_k) - x_k}{n_k} = v\,.$$

□

Observación 3.3.2. Sea $v \in \mathbb{Z}^2$ entonces $F^n(\overset{\circ}{[0,1]^2}) \cap \{\, F^n(\overset{\circ}{[0,1]^2}) + v \,\} = \phi$. Esto es así ya que por 1.3.3 $F^n(x+v) = F^n(x) + v$ para todo $x \in [0,1]^2$, y $v \in \mathbb{Z}^2$.

Proposición 3.3.3. *Sea f un homeomorfismo del toro homotópico a la identidad, y F un levantado de f, entonces Conv$(F^n([0,1]^2)) \subset B(F^n([0,1]^2), \sqrt{2})$*

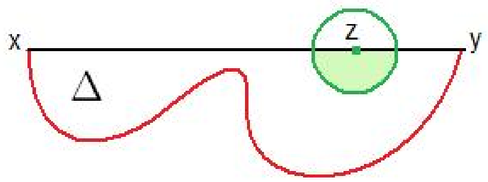
Demostración. Supongamos por absurdo que existe algún $z \in \text{Conv}(F^n([0,1]^2))$ tal que $z \notin B(F^n([0,1]^2), \sqrt{2})$ y sean $x, y \in F^n([0,1]^2)$ tal que $z \in \overline{xy}$. Como F^n es un homeo y $[0,1]^2$ es convexo entonces $F^n([0,1]^2)$ es arcoconexo.

Sea α una curva simple que une x con y de modo que:

- $\alpha \subset F^n([0,1]^2)$,
- $\alpha\,|_{(0,1)} \subset (\overset{\circ}{F^n}([0,1]^2))$
- $\alpha \cap xy = \phi$.

Como $z \notin B(F^n([0,1]^2), \sqrt{2})$ tenemos que

$$B(z, \sqrt{2}) \cap F^n([0,1]^2) = \phi \tag{10}$$



Definamos ahora la región Δ delimitada por $\alpha \cup \overline{xy}$. La región $\Delta \cap B(z, \sqrt{2})$ es un semidisco de radio $\sqrt{2}$ porque por la ecuación (10), $B(z, \sqrt{2}) \cap \alpha = \phi$. Valiéndonos del lema 2.3.2 tenemos que debe existir un $v \in \mathbb{Z}^2$ tal que $x + v \in \Delta \cap B(z, \sqrt{2})$. Entonces α y $\alpha + v$ se cortan, contradiciendo la observación 3.3.2. □

Proposición 3.3.4. *Sea f un homeomorfismo del toro homotópico a la identidad, y F un levantado de f entonces $\rho(F) = \bigcap_n$ Conv$(D_n(F))$, lo que implica que $\rho(F)$ es convexo.*

Demostración. Por la proposición 3.3.1 tenemos que $\rho(F) \subset \text{Conv}(D_n(F))$ para todo n natural, por lo tanto $\rho(F) \subset \bigcap_n \text{Conv}\,(D_n(F))$. Veamos ahora la otra inclusión. Sea $\frac{F^n(z)-z}{n} \in D_n(F)$ entonces

$$\frac{F^n(z) - z}{n} = \frac{F^n(z)}{n} + \frac{-z}{n} \text{ con } \| \frac{-z}{n} \| \leq \frac{\sqrt{2}}{n} \text{ porque } z \in [0,1]^2 .$$

De esto tenemos que

$$D_n(F) \subset B\left(\frac{F^n([0,1]^2)}{n}, \frac{\sqrt{2}}{n}\right) ,$$

por lo tanto

$$\mathrm{Conv}\,(D_n(F)) \subset \mathrm{Conv}\left(B\left(\frac{F^n([0,1]^2)}{n},\frac{\sqrt{2}}{n}\right)\right) = B\left(\mathrm{Conv}\left(\frac{F^n([0,1]^2)}{n}\right),\frac{\sqrt{2}}{n}\right).(11)$$

De la proposición 3.3.3 tenemos:

$$\mathrm{Conv}\left(\frac{F^n([0,1]^2)}{n}\right) \subset B\left(\frac{F^n([0,1]^2)}{n},\frac{\sqrt{2}}{n}\right) \tag{12}$$

De (11) y (12) deducimos que

$$\mathrm{Conv}\,(D_n) \subset B\left(\frac{F^n([0,1]^2)}{n},\frac{2\sqrt{2}}{n}\right). \tag{13}$$

Por otra parte si $\frac{F^n(x)}{n} \in \frac{F^n([0,1]^2)}{n}$ entonces

$$\frac{F^n(x)}{n} = \frac{F^n(x)}{n} + \frac{-x}{n} + \frac{x}{n} = \frac{F^n(x)-x}{n} + \frac{x}{n}.$$

El primer sumando pertenece a D_n y dado que $\|\frac{x}{n}\| \leq \frac{\sqrt{2}}{n}$ porque $x \in [0,1]^2$, tenemos que:

$$\frac{F^n([0,1]^2)}{n} \subset B\left(D_n,\frac{\sqrt{2}}{n}\right). \tag{14}$$

De (14) y (13) deducimos:

$$\mathrm{Conv}\,(D_n) \subset B\left(D_n,\frac{3\sqrt{2}}{n}\right). \tag{15}$$

Entonces tenemos que para todo $v \in \mathrm{Conv}\,(D_n)$ existe un $x_n \in [0,1]^2$ de modo que

$$\| v - \frac{F^n(x_n)-x_n}{n} \| \leq \frac{3\sqrt{2}}{n}.$$

Con lo que si tomamos $v \in \bigcap_n \mathrm{Conv}\,(D_n(F))$ entonces existe una sucesión $\{ x_n \}$ tal que

$$\| v - \frac{F^n(x_n)-x_n}{n} \| \leq \frac{3\sqrt{2}}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \;\text{ y }\; \lim_n \frac{F^n(x_n)-x_n}{n} = v\,.$$

Esto prueba la segunda inclusión

Observamos que como la intersección no vacía de convexos es convexa, tenemos que $\rho(F)$ es convexo $\square$

Lema 3.3.5. *Los puntos extremales de $\rho(F)$ pertenecen al ρ_{mes}.*

Demostración. Sea v un punto extremal de $\rho(F)$ Podemos encontrar $\{ y_i \}_0^\infty$ y $\{ n_i \}_0^\infty$ con $n_i > i$ tal que

$$\text{lím}_{i\to\infty} \frac{F^{n_i}(y_i) - y_i}{n_i} = v\,.$$

Sea $\widetilde{x_i} = \pi(y_i)$ y

$$\mu_i = \frac{1}{n_i}\Sigma_{k=0}^{n_i-1}\delta_{f^k(x_i)}\,,$$

donde δ_z denota la medida de probabilidad concentrada es z. De la suceción $\{ \mu_i \}_{i=1}^\infty$ podemos elegir una subsucesión débilmente convergente a una medida de probabilidad μ en $\mathbb{T}^2$. Para cada función continua $\psi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$, como

$$|\int \psi\, d(f_*(\mu_i)) - \int \psi\, d\mu_i\,| = \frac{1}{n_i}|\,\psi(f^{n_i}(x_i)) - \psi(x_i)\,| \leq \frac{2\sup|\,\psi\,|}{n_i}\,,$$

Tenemos que $\int \psi\, d(f_*(\mu)) = \int \psi\, d\mu$ y por lo tanto $f_*(\mu) = \mu$; o sea μ es f-invariante.

Por continuidad de ϕ tenemos que

$$\int \phi\, d\mu = \text{lím}_{i\to\infty} \int \phi d\mu_i = \text{lím}_{i\to\infty} \frac{F^{n_i}(y_i) - y_i}{n_i} = v$$

Descomponiendo μ en componentes ergódicas tenemos que existen ν y μ_E ambas en $\mathcal{M}_E(f)$ que para toda función continua $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cumplen

$$\int \psi\, d\mu = \int \left(\int \psi\, d\mu_E \right) d\nu(\mu_E)\,.$$

En particular para ϕ tenemos

$$v = \int \phi\, d\mu = \int \left(\int \phi\, d\mu_E \right) d\nu(\mu_E)\,. \tag{16}$$

Pero $\int \phi\, d\mu_E \in \rho_{mes} \subset \rho(F)$ y v es extremal, por lo tanto, $v = \int \phi\, d\mu_E$ para alguna μ_E ergódica.

□

Corolario 3.3.6. *Los puntos extremales de $\rho(F)$ pertenecen a $\bigcup_{x\in\pi^{-1}(\Omega f)} \rho(F,x)$.*

Demostración. La prueba es inmediata del lema anterior y de 3.1.9. □

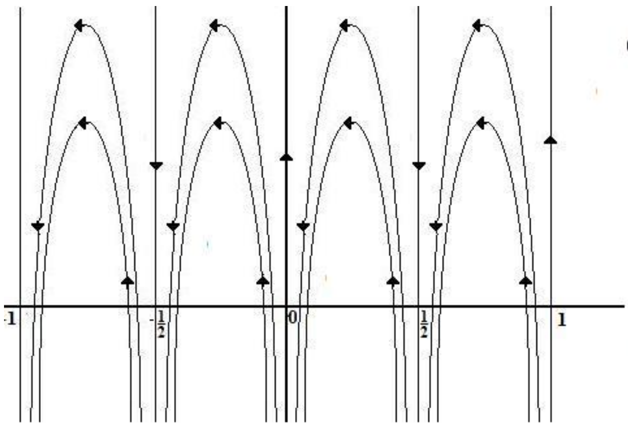
3.4. Ejemplos

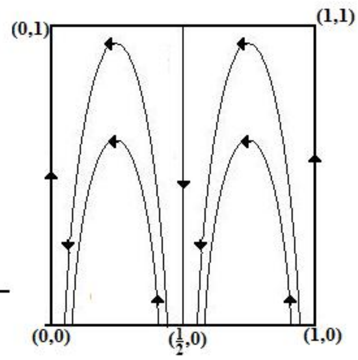
3.4.1. $\rho_P(F)$ puede no ser convexo.

Sea f el tiempo 1 de un flujo

$$\dot{x} = \sin(2\pi x)$$
$$\dot{y} = \cos(2\pi x).$$

Sea F un levantado de f, tal que $F(0,0) = (0,1)$ y como $F(1/2,0) = (1/2,-1)$ tenemos que los puntos $(0,0)$ y $(1/2,0)$ son fijos para f y los vectores $(0,1)$ y $(0,-1) \in \rho_p(F)$. Veamos que no hay mas vectores en $\rho_p(F)$





Es claro que para cualquier punto (x_1, y_1) iniciales con $1 > x_1 > 1/2$ tenemos que al aplicarle sucesivas veces F obtengo que $F_x^n(x_1) < 1/2 + \varepsilon$ y $F_y^n(y_1) < -n + n_0 + \varepsilon$ para algún ε conveniente y mayor que 0 y para n mayor que algún n_0. Entonces

$$\frac{+1/2 + \varepsilon - x_1}{n} > \frac{F_x^n((x_1, y_1)) - x_1}{n} > \frac{1/2 - x_1}{n}$$

y

$$\frac{n_0 - n + \varepsilon - y_1}{n} > \frac{F_y^n((x_1, y_1)) - y_1}{n} > \frac{n_0 - n - y_1}{n}$$

Por lo tanto si existe el límite

$$\text{lím}_{n\to\infty} \frac{F^n((x_1, y_1)) - (x_1, y_1)}{n}$$

debe ser igual al vector $(0, -1)$.

La situación es análoga si $0 < x_1 < 1/2$ pero el límite de existir sería $(0,1)$ por lo que estos son los únicos vectores en $\rho_p(F)$.

Ahora como los puntos $ext(\rho(F)) \subset \rho_p(F)$ (por 3.3.6) y como $\rho(F)$ es convexo (3.3.4) tenemos que $\rho(F)$ es el segmento que une al punto (0,1) con el (0,-1).

3.4.2. $\rho(F)$ puede no ser convexo en dimensiones mayores.

Este ejemplo tiene como objetivo mostrar que el resultado de la proposición 3.3.4 no puede ser generalizado a dimensiones mayores. Los conjuntos de rotación definidos anteriormente se pueden definir de forma análoga para el toro $\mathbb{T}^n$. Construiremos este ejemplo para el $\mathbb{T}^3$ pero puede ser generalizado a dimensiones mayores.

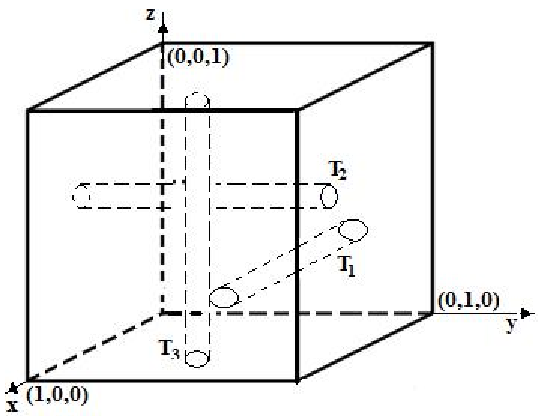
Para un punto $p^i = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ cuya coordenada i-esima es 0 definimos el disco de centro p^i, $D_{p^i} = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \ x = (x_1, x_2, x_3) \text{ con } x_i = 0 \text{ y } \ \| x - p^i \| \le \delta \}$, para algún δ, con la norma euclídea. Llamamos $\mathcal{T}_3$ al toro sólido dado por $\mathcal{T}_3 = D_{p^3} \times S^1$. Sea $g_3 : \mathcal{T}_3 \to \mathcal{T}_3$ un difeomorfismo dado por:

$$g_3(x, y) = (x, y + \varphi(\| x \|^2)) \,,$$

para alguna función $\varphi : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $\mathcal{C}^\infty$ que cumple:

- $\varphi(0) = 1$,
- $\varphi(\delta^2)$ y todas las derivadas evaluadas en δ^2 y en 0 son 0,
- φ es tal que g_3 es homotópica a la identidad.

Análogamente puedo definir $\mathcal{T}_i$ y g_i para $i = 1$ o $i = 2$.
Elijamos tres puntos p^i y un δ de modo que los toros sólidos $\mathcal{T}_i$ sean disjuntos en $\mathbb{T}^3$ y paralelos a los ejes como se muestre en la figura



Sean $g_i : \mathcal{T}_i \to \mathcal{T}_i$ los difeos definidos antes. Como g_i es la identidad en los bordes de $\mathcal{T}_i$ y φ es plana ahí, podemos extender a la identidad en el conjunto $\mathbb{T}^3 - \mathcal{T}_i$.
Defino $f = g_1 g_2 g_3$. Como cada g_i es homotópica a la identidad, f también lo es. Es claro que los puntos pertenecientes a $\mathbb{T}^3 - (\cup \mathcal{T}_i)$ tienen vector de rotación 0.
Si considero puntos de la forma $(p^3, y) \in \mathcal{T}_3$ tenemos que el vector de rotación para cualquiera de estos puntos (según g_3) es el $(0, 0, 1)$ y para todos los otros $(x, y) \in \mathcal{T}_3 \ | \ \| x \| \ \le \delta$ nos quedan los vectores de la forma $(0, 0, \varphi(| x |^2)))$, osea que el conjunto de los vectores de rotación en $\mathcal{T}_3$ es $0 \times 0 \times [0, 1]$. El razonamiento es análogo para $i = 1$ y $i = 2$.

Como los $\mathcal{T}_i$ son paralelos a los ejes,

$$\rho(F) = \{ \, e_i v \ | \ v \in I \ \ i = 1, 2, 3 \, \} \ .$$

Observamos que este conjunto no es convexo.

4. Vectores de Rotación y puntos periódicos

El objetivo de esta sección es probar una serie de resultados debidos a Franks ([Fr1]) que con el objetivo de probar que si 0 pertenece al interior del conjunto de rotación $\rho(F)$ entonces F tiene un punto fijo. Esto nos permitirá obtener como corolario que si ν esta en el interior de $\rho(F)$ y tiene ambas coordenadas racionales, entonces existe un punto periódico $x \in \mathbb{T}^2$ con la propiedad de que

$$\frac{F^q(x_0) - x_0}{q} = \nu \,,$$

donde x_0 es algún levantado de x y q es el menor período de x.

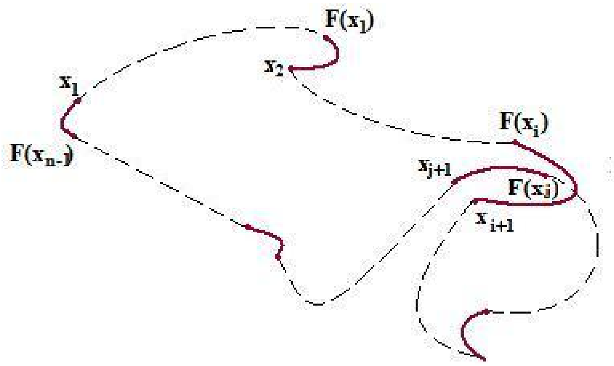
4.1. El caso $\delta-$transitivo

Lema 4.1.1. *Si F no tiene puntos fijos existe un ε para el cual no hay una $\varepsilon-$cadena periódica para F.*

Demostración. Sea

$$\delta = \text{mín}_{x\in\mathbb{R}^2} \,|\, F(x) - x \,| \ .$$

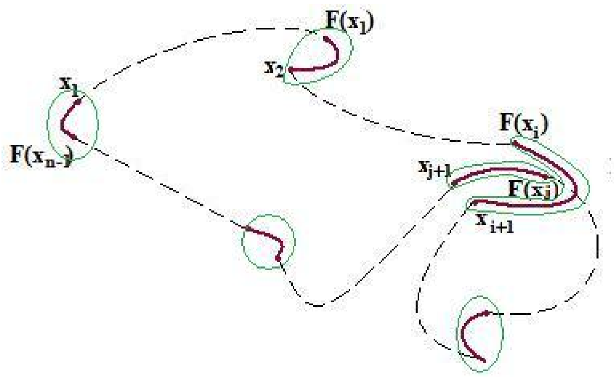
Como el mínimo se puede considerar sobre los x en un dominio fundamental para π, y es compacto, este mínimo se alcanza y es mayor que 0. Supongamos por absurdo que existe una $\varepsilon-$cadena periódica para todo ε. Consideremos entonces $z = z_1, z_2, \ldots, z_n = z$ una $\varepsilon-$cadena con $\varepsilon < \delta/8$.



Ahora unimos los puntos z_i con $F(z_{i-1})$ con arcos poligonales α_i de modo que estos no se intersecten y que el diámetro de cada uno de estos sea menor que $\delta/4$ (Ver en la seccion 1.1, los teoremas de Oxtoby y Jung). En estas condiciones puedo considerar pequeños discos de modo que $\alpha_i \subset D_i$ y $D_j \cap D_i = \phi$ si $i \neq j$.

Haciendo uso de 2.3.3 en cada segmento de las poligonales y componiendo los homeomorfismos en los entornos D_i conseguimos una perturbación de F, que llamamos G, que satisface

1. $F(x) = G(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2 - \bigcup_i D_i$



2. $\| F(x) - G(x) \| \leq \delta/4$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$

3. $G(z_{i-1}) = z_i$.

Ahora G tiene un punto periódico, lo que implica por 2.2.6 que G tiene un punto fijo p.

Entonces

$$\| F(p) - p \| \leq \| F(p) - G(p) \| + \| G(p) - p \| < \delta\,.$$

Pero esto no es posible por como definimos δ.

Lema 4.1.2. *Sea Δ es un subconjunto compacto invariante y $\delta-$transitivo de $\mathcal{R}(f)$, y sea F un levantado de f, entonces existe una constante $K > 0$ de modo que para cualquier x_0, y_0 en Δ, y $x \in \pi^{-1}(x_0)$, hay una $\delta-$cadena para F de x a algún punto $y \in \pi^{-1}(y_0)$ que cumple que $\| x - y \| < K$.*

Demostración. Fijemos $\omega \in \pi^{-1}(\Delta)$ y sea $\mathcal{Q}_n$ el conjunto de los puntos $z \in \Delta$ que pueden ser unidos con $\pi(\omega)$ por una cadena de largo menor que n.

$\mathcal{Q}_n$ es abierto ya que si $\pi(\omega) = x_1, x_2, \ldots, x_n = z$ es una $\delta-$cadena,

$$d(F(x_{n-1}), z) < \delta_1 < \delta\,.$$

Si llamamos $\varepsilon = (-\delta_1 + \delta)/2$ tenemos que

$$d(F(x_{n-1}), x) \leq d(F(x_{n-1}), z) + d(x, z) < \delta_1 + \varepsilon < \delta\,,$$

para todo $x \in B(z, \varepsilon)$ y por lo tanto todo punto de $\mathcal{Q}_n$ es interior.

Ahora tenemos que

$$\Delta \subset \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{Q}_n$$

y por compacidad de Δ tenemos un N talque $\mathcal{Q}_N = \Delta$. Esto implica que dado $y_0 \in \Delta$ debe existir una $\delta-$cadena de y_0 a $\pi(\omega)$ de largo menor que N. Levantando esto a R^2 tenemos que hay una $\delta-$cadena de ω a algún $y' \in \pi^{-1}(y_0)$ de largo menor que N. Sea $P = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \| F(x) - x \|$. Como el largo de la cadena es menor que N y cada paso me alejo menos que $P + \delta$, entonces $\| y' - \omega \| < C_1 = N(P + \delta)$.

Un razonamiento análogo nos lleva a que si $x_0 \in \Delta$ existe un $x' \in \pi^{-1}(x_0)$, con una $\delta-$cadena de x' a ω tal que $\| x' - \omega \| < C_2$ con C_2 independiente de x_0. Juntando ambas cadenas obtengo una $\delta-$cadena de x' a y' con $\| x' - y' \| < K = C_1 + C_2$.

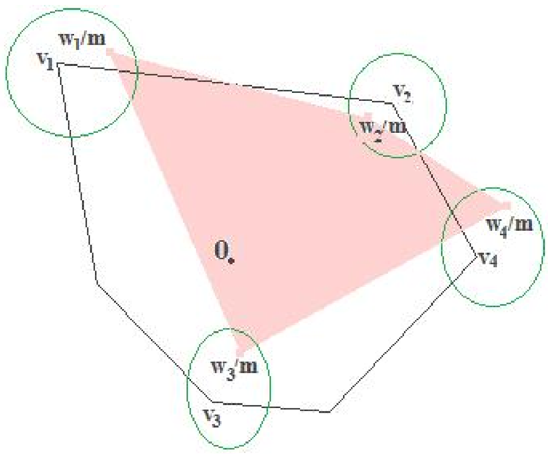
Ahora sea $x \in \pi^{-1}(x_0)$ cualquiera, tenemos que $x - x'$ es un vector de coordenadas enteras. Trasladando la $\delta-$cadenda por el vector $x - x'$ obtengo una $\delta-$cadena de x a un punto y, que por ser el trasladado por un entero de un punto $y' \in \pi^{-1}(y_0)$ tenemos que $y \in \pi^{-1}(y_0)$. $\square$

Definición 4.1.3. Si $\Delta \subset \mathbb{T}^2$ es un conjunto compacto e invariante de f y F es un levantado de f, llamamos $\rho(f, \Delta)$ a los puntos de acumulación del conjunto

$$\left\{ \frac{F^n(x) - x}{n} \, | \pi(x) \in \Delta \text{ y } n > 0 \right\}.$$

Proposición 4.1.4. *Supongamos que $\Delta \subset \mathcal{R}$ es un subconjunto compacto, invariante y $\delta-$transitivo para algún delta. Si 0 pertenece al interior de la cápsula convexa de $\rho(f, \Delta)$, entonces hay una $\delta-$cadena periódica para F (un levantado de f).*

Demostración. Como $0 \in \overset{\circ}{\text{Conv}}(\rho(f, \Delta))$ existen vectores v_1, v_2, v_3 y $v_4 \in \rho(f, \Delta)$ de modo que $0 \in \overset{\circ}{\text{Conv}}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ (Con al menos tres de ellos distintos, ver teorema 11 en [HDK]). Puedo elegir también entornos , U_i de v_i tal que si elijo cuatro puntos cualquiera v_i', uno en cada U_i, tengo que $0 \in \overset{\circ}{\text{Conv}}(v_1', v_2', v_3', v_4')$



Como $v_1 \in \rho(f, \Delta)$ y junto con 4.1.2 tenemos que si fijamos $z_0 \in \Delta$ y $z \in \pi^{-1}(z_0)$, podemos encontrar un x y $\{ n_i \}_0^\infty$ con $n_i > i$ tal que:

1. $\lim_{i \to \infty} \frac{F^{n_i}(x) - x}{n_i} = v_1$

2. Hay una $\delta-$cadena de z a x tal que $\| x - z \| < K$

3. Hay una $\delta-$cadena de $F^{n_i}(x)$ a $z'_i \in \pi^{-1}(z_0)$ tal que $\| F^{n_i}(x) - z'_i \| < K$.

Observamos que si se junta la $\delta-$cadena de z a x, con el segmento de órbita de x a $F^{n_i}(x)$ y la $\delta-$cadena de $F^{n_i}(x)$ a z'_i tenemos una $\delta-$cadena de z a z'_i. Además (1),(2) y (3) implican que

$$\text{lím}_{n\to\infty} \frac{z'_i - z}{n_i} = v_1 \, .$$

Elegimos un i lo suficientemente grande como para que

$$\frac{z'_i - z}{n_i} \in U_1 \, ,$$

y para ese i llamamos $w_1 = z'_i - z$ y $m_1 = n_i$. Nos queda que hay una $\delta-$cadena de z a $z + w_1$ y que $w_1/m_1 \in U_1$. Como $\pi(z'_i) = \pi(z) = z_0$ tenemos que w_1 es un vector entero.

De forma similar podemos construir w_2, w_3, w_4, y m_2, m_3 y m_4 con propiedades análogas.

Como $0 \in \overset{\circ}{\text{Conv}} (w_1/m_1, w_2/m_2, w_3/m_3, w_4/m_4)$ y como w_1, w_2, w_3 son vectores enteros, tenemos que es posible resolver

$$Aw_1 + Bw_2 + Cw_3 + Dw_4 = 0$$

con A, B, C, D enteros.

Si trasladamos una $\delta-$cadena por un entero obtenemos otra $\delta-$cadena. Concatenamos la cadena de z a $z+w_1$ con un trasladado de si misma por el vector w_1. Luego repito el procedimiento A veces hasta obtener una cadena de z a $z + Aw_1$. A esta cadena que acabamos de obtener la concateno con un trasladado por el vector Aw_1 de la cadena de z a $z + w_2$. Esto nos deja una cadena de z a $z + Aw_1 + w_2$. Luego puedo concatenar la cadena que nos va quedando con un trasladado de vector w_2 de la cadena que va de $z + Aw_1$ a $z + Aw_1 + w_2$. Esto lo repito B veces y obtengo una cadena de z a $z + Aw_1 + Bw_2$.

Puedo seguir haciendo esto hasta obtener una cadena de z a $z + Aw_1 + Bw_2 + Cw_3 + Dw_4$. Pero como $Aw_1 + Bw_2 + Cw_3 + Dw_4 = 0$ nos queda una cadena de z a sí mismo. □

Observación 4.1.5. Si para todo δ puedo encontrar un subconjunto compacto, invariante y $\delta-$transitivo, $\Delta \subset \mathcal{R}$, tal que 0 pertenece al interior de la cápsula convexa de $\rho(f, \Delta)$, entonces debe haber un punto fijo en virtud de la proposicion anterior y del lema 4.1.1.

4.2. El caso general

Como antes, sea $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ un homeomorfismo homotópico a la identidad y sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un levantado.

Proposición 4.2.1. *Supongamos que v_1, v_2 v_3 y v_4 son puntos extremales del conjunto convexo $\rho(f)$ (con al menos tres de ellos distintos), y que 0 pertenece al interior de $Conv(v_1, v_2, v_3, v_4)$, entonces F tiene un punto fijo.*

Demostración. Por 3.3.6 tenemos que para cada v_i existe un punto no errante para f, $x_i \in \mathbb{T}^2$ tal que si $x \in \pi^{-1}(x_i)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = v_i\,.$$

Nos interesa en particular que $x_i \in \mathcal{R}(f)$. Para probar que F tiene un punto fijo seguiremos el siguiente camino. Por 4.1.1 tenemos que si existe una $\delta-$cadena periódica para todo δ entonces tenemos un punto fijo. Entonces probaremos que para cualquier delta que se elija, si considero la descomposición en piezas $\delta-$transitivas de $\mathcal{R}(f)$, existe una pieza Δ_j de la descomposición y puntos $y_i \in \Delta_j$ tal que si $y \in \pi^{-1}(y_i)$ tenemos que

$$v_i = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(y) - y}{n}\,.$$

Recordamos que las piezas de la descomposición de $\mathcal{R}(f)$, son compactas e invariantes por 2.1.15.

Por 4.1.4 existe una $\delta-$cadena periódica para F y como esto vale para todo δ llegamos al resultado buscado.

Valiéndonos de 2.1.16 elijamos una aproximación diferenciable $g_0 : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ de la función que nos garantiza dicho teorema y elijamos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ valores regulares de g_0 de modo que las variedades con borde $M_i = g_0^{-1}((-\infty, c_i])$ cumplan:

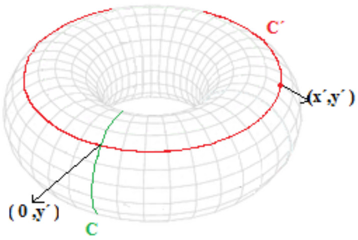
1. $f(M_i) \subset \overset{\circ}{M_i}$
2. $\Delta_i \subset M_i - M_{i-1}$.

Sea N_i la variedad $\overline{M_i - M_{i-1}}$. Entonces $\mathbb{T}^2 = \cup N_i$ y $N_i \cap N_j$ es un conjunto finito de círculos si $j = i+1$ o $j = i-1$ y en otro caso es vacía. Estos círculos son las componentes de $\bigcup_i g_o^{-1}(c_i)$.

Veamos que ninguno de estos círculos es esencial. Si hubiera un círculo esencial debe estar en el borde de una variedad M_j para algún j, afirmamos que debe haber otro círculo esencial (Puede haber otros círculos no esenciales en el borde de M_j).

Afirmación. *Si C es un círculo esencial en el borde de una sub variedad del toro, M_j, entonces debe haber otro círculo esencial en el borde de M_j.*

Demostración. Si hubiera un solo círculo esencial en M_j considero M_j' que es unirle a M_j los discos interiores de los círculos no esenciales de modo que el único borde de M_j' es el círculo esencial C. Si escribo al toro como $S^1 \times S^1$, entonces puedo pensar a C como los puntos $\{ (0,x) \mid x \in S^1 \}$. Sea $(x',y') \in M_j'^c$ y considero los siguientes conjuntos:



- $C' = \{ (x,y') \mid x \in S^1 \}$,
- $C_1' = C' \cap M_j'^c$,
- $C_2' = C' \cap (M_j' - C)$.

Como M_j' es cerrada entonces C_1' es un abierto relativo de C' y como C es el borde de M_j', C_2' también es un abierto relativo. Modificando un poco C' de modo que nos aseguremos que C_2' y C_1' sean no vacíos y que $C' \cap C = (0,y')$ (esto es posible porque en cualquier entorno de $(0,y')$ hay puntos de $M_j' - C$), tenemos que los puntos de C' que no están en C son un conjunto disconexo por lo que $C' \cap C$ tendría que ser mas de un punto. Hemos llegado a una contradicción. $\square$

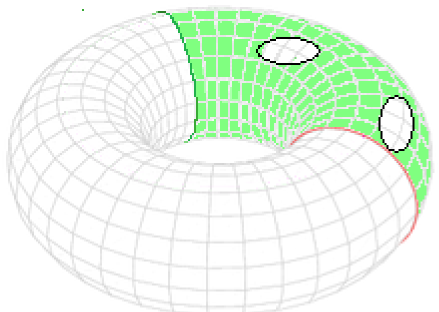


Figura 14: Una subvariedad M_j del toro, con dos círculos esenciales en su borde.

Siguiendo con la prueba de la proposición, sea $\widetilde{M_j}$ una componente de $\pi^{-1}(M_j)$, entonces $\widetilde{M_j}$ debe ser un anillo esencial (tal vez sin algunos discos). Elijamos un levantado F_0 de f de forma que $F_0(\widetilde{M_j}) \subset \widetilde{M_j}$

Ahora $\widetilde{M_j}$ es una tira infinita, tal vez con agujeros, y puedo considerar que $\widetilde{M_j}$ está contenida entre dos rectas de pendiente p/q que cortan al eje y en puntos $(0,a)$ y $(0,b)$ con $a > b$. Como $F_0(\widetilde{M_j}) \subset \overset{\circ}{\widetilde{M_j}}$, tenemos que para todo $x \in \widetilde{M_j}$ los puntos de

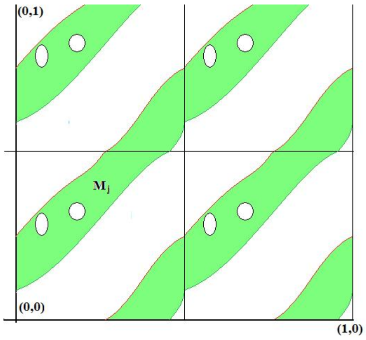


Figura 15: $\pi^{-1}(M_j)$ dibujado en el cuadrado $I \times I$.

acumulación de $\left\{ \frac{F_0^n(x)-x}{n} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ deben estar contenidos en una recta con pendiente p/q, ya que $F_0^n(x)$ está contenido en $\widetilde{M_j}$.

Esto es así porque (tomando una subsucesión convergente que llamo de la misma forma) si el $\lim_{n\to\infty} \frac{F_0^n(x)-x}{n}$ es distinto de 0 entonces $\lim_{n\to\infty} F_0^n(x)$ debe ser infinito. Considero un nuevo eje de coordenadas determinado por la recta de pendiente p/q que pasa por x y una perpendicular a esta por x. A este sistema lo llamo el sistema (x', y'). Como $F_0^n(x) \in \widetilde{M_j}$ tenemos que $\lim_{n\to\infty} F_{0y'}^n(x) < a - b$ pero como el $\lim_{n\to\infty} F_0^n(x) = \infty$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} F_{0x'}^n(x) = \infty$ y combinando esto tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{0y'}^n(x)}{F_{0x'}^n(x)} = 0\,.$$

Por lo que la pendiente en nuestro sistema de referencia usual debe ser p/q. Recordando que $F(x) = F_0(x) + w$ para cualquier otro levantado con w un entero, tenemos que lo mismo se cumple para $\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)-x}{n}$.

Ahora, si $x \in \mathcal{R}(f)$ no está en $\widetilde{M_j}$, tenemos que $x \in \Delta_i$ para algún $i > j$ y como los Δ_i son invariantes puedo tomar una componente de $\pi^{-1}(\Delta_i)$ que llamaremos $\widetilde{\Delta_i}$ que estará contenida entre trasladados paralelos de $\widetilde{M_j}$. Sea F_i el levantado de f tal que $F_i(\widetilde{\Delta_i}) \subset \widetilde{\Delta_i}$. Puedo repetir el razonamiento hecho para $\widetilde{M_j}$ obteniendo que todo vector de rotación puntual de puntos de $\mathcal{R}(f)$ está en una recta de pendiente p/q. Recordando el corolario 3.3.6 tenemos que lo anterior se contradice con el hecho de que $0 \in \overset{\circ}{\mathrm{Conv}}\,(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Como cada disco de $\bigcup_i g_o^{-1}(c_i)$ es no escencial, cada uno de ellos limita un único disco. El complemento de la unión de estos discos es un único de los N_i, al que llamaremos N_j. Enumeremos a los discos delimitados por los círculos de $\bigcup_i g_o^{-1}(c_i)$ de la siguiente manera.

$$D_i \subset M_{j-1} \qquad \forall\, i \mid 1 \leq i \leq s$$

y

$$D_i \nsubseteq M_j \qquad \forall\, i \mid s < i \leq r$$

y entonces

$$f(D_i) \subset \bigcup_{n=1}^{s} D_n \qquad \forall\, i \mid 1 \leq i \leq s$$

y

$$f(D_i) \subset \bigcup_{n=s+1}^{r} D_n \qquad \forall\, i \mid s+1 \leq i \leq r\,.$$

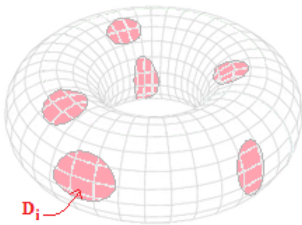
Consideremos ahora un punto $x \in \pi^{-1}(x_1)$ tal que

$$\text{lím}_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = v_1\,.$$

Probaremos que si $x_1 \notin \Delta_j$ entonces existe un punto $y_1 \in \Delta_j$ tal que si $y \in \pi^{-1}(y_1)$ entonces

$$\text{lím}_{n\to\infty} \frac{F^n(y) - y}{n} = v_1\,.$$

Como lo mismo puede hacerse para v_2, v_3 y v_4 , probando esto probaríamos el resultado deseado.



Si $x_1 \in D_p$ para $1 \leq p \leq s$ existe $q > 0$ talque $f^q(D_p) \subset D_p$ (x_1 es recurrente, y $f(D_i) \subset \bigcup_{n=1}^{s} D_n$). Entonces si $D \subset \mathbb{R}^2$ es un levantado de D_p que contiene a x entonces $F^q(D) \subset D + w$ para algún vector entero w. Si definimos $G(x) = F^q(x) - w$ entonces $G(D) \subset D$ y por lo tanto tiene un punto fijo z_0. Claramente (ver 3.2.1)

$$v_1 = \text{lím}_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \text{lím}_{n\to\infty} \frac{F^n(z_0) - z_0}{n} = \frac{w}{q}\,.$$

Si $x_1 \in D_p$, para $s < p \leq r$ aplicamos un argumento similar para f^{-1}

La idea es encontrar un punto fijo para G en $\pi^{-1}(N_j)$. Para esto observamos que f^q es homotópica a id y entonces es homotópica a un mapa sin puntos fijos, por lo tanto la suma de los índices de los puntos fijos en cualquier clase de Nielsen es 0 (ver 2.4.39) (en nuestro caso, dos puntos fijos están en la misma clase de puntos fijos de Nielsen, si cualquier levantado que deje fijos a las pre imágenes por π de uno, también deja fijas las pre imágenes por π del otro). Consideraremos los puntos fijos en la misma clase de Nielsen de $\pi(z_0)$ (que es fijo para f^q).

Cualquier punto en la clase de Nielsen de $\pi(z_0)$ que no esté en N_j, estará en algún D_i, con un levantado $\widetilde{D_i}$ tal que o $G(\widetilde{D_i}) \subset \widetilde{D_i}$ o $G^{-1}(\widetilde{D_i}) \subset \widetilde{D_i}$. Por lo tanto cada uno de estos puntos fijos contribuye con índice positivo.

Esto implica que debe haber un punto fijo $y_1 \in N_j$ para f^q en la misma clase de Nielsen que $\pi(z_0)$. Además si $y \in \pi^{-1}(y_1)$ tenemos que $G(y) = y$ porque como $\pi(z_0)$ y y_1 están en la misma clase de Nielsen, cualquier levantado de f^q que fije a $\pi(z_0)$ debe fijar también a y_1. Con esto tenemos que

$$v_1 = \text{lím}_{n\to\infty} \frac{F^n(y) - y}{n}.$$

Además tenemos que y_1 es un punto periódico de f en N_j y por lo tanto debe estar en Δ_j.

$\square$

Teorema 4.2.2. *Sea $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ un homeomorfismo homotópico a la identidad y $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un levantado. Sea v un vector de coordenadas racionales en el interior de $\rho(f)$. Entonces existe $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $\pi(p) \in \mathbb{T}^2$ es un punto periódico para f y*

$$v = \text{lím}_{n\to\infty} \frac{F^n(p) - p}{n}.$$

Demostración. Supongamos que $v = (r/q, s/q)$ con máximo común divisor entre r, s y q es 1. Si definimos $G(x) = F^q(x) - (r, s)$, la idea es encontrar un punto fijo para G.

De 3.2.1 podemos deducir que $\rho(G) = q\rho(F) - (r, s)$ y por lo tanto 0 está en el interior de $\rho(G)$.

Como $\rho(G)$ es convexo existen 4 puntos extremales v_1, v_2, v_3 y v_4, tales que 0 está en el interior de la $\text{Conv}\,(v_1, v_2, v_3, v_4)$ (con al menos tres de ellos distintos, ver teorema 11 en [HDK]) y por lo tanto valiéndonos de la proposición anterior, obtenemos el resultado deseado. $\square$

Referencias

[Br12] L. E. J. Brouwer, *Beweis des ebenen Translationssatzes*, Math. Ann. 72 (1912), 37-54.

[Br84] M. Brown, *A New Proof of Brouwer's Lemma on Translation Arcs*, Houston J. Math. 10 (1984), 35-41.

[Br78] R. F. Brown, *The lefschetz fixed piont theorem*,Scott Foresman and Co.,Glenview. I11 1978.

[Fl90] M. Flucher, *Fixed points of measure preserving torus homemorphism*, Manuscripta Math. 68(1990), 271-293.

[Fr92] J. Franks, *A new proof of the Brouwer plane translation theorem*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 12 (1992), 217-226.

[Gu94] L. Guillou, *Théorème de translation plane de Brouwer et généralistations du théorème de Poincaré-Birkhoff*, Topology 33 (1994), 331-351.

[Fr1] J. Franks, *Realizing rotation vectors for Tourus Homeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc., vol 311 No 1 (Jan 1989), 107-115.

[MZ2] M.Misiurewicz , K.Ziemian, *Rotation sets and ergodic measures for the torus homeomorphism*. Fund. Math. 137 (1991), 45-52.

[MZ1] M.Misiurewicz , K.Ziemian, *Rotation sets for maps of e tori*. J.London Math. Soc., (2) 40 (1989),No 3 490-506.

[HDK] H.Hadwiger, H.Debrunner , V.Klee, *Combinatorial geometry in the plane* . J.London Math. Soc., (2) 40 (1989),No 3 490-506.

[LeC04] P. Le Calvez, *Une version feuilletée du théorème de translation de Brouwer*, Comment. Math. 79 (2004) 229-259.

[C] C. Conley, *Isolated invariant sets and Morse index*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math.,no38 Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978.

[Fr2] J. Franks, *A variation on the Poincarè-Birkhoff theorem*, Hamiltonian Dynamical Systems. Amer. Math. Providence, R.I., 1978., 107-115.

[Nagy] J.von Nagy, *Uber einen Satz von H.Jung,Jber.*, Deutsch, Math.-Verein. 24 (1915) 390-392.

[Ox] J.Oxtoby, *Diameters oj arcs and the gerrymandering problem*, Amer. Math. Monthly 84 (1977) 155-162

[Her] M. R. Herman, *Existence et non existence de tores invariants par des difféomorphismes symplectiques*, Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles 1987-1988, Exp. No. XIV, 24 pp., École Polytech., Palaiseau.

[Llib] J. Llibre and R. S. MacKay *Rotation vectors and entropy for homeomorphisms of the torus isotopic to the identity*, Ergod. Th. and Dynam. Sys., 11, 115-128 (1991).

[Kim] S. H. Kim, R. S. MacKay and J. Guckenheimer *Resonance regions for families of torus maps*, Nonlinearity 2,(1989), 391-404.