

TRABAJO MONOGRÁFICO

Superficies de Riemann, las funciones η de Dedekind y $\mathcal{R}$ de Radamacher y su vínculo con invariantes dinámicos

Por: Josefina González Mayr

Orientador: Alejandro Passeggi



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

Licenciatura en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

Resumen

Esta monografía revisita el concepto de Superficies de Riemann comenzando su estudio a partir de ejemplos que motivan la definición y desarrollando hasta buen punto la teoría. Nos enfocaremos en la teoría de funciones elípticas iniciada por Weierstrass que proporciona una identificación entre curvas algebraicas, los toros látice y el espacio de Móduli, lo cual permite relacionar conceptos de Geometría Algebraica y Análisis con Teoría de Números.

Luego, basándose en el trabajo de Étienne Ghys, se logra una interpretación dinámica, por medio de la Teoría de Nudos, de la función $\mathfrak{R}$ de Rademacher, vinculada con $\log \eta$, para

$$\eta(\tau) = e^{i\pi\tau} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2i\pi n\tau})$$

la clásica función modular de Dedekind.

Nos basaremos en las siguientes referencias (1),(2),(3),(4),(5),(6),(7).

Abstract

This monograph revisits the concept of Riemann Surfaces starting its study based on examples that motivate the definition and developing to a good extent the theory. We will then focus on the theory of elliptic functions initiated by Weierstrass that provides an identification of algebraic curves, the lattice tori and the Moduli space.

Later, based on the works of Étienne Ghys, we will obtain a dynamic interpretation, by means of Knot Theory, of the Rademacher function $\mathfrak{R}$, linked with $\log \eta$, for

$$\eta(\tau) = e^{i\pi\tau} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2i\pi n\tau})$$

the classical modular function of Dedekind.

We will base our study on the following references (1),(2),(3),(4),(5),(6),(7).

Índice general

Capítulo 1. Introducción	5
1. El caso $f(z) = \sqrt{z}$	6
2. El caso $f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$	12
3. El caso $\frac{1}{\sqrt{1-z^4}}$	19
4. Sobre el teorema de Riemann-Hurwitz	24
Capítulo 2. Sobre funciones meromorfas entre Superficies de Riemann	27
1. Mapas meromorfos de $\hat{\mathbb{C}}$	33
2. Sobre el teorema de Riemann-Roch	34
3. Automorfismos del plano complejo, la esfera y el disco	36
4. Una forma de construir funciones holomorfas	38
Capítulo 3. El caso elíptico de las superficies de Riemann	41
1. Espacio de Moduli	41
2. Identificación de superficies de Riemann con curvas algebraicas	44
3. Funciones elípticas	45
4. La función $\wp$ de Weierstrass	48
Capítulo 4. Interpretación dinámica de la función de Rademacher	57
1. Nudos y Linking Number	57
2. El Flujo Geodésico en $PSL(2, \mathbb{R})$	59
3. Homeomorfismo entre $PSL(2, \mathbb{Z})/PSL(2, \mathbb{R})$ y $S^3 \setminus l$	61
4. Flujo en $PSL(2, \mathbb{Z})/PSL(2, \mathbb{R})$	61
5. Linking numbers	62
6. Funciones de Dedekind y Rademacher	62
7. Teoría de números y dinámica	63
Bibliografía	65

CAPÍTULO 1

Introducción

La necesidad de considerar extensiones holomorfas en $\mathbb{C}$ de funciones reales vino motivada por diferentes contextos, por ejemplo el de la integración de expresiones derivadas de la geometría y la física. En casos elementales derivó en ciertas anomalías donde se obtienen funciones multivaluadas, es decir, tales que a un elemento del dominio le pueden corresponder más de uno del codominio. Las superficies de Riemann surgen como dominios naturales para este tipo de funciones, buscando perder estas anomalías. Hoy en día, el estudio de las superficies de Riemann se encuentra en muchas áreas de la matemática tales como la geometría diferencial, la teoría de números, la topología algebraica y la geometría algebraica, algunas de las cuales trabajaremos en las siguientes secciones.

Para dar una introducción a la relevancia del concepto, estudiaremos los siguientes ejemplos de funciones multivaluadas.

1. La función $\sqrt{z}$ en $\mathbb{C}$. Al intentar definirla, nos encontramos con un problema de continuidad pues la raíz real tiene dos ramas: $x \mapsto \sqrt{x}$ o $x \mapsto -\sqrt{x}$. Dada cualquiera de estas elecciones, al dar una vuelta alrededor del origen, perdemos la continuidad.
2. $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ que es la extensión analítica de la derivada de $\arcsin$. Esto nos motiva a definir la primitiva o integral sobre caminos de estas funciones, por lo que debemos buscar un buen dominio para hacerlo.
3. $\frac{1}{\sqrt{1-z^4}}$ que pertenece a lo que se conoce como familia de funciones elípticas. Esta expresión se asemeja con lo que se obtiene al intentar determinar la longitud de arco de la elipse, lo cual motiva el nombre.

Comenzaremos por estudiar estos ejemplos desde una perspectiva topológica pero es claro que una forma equivalente de ver estas expresiones, es entenderlas como parametrizaciones de ceros de polinomios:

1. La primera parametriza los ceros de $w^2 - z$
2. La segunda los de $w^2 - (1 - z^2)$
3. La tercera los de $w^2 - (1 - z^4)$

Lo que nos llevará a relacionar las superficies de Riemann con la geometría algebraica.

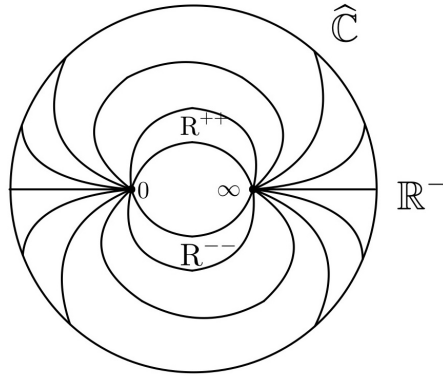
En las secciones siguientes será importante el concepto de *foliación*. Intuitivamente, una foliación en una variedad es una descomposición de la misma en subvariedades, que se llaman *hojas* de la foliación. Como nosotros trabajaremos únicamente en el plano complejo, consideraremos que una foliación de $\mathbb{C}$ es una descomposición del plano en curvas y puntos. A los puntos les llamaremos *singularidades* de la foliación.

1. El caso $f(z) = \sqrt{z}$

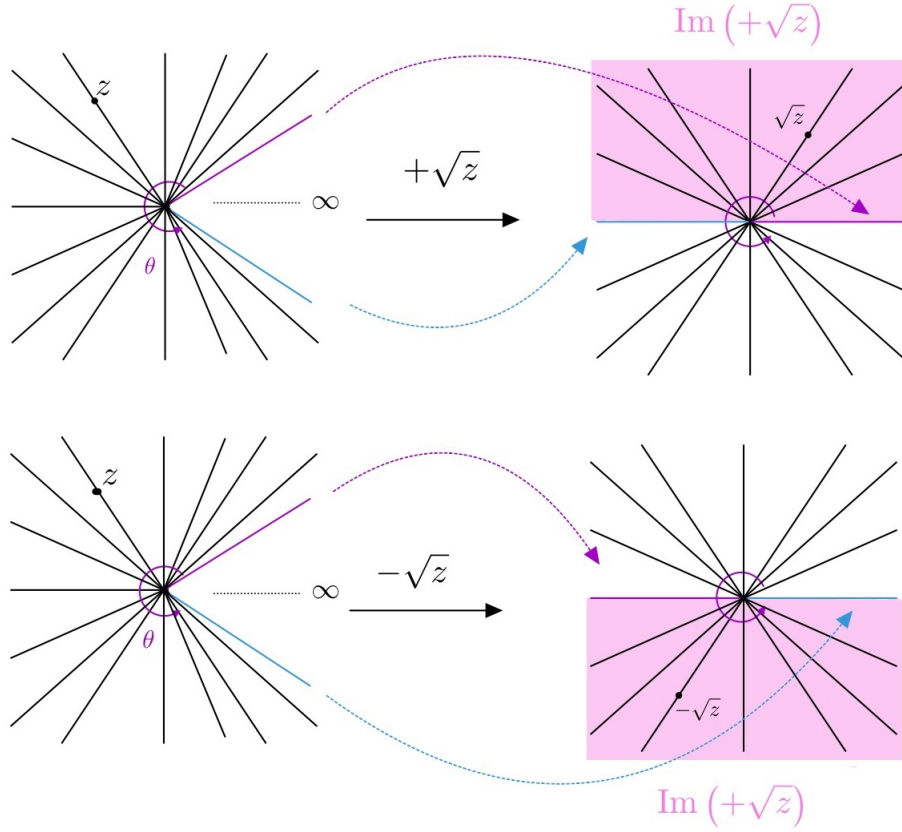
Comenzamos considerando la foliación singular en $\mathbb{C}$ dada por la familia $\mathcal{F}$ de semirrectas r_θ que empiezan en el origen y tienen ángulo $\theta \in [0, 2\pi]$ respecto del eje real. Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ tenemos dos elecciones para $\sqrt{z}$: consideramos el rayo r_θ que pasa por z y podemos tomar el rayo $r_{\frac{\theta}{2}}$ o el rayo $r_{\frac{\theta}{2}+\pi}$. En cada una de estas elecciones, nos quedamos con el elemento de módulo $\sqrt{|z|}$. La primera elección nos lleva a una función que llamaremos $+\sqrt{z}$ que deja invariante $\mathbb{R}^+$ y tiene como puntos de discontinuidad a este mismo conjunto mientras que la segunda elección nos lleva a una función $-\sqrt{z}$ que envía $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^-$ y de nuevo, su conjunto de puntos de discontinuidad es $\mathbb{R}^+$.

Como mencionamos anteriormente, buscamos encontrar dominios en los que estas funciones sean continuas. Para esto, hacemos una modificación topológica al plano complejo y nos enfocamos en el primer caso pues la construcción también sirve para el segundo. Trabajaremos con la compactificación de éste dada por la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y buscaremos que nuestras funciones se extiendan continuamente a ∞ . En este espacio, también podemos considerar la foliación $\mathcal{F}$ pero la semirrecta $\mathbb{R}^+$ pasa a ser un intervalo desde 0 a ∞ así como el resto de las semirrectas de $\mathcal{F}$. La modificación que hacemos consiste en quitar este intervalo que es el de discontinuidad.

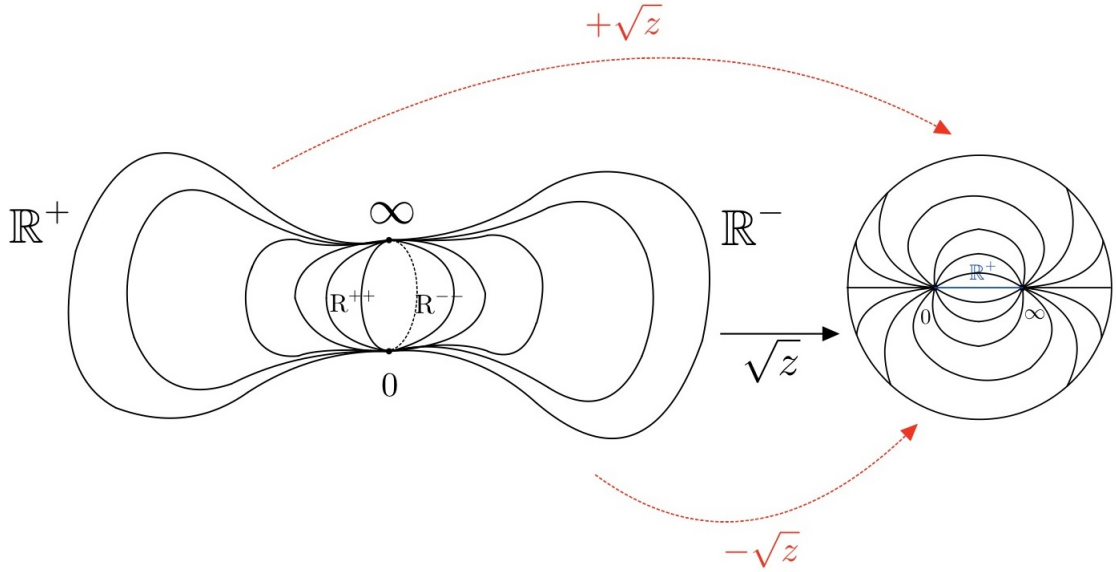
El espacio obtenido es homeomorfo al resultante de remover un disco D de una esfera S . Dado que el espacio obtenido no es compacto, tomamos la compactificación de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{R}^+$ dada por sucesiones de Cauchy de la forma $x_n \in r_{\theta_n}$ con $\theta_n \rightarrow 0$ y $x_n \in r_{\theta_n}$ con $\theta \rightarrow 2\pi$. De esta forma el borde de D es la concatenación de dos arcos que llamamos R^{++} y R^{+-} que unen los puntos identificados con 0 y ∞ . En este espacio la foliación $\mathcal{F}$ se ve de la siguiente forma:



En este nuevo dominio S se puede definir naturalmente la función $+\sqrt{z} : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de modo que fuera de los bordes del disco usamos la foliación que tenemos identificada con la original $\mathcal{F}$ en $\hat{\mathbb{C}}$, mientras que en los bordes R^{++} y R^{+-} tenemos una única forma de extender la función de forma continua: enviamos R^{++} en $\mathbb{R}^+$ y R^{+-} en $\mathbb{R}^-$. Obtenemos entonces $+\sqrt{z} : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Procediendo de la misma forma y llamando a los arcos R^{-+} y R^{--} podemos obtener $-\sqrt{z} : S' \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ que envía R^{-+} en $\mathbb{R}^-$ y R^{--} en $\mathbb{R}^+$. Estas funciones en sus nuevos dominios se ven como en la siguiente figura, donde marcamos también la imagen de cada una de ellas, que denotamos $\text{Im}(+\sqrt{z})$ e $\text{Im}(-\sqrt{z})$ respectivamente



Lo que buscamos ahora es juntar las dos ramas de la elección anterior en un mismo dominio sin perder la continuidad. Para esto, pegamos los dominios anteriores de la siguiente forma: identificamos R^{++} de S con R^{--} de S' y R^{+-} de S con R^{-+} de S' . A este pegado le llamamos $S \# S'$ y conseguimos una función continua $\sqrt{\cdot} : S \# S' \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ que contiene ambas ramas de la raíz. Se puede observar lo obtenido en la siguiente figura



Además, una propiedad interesante es que dado $z \in \hat{\mathbb{C}}$, $z \neq 0, \infty$, podemos identificar en $S \# S'$ las dos soluciones de $z = w^2$ que en 0 e ∞ colapsan a una única solución.

A partir de este modelo, que es puramente topológico y con el objetivo de ganar estructura y poder hablar de conceptos como *holomorphicidad* sobre estas superficies, introducimos a continuación la definición formal de *Superficie de Riemann*

DEFINICIÓN 1. Una Superficie de Riemann es un espacio topológico S Hausdorff y N_2 tal que existe un cubrimiento por abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ y para cada elemento de éste, un homeomorfismo $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ de forma que los mapas de transición $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ son biholomorfos en sus dominios naturales. A las funciones $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ las denominamos cartas locales y al conjunto $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ lo denominamos atlas.

Con esta definición, estamos en condiciones para hablar de mapas entre superficies de Riemann y el concepto que queríamos: *holomorphicidad*

DEFINICIÓN 2. Sean S, S' dos superficies de Riemann y un mapa $f : S \rightarrow S'$. Decimos que f es holomorfo si para cualquier par de cartas φ, φ' de S y S' respectivamente, se tiene que $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$ es holomorfa en su dominio natural. Además, decimos que f es un biholomorfismo si es holomorfa y tiene inversa holomorfa.

En la construcción anterior, vimos un primer ejemplo de una superficie que verifica la definición de superficie de Riemann: $\hat{\mathbb{C}}$. Notar que podemos pensarla como el conjunto $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y considerar dos abiertos $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ y $S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$. Tenemos, entonces, las proyecciones estereográficas con base en cada punto. Veremos en el siguiente capítulo que esto efectivamente es un atlas y por lo tanto concluimos que $\hat{\mathbb{C}}$ es una superficie de Riemann. Nuestra construcción, nos da que $\sqrt{\cdot} : S \# S' \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es un biholomorfismo, por lo que obtenemos que nuestra superficie $S \# S'$ construida, también es una superficie de Riemann.

Ahora miremos el problema desde un enfoque más algebraico. De nuevo, dado $z \in \mathbb{C}$, buscamos los w que son solución de la ecuación $z = w^2$. Esto es equivalente a estudiar el conjunto de ceros del polinomio $P(z, w) = z - w^2$, es decir, el conjunto

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : P(z, w) = 0\}$$

que se conoce como *curva algebraica compleja* pues como variedad compleja, tiene dimensión 1. Así como para funciones reales, tenemos una versión del teorema de la función implícita para funciones complejas. Lo enunciamos a continuación para el caso en que la función es un polinomio.

TEOREMA 1. *Consideramos un polinomio $P : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Sea $S = P^{-1}(0)$ y $(z_0, w_0) \in S$ tal que $\frac{\partial}{\partial w} P(z_0, w_0) \neq 0$. Entonces existe un disco D_1 centrado en z_0 , un disco D_2 centrado en w_0 y una función holomorfa $\phi : D_1 \rightarrow D_2$ tal que*

$$(z, w) \in P^{-1}(0) \cap D_1 \times D_2 \text{ sii } w = \phi(z)$$

Se deduce del teorema que si consideramos f como en el enunciado de modo que $f^{-1}(0)$ no contiene singularidades, es decir, en todo punto alguna de las derivadas no se anula, entonces $X = f^{-1}(0)$ es una superficie de Riemann.

Tenemos entonces una nueva forma de juntar las dos posibles raíces $\sqrt{z}$ de $z \in \mathbb{C}$. Para cada $z \neq 0, \infty$ en $\mathbb{C}$ existen $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ tales que $(z, w_1), (z, w_2) \in X \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Por la observación anterior, este conjunto es una superficie de Riemann. Además, podemos compactificarlo en $\hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$ agregando un par (∞, ∞) y obtenemos $\bar{X} = X \cup \{(\infty, \infty)\}$ que es una superficie de Riemann compacta.

Con la finalidad de entender la topología y estructura de esta superficie, consideramos ahora las dos proyecciones $\text{pr}_1 : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\text{pr}_1(z, w) = z$ y $\text{pr}_2 : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\text{pr}_2(z, w) = w$. Estos mapas son holomorfos. De hecho pr_2 es un biholomorfismo por lo que concluimos que $\bar{X}$ es biholomorfo a la esfera de Riemann. Por otro lado, el conjunto $\{\text{pr}_1^{-1}(z)\}$ tiene exactamente dos elementos siempre que $z \neq 0, \infty$. En estos casos particulares, la preimagen tiene un único elemento: $\text{pr}_1^{-1}(0) = (0, 0)$ y $\text{pr}_1^{-1}(\infty) = (\infty, \infty)$. Se sigue que en $\bar{X} \setminus \{(0, 0), (\infty, \infty)\}$, pr_1 es un biholomorfismo local y por lo tanto, es un cubrimiento del anillo $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$. En definitiva, $\text{pr}_1 : \bar{X} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es lo que se conoce como un *cubrimiento ramificado* con dos *puntos de ramificación* $(0, 0), (\infty, \infty)$. Esto significa que es un mapa 2 a 1 y representa un homeomorfismo local en todos menos finitos puntos donde es 1 a 1, que llamamos puntos de ramificación.

Hemos construido entonces tres superficies de Riemann $S \# S', \hat{\mathbb{C}}, \bar{X}$, todas ellas compactas. Recordando que el Teorema de Uniformización establece que toda superficie de Riemann compacta y simplemente conexa es equivalente a $\hat{\mathbb{C}}$, tenemos que nuestras tres superficies son equivalentes. De todos modos, en este caso vimos la equivalencia a partir de nuestra construcción.

Veamos una idea de la prueba del *Teorema 1*. Sea $P(z, w)$ un polinomio en dos variables complejas y (z_0, w_0) una raíz de P tal que alguna de las derivadas, digamos $\frac{\partial P}{\partial w}(z_0, w_0)$, no se anula (el otro caso es análogo). Comenzamos pensando a $P(z, w)$ como una familia de funciones $f_z(w)$ con un parámetro $z \in \mathbb{C}$, de modo que cada una de las f_z es un polinomio y por lo tanto holomorfa. Dada nuestra suposición de que $\frac{\partial P}{\partial w}(z_0, w_0) \neq 0$, tenemos que $f'_{z_0}(w_0) \neq 0$, por lo que, en un entorno de (z_0, w_0) dado por un producto de discos $D_1 \times D_2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ se cumple que (z_0, w_0) es el único punto tal que $f_{z_0}(w_0) = 0$. De hecho, podemos tomar estos discos adecuadamente de modo que se cumpla lo siguiente:

- Fijado $z \in D_1$ existe un único $w \in D_2$ (contado con multiplicidad) tal que (z, w) verifica que $f_z(w) = 0$.
- f_z y f'_z no se anulan en ∂D_2 .

Utilizando el principio de variación del argumento, obtenemos que para los pares (z, w) como en el primer punto, se cumple

$$w = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D_2} w \frac{f'_z(w)}{f_z(w)} dw$$

Considerando ahora la función

$$\phi(z) = \oint_{\partial D_2} w \frac{f'_z(w)}{f_z(w)} dw$$

se cumple que

$$(z, w) \in X \cap D_1 \times D_2 \text{ sii } w = \phi(z)$$

Solo resta probar que ϕ es holomorfa. A menos de hacer un cambio de variable, podemos asumir que $w_0 = 0$. Sea $R(z, w)$ la función racional que integramos para definir ϕ . Entonces

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\phi(z) - \phi(z_0)}{z - z_0} \\ & \lim_{z \rightarrow z_0} \int_0^{2\pi} \frac{R(z, e^{it})ie^{it} - R(z_0, e^{it})ie^{it}}{z - z_0} dt \\ & \lim_{z \rightarrow z_0} \int_0^{2\pi} ie^{it} \frac{R(z, e^{it}) - R(z_0, e^{it})}{z - z_0} dt \end{aligned}$$

donde $W(z, e^{it}) = R(z, e^{it}) - R(z_0, e^{it})$ es una función racional que depende de la variable z y tiene un cero en z_0 que además no es un polo. Por lo tanto

$$W(z, e^{it}) = (z - z_0)V(z, e^{it})$$

con V una función racional sin polos (para $z \in D_1, t \in [0, 2\pi]$). Luego,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \int_0^{2\pi} ie^{it} \frac{R(z, e^{it}) - R(z_0, e^{it})}{z - z_0} dt = \lim_{z \rightarrow z_0} \int_0^{2\pi} ie^{it} V(z, e^{it}) dt$$

Y concluimos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\phi(z) - \phi(z_0)}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} ie^{it} V(z_0, e^{it}) dt$$

1.1. La esfera $\mathbb{CP}^1$.

En la sección anterior, conseguimos tres superficies que resultaron ser esferas equivalentes. Veamos un cuarto ejemplo de una esfera bastante conocida.

Consideremos el espacio $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ y la relación de equivalencia dada por: $(z, w) \sim \lambda(z, w)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$. El espacio $(\mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}) / \sim$ resulta un espacio topológico donde la topología es la natural inducida por la proyección al cociente. Se conoce como *recta proyectiva* y se denota usualmente $\mathbb{CP}^1$.

Asimismo, podemos ver este espacio como una superficie de Riemann que resulta compacta y simplemente conexa, por lo que será equivalente a $\hat{\mathbb{C}}$ debido al teorema de uniformización.

Veamos de todos modos una construcción que nos dará esta equivalencia. Consideremos la proyección al cociente $\pi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{CP}^1$. Como $(z, w) \sim (z/w, 1)$ siempre que $w \neq 0$, vemos que la proyección restringida al plano $R = \{(z, 1) : z \in \mathbb{C}\}$ es un homeomorfismo sobre su imagen $\pi(R)$ y además es densa en $\mathbb{CP}^1$, pues cubre todo $\mathbb{CP}^1$ menos el punto $(z, 0)$. Haciendo la compactificación de Alexandroff del plano R , tenemos que ésta es homeomorfa a $\pi(R) \cup \{(z, 0)\}$. En conclusión, como el plano R se identifica naturalmente con $\mathbb{C}$, obtenemos un homeomorfismo entre $\hat{\mathbb{C}}$ y $\mathbb{CP}^1$ que lleva la estructura compleja de la esfera en nuestro nuevo espacio.

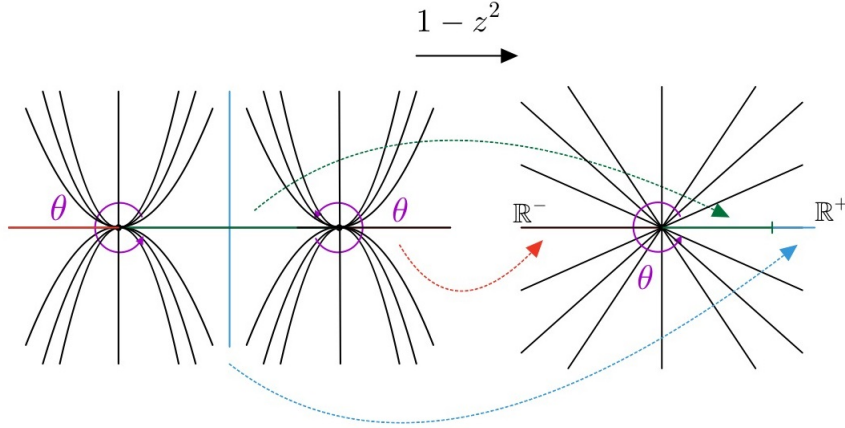
2. El caso $f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

Como mencionamos anteriormente, este caso surge de intentar extender analíticamente la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ que es la derivada de la función real $\arcsin$. Por lo tanto, nos interesaría también tener una primitiva $F(z)$ de $f(z)$ que sería la extensión analítica de $\arcsin$. Para definir esto formalmente, requerimos un buen dominio para la función. Desarrollamos esta construcción en lo que sigue.

Notar que la función f es la composición de la inversión $1/z$ que es un biholomorfismo de $\hat{\mathbb{C}}$, la función $\sqrt{\cdot}$ y la función $1 - z^2$. Como vimos en la sección precedente, $\sqrt{\cdot}$ tiene un problema de definición dado por la discontinuidad en la semirrecta $\mathbb{R}^+$ por lo que nos enfocaremos en la composición

$$g(z) = \sqrt{1 - z^2}$$

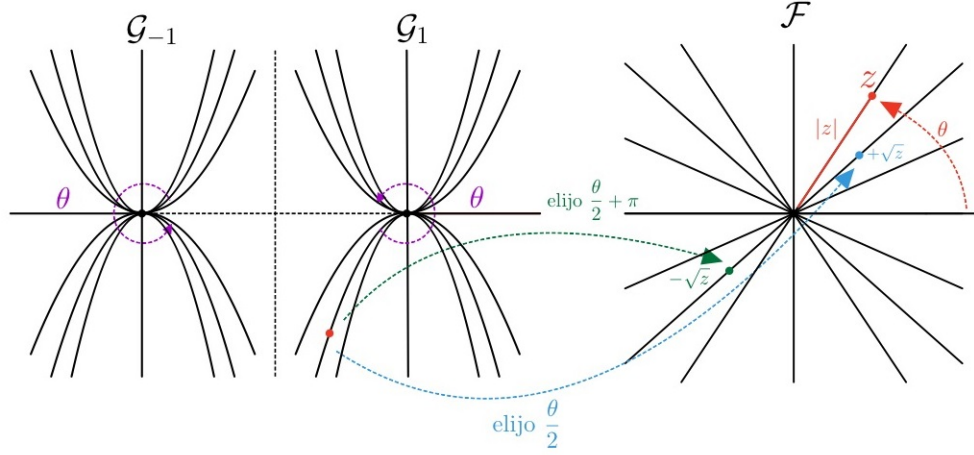
definida en $\mathbb{C}$ y en $\hat{\mathbb{C}}$. Para estudiar los problemas de discontinuidad, comenzamos por buscar la foliación singular $\mathcal{G}$ tal que llevada por $1 - z^2$ coincide con la foliación radial $\mathcal{F}$. Esta foliación se ve de la siguiente forma



Destacamos las siguientes propiedades que se pueden observar en el dibujo

1. Las singularidades de $\mathcal{G}$ se corresponden con los reales $-1, 0, 1$ donde $1, -1$ son las preimágenes de 0 por $1 - z^2$ y 0 es un punto singular de $1 - z^2$, es decir, un punto donde la derivada de la función se anula, por lo que la función falla en ser un difeomorfismo local.
2. Las semirrectas reales $[\infty, -1]$ y $[1, \infty]$ son enviadas uno a uno sobre la semirrecta $\mathbb{R}^-$ mientras que el intervalo real $[-1, 1]$ es enviado sobre $[0, 1]$ recorriendo éste ida y vuelta desde 0 .
3. El eje complejo $\{ai \in \mathbb{C} : a \in \mathbb{R}\} = \text{Im}$ es enviado en la semirrecta $[1, \infty]$. Por lo que siendo $\{ai \in \mathbb{C} : a \geq 0\} = \text{Im}^+$ y $\{ai \in \mathbb{C} : a \leq 0\} = \text{Im}^-$, tenemos que la unión de los segmentos $\text{Im}^+ \cup [0, 1]$ es enviada uno a uno en $\mathbb{R}^+$ así como la de los segmentos $\text{Im}^- \cup [0, 1], \text{Im}^+ \cup [-1, 0], \text{Im}^- \cup [-1, 0]$

Bajo estas consideraciones, observamos que quitando $\text{Im} \cup (-1, 1)$ obtenemos las foliaciones $\mathcal{G}_{-1}$ del tipo radial desde -1 y $\mathcal{G}_1$ desde 1 y podemos definir la función $\sqrt{1-z^2}$ de diversas maneras: en cada foliación podemos elegir el arco mitad o el arco mitad más π . Representamos ambas elecciones para z en la foliación $\mathcal{G}_1$ en la siguiente figura.



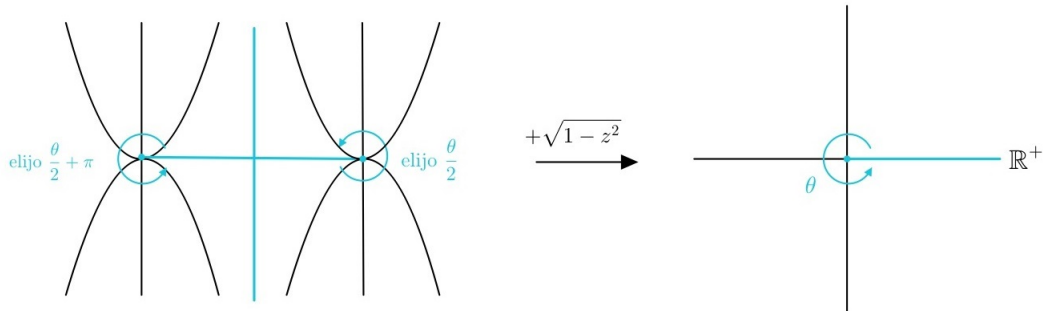
En principio, podríamos combinar todas estas opciones y obtener cuatro funciones diferentes. Sin embargo, buscamos una elección que se extienda continuamente a la clausura que surge de unir $\text{Im} \cup (-1, 1)$. Por lo tanto, teniendo en cuenta la figura anterior, podemos concluir que tenemos únicamente dos opciones:

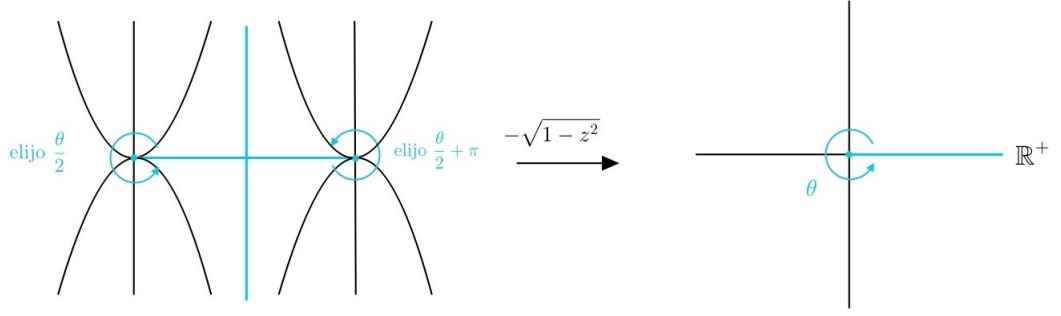
- Si elegimos arco mitad para la foliación $\mathcal{G}_1$ entonces debemos elegir arco mitad más π para la foliación $\mathcal{G}_{-1}$.
- Si elegimos arco mitad más π para la foliación $\mathcal{G}_1$ entonces debemos elegir arco mitad para la foliación $\mathcal{G}_{-1}$.

Esto nos da dos posibles opciones, como en el caso anterior:

$$+\sqrt{1-z^2} : \mathbb{C} \setminus \{\text{Im} \cup (-1, 1)\} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{y} \quad -\sqrt{1-z^2} : \mathbb{C} \setminus \{\text{Im} \cup (-1, 1)\} \rightarrow \mathbb{C}$$

Las mismas se pueden visualizar en las siguientes figuras:



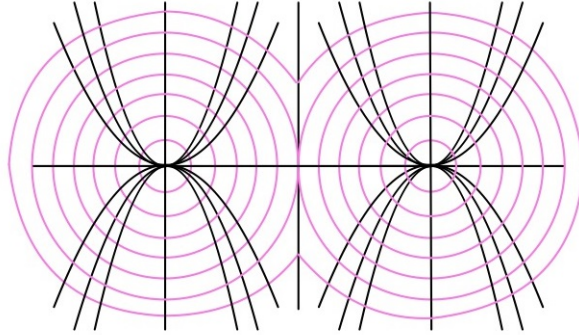


En ambos casos, las imágenes cubren todo $\hat{\mathbb{C}}$ menos el intervalo $(0, \infty)$ y pueden extenderse continuamente a Im^+ , Im^- de forma que, dado ai , definimos la primera función como $-\sqrt{1+a^2}$ y para la segunda $+\sqrt{1+a^2}$.

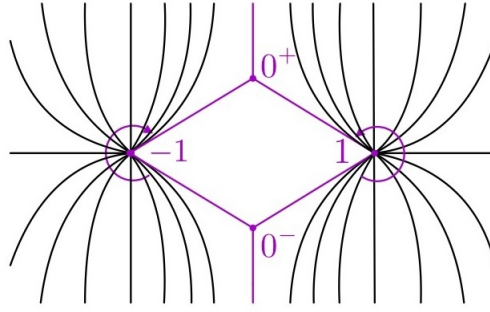
El siguiente paso es juntar ambas opciones en una única función holomorfa en una superficie de Riemann compacta. Procedemos como antes:

1. Removemos el conjunto de discontinuidades.
2. Compactificamos de modo que el espacio resultante sea una esfera menos discos, manteniendo la información radial para poder extender nuestra función continuamente.
3. Pegamos los dos espacios.

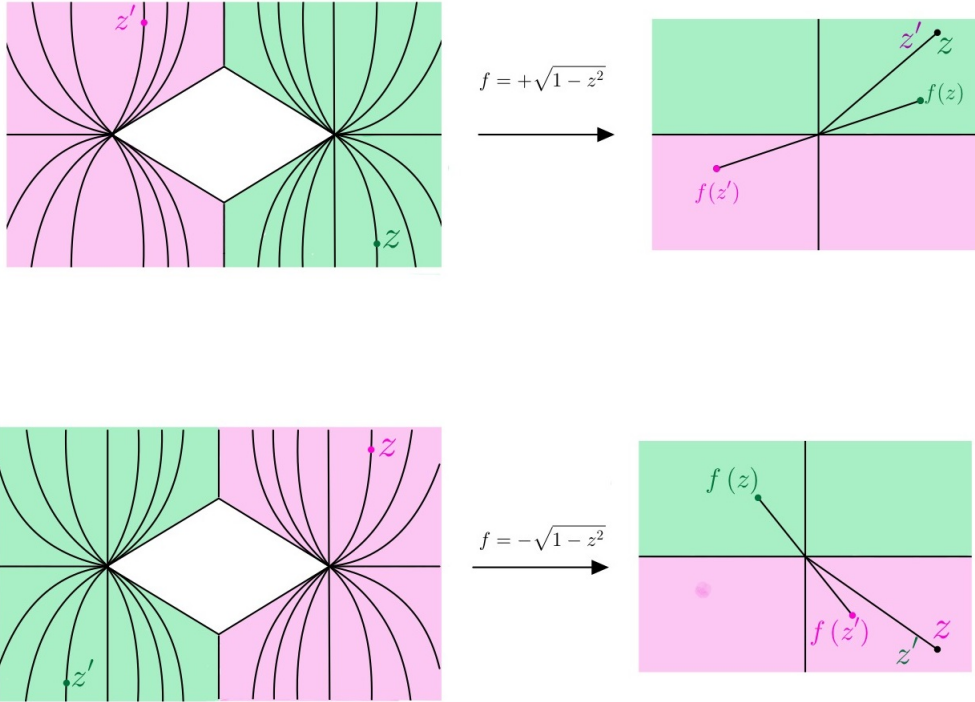
Es claro que el conjunto de discontinuidades es el intervalo $(-1, 1)$. Una vez que lo quitamos, la compactificación es similar al caso anterior pero teniendo en cuenta el nuevo contexto. En el ejemplo previo, nos basamos en sucesiones convergentes al segmento $\mathbb{R}^+$ y contenidas en un círculo fijo transversal a los radios. Ahora debemos tomar estos círculos transversales a las preimágenes de dichos radios bajo la función $1-z^2$ según se observa en la figura:



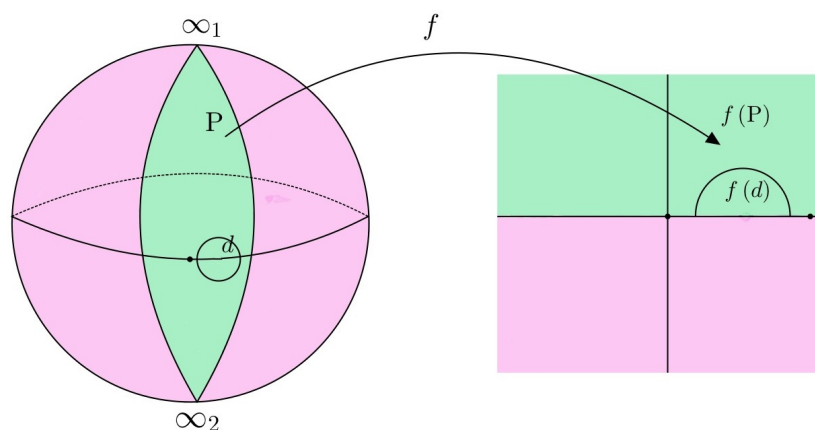
No obstante, al agregar estas sucesiones, aún no obtenemos un espacio compacto pues no hay un círculo que pase por el cero. Este problema se soluciona fácilmente agregando un último círculo de $\hat{\mathbb{C}}$ dado por el eje imaginario. Una vez hecho esto, podemos tomar la compactificación que queremos y obtenemos un espacio homeomorfo a la esfera menos un disco abierto cuyo borde se identifica con la unión de dos arcos: uno de -1 a 1 por 0^+ y otro de -1 a 1 por 0^- como se muestra en la figura:



En este nuevo espacio podemos considerar las funciones $+\sqrt{1-z^2}$ y $-\sqrt{1-z^2}$ como se muestra a continuación:



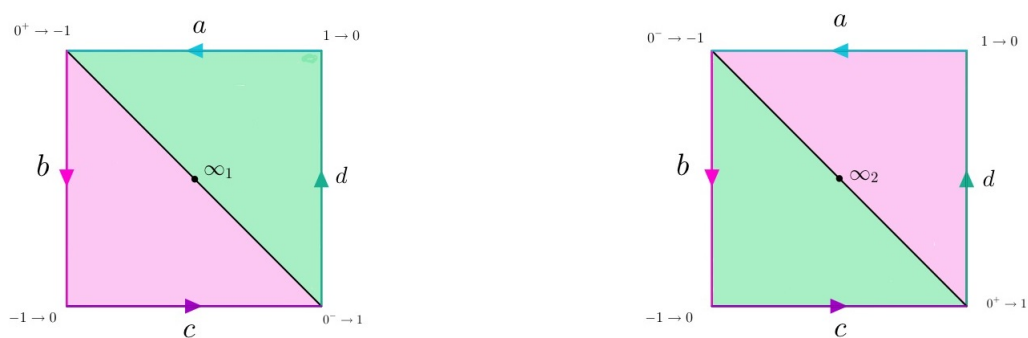
El siguiente paso en nuestro procedimiento es pegar ambos espacios de modo que el espacio resultante sea una superficie de Riemann R y la función $f : R \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ sea holomorfa. Esto resulta un tanto más difícil que en el caso anterior. Observar que si elegimos pegar el segmento de 0^+ a 0^- por 1 del primer espacio con el segmento de 0^+ a 0^- por -1 del segundo y el segmento de 0^+ a 0^- por -1 con 0^+ a 0^- por 1 del segundo, generamos un espacio que es topológicamente una esfera pero el mapa inducido f falla en ser holomorfo. Esto lo podemos observar de la siguiente forma: tomamos un disco D centrado en un elemento a del segmento borde entre 1 y 0^+ con un diámetro dentro del mismo y vemos que la imagen por la función f es un semidisco, como en la figura, lo cual no puede pasar si buscamos que f sea holomorfa.



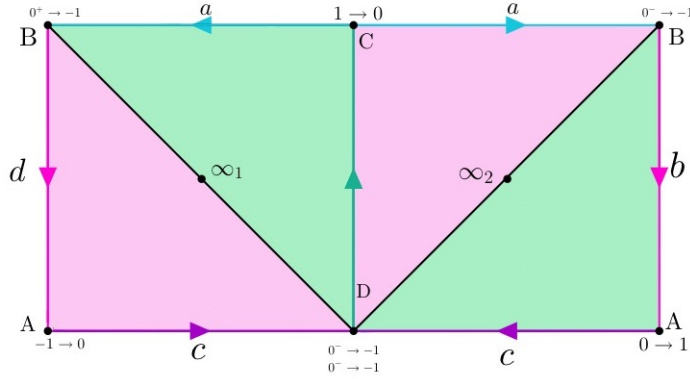
Procedemos entonces a hacer la identificación de la siguiente forma



Ahora bien, podemos preguntarnos cuál es el espacio obtenido. Para responder esta pregunta, comenzamos por pensar a nuestros espacios como si fueran cuadrados con centro en infinito y marcando como pretendemos identificar los bordes. Representamos esto en la figura



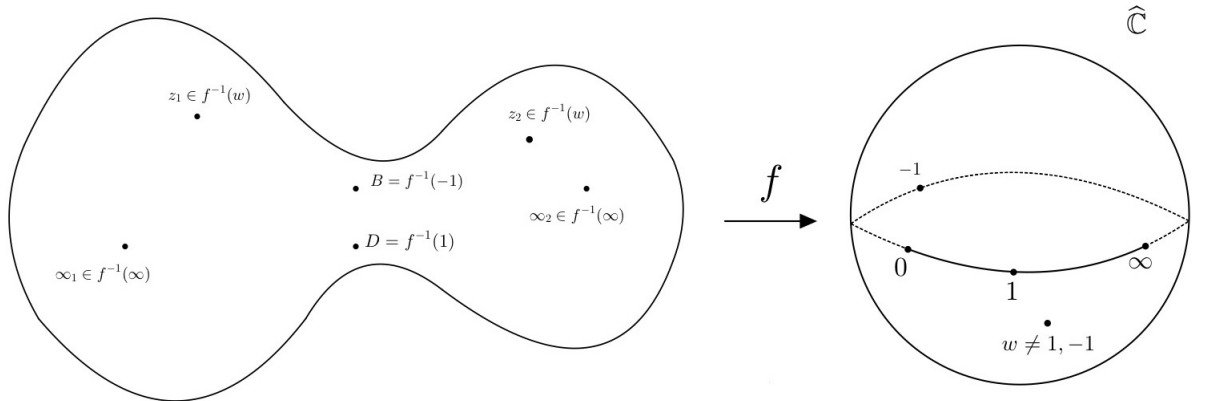
Juntando los bordes de ambos cuadrados, obtenemos el siguiente espacio con los intervalos identificados



que es una superficie de Riemann R

Nos interesa ahora saber qué tipo topológico tiene esta superficie. Hacemos uso, entonces, de una herramienta importante que nos brinda el teorema de clasificación de superficies: podemos clasificar a nuestra superficie calculando su característica de Euler. Usando la triangulación representada en la figura anterior y teniendo en cuenta la identificación de los bordes, encontramos 4 vértices, 6 lados y 4 caras, por lo que obtenemos $\chi(R) = 2$ y la superficie es una esfera.

En el siguiente dibujo representamos a R y a $f : R \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$



Como en el caso anterior, también podemos intentar resolver el problema haciendo la construcción desde una perspectiva más algebraica. Esto es, considerar la curva algebraica

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : w^2 = 1 - z^2\}$$

Esta curva X resulta ser una superficie de Riemann pues si consideramos la función $P : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $P(z, w) = z^2 + w^2 - 1$ entonces, tenemos que $X = P^{-1}(0)$. Además, como $(0, 0) \notin X$ y es el único punto donde ambas derivadas se anulan, estamos en las hipótesis del *Teorema 1* de la sección anterior.

Esta superficie no es compacta en $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. En principio, podríamos compactificarla en $\hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$ y esperar que al menos una de las proyecciones pr_z, pr_w determine un bi-holomorfismo entre $\bar{X}$ y $\hat{\mathbb{C}}$ como hicimos anteriormente. Sin embargo esto ya no funciona. Observar que dado $z \neq 1, -1$ existen dos valores de w tales que $(z, w) \in X$ y fijado $w \neq 1, -1$ existen dos valores de z tales que $(z, w) \in X$. Es decir, las proyecciones fallan en ser 1 a 1 excepto en $z = 1, -1$ y $w = 1, -1$ que decimos que son valores *singulares*. Vemos, además, que en el complemento de $z = 1, -1$, $\text{pr}_z : X \rightarrow \mathbb{C}$ es un *cubrimiento* que podemos extender de buena forma a los valores anteriores, por lo que decimos que es un cubrimiento *ramificado*.

A pesar de los problemas mencionados, podemos aprovechar este ejemplo de esta curva algebraica y superficie de Riemann X para discutir otro tipo de compactificación. Claramente, buscamos que al compatificar, la superficie obtenida sea una superficie de Riemann lo cual nos trae algunos problemas que se mencionan a continuación.

Observar que si tomamos $\bar{X} \subset \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$, obtenemos $\bar{X} = X \cup \{(\infty, \infty)\}$. Que este espacio resulte una superficie topológica depende de cómo el espacio X tienda a infinito. Lo pensamos de la siguiente manera: consideramos un disco cerrado D en $\hat{\mathbb{C}}$ de centro cero y radio 2. El complemento de éste, resulta ser un disco que notamos D_∞ y decimos que tiene centro en ∞ . Al mirar $\text{pr}_z^{-1}(D_\infty) \cap X$ vemos que para cada z en el disco, tenemos exactamente dos puntos $(z, w_1), (z, w_2)$ donde $w_1 = -w_2$. Fijemos entonces z_0 en dicho disco y sus correspondientes pares $(z_0, w_1), (z_0, w_2)$. Sea U_1 la componente conexa de $\text{pr}_z^{-1}(D_\infty) \cap X$ que contiene a (z_0, w_1) y U_2 la que contiene a (z_0, w_2) . Tenemos la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 1. *Se tiene que $\text{pr}_z^{-1}(D_\infty) \cap X = U_1 \cup U_2$ y que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Discutimos la prueba de la segunda parte del enunciado. Supongamos que existe una curva $(z(t), w(t))$ desde $[0, 1]$ en la superficie tal que une (z_0, w_1) con (z_0, w_2) con $|z(t)| > 2$. Esto último lo pedimos para que la curva esté contenida en $\text{pr}^{-1}(D_\infty) \cap X$. Podemos suponer que cada curva $z(t)$ corta cada semi eje real y complejo una única vez. Además, cada vez que $z(t)$ está en alguno de estos semi ejes, $w(t)$ también debe estar en alguno dada la relación algebraica entre ellos. Por lo tanto, las curvas $z(t)$ y $w(t)$ deben cortar los semi ejes reales y complejos la misma cantidad de veces. Se cumple que $z(t)$ comienza y termina en z_0 dentro de D_∞ , sin pasar por infinito y $w(t)$ comienza en w_1 y termina en $w_2 = -w_1$ dentro de D_∞ sin pasar por infinito. Dado que ambas curvas cortan a cada semi eje en un único punto, tenemos una contradicción.

Tenemos que en cada abierto U_1 y U_2 , la proyección pr_z es un biholomorfismo, por lo tanto, la clausura de cada uno es biholomorfa a D_∞ . Utilizando lo anterior, tomamos ahora la clausura de

$$\text{pr}^{-1}(D_\infty) \cap X \subset \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$$

que es simplemente

$$U_1 \cup U_2 \cup \{(\infty, \infty)\} = [U_1 \cup \{(\infty, \infty)\}] \cup [U_2 \cup \{(\infty, \infty)\}]$$

Este último espacio es homeomorfo a tomar dos discos disjuntos y pegarlos por su centro, por lo que no puede ser una superficie topológica.

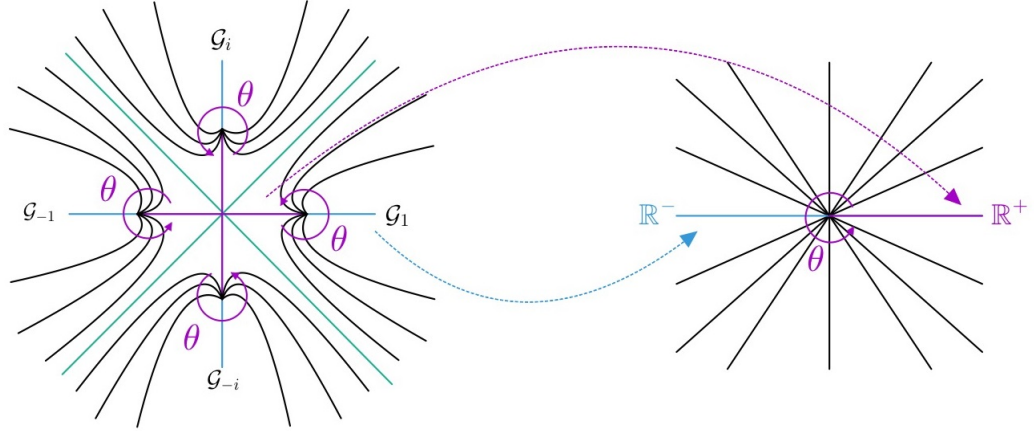
Concluimos entonces que en general, tomar la clausura en $\hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$ de una curva algebraica que es una superficie de Riemann en $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ no necesariamente resulta en una superficie. Este problema puede solucionarse compactificando por dos puntos ∞_1 e ∞_2 .

3. El caso $\frac{1}{\sqrt{1-z^4}}$

La integral real de este tipo de expresiones pertenece a la familia de integrales elípticas. Nuevamente, queremos entender las posibles superficies de Riemann que sirvan de dominio para la función $\sqrt{1-z^4}$. Como en los casos anteriores, tenemos dos posibles construcciones:

- Construcción Topológica: a partir de cortes y pegados del plano complejo.
- Construcción Algebraica: a partir de los ceros del polinomio $P(z, w)$ asociado a la función $\sqrt{1-z^4}$.

Nos guiaremos por el primer camino, pues para dar con la topología de la superficie en cuestión a partir del segundo método, necesitaremos el teorema de Riemann-Hurwitz que veremos más adelante. Buscamos una superficie de Riemann donde podamos definir $\sqrt{1-z^4}$. Análogamente al caso anterior, consideramos la foliación singular $\mathcal{G}$ en $\hat{\mathbb{C}}$ que es enviada por $1-z^4$ en la foliación radial $\mathcal{F}$ de $\hat{\mathbb{C}}$. Es decir, buscamos la preimagen $\mathcal{G}$ de la foliación $\mathcal{F}$ por la función $1-z^4$. Ésta se ve como en la figura

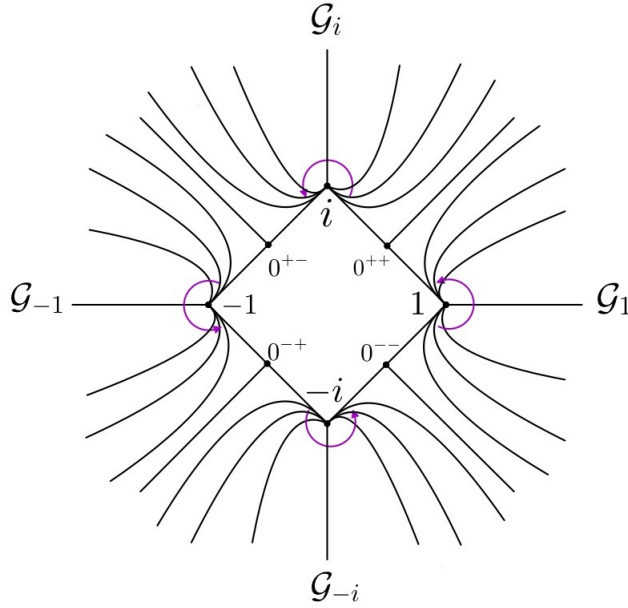


De las cuatro preimágenes del punto singular 0 nacen cuatro foliaciones radiales $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_{-1}, \mathcal{G}_i, \mathcal{G}_{-i}$ identificadas con la foliación $\mathcal{F}$ sin el segmento $[1, \infty)$ cuya preimagen nos da las rectas $x = y$ y $x = -y$ como se ve en la figura anterior.

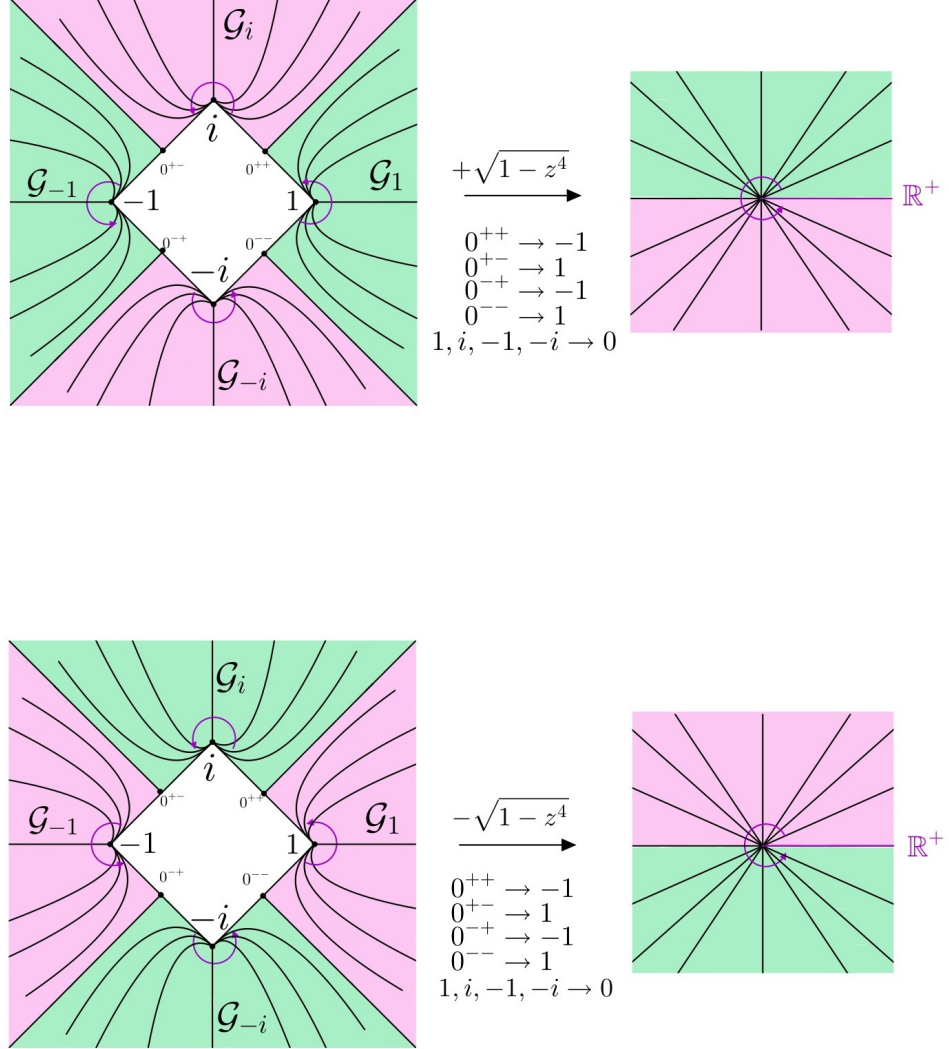
Para definir una rama de la función $\sqrt{1-z^4}$ debemos elegir en cada una de las sub-foliaciones $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_{-1}, \mathcal{G}_i, \mathcal{G}_{-i}$ el arco mitad o el arco mitad más π . Sin embargo, vimos en el ejemplo previo que debemos hacer esta elección cuidando la continuidad de la extensión de la función a su clausura. Ahora este problema se da en los conjuntos $\{x = y\}, \{x = -y\}$ y la unión de los intervalos $(-1, 1)$ y $\{bi : -1 \leq b \leq 1\}$. Tenemos entonces dos opciones:

- Si elegimos en $\mathcal{G}_1$ el arco mitad, debemos elegir el arco mitad más π en $\mathcal{G}_i$, luego en $\mathcal{G}_{-1}$ debemos elegir el arco mitad y en $\mathcal{G}_{-i}$ el arco mitad más π . De esta forma queda definida una función continua en la unión de estos cuatro sectores y las rectas $x = y$ y $x = -y$ que cubre a la esfera de Riemann dos veces: el primer y tercer sector cubren la semiesfera $\text{Im}(z) \geq 0$ y los otros dos sectores cubren la semiesfera $\text{Im}(z) \leq 0$. De esta forma obtenemos una rama de la función $\sqrt{1 - z^4}$ que notamos por $+\sqrt{1 - z^4}$.
- Si, inversamente, elegimos el arco mitad más π en $\mathcal{G}_1$, hacemos la elección en los otros sectores de forma alternada y obtenemos la otra rama de dicha función donde los sectores son enviados de forma análoga al caso anterior sobre la esfera de Riemann. A esta segunda rama la denotamos $-\sqrt{1 - z^4}$.

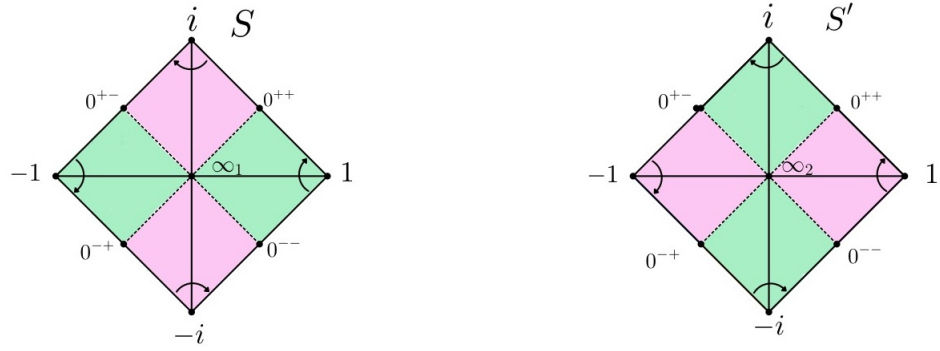
Nuevamente, nos preguntamos si podemos pegar estas dos ramas para obtener una función $\sqrt{1 - z^4}$ holomorfa en alguna superficie de Riemann. Para esto, observamos que en los casos anteriores, para compactificar luego de retirar los segmentos problemáticos, es clave tener por cada punto de ellos, un círculo de la foliación singular que surge de las preimágenes por $1 - z^4$ de la foliación $\mathcal{F}$. En este caso, los segmentos a remover son $\{|\text{Re}(z)| < 1, \text{Im}(z) = 0\}$ y $\{|\text{Im}(z)| < 0, \text{Re}(z) = 0\}$. Al compactificar obtenemos un espacio homeomorfo a la esfera menos un disco, que equipado con las foliaciones inducidas tiene el siguiente aspecto



En este espacio tenemos dos posibles funciones $\sqrt{1-z^4}$ según nuestra elección entre $-\sqrt{1-z^4}$ y $+\sqrt{1-z^4}$. Llamándole S y S' a los correspondientes dominios, las funciones se ven como sigue



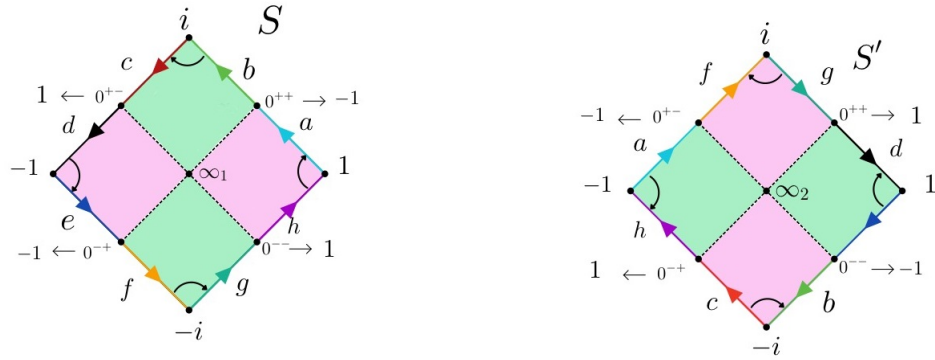
El último paso es pegar los dominios de estas funciones de manera adecuada para obtener una única función $\sqrt{1-z^4}$ que guarde la información de todas las ramas y que esté definida en una superficie de Riemann que llamaremos R . Es claro que tenemos que respetar ciertas reglas para hacer la identificación de los bordes a modo de no perder la holomorphicidad. Topológicamente, queremos pegar por el borde los cuadrados S y S' que se observan en la figura



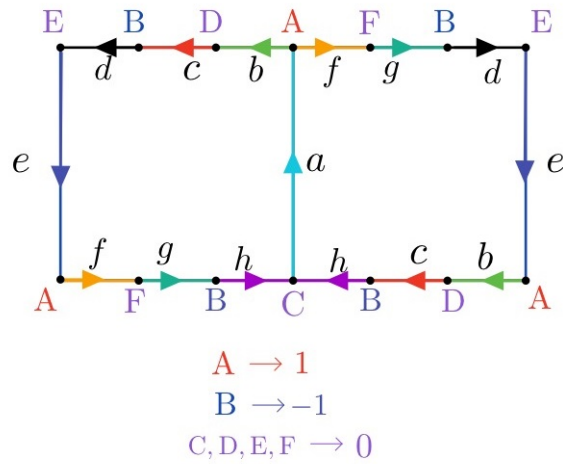
Observamos entonces que las propiedades del pegado correcto son:

- Evitar pegar dos sectores del mismo color.
- Nuestra función debe tener una única pre-imagen para los valores $1, -1$ y para todos los otros puntos salvo infinito, debe tener cuatro pre-imágenes.

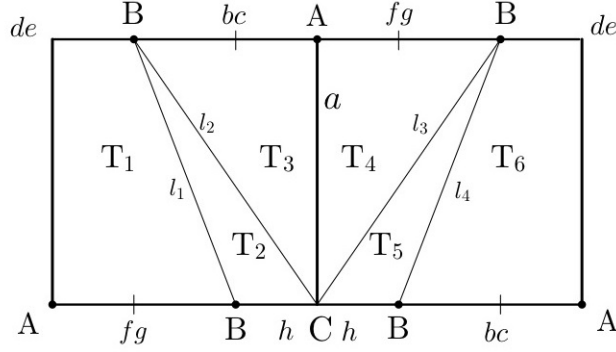
En la siguiente figura se muestra la identificación siguiendo la coincidencia de colores.



El resultado es un único rectángulo cuyo borde debe respetar la identificación de la figura anterior



Este espacio es efectivamente una superficie de Riemann y nuevamente podemos preguntarnos cuál es su tipo topológico. Una vez más, para responder esta pregunta, procedemos como en el ejemplo previo y usamos el teorema de clasificación de superficies. Calculamos entonces la característica de Euler de este espacio. Triangulamos el último rectángulo que obtuvimos induciendo una triangulación en el cociente R según se indica en la figura.



Los vértices son A, B, C , los lados $a, bc, de, fg, h, l_1, l_2, l_3, l_4$ y las caras $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$. Es decir, tenemos tres vértices, nueve lados y seis caras, por lo tanto

$$\chi(R) = 3 - 9 + 6 = 0$$

Y la superficie en cuestión resulta ser un toro.

El mapa holomorfo $\sqrt{1-z^4} : R \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ cumple que para 0 las pre-imágenes son los puntos C, D, E, F de R identificados con $1, -1, i, -i$. Para 1 la pre-imagen es B y para -1 es A . Además, las pre-imágenes de ∞ son los puntos identificados con el infinito en S y S' que podemos notar ∞_1 e ∞_2 en R . Este mapa es un cubrimiento ramificado de grado cuatro con valores de ramificación $1, -1, \infty$ y puntos de ramificación A, B, ∞_1, ∞_2 donde A y B son de orden cuatro y ∞_1, ∞_2 son de orden dos.

Terminamos de analizar este ejemplo mirando el problema desde la perspectiva algebraica. La curva algebraica en cuestión es

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : w^2 = 1 - z^4\}$$

Hacemos mención de algunas características importantes del espacio en cuestión, sin incluir demostraciones.

La primera observación es que el espacio R que construimos anteriormente a partir de pegados, es una compactificación de la curva X , es decir, podemos meter a X en R utilizando un mapa holomorfo tal que su imagen sea $R \setminus \{\infty_S, \infty_{S'}\}$. Otra observación es que el mapa $\sqrt{1-z^4}$ que construimos, se identifica con la proyección $\text{pr}_w : X \rightarrow \mathbb{C}$ y es 4 a 1 salvo claramente en las preimágenes de 1 y -1 . Por otro lado, la otra proyección, $\text{pr}_z : X \rightarrow \mathbb{C}$ es 2 a 1 salvo en las preimágenes de 4 puntos de ramificación.

Esto implica, haciendo uso de todas las observaciones, que existe un mapa del toro a la esfera que es 2 a 1 salvo en 4 puntos de ramificación.

4. Sobre el teorema de Riemann-Hurwitz

Hasta el momento, todas las superficies de Riemann construidas tienen asociado al menos un mapa holomorfo a la esfera de Riemann. En el caso de las curvas algebraicas, tenemos dos de estos mapas dados naturalmente por las proyecciones. Este tipo de mapas, son herramientas útiles a la hora de clasificar superficies de Riemann. A continuación veremos un primer reflejo de esto que pertenece a los dominios del renombrado teorema de Riemann-Hurwitz. Este teorema, nombrado en honor a Bernhard Riemann y Adolf Hurwitz, describe la relación entre la característica de Euler de dos superficies cuando una es un cubrimiento ramificado de la otra. De esta manera, conecta la ramificación con la geometría algebraica.

Volvamos al ejemplo donde la superficie en cuestión es

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : w^2 = 1 - z^2\}$$

En este caso, habíamos visto que las proyecciones fallan en ser 1 a 1 por lo que no podemos identificar X con $\hat{\mathbb{C}}$ rápidamente. Por su parte, la construcción del dominio R para la función $\sqrt{1 - z^2}$ nos llevó a concluir que R es una esfera topológica. Además, de la suma conexa, obtuvimos un mapa holomorfo desde X hasta R que toma todos los puntos salvo los dos infinitos. Por lo tanto, podemos concluir que la compactificación de la superficie X es una esfera topológica.

Desde el punto de vista algebraico, esto no es satisfactorio pues quisiéramos poder clasificar la topología de X sin pasar por otro modelo.

Recordar que la topología de una superficie compacta orientable, queda determinada por la característica de Euler de la misma. Consideramos entonces la compactificación de X que construimos anteriormente. Vimos que $X \cap \text{pr}_z^{-1}(D_\infty)$ era igual a la unión de dos superficies disjuntas U_1, U_2 cuyas clausuras en $\hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$ resultan equivalentes a D_∞ . Luego, al tomar la compactificación de X con dos puntos al infinito ∞_1 correspondiendo a U_1 y ∞_2 correspondiendo a U_2 , se obtiene una superficie de Riemann que llamamos $[X]$

Si tomamos el mapa

$$\text{pr}_z : X \rightarrow \mathbb{C}$$

vemos que para cada $z \neq 1, -1$, existen dos preimágenes. En los casos $z = 1, -1$, tenemos una única preimagen. Además, este mapa es localmente un homeomorfismo, por lo que la restricción del mismo a $X \setminus \{(1, 0), (-1, 0)\}$ resulta un cubrimiento doble e induce un mapa

$$\text{pr}_z : [X] \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

donde simplemente se extiende en ∞_1 y ∞_2 como ∞ . Por lo tanto, este mapa también es 2 a 1 en ∞ y es un cubrimiento doble si lo restringimos a $[X] \setminus \{(1, 0), (-1, 0)\}$.

Si tomamos ahora una triangulación $\mathcal{T}$ adaptada a nuestro cubrimiento ramificado que tenga vértice en 1 y en -1 y consideramos su preimagen por pr_z obtenemos una triangulación $\mathcal{T}'$ que está vinculada con la original de la siguiente forma:

1. $v(\mathcal{T}') = 2v(\mathcal{T}) - 2$
2. $e(\mathcal{T}') = 2e(\mathcal{T})$
3. $f(\mathcal{T}') = 2f(\mathcal{T})$

A partir de esto, podemos calcular la característica de Euler de $[X]$ usando la triangulación $\mathcal{T}'$:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}([X]) &= v(\mathcal{T}') - e(\mathcal{T}') + f(\mathcal{T}') \\ \mathcal{X}([X]) &= 2v(\mathcal{T}) - 2 - 2e(\mathcal{T}) + 2f(\mathcal{T}) \\ \mathcal{X}([X]) &= 2\mathcal{X}(\hat{\mathbb{C}}) - 2 = 2\end{aligned}$$

Esta última relación entre la característica de Euler de $[X]$ y $\hat{\mathbb{C}}$ es lo que establece el teorema de Riemann-Hurwitz. Cerramos concluyendo que $[X]$ es una esfera.

4.1. Superficies de Riemann de género g . En esta sección usamos lo hecho hasta ahora para mostrar cómo aparecen superficies de Riemann de cualquier género. Para esto, trabajaremos con polinomios y sus proyecciones como lo hicimos en el caso particular de Riemann-Hurwitz para la ecuación $w^2 = 1 - z^2$.

Consideramos

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{2g+1} < \alpha_{2g+2}$$

números reales en $\mathbb{C}$ no nulos, tal que si un número real pertenece a la lista, entonces su opuesto también. Tomamos ahora el polinomio en $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ dado por

$$P(z, w) = w^2 - \prod_{i=1}^{2g+2} (z - \alpha_i)$$

El conjunto de ceros de este polinomio es

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : w^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (z - \alpha_i)\}$$

que es una superficie de Riemann. Consideramos ahora la proyección pr_z . Como antes, esta proyección es un cubrimiento 2 a 1 salvo en los valores $z = \alpha_i$ con $i = 1, \dots, 2g+2$ que tienen una única preimagen. Además, de manera análoga al caso $w^2 = 1 - z^2$, podemos construir una compactificación $[X]$ de X con dos puntos $\{\infty_1, \infty_2\}$ tal que $[X]$ es una superficie de Riemann y la proyección se extiende a

$$\text{pr}_z : [X] \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

de forma que estos nuevos puntos se mandan sobre ∞ y en un entorno de cada uno de ellos, el mapa es 2 a 1. Para este caso, debemos usar no solo los semiejes reales y complejos para la variable z sino también un conjunto de rayos acotado por el grado del polinomio. Observar que siempre que w se encuentre en uno de estos semiejes y tenga módulo grande, entonces z deberá estar en alguno de los rayos y viceversa. Por lo tanto, no podemos construir una curva desde la solución (z, w) a $(z, -w)$ cuya proyección en z esté lejos del origen

Podemos tomar ahora una triangulación $\mathcal{T}$ adaptada a nuestro cubrimiento ramificado que, tomando primagen por pr_z , nos da una triangulación $\mathcal{T}'$ en $[X]$ que cumple

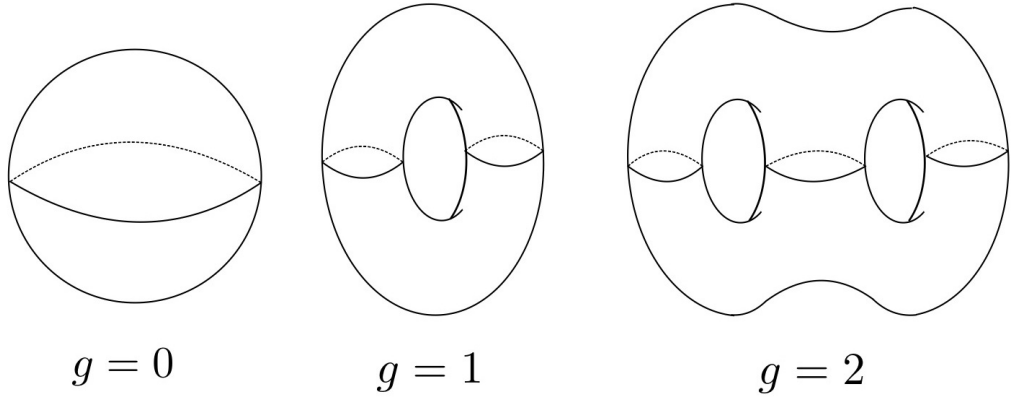
1. $v(\mathcal{T}') = 2v(\mathcal{T}) - 2(g + 1)$
2. $e(\mathcal{T}') = 2e(\mathcal{T})$
3. $f(\mathcal{T}') = 2f(\mathcal{T})$

de donde obtenemos que

$$\mathcal{X}([X]) = 2\mathcal{X}(\hat{\mathbb{C}}) - 2(g + 1) = 2 - 2g$$

y por el teorema de clasificación de superficies, concluimos que $[X]$ es una superficie compacta de género g , es decir, un g -toro.

Concluimos este capítulo dando algunos ejemplos de superficies de distintos géneros en la siguiente figura. Los dos primeros serán los más relevantes para el resto de la monografía.



CAPÍTULO 2

Sobre funciones meromorfas entre Superficies de Riemann

Como vimos en el capítulo anterior, para entender la estructura de las superficies de Riemann, es necesaria la noción de mapas holomorfos entre ellas. Comenzaremos este capítulo trabajando con funciones que parten de una superficie S y tienen como codominio el plano complejo. Es claro que si un mapa holomorfo $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ parte de una superficie compacta, entonces debe ser constante. Aplicando el principio del máximo absoluto, razonamos de la siguiente manera: si este no fuera el caso, f no podría ser acotada y por lo tanto, $|f|$ no tendría extremos absolutos. Sin embargo, S es una superficie compacta y f una función holomorfa; en consecuencia, debe existir tal máximo absoluto. Destacamos esta importante propiedad en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 2. *Toda función holomorfa desde una superficie de Riemann compacta y conexa a $\mathbb{C}$ es constante.*

En base a esto, vemos que para obtener ejemplos más interesantes, debemos considerar entonces, funciones holomorfas desde una superficie S a la esfera $\hat{\mathbb{C}}$. A este tipo de funciones, se les suele llamar *funciones meromorfas*, salvo a la que es constante ∞ . La exclusión de esta última se debe a que buscamos que el conjunto de funciones meromorfas de S forme un *cuerpo*.

Mencionamos brevemente uno de estos ejemplos en el capítulo anterior. En el caso en que $X \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ es el conjunto de ceros de un polinomio $P(z, w)$ de forma que en todo punto de X alguna de las derivadas de P no se anula, las proyecciones en cada variable son funciones holomorfas. En base a este ejemplo, concluimos previamente que existe una compactificación $\bar{X}$ de X de tal modo que una de las proyecciones, extendida a la misma, resulta ser un mapa holomorfo entre $\bar{X}$ y $\hat{\mathbb{C}}$.

Antes de comenzar el estudio de dichas funciones, introducimos algunos resultados fundamentales de mapas holomorfos entre superficies de Riemann. Una propiedad importante dentro de la teoría de funciones de variable compleja es la *analiticidad* de las funciones holomorfas: si f es una función holomorfa en un abierto $U \subset \mathbb{C}$, entonces para todo punto $z_0 \in U$, existe $r > 0$ y una sucesión de números complejos $\{a_n\}$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ para todo } |z - z_0| < r$$

donde los términos de la sucesión están dados por las derivadas de f de modo que $a_n = \frac{f^{[n]}(z_0)}{n!}$. Se dice que la función es representable por serie de potencias.

Nos gustaría generalizar esta definición para el caso en que el dominio de la función, es una superficie de Riemann S y el codominio es $\hat{\mathbb{C}}$ y obtener $f : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ holomorfa. Para esto, consideramos un punto $z_0 \in S$ tal que $f(z_0) \neq \infty$ y una carta local φ_α definida en un entorno del punto z_0 . La composición $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ resulta ser una función holomorfa desde un abierto de $\mathbb{C}$ a un abierto de $\mathbb{C}$. Por lo tanto, podemos asignar a esta función, una serie de potencias como definimos anteriormente, alrededor del punto $y_0 = \varphi_\alpha^{-1}(z_0)$.

Nuestro problema se encuentra en que esto, al menos de la forma en que lo construimos, depende de la elección de la carta. Es decir, si consideramos otra carta φ_β de forma que $x_0 = \varphi_\beta^{-1}(z_0)$, los coeficientes de las respectivas series de potencias de $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ y $f \circ \varphi_\beta^{-1}$ no coincidirán. Esto se debe a que, como mencionamos, los mismos se calculan a partir de las derivadas de estas funciones en los puntos correspondientes. Por ejemplo, llamemos $\varphi_{\alpha\beta}$ al mapa de transición entre ambas cartas, definido donde tenga sentido. Entonces, tenemos lo siguiente

$$[f \circ \varphi_\alpha^{-1}]'(y_0) = [f \circ \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_{\alpha\beta}]'(y_0) = [f \circ \varphi_\beta^{-1}]'(x_0) \varphi'_{\alpha\beta}(y_0)$$

y por lo tanto

$$\frac{[f \circ \varphi_\alpha^{-1}]'(y_0)}{[f \circ \varphi_\beta^{-1}]'(x_0)} = \varphi'_{\alpha\beta}(y_0)$$

Es decir, excepto en el caso en que la derivada del mapa de transición vale 1, las series de potencias serán distintas en las diferentes cartas. Para lograr una definición intrínseca de las nociones de *derivada* y *serie de potencia* de mapas holomorfos, buscamos probar lo siguiente

PROPOSICIÓN 3 (Forma local). *Sea $f : S \rightarrow R$ un mapa holomorfo no constante entre superficies de Riemann. Entonces, fijado $z \in S$ existen entornos U de z y V de $f(z)$ y cartas $\varphi : U \rightarrow \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ y $\psi : V \rightarrow \mathbb{D}$ tales que*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^k$$

para algún $k \in \mathbb{N}$ independiente de las cartas.

En el caso en que ambas superficies son el plano complejo $\mathbb{C}$, el enunciado es equivalente a decir que z^k se corresponde al primer término no nulo del polinomio de Taylor de la función.

La independencia del valor de k respecto de las cartas se debe a que, dado un entorno suficientemente chico de z y $w \in f(U) \setminus f(z)$, tenemos que

$$k = \#f^{-1}(w) \cap U$$

Para probar la primera parte de la proposición, observamos que basta probar el resultado para funciones holomorfas de regiones de $\mathbb{C}$ pues luego de componer con cartas arbitrarias alrededor de z y $f(z)$ estamos en esta situación. De hecho, podemos elegir tales cartas de modo que tanto z como $f(z)$ sean enviados al origen. En conclusión, alcanza con probar la proposición para un mapa holomorfo entre abiertos U' y V' de $\mathbb{C}$ que contengan al cero, tal que $f(0) = 0$.

Si consideramos la serie de potencias de f alrededor del origen, dada por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, sabemos que existe un primer $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_k \neq 0$. Esto es porque en el enunciado de la proposición pedimos que la función no fuera constante. En el caso particular en que $k = 1$, se cumple que existen entornos W, W' de cero tales que $f : W \rightarrow W'$ es un biholomorfismo, resultado que se desprende del teorema de la función inversa. A partir de esto, tenemos el siguiente lema

LEMA 1. *Para f como antes y $k \in \mathbb{N}$ existe una función holomorfa g definida en un entorno $W \subset U'$ de 0 con $g(0) = 0$ y $g'(0) \neq 0$ tal que*

$$f(z) = g(z)^k \text{ para } z \in W$$

DEMOSTRACIÓN. Consideramos la reducida enésima de la serie de potencias de f

$$S_N(z) = \sum_{n=k}^N a_n z^n = a_k z^k \left(\sum_{n=k}^N b_n z^{n-k} \right) = a_k z^k (1 + b_1 z + \dots + b_N z^{N-k})$$

donde $b_n = \frac{a_n}{a_k}$. Por el criterio de Weierstrass, existe un entorno de cero $W' \subset W$ donde la serie $\sum_{n=k}^{+\infty} b_n z^{n-k}$ converge a una función holomorfa $h(z)$ y tal entorno se puede tomar suficientemente chico de modo de poder elegir una rama holomorfa $(h(z))^{\frac{1}{k}}$. En este entorno se tiene que

$$f(z) = (a_k^{\frac{1}{k}} z (h(z))^{\frac{1}{k}})^k$$

por lo tanto, definiendo $g(z) = a_k^{\frac{1}{k}} z (h(z))^{\frac{1}{k}}$, tenemos que $g(0) = 0$ y $g'(0) = a_k^{\frac{1}{k}} \neq 0$ y concluimos la prueba. $\square$

Volviendo entonces a la proposición, podemos considerar $g : U \subset \mathbb{C} \rightarrow W'$ como una carta y la identidad i en $V = f(U)$ como segunda carta, tenemos que

$$i \circ f \circ g^{-1}(z) = z^k$$

y obtenemos lo que queríamos.

En resumen, cuando tenemos un mapa holomorfo $f : S \rightarrow R$ entre superficies de Riemann, podemos asociar un número $k_z \in \mathbb{N}$ a cada $z \in S$ que coincide con la cantidad de preimágenes de $w \neq f(z)$ con $w \in f(U) \setminus f(z)$ donde U es un entorno suficientemente chico de z . A este valor le llamamos *valencia* o *multiplicidad* de z . Junto a esta información, tenemos la siguiente proposición

PROPOSICIÓN 4. *Para $f : S \rightarrow R$ función holomorfa no constante entre superficies de Riemann conexas, se cumple lo siguiente*

1. *El conjunto C de aquellos z con $k_z > 1$ es un conjunto discreto en S .*
2. *Si f es un mapa propio, entonces $V = f(C)$ es también discreto.*
3. *Si f es propio, entonces $f^{-1}(w)$ es finito para todo $w \in R$.*

DEMOSTRACIÓN. Para probar esto, comenzamos con la primera afirmación. Supongamos que C acumula en algún $z \in S$ y tomemos una carta φ desde un entorno U de z y una carta ψ desde un entorno V que contiene a $f(U)$. Consideremos ahora la función $g = \varphi \circ f \circ \psi^{-1}$. Esta es una función holomorfa entre regiones de $\mathbb{C}$, por lo tanto, este mapa cumple que dado $x \in U$, $k_{\varphi^{-1}(x)} = k_x$. Entonces, el conjunto de los puntos $y \in \varphi^{-1}(U)$ con $k_y > 1$, se acumula en $y_0 = \varphi^{-1}(z)$. Es decir, alcanza probar la primera afirmación para mapas holomorfos entre regiones del plano $\mathbb{C}$. Para esto, usamos el siguiente lema.

LEMA 2. *Si g es un mapa holomorfo entre regiones de $\mathbb{C}$ entonces $k_y > 1$ si y solo si $f'(y) = 0$.*

Para la función g construida en el Lema 1, tenemos que el conjunto de puntos donde g' se anula, no es discreto. Usando la teoría de funciones de variable compleja, obtenemos que g es una función constante y por construcción, f también lo es y llegamos a una contradicción.

DEFINICIÓN 3. *Un mapa $f : X \rightarrow Y$ entre dos espacios topológicos X e Y es propio si $f^{-1}(K)$ es un conjunto compacto en X para todo conjunto K compacto en Y .*

Las partes 2 y 3 son consecuencia de la definición de *mapa propio*. □

Al conjunto C de la proposición, que consistía de los puntos z tales que $k_z > 1$, le llamamos *conjunto de puntos críticos de f* y al conjunto V le llamamos *conjunto de valores críticos de f* . A partir de esto, tenemos la siguiente definición

DEFINICIÓN 4. *Un mapa $f : X \rightarrow Y$ es un cubrimiento ramificado si es un cubrimiento de Y salvo en un conjunto discreto de puntos $C \subset X$ donde para todo $x \in C$ existe un entorno U , un entorno V de $y = f(x)$ y dos homeomorfismos $\varphi : U \rightarrow \mathbb{D}$, $\psi : V \rightarrow \mathbb{D}$ tales que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = z^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$.*

Por lo tanto, todo mapa holomorfo no constante y sobreyectivo entre superficies de Riemann es un cubrimiento ramificado. Como en el capítulo anterior, este tipo de cubrimientos que tienen un buen comportamiento topológico, nos permite la construcción de triangulaciones del espacio de salida que llevábamos al espacio de llegada y así vinculábamos la topología de ambos espacios.

El siguiente paso consiste en asociar a estos mapas holomorfos entre superficies de Riemann, un valor característico que se conoce como *grado* del mapa. Comenzamos tomando $y \in R$ y definimos

$$d_y = \sum_{x \in f^{-1}(y)} k_x$$

Notar que en el caso en que $y \notin V$, con $V = f(C)$ como definimos antes, se tiene que $d_y = \#f^{-1}(y)$.

PROPOSICIÓN 5. *Para un mapa holomorfo $f : S \rightarrow R$ propio, no constante, se tiene que d_y no depende de la elección de $y \in R$.*

Esto nos permite definir el *grado* del mapa f como $d = d_y$ para cualquier $y \in R$. Es importante destacar la relevancia de este resultado pues implica el Teorema Fundamental del Álgebra. Notar que si consideramos un polinomio $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, podemos extenderlo naturalmente a una función holomorfa que, haciendo abuso de notación notamos de la misma forma, $P : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definiendo $P^{-1}(\infty) = \{\infty\}$. Tenemos entonces que $d_\infty \geq 1$. Usando la proposición anterior, esto implica que $d_z \geq 1$ para todo $z \in \hat{\mathbb{C}}$. En particular, $d_0 \geq 1$. Por lo tanto, existen ceros de P , tantos como elementos haya en la preimagen de 0.

Probemos entonces la proposición:

DEMOSTRACIÓN. Comenzamos observando que $R \setminus V$ es conexo y que la función

$$y \in R \setminus V \mapsto \#f^{-1}(y)$$

es continua por lo que será constante. Esto implica que existe un valor d tal que $d = d_y$ para todo $y \in R \setminus V$. Como sabemos que V es un conjunto discreto, tenemos que probar que para todo $y \in V$ y cualquier entorno W suficientemente chico, tenemos que $d_y = d_{y'}$ donde $y' \in W$ distinto de y . Sea entonces $y \in V$. Si llamamos $x_1, \dots, x_m$ a las preimágenes de y por f , podemos tomar un entorno W suficientemente chico tal que $f^{-1}(W)$ es una unión disjunta de abiertos $U_1, \dots, U_m$ donde:

1. Por cada U_i existen dos cartas $\varphi : U_i \rightarrow \mathbb{D}$ y $\psi : V \rightarrow \mathbb{D}$ tales que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = z^{k_i}$ donde $k_i = k_{x_i}$.
2. $d_y = \sum k_i$

Por lo tanto, para todo $y' \in V \setminus \{y\}$, tenemos en cada U_i un número k_i de preimágenes de y . Concluimos que $d_{y'} = d_y$. $\square$

Para todo mapa holomorfo entre superficies hemos conseguido asociar un número d que llamamos *grado* del mapa. En el caso particular en que $d = 1$ y S es una superficie compacta, se cumple que el mapa debe ser un biholomorfismo, pues es un holomorfismo inyectivo.

Como mencionamos al principio del capítulo, una función meromorfa f en una superficie S es una función holomorfa de S en $\hat{\mathbb{C}}$ que no es constante ∞ . Tal como hicimos en el caso de funciones holomorfas a $\mathbb{C}$, podemos desarrollar a f en serie de potencias, excepto en los puntos $f^{-1}(\infty)$. En cada $x \in f^{-1}(\infty)$, si tomamos una carta local $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ donde U es un entorno de x suficientemente chico y $\varphi(x) = 0$,

tenemos que $f \circ \varphi^{-1}$ es una función meromorfa con un único polo en 0. Por lo tanto, tenemos para esta función, una serie de Laurent

$$f \circ \varphi^{-1}(z) = \sum_{i=-n}^{\infty} a_i z^i$$

donde n es lo que se llama *orden del polo*. Este número no depende de la carta y de hecho tenemos la siguiente propiedad

PROPOSICIÓN 6. *En el desarrollo anterior, se cumple que $n = k_x$*

DEMOSTRACIÓN. Como vimos anteriormente, dado U entorno de x suficientemente chico y $w \in f(U) \setminus \{\infty\}$, tenemos que $k_x = \#f^{-1}(w) \cap U$. Por lo tanto, dado que la inversión $\frac{1}{z} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es un biholomorfismo, tenemos que si $g = \frac{1}{z} \circ f$ entonces $k_x = k_{x'}$ donde este último valor es la multiplicidad de x según g .

Por otro lado, consideramos la serie de potencias de $g \circ \varphi^{-1}$ en 0, dada por

$$\sum_{i=k'_x}^{+\infty} b_i z^i$$

o equivalentemente $g \circ \varphi^{-1}(z) = z^{k'_x}(h(z))$ en un entorno de 0 con $h(z) \neq 0$. Entonces tenemos que

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{k'_x} f \circ \varphi^{-1}(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z^{k'_x} \frac{1}{g \circ \varphi(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} z^{k'_x} \frac{1}{z^{k'_x} h(z)} = \frac{1}{h(0)}$$

Por lo que $k'_x = k_x$ y es el orden del polo de $f \circ \varphi^{-1}$. □

En conclusión, ahora podemos hablar de polos y sus órdenes de funciones meromorfas en superficies de Riemann. Es decir, tenemos que un polo es un elemento x en la preimagen de ∞ y su orden es el número k_x como definimos antes.

De esto se desprende un resultado interesante y es que si consideramos un mapa meromorfo desde una superficie compacta S tal que uno de sus polos tiene orden 1, entonces S es biholomorfa a $\hat{\mathbb{C}}$. Esto se debe a que el mapa es de grado 1 y por lo tanto, debe ser biyectivo. Además como S y $\hat{\mathbb{C}}$ son compactas y f continua, el mapa debe ser cerrado y por lo tanto un homeomorfismo. Finalmente, aplicando el teorema de la función inversa y dado que la inversa es una rotohomotecia, tenemos que f es un biholomorfismo.

Conocemos, del capítulo anterior, algunos ejemplos de este tipo de mapas:

- Mapas meromorfos $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ con uno y dos polos.
- Mapas meromorfos $f : S_g \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ donde S_g es un g -toro, con dos polos.
- Mapas $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ que surgen de restringir las proyecciones en $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ al conjunto X de ceros de un polinomio de dos variables, en el caso en que X resulta una superficie de Riemann, compactificando correctamente.

1. Mapas meromorfos de $\hat{\mathbb{C}}$

En esta sección estudiaremos los mapas holomorfos de $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en sí mismo que no son constante infinito. Comenzamos considerando una función racional $\frac{P(z)}{Q(z)}$ desde $\mathbb{C}$ sin los ceros del polinomio Q en $\mathbb{C}$ y asumimos que la fracción es irreducible. Esta función puede entenderse naturalmente a una función de $\hat{\mathbb{C}}$ en $\hat{\mathbb{C}}$ de modo que los ceros del denominador son enviados en ∞ e ∞ es enviado en $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P(z)}{Q(z)}$. Esta construcción nos da un primer ejemplo de una función meromorfa de $\hat{\mathbb{C}}$. Para probar esta última afirmación, tomamos las cartas que definen $\hat{\mathbb{C}}$ que son φ_0 y φ_∞ , donde $\varphi_0 : \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$ es la identidad en este dominio y $\varphi_\infty : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ cumple que $\varphi_\infty(z) = \frac{1}{z}$ donde decimos que $\frac{1}{\infty} = 0$. Por lo tanto, tenemos que si r es una función racional dada por $r(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ en $\hat{\mathbb{C}}$ y z no es una raíz de Q ni ∞ , la composición

$$\varphi_0 \circ r \circ \varphi_\infty^{-1}$$

es holomorfa en un entorno de z pues es una función racional del plano complejo estudiada lejos de sus polos. El siguiente paso es ver el comportamiento de r cerca de los ceros de Q e ∞ .

Supongamos entonces que z_0 es un cero de la función Q . Queremos estudiar el límite cuando z se acerca a z_0 de la composición anterior, es decir, estudiar este mapa en un entorno chico de z_0 donde no hay otros polos. Planteamos entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi_\infty \circ r \circ \varphi_0^{-1}(z) - \varphi_\infty \circ r \circ \varphi_0^{-1}(z_0)}{z - z_0}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{Q(z)/P(z)}{z - z_0} = \frac{\lambda}{P(z_0)}$$

para algún $\lambda \in \mathbb{C}$. Concluimos entonces que r es holomorfa en entornos de cualquier cero de Q . Para estudiar lo que ocurre en ∞ , observamos primero que $\frac{1}{z}$ es un biholomorfismo, por lo tanto f es holomorfa en un entorno de ∞ si y solo si $f \circ \frac{1}{z}$ es un biholomorfismo en un entorno de 0, lo cual tenemos garantizado a partir del análisis anterior y el hecho de que $f \circ \frac{1}{z}$ es una función holomorfa.

Visto esto, tenemos que todas las funciones racionales en $\hat{\mathbb{C}}$ son holomorfas y de hecho, también vale el recíproco, lo cual probamos en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 7. *Toda función meromorfa de la esfera es racional*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa, sean $p_1, \dots, p_k$ sus finitos polos y asumimos que ninguno es ∞ . Esto podemos hacerlo pues de no ser así, alcanza con componer con una función racional para que esto deje de suceder. En un entorno de cada polo, podemos considerar una serie de Laurent para $f \circ \varphi_i^{-1}$ con parte principal $r_i(z)$ que se extiende a una función racional $r_i : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Tomando la función

$$h(z) = f(z) - \sum_{i=1}^n r_i(z)$$

tenemos que h no puede tener polos en $\hat{\mathbb{C}}$ pues fuera de los puntos $p_1, \dots, p_k$ no hay polos dado que allí, la diferencia en coordenadas locales, resulta una función holomorfa de un abierto de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$. En los puntos p_i , nuestra definición de h a partir de las series de Laurent no nos permite tener polos. Por último, $h(\infty) = f(\infty) \neq \infty$. Por lo tanto, $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa tal que $h(\infty) \neq \infty$ y entonces debe ser constante. Concluimos entonces que

$$f(z) = \lambda - \sum_{i=1}^n r_i(z)$$

es una función racional. □

2. Sobre el teorema de Riemann-Roch

Vimos en la sección anterior que toda función meromorfa de la esfera es racional, por lo cual es claro que, el espacio vectorial que forman, es de dimensión infinita. Sin embargo, también podemos observar que, fijados puntos $p_1, \dots, p_k \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$, las funciones meromorfas que tienen polos simples exactamente en estos puntos, forman un espacio de dimensión finita. El razonamiento es el siguiente: si f es una tal función, tenemos que $f = \frac{P}{Q}$, donde $\deg(P) \leq \deg(Q)$ pues en caso contrario, ∞ sería también un polo de f . Llamemos $k = \deg(Q)$, entonces $\deg(P) \leq k$ y concluimos que el espacio es de dimensión finita, de hecho su dimensión es $k + 1$, pues es la cantidad de coeficientes que tenemos para elegir P . Al espacio de funciones meromorfas de $\hat{\mathbb{C}}$ con polos simples en $p_1, \dots, p_k$ lo notamos $H(p_1, \dots, p_k)$.

Consideremos ahora dos funciones meromorfas f, g con polos simples $p_1, \dots, p_k \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ tales que en alguna carta local en uno de los puntos p_i se escriben de la siguiente forma

$$f(z) = \frac{a}{z - p_i} + h(z), \quad g(z) = \frac{a}{z - p_i} + v(z)$$

donde h, v son funciones holomorfas, es decir, la parte principal de las respectivas series de Laurent coinciden en ese polo, entonces $f - g$ será holomorfa y por lo tanto constante en ese entorno. Es decir, si la parte principal de las series de Laurent en alguna carta local, coinciden en cada polo, la función $f - g$ será constante. Esto nos proporciona una forma alternativa de ver que el espacio vectorial de las funciones meromorfas con polos prescritos, tiene dimensión finita.

De hecho, el razonamiento anterior, no utiliza el hecho de que el dominio de la función sea $\hat{\mathbb{C}}$ por lo que podemos generalizarlo a cualquier superficie S compacta. Esto lo enunciamos en la siguiente proposición y decimos que es una versión *no topológica* del teorema de Riemann-Roch que será relevante en el capítulo próximo.

PROPOSICIÓN 8. *Sea S una superficie de Riemann y $p_1, \dots, p_k$ puntos de S . Entonces el conjunto de funciones meromorfas cuyos polos son todos simples y pertenecen al conjunto $\{p_1, \dots, p_k\}$ es un espacio vectorial de dimensión menor o igual a $k + 1$.*

La expresión *no topológica* refiere a que no aparece información sobre la topología de S en este enunciado, a diferencia del teorema original donde se relaciona el género de la superficie con la dimensión del espacio.

Para finalizar la sección, enunciamos el teorema de Riemann-Roch que es fundamental en la teoría de Superficies de Riemann. Para esto, introducimos la siguiente notación. Sea $D = \{p_1, \dots, p_k\} \subset S$, notamos $H^0(D)$ al conjunto de funciones meromorfas con polos en D . Se cumple que $H^0(D)$ es un espacio vectorial de dimensión finita. Por otro lado, $H^0(D - K)$ es el conjunto de 1-formas diferenciales holomorfas complejas con ceros en D . Éstas son de la forma $\theta_1 + \theta_2 i$ y en cartas, las podemos escribir como $f(z)dz$ donde f es una función holomorfa y $dz = dx + idy$.

TEOREMA 2. (*Teorema de Riemann-Roch*) *Sea S superficie de Riemann compacta de género g y $D \subset S$, $\#D = d$. Entonces,*

$$\dim(H^0(D)) - \dim(H^0(D - K)) = d - g + 1.$$

3. Automorfismos del plano complejo, la esfera y el disco

Hasta ahora hemos visto ejemplos de superficies de Riemann construidas a partir de la necesidad de definir ciertas funciones; resultaron ser la esfera y el toro. Un resultado de topología algebraica nos afirma que toda superficie de Riemann conexa será un cociente de una superficie de Riemann simplemente conexa por la acción de un subgrupo discreto de automorfismos. Comenzamos entonces presentando algunos ejemplos básicos de superficies simplemente conexas:

1. El ejemplo más simple: el plano complejo $\mathbb{C}$ con el atlas trivial.
2. Un ejemplo un poco más interesante es el disco $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ o el semiplano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$. Estos conjuntos son equivalentes como superficies de Riemann, y un biholomorfismo posible entre ellos está dado por $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}, z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$. De hecho, cualquier otro abierto simplemente conexo del plano complejo, diferente de $\mathbb{C}$, es biholomorfo al disco unitario.
3. La esfera de Riemann S^2 que también podemos pensar, como vimos anteriormente, como el proyectivo $\mathbb{CP}^1$. Este es un ejemplo de superficie de Riemann compacta que apareció en los ejemplos de la introducción. Sabemos que la esfera es el conjunto

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Entonces, si consideramos los abiertos $S^2 \setminus N$ y $S^2 \setminus S$ donde $N = (0, 0, 1)$ y $S = (0, 0, -1)$ son el polo norte y el polo sur respectivamente, tenemos un atlas dado por las proyecciones estereográficas

$$\varphi_N : S^2 \setminus N \rightarrow \mathbb{C}, P(x, y, z) = \frac{x + iy}{1 - z}$$

$$\varphi_S : S^2 \setminus S \rightarrow \mathbb{C}, P(x, y, z) = \frac{x - iy}{1 + z}$$

Notar que se verifica la ecuación $\varphi_N(P) = 1/\varphi_S(P)$, si $P \in S^2$. Esta última es una función holomorfa en $\mathbb{C}^*$ por lo tanto, tenemos un cambio de cartas biholomorfo lo que otorga a S^2 una estructura de superficie de Riemann que notaremos $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$.

El llamado teorema de Uniformización (7) nos asegura que cualquier otra superficie de Riemann simplemente conexa es equivalente a una de las anteriores y de hecho, los ejemplos anteriores no son dos a dos biholomorfos: observar que si existiera $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorfa, entonces necesariamente debería ser constante y por lo tanto, no biyectiva. La no equivalencia entre $\hat{\mathbb{C}}$ y $\mathbb{C}$ es clara dado que la primera superficie es compacta.

Por lo tanto, si queremos seguir encontrando ejemplos interesantes, tiene sentido considerar cocientes de las superficies mencionadas. Para hacer esto, tenemos que tener cierto cuidado. No todos los cocientes de superficies por grupos nos darán superficies con la estructura que buscamos; en efecto, tendremos que considerar el, ya mencionado,

grupo de automorfismos de estas superficies. A continuación listamos dichos grupos para cada uno de los ejemplos anteriores.

1. En $\hat{\mathbb{C}}$ sabemos que las funciones meromorfas son racionales $\frac{P(z)}{Q(z)}$. Si alguno de los polinomios tiene grado mayor a 1, entonces la función no es inyectiva. Por lo tanto, los automorfismos de $\hat{\mathbb{C}}$ están dados por

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ donde } ad - bc \neq 0$$

Además, el mapa

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

es un homeomorfismo sobreyectivo desde $GL(2, \mathbb{C})$ en $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ y dos matrices A, B tienen la misma imagen si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $A = \lambda B$. Por lo tanto, podemos definir este mapa en el cociente $PSL(2, \mathbb{C}) = GL(2, \mathbb{C}) / \sim$ donde $A \sim B$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $A = \lambda B$ y obtenemos un isomorfismo entre $PSL(2, \mathbb{C})$ y $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$.

2. En $\mathbb{C}$ tenemos que todo elemento $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ se debe extender a una función holomorfa f de $\hat{\mathbb{C}}$ en $\hat{\mathbb{C}}$ tal que $f(\infty) = \infty$. Entonces, usando la parte anterior, concluimos que $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ si y solo si es de la forma

$$f(z) = az + b$$

donde $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$.

3. Por último, buscamos los automorfismos del semiplano superior $\mathbb{H}$. Cualquier $f \in \text{Aut}(\mathbb{H})$, si pensamos a $\mathbb{H}$ como un subconjunto de $\hat{\mathbb{C}}$, deberá ser la restricción de un automorfismo de la esfera al semiplano. Es decir, deberá ser la restricción a $\mathbb{H}$ de una función de la forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc \neq 0$$

pues debe fijar el eje real y enviar $\mathbb{H}$ sobre sí mismo. Tenemos entonces que $\text{Aut}(\mathbb{H}) \cong PSL(2, \mathbb{R})$.

En el último caso, afirmamos que cualquier automorfismo de $\mathbb{H}$ debe ser la restricción de un elemento de $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$. Discutamos entonces esta afirmación. Sabemos que tenemos un biholomorfismo que vincula $\mathbb{H}$ con $\mathbb{D}$, que además, se extiende a un biholomorfismo de $\hat{\mathbb{C}}$, por lo tanto, alcanza con hacer la prueba para $\mathbb{D}$ la cual se basa en el lema de Schwartz que enunciamos a continuación

LEMA 3. *Si f es un mapa holomorfo del disco $\mathbb{D}$ en sí mismo, entonces $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $|f'(0)| \leq 1$. Además, si existe $z \in \mathbb{D}$ tal que $|f(z)| = |z|$ o $|f'(0)| = 1$, entonces $f(z) = az$ con $|a| = 1$*

Teniendo en cuenta este resultado, continuemos con el razonamiento. Sea $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. Como el grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa transitivamente en $\mathbb{H}$, es decir, fijados cualquier par de puntos, existe un elemento del grupo que envía uno en el otro, tenemos que componiendo f con un automorfismo h asociado a este grupo, obtenemos un nuevo automorfismo $g = h \circ f$ de $\mathbb{D}$ que fija el 0. Es decir, podemos asumir que nuestro automorfismo f fija el origen de $\mathbb{D}$. Por el lema de Schwartz, tenemos que $g'(0)$ debe tener módulo 1 pues en caso contrario, g^{-1} sería un mapa holomorfo en el disco y su derivada en 0 tendría módulo mayor a 1, lo cual contradice el lema. Concluimos entonces que $g(z) = az$ donde $|a| = 1$ que se extiende a un automorfismo G de $\hat{\mathbb{C}}$. Además, h se extiende naturalmente a $H \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, por lo que f se extiende a $\hat{\mathbb{C}}$ como $F = H^{-1} \circ G$.

4. Una forma de construir funciones holomorfas

Nuestro objetivo ahora es la construcción de funciones holomorfas entre superficies de Riemann; en particular, funciones meromorfas, es decir, donde el codominio es $\hat{\mathbb{C}}$. Vemos a continuación una posible forma de proceder para el caso en que el dominio es una región simplemente conexa $U \subset \mathbb{C}$. En el siguiente capítulo, veremos cómo este ejemplo nos ayudará a construir funciones meromorfas desde los toros obtenidos como cocientes de $\mathbb{C}$ por un látice.

Consideramos entonces $U \subset \mathbb{C}$ nuestra región simplemente conexa y una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ que podemos escribir de la forma

$$f = f_1 + if_2$$

con $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Cauchy-Riemann nos afirman que las derivadas de esta función deben cumplir la siguiente relación en todo punto de U

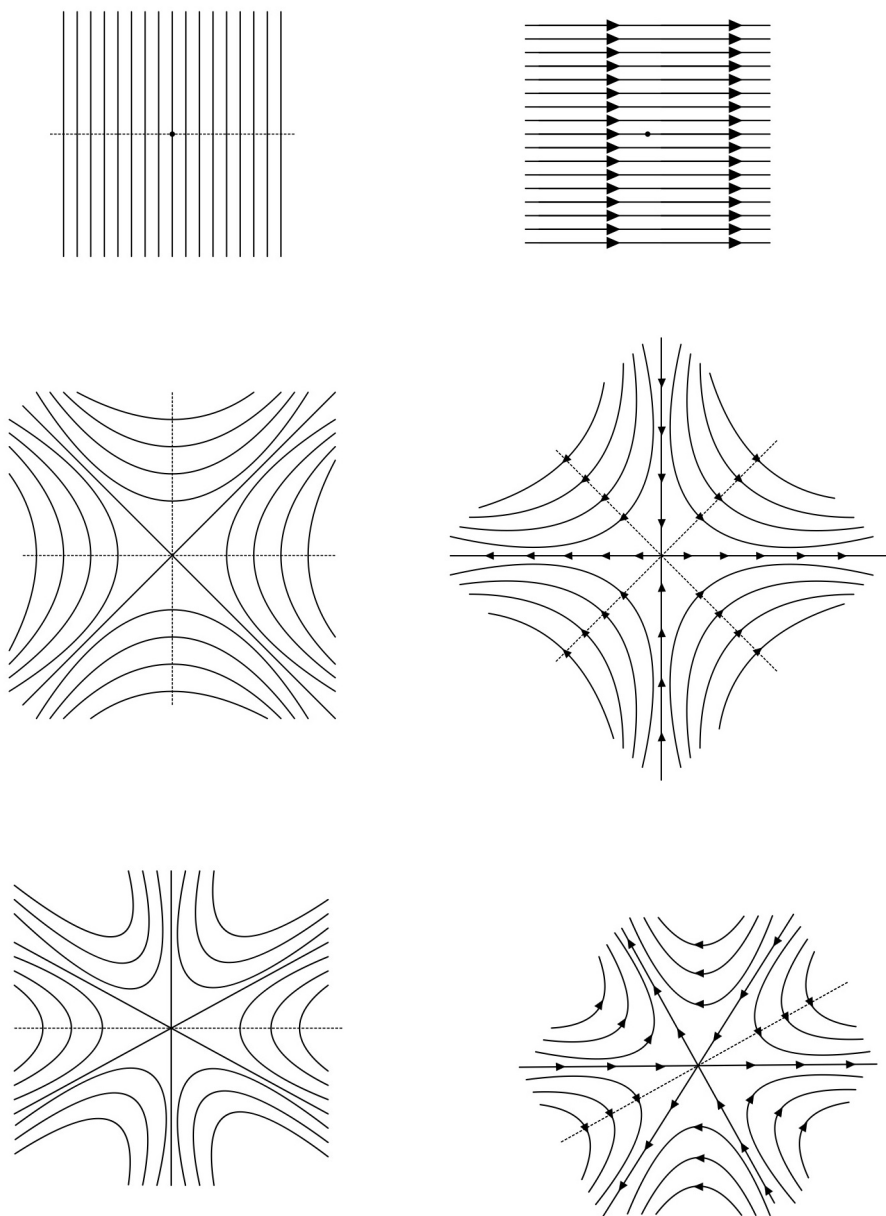
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f_1 &= -\frac{\partial}{\partial y} f_2 \\ \frac{\partial}{\partial y} f_1 &= \frac{\partial}{\partial x} f_2 \end{aligned}$$

Geométricamente, esto significa que en todo punto de U , el gradiente ∇f_1 de f_1 debe ser una rotación de 90 grados en sentido antihorario del gradiente ∇f_2 de f_2 . De hecho, Cauchy-Riemann nos afirma también lo que sería el recíproco, es decir, que construir una función holomorfa f es equivalente a construir dos $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$ que sean C^1 y cumplan las ecuaciones anteriores.

Por lo tanto, para construir $f = f_1 + if_2$ buscaremos dos campos gradientes X_1, X_2 tales que en cada punto, X_1 sea el campo X_2 rotado 90 grados en sentido antihorario. Dado que consideramos U simplemente conexo, pedir que un campo sea *gradiente* es equivalente a pedir que sea *irrotacional*, es decir $\nabla X_1 = \nabla X_2 = 0$. En resumen, estamos buscando un campo irrotacional cuyo rotado también sea irrotacional.

Este problema no es sencillo, de hecho, generalmente al rotar un campo irrotacional, no obtenemos uno irrotacional. Un ejemplo simple donde esto falla, surge de considerar el campo radial en $\mathbb{R}^2$. Éste es irrotacional, sin embargo, al rotarlo 90 grados, obtenemos el campo tangente a círculos centrados en el origen que falla en ser irrotacional.

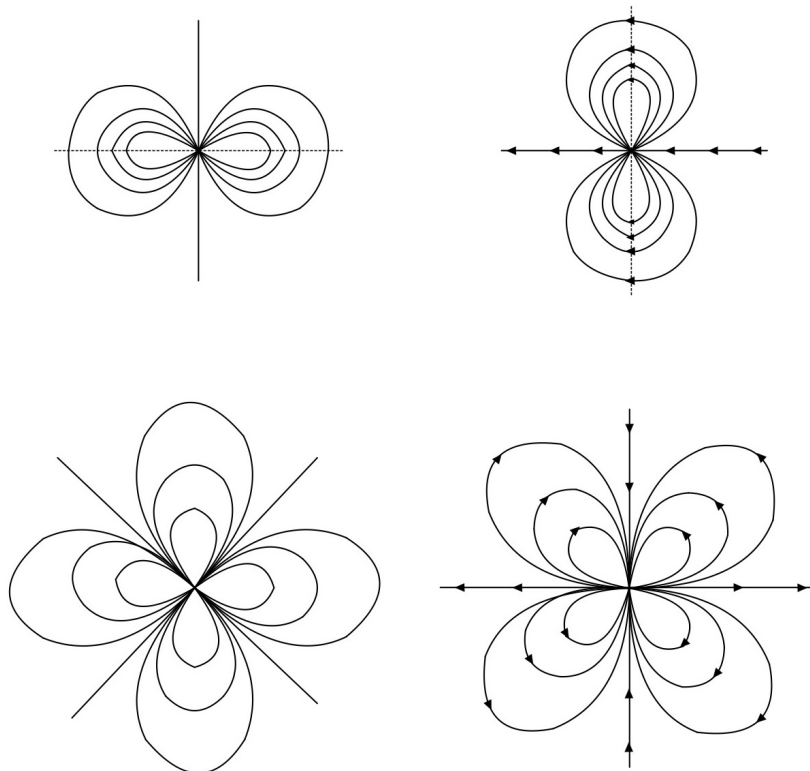
Para visualizar este tipo de campos, consideramos las funciones holomorfas z , z^2 , z^3 y dibujamos a continuación sus curvas de nivel y los campos gradientes de sus partes reales



Se puede concluir que en general, las curvas de nivel de la parte real de z^n tendrán n ejes de simetría y por lo tanto también cumplirán esto sus campos. Entre estos ejes, se encontrarán curvas como las dibujadas anteriormente que se acercan a los ejes a medida

que se alejan del origen.

Además, las funciones meromorfas interesantes desde cualquier superficie compacta, como por ejemplo el toro, deberán tener polos pues en caso contrario, serían funciones constantes. Dibujamos entonces las partes reales de $\frac{1}{z}$ y $\frac{1}{z^2}$ y sus correspondientes gradientes.



Como en los casos z, z^2, z^3 , podemos generalizar los dibujos para las funciones $\frac{1}{z^n}$ donde aparecerán $2n$ pétalos. Notamos, entonces, que las inversiones, resultan del caso polinomial estudiado cerca de infinito en la esfera de Riemann.

Por último, observamos que los campos X que buscamos, no solo deben ser irrotacionales, sino que a consecuencia de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, deben ser incompresibles, es decir, $\text{div} X = 0$. Por lo tanto, las funciones f_1, f_2 deben ser armónicas, es decir, sus laplacianos $\Delta f_1, \Delta f_2$ deben ser cero. Esta última condición nos da la razón por la cual el campo radial no cumple la condición que queremos, ya que no tiene divergencia nula. Si consideramos un campo $X = (X_1, X_2)$ que es el rotado del campo $Y = (Y_1, Y_2)$ que es irrotacional e incompresible. Entonces debe cumplirse que $X = (-Y_2, Y_1)$ y por lo tanto, $\text{rot}(X) = \text{div}(Y) = 0$. Concluimos entonces que la construcción de funciones holomorfas en U es equivalente a la construcción de campos irrotacionales e incompresibles.

CAPÍTULO 3

El caso elíptico de las superficies de Riemann

1. Espacio de Moduli

En el capítulo 1, a partir del estudio de los ceros de un polinomio, logramos la construcción de un ejemplo de una superficie de Riemann que resultó ser un toro. Veremos a continuación otra forma de construir toros holomorfos a partir de láti- ces en el plano complejo. Llamamos *látice* a todo conjunto de la forma $\{aw_1 + bw_2 : a, b \in \mathbb{Z}\}$ donde $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ son tales que $\frac{w_2}{w_1} \in \mathbb{H}$. Si Λ es el *látice* generado por w_1 y w_2 , denotamos S_Λ al espacio cociente de $\mathbb{C}$ por la relación de equivalencia $x \sim y$ sii $x - y \in \Lambda$. En este caso, se cumple que S_Λ es una superficie topológica que corresponde al toro y además tiene estructura de superficie de Riemann donde las cartas están dadas por las proyecciones al cociente.

Fijemos dos *láti- ces*: Λ_0 el *látice* generado por 1 e i y Λ_1 el generado por 2 e i . Vamos a probar por contradicción, que $S_0 = S_{\Lambda_0}$ y $S_1 = S_{\Lambda_1}$ no son equivalentes como superficies de Riemann a pesar de serlo topológicamente. Supongamos que existe un biholomorfismo $f : S_0 \rightarrow S_1$ y llamemos $q_0 : \mathbb{C} \rightarrow S_0$ y $q_1 : \mathbb{C} \rightarrow S_1$ los mapas cociente. Estos son mapas de cubrimiento, por lo tanto, la teoría de cubrimientos y levantamientos nos asegura la existencia de una familia de mapas F que levantan el mapa f , es decir, que verifican el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \\ \downarrow q_0 & & \downarrow q_1 \\ S_{\Delta_0} & \xrightarrow{f} & S_{\Delta_1} \end{array}$$

donde $f \circ q_0 = q_1 \circ F$.

Dado que estos mapas están localmente definidos a través de f y los mapas cociente, también son holomorfos y además admiten una inversa holomorfa por ser f invertible. Es decir, los mapas F son biholomorfismos con dominio y codominio $\mathbb{C}$ y forman lo que se conoce como el grupo de automorfismos de $\mathbb{C}$ que denotamos $Aut(\mathbb{C})$ y son todos de la forma

$$F(z) = az + b$$

como mencionamos en el capítulo anterior.

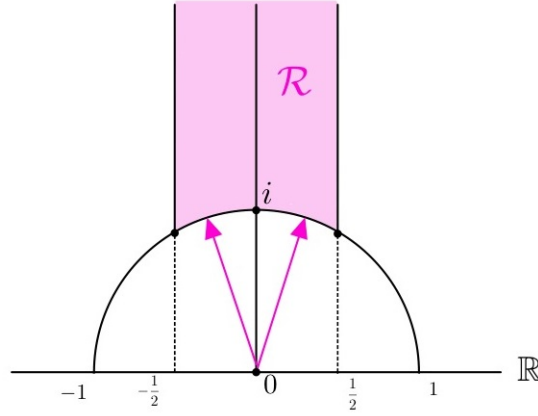
Por otro lado, como el levantamiento F satisface el diagrama de arriba, tenemos que $F(\Lambda_0)$ debe ser un látice trasladado de la forma $\Lambda_1 + w$. Para el látice Λ_0 , tenemos que $1, i, -1$ y $-i$ son los elementos más cercanos al 0 , todos a distancia 1 . De hecho, para cualquier otro elemento $a \in \Lambda_0$, existen cuatro elementos de Λ_0 a distancia 1 de a que son $a + 1, a - 1, a + i$ y $a - i$. Sin embargo, el látice $\Lambda_1 + w$ cumple que alrededor de todo punto existen exactamente dos elementos a distancia mínima de éste: si $b \in \Lambda_1 + w$ entonces, los puntos más cercanos a b son $b + i$ y $b - i$. Esto nos lleva a una contradicción pues una función del tipo $F(z) = az + b$ es una rotohomotecia seguida de una traslación, por lo que debe preservar la cantidad de puntos más cercanos a cierto punto de un látice. Es decir, $F(\Lambda_0)$ debe tener en todo punto x , exactamente cuatro puntos de $F(\Lambda_0)$ a distancia mínima (en este caso a distancia $|a|$). Por lo tanto, $F(\Lambda_0) \neq \Lambda_1$ y concluimos que S_0 y S_1 no pueden ser equivalentes como superficies de Riemann.

Existen, de todos modos, casos en los que los látices son distintos pero los cocientes son equivalentes. Alcanza con tomar el látice generado por 1 e i y el generado por 2 y $2i$.

Tiene sentido preguntarse cuántas superficies de Riemann podemos obtener a partir del cociente del plano por látices, o en qué casos estos cocientes nos dan superficies equivalentes. El espacio de todas las posibles estructuras holomorfas sobre una superficie de cierto tipo topológico es lo que se conoce como el *Espacio de Moduli* o *Espacio de módulos*. A continuación estudiaremos el espacio de las estructuras complejas obtenidas a partir de cocientar el plano por un látice, admitiendo que todo toro complejo se puede obtener con la construcción anterior.

Las superficies de Riemann con las que estamos trabajando, provienen de látices Λ que, como vimos antes, generan superficies equivalentes si y solo si $F(\Lambda_0) = \Lambda_1$ donde F es una rotohomotecia seguida de una traslación. Por lo tanto, el espacio que estamos estudiando es el del conjunto de posibles látices módulo composición de rotohomotecias y traslaciones, es decir, dos látices serán equivalentes si se corresponden por una transformación de este tipo. Surge de esto que distintas superficies de Riemann dadas por estos cocientes están uno a uno identificadas con el espacio de látices cocientado por la relación $\Lambda_0 \sim \Lambda_1$ si existe $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de la forma $F(z) = az + b$ tal que $F(\Lambda_0) = \Lambda_1$. Notaremos a éste cociente por $\mathcal{L}/\sim$.

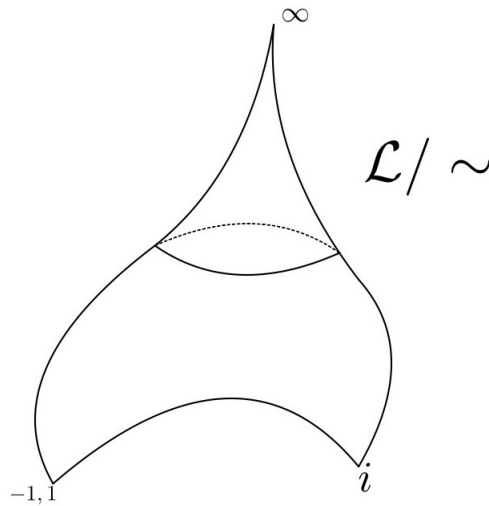
Dentro de una clase de equivalencia, podemos considerar siempre que uno de los elementos que minimiza su distancia al cero es el $1 \in \mathbb{C}$. Luego, el siguiente elemento que minimiza esta distancia se puede considerar fuera del disco unidad y contenido en la banda $\{-\frac{1}{2} \leq \text{Im}(z) \leq \frac{1}{2}\}$ y asumir que vive en el semiplano superior que denotamos $\mathbb{H}$. A esta región la llamamos $\mathcal{R}$ y la representamos en la siguiente figura



Por cada punto de ella, tenemos un representante de cualquier látice y obtenemos un mapa

$$z \in \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{L} / \sim$$

En el interior de esta región, el mapa es 1 a 1. Resta ver qué pasa en los bordes. En las semirrectas $\{\frac{1}{2} + ai\}_{a \geq 0}$ y $\{-\frac{1}{2} + ai\}_{a \geq 0}$ tenemos la identificación punto a punto $\frac{1}{2} + ai \sim -\frac{1}{2} + ai$. Además, en el arco $\{z = a + bi : |z| = 1, -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}, b \geq 0\}$, los elementos simétricos respecto del eje imaginario generan la misma clase en $\mathcal{L} / \sim$. Podemos ver esto de la siguiente forma. Sean w y w' simétricos con respecto del eje imaginario y supongamos que $Re(w) > 0$. Entonces existe una función $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de la forma $F(z) = az$, $a \in \mathbb{C}$, es decir, una rotación, que lleva w en -1 y 1 en w' . Claramente el látice generado por $-1, w'$ es igual al generado por $1, w'$. Obtenemos que el espacio $\mathcal{L} / \sim$ se puede representar con el siguiente dibujo



Notar que su compactificación por un punto es la esfera. Además, $\mathcal{L}/\sim$ admite una estructura compleja salvo en los puntos correspondientes a $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, i, \infty$, es decir, sacando estos puntos, el espacio es una superficie de Riemann

Tomemos ahora un látice $\Lambda \in \mathcal{L}$. Vimos anteriormente que a partir de una roto-homotecia R podemos transformarlo para que 1 minimice la distancia al cero y luego buscamos el elemento más cercano dentro de la banda $-\frac{1}{2} \leq \text{Im}(z) \leq \frac{1}{2}$ en $\mathbb{H}$. A éste último elemento lo llamamos w y caracteriza a la superficie obtenida del cociente. Dicho elemento, junto con 0 y 1 forma un paralelogramo que es un dominio fundamental de nuestro cociente: tiene los bordes identificados y en el interior, el mapa cociente es 1 a 1, por lo que el proyectado cubre todo el toro. Es decir, la superficie de Riemann que obtenemos, queda caracterizada por el elemento w mencionado. Si volvemos al látice original, tenemos que el dominio fundamental del mismo, estará dado por $R^{-1}(P)$. Como una R es simplemente una multiplicación por un número complejo, tenemos que dos látices Λ, Λ' inducen la misma superficie de Riemann si existen $w_1, w_2 \in \Lambda$ y $w'_1, w'_2 \in \Lambda'$ tales que $0, w_1, w_2$ genera un dominio fundamental de S_Λ y $0, w'_1, w'_2$ genera un dominio fundamental de $S_{\Lambda'}$ y se cumple que

$$w'_1 = \lambda w_1, w'_2 = \lambda w_2$$

para algún $\lambda \in \mathbb{C}$. Lo cual se traduce a que S_Λ es equivalente a $S_{\Lambda'}$ si y solo si existen w_1, w_2, w'_1, w'_2 tales que

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{w'_1}{w'_2}$$

Es decir, lo que clasifica a la superficie S_Λ es el módulo $\frac{w_1}{w_2} \in \mathbb{C}$.

2. Identificación de superficies de Riemann con curvas algebraicas

En la sección anterior, vimos que el mismo tipo de topología puede admitir varias estructuras complejas. Esto nos llevó al estudio del espacio de Módulos para un caso particular, pero esto se puede generalizar a distintos espacios topológicos, lo cual es un problema central de la matemática moderna.

Un resultado conjeturado por Riemann y más adelante probado (por quién?) nos garantiza que toda superficie de Riemann compacta se relaciona con una curva algebraica, lo cual nos da cierto control sobre las posibles estructuras complejas de la superficie.

TEOREMA 3. *Sea S una superficie de Riemann compacta. Entonces existen conjuntos finitos $T_0 \subset S$ y $T_1 \subset \mathbb{C}$, una función $F : S \setminus T_0 \rightarrow \mathbb{C} \setminus T_1 \times \mathbb{C} \setminus T_1$ biholomorfa sobre su imagen y un polinomio $P(z, w)$ tal que la imagen de F coincide con el conjunto $\{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : P(z, w) = 0\} \setminus T_1 \times T_1$.*

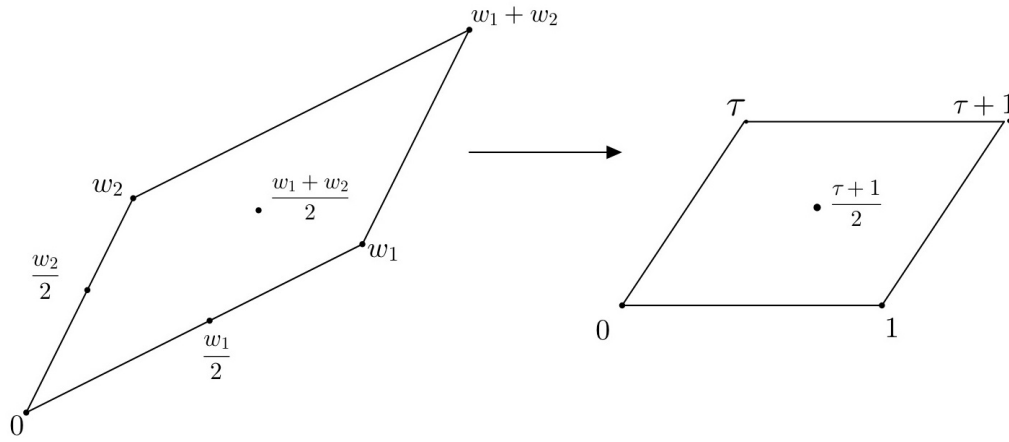
DEMOSTRACIÓN. Haciendo uso del Teorema de Riemann-Roch, enunciado en el capítulo 3, tenemos que existe una función $f_1 : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ holomorfa tal que $f^{-1}(z) = \{P_1(z, \cdot), \dots, P_d(z, \cdot)\}$ donde z es un valor regular de f . $\square$

3. Funciones elípticas

En esta sección estudiamos las funciones meromorfas en superficies de Riemann de género 1. Como ya mencionamos, a partir del Teorema de uniformización, tenemos que todo toro complejo puede pensarse como uno de la forma $\mathbb{C}/L$ donde $L \subset \mathbb{C}$ es un látice.

Por definición, una función es holomorfa en un abierto $U \subset \mathbb{C}/L$ si y solo si $f \circ \pi$ es holomorfa en $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}$ donde $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/L$ es la proyección sobre el cociente.

Si $L = \{aw_1 + bw_2 : a, b \in \mathbb{Z}\}$ con $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, consideramos el dominio fundamental formado por $0, w_1$ y w_2 con los bordes identificados. Notar que dividir por w_1 lleva el paralelogramo inicial en el determinado por 1 y τ donde $\tau = w_2/w_1 \notin \mathbb{R}$.



Le llamamos T a la superficie de Riemann obtenida del cociente $\mathbb{C}/L$. Funciones en T corresponden a funciones doblemente periódicas en $\mathbb{C}$, es decir, funciones que satisfacen

$$f(u + w_1) = f(u + w_2) = f(u)$$

para todo $u \in \mathbb{C}$.

Como vimos en el capítulo 2, sección 3, usando el teorema de Liouville, tenemos que cualquier función holomorfa en $\mathbb{C}/L$ es constante, pues es acotada. Por lo tanto, para obtener ejemplos interesantes, debemos permitir la existencia de polos.

DEFINICIÓN 5. *Una función elíptica es una función meromorfa doblemente periódica en $\mathbb{C}$.*

Es decir, las funciones elípticas son funciones meromorfas en un toro $\mathbb{C}/L$. Para describir estas funciones, comenzamos con algunas generalidades.

TEOREMA 4. Sea f una función elíptica no constante y sean $z_1, \dots, z_n$ y $p_1, \dots, p_m$ los ceros y polos de f en el paralelogramo, contados con multiplicidad. Entonces:

1. $m = n$
2. $\sum_{k=1}^m \text{Res}_{p_k}(f) = 0$
3. $\sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k=1}^m p_k \pmod{L}$

DEMOSTRACIÓN. Observar que podemos asumir que no tenemos ceros en el borde del paralelogramo pues simplemente moviéndolo por un número complejo λ y las relaciones 2 y 3 no cambian. Tenemos, entonces, lo siguiente

1. Si llamamos n_c a la cantidad de ceros de la función y n_p a la cantidad de polos, el principio de variación del argumento para funciones meromorfas dice que

$$\oint_C \frac{f'(u)}{f(u)} du = \oint_C d \log(f) = 2\pi i \times (n_c - n_p)$$

donde ambas cantidades son las encerradas dentro del contorno. Tomando C como el borde del paralelogramo, los integrandos en lados opuestos se cancelan por periodicidad, y obtenemos (1).

2. La fórmula de Cauchy nos dice que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(u) du = \sum_p \text{Res}_p(f)$$

donde la suma se toma sobre todos los polos dentro del contorno. Nuevamente, se cancelan los lados opuestos y obtenemos (2)

3. Consideremos ahora

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C u \frac{f'(u)}{f(u)} du$$

Usando de nuevo integrales sobre el contorno del paralelogramo, la expresión de arriba da

$$\sum_{k=1}^n z_k - \sum_{k=1}^m p_k$$

que no es cero pues los lados opuestos ya no se cancelan. Lo que obtenemos al comparar los lados opuestos es

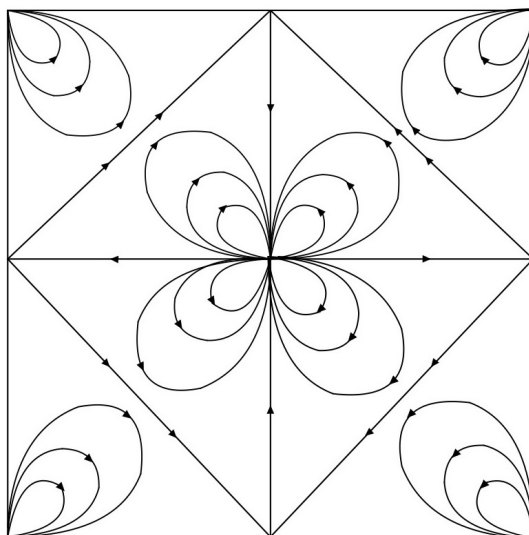
$$\begin{aligned} \int_0^{w_1} u \frac{f'(u)}{f(u)} du + \int_{w_1+w_2}^{w_2} u \frac{f'(u)}{f(u)} du &= \int_0^{w_1} u \frac{f'(u)}{f(u)} du - \int_0^{w_1} (u + w_2) \frac{f'(u)}{f(u)} du = \\ &= -w_2 \int_0^{w_1} \frac{f'(u)}{f(u)} du = -w_2 (\log(f(w_1)) - \log(f(0))) \neq 0 \end{aligned}$$

La expresión falla en ser 0 pues $\log$ es una función multivaluada. De hecho, $\log(f(w_1)) - \log(f(0))$ puede ser cualquier múltiplo entero de $2\pi i$. Lo que concluimos es que la diferencia es un elemento del látice.

□

Antes de pasar a la siguiente sección, recordamos nuestra forma de construir funciones holomorfas del capítulo anterior. Para conseguir funciones holomorfas definidas en regiones del plano, escritas de la forma $f = f_1 + if_2$, habíamos visto que era necesario conseguir dos campos gradientes X_1, X_2 de modo que en cada punto, X_1 fuera el rotado de X_2 . Nuestro problema ahora, es que en superficies no simplemente conexas, ya no vale el lema de Poincaré y por lo tanto, los campos irrotacionales, no necesariamente se integran a funciones. Además de esto, no tenemos una definición clara de los conceptos de campos *irrotacionales* e *incompresibles* en superficies de Riemann. Esto se debe a que estos conceptos se corresponden con cuestiones geométricas y hasta ahora, no hemos considerado nuestras superficies como objetos geométricos. Sin embargo, se puede equipar a toda superficie de Riemann con una métrica que sea compatible con la estructura compleja y por lo tanto, multiplicar por i resulta en una rotación de noventa grados en esta métrica, con lo cual resolvemos el último problema.

Pasemos ahora al primer problema: en una superficie de Riemann, no toda forma cerrada, que corresponde a un campo irrotacional, es exacta. Comencemos con el caso de un toro $\mathbb{C}/\Lambda$ donde Λ es un látice. Como mencionamos anteriormente, las funciones meromorfas en este espacio, corresponden a funciones elípticas en $\mathbb{C}$. Si consideramos $f : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ elíptica, esta función tendrá un conjunto discreto P de polos que es Λ -invariante. En el complemento de P la función será holomorfa. El problema es que como $\mathbb{C} \setminus P$ no es simplemente conexo, no podemos construir $f|_{\mathbb{C} \setminus P}$ a partir de los campos que son irrotacionales e incompresibles. Trabajamos con el caso más simple donde el látice es el generado por 1 e i y D , su dominio fundamental, es el cuadrado unidad. Buscamos entonces construir una función meromorfa en el toro cociente. Necesitamos entonces colocar en el dominio fundamental sin el conjunto de polos, un campo de vectores que sea irrotacional e incompresible, pero además, que sea gradiente y pueda extenderse periódicamente a $\mathbb{C} \setminus P$. A partir de los dibujos hechos para los casos del capítulo anterior, podemos concluir el siguiente dibujo donde no podemos esperar que el campo esté definido en $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ni en los puntos $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$



Podríamos preguntarnos por qué no buscamos un ejemplo donde haya un único polo simple en vez de dos polos dobles y la razón es que de ser así, el grado del mapa sería uno y tendríamos un biholomorfismo entre el toro y la esfera lo cual contradice la diferencia topológica entre estos espacios.

4. La función $\wp$ de Weierstrass

Pasemos ahora a ver un ejemplo fundamental de función elíptica. Consideramos un látice $L = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 \subset \mathbb{C}$ tal que $w_1, w_2 \neq 0$ y $w_2/w_1 \in \mathbb{H}$. Sabemos que una función elíptica no puede tener un único polo simple en el paralelogramo, por lo tanto, el ejemplo más sencillo es considerar una función con un polo doble en $u = 0$. Esto nos lleva a la función $\wp$ de Weierstrass. Notamos $L^* = L \setminus \{0\}$.

DEFINICIÓN 6. La función $\wp$ de Weierstrass está dada por

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{w \in L^*} \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$

TEOREMA 5. La expresión de arriba converge a una función elíptica. Además la convergencia es uniforme en cualquier compacto $K \subset \mathbb{C}$ una vez dejados de lado los polos en K .

DEMOSTRACIÓN. Sea $K \subset \mathbb{C}$ un compacto del plano complejo. Dentro de K solo pueden haber finitos términos con polos. Si el resto de los términos convergen, usando el teorema de Morera, tenemos que su suma es holomorfa y por lo tanto la serie completa es meromorfa. Ahora, estimamos los términos de la siguiente forma

$$\left| \frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right| < \frac{|u|^2 + 2|u||w|}{|w|^2|u-w|^2} = \frac{|u|^2}{|w|^2|u-w|^2} + 2\frac{|u|}{|w||u-w|^2}$$

y tenemos que existen $a, b \in \mathbb{R}^+$ tales que $|u-w| > a^{-1}|w|$ y $|u| < b$ para todo $u \in K$ y $w \in L \setminus K$, por lo tanto

$$\left| \frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right| < \frac{a^2 b^2}{|w|^4} + \frac{2a^2 b}{|w|^3}$$

y concluimos que la serie converge.

Para probar la periodicidad, usando que la serie converge, tenemos

$$\begin{aligned} \wp(u + w_1) &= \frac{1}{(u + w_1)^2} + \sum_{w \in L^*} \left[\frac{1}{(u + w_1 - w)^2} - \frac{1}{w^2} \right] = \\ &= \frac{1}{(u + w_1)^2} + \left[\frac{1}{u^2} - \frac{1}{w_1^2} \right] + \sum_{w \in L^*, w \neq w_1} \left[\frac{1}{(u + w_1 - w)^2} - \frac{1}{w^2} \right] = \\ &= \frac{1}{w^2} + \frac{1}{(u + w)^2} - \frac{1}{w_1^2} + \sum_{w \in L^*, w \neq w_1} \left[\frac{1}{(u - w)^2} - \frac{1}{(w + w_1)^2} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{u^2} \left[\frac{1}{(u+w_1)^2} - \frac{1}{w_1^2} \right] + \sum_{w \in L^*, w \neq -w_1} \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right] + \sum_{w \in L^*, w \neq -w_1} \left[\frac{1}{w^2} - \frac{1}{(w+w_1)^2} \right] = \\ \wp(u) + \sum_{w \in L^*, w \neq -w_1} \left[\frac{1}{w^2} - \frac{1}{(w+w_1)^2} \right]. \end{aligned}$$

Pero el último término se anula por simetría y obtenemos la periodicidad. $\square$

COROLARIO 1. *Se cumple que $\wp'(u)$ es una función elíptica con un polo triple en 0 y está dada por la siguiente fórmula*

$$\wp'(u) = -2 \sum_{w \in L} \frac{1}{(u-w)^3}$$

DEMOSTRACIÓN. Dado que la convergencia es uniforme, la serie de $\wp(u)$ puede derivarse término a término y se obtiene el resultado anterior. $\square$

PROPOSICIÓN 9. $\wp'(w_1/2) = \wp'(w_2/2) = \wp'((w_1+w_2)/2) = 0$ son todos ceros simples y no hay otros módulo L .

Una idea gráfica de la demostración de esta proposición es la siguiente: supongamos que queremos calcular $\wp'(w_1/2)$ pues las otras se calculan de forma análoga. La serie, en este punto, queda de la forma

$$\wp'(w_1/2) = -2 \sum_{w \in L} \frac{1}{(w_1/2 - w)^3} = -16 \sum_{w \in L} \frac{1}{(w_1 - 2w)^3} = -16 \sum_{w \in 2L} \frac{1}{(w_1 - w)^3}$$

Pero en este último término, estamos parados sobre un punto del látice y sumando sobre *todo* el látice $2L$, por lo que aparecerán tanto w_1 como $-w_1$, esto dado que la potencia del denominador es impar. Por lo tanto, tenemos que para todos $n, m \in \mathbb{Z}$, $w_1 + 2mw_1 + 2nw_2$ se cancelará con $-w_1 - 2mw_1 - 2nw_2$ y la suma total dará cero como queríamos.

PROPOSICIÓN 10. $\wp$ define un mapa holomorfo de grado 2 de $\mathbb{C}/L$ a $\mathbb{P}^1$; $\wp'$ define uno de grado 3.

Este resultado es claro a partir de las definiciones.

PROPOSICIÓN 11. Sean e_1, e_2, e_3 tales que

$$\wp(w_1/2) = e_1, \wp(w_2/2) = e_2, \wp((w_1+w_2)/2) = e_3$$

es decir, los valores de $\wp$ en los puntos medios del látice. Entonces:

1. Los e_i son todos distintos
2. Para todo $a \in \mathbb{C}, a \neq e_1, e_2, e_3$, la ecuación $\wp(u) = a$ tiene dos raíces simples en el paralelogramo. En e_1, e_2, e_3 , la ecuación tiene una raíz doble.

DEMOSTRACIÓN. Comenzamos demostrando la segunda afirmación. Es claro que en cada uno de estos valores debe haber una o dos raíces. Como una raíz doble es un cero de la derivada, obtenemos 2.

Si por ejemplo, $e_1 = e_2$ entonces $\wp(u) = e_1$ tendríamos que hay cuatro puntos solución de esta ecuación pues los e_i son efectivamente ceros de la derivada como demostramos en la *Proposición 2*. □

PROPOSICIÓN 12. *Se cumple que $\wp : \mathbb{C}/L \rightarrow \mathbb{P}^1$ es un mapa holomorfo de grado 2 con valores de ramificación e_1, e_2, e_3, ∞ .*

Con estas propiedades de $\wp$ probaremos el teorema de Representación Única por partes principales. Para esto, utilizaremos también el siguiente teorema que nos ayudará a describir el cuerpo de funciones meromorfas en $\mathbb{C}/L$.

TEOREMA 6. *Toda función elíptica es una función racional de $\wp$ y $\wp'$. Específicamente, toda función elíptica par es una función racional de $\wp$, toda función elíptica impar es de la forma $\wp' \times R(\wp)$ donde R es una función racional de $\wp$ y toda función elíptica, puede ser expresada de forma única como*

$$f(u) = R_0(\wp(u)) + \wp'(u).R_1(\wp(u))$$

donde R_0, R_1 son funciones racionales y los dos términos de la ecuación son las partes pares e impares de f .

DEMOSTRACIÓN. Alcanza con probar el teorema para funciones elípticas pares pues dividir por $\wp'$ lleva funciones impares a pares. Como mencionamos en la *Proposición 9*, el mapa $\wp : \mathbb{C}/L \rightarrow \mathbb{P}^1$ es holomorfo y de grado 2. Este mapa representa a $\mathbb{P}^1$ como el cociente del toro $\mathbb{C}/L$ bajo la identificación de u con $-u$. Esto se debe a que el mapa es par, por lo que $\wp(u) = \wp(-u)$; estos puntos coinciden en el toro cuando u es uno de los puntos medios del látice pero en esos casos, la fibra de $\wp$ tiene un único punto. Por lo tanto, cualquier mapa par y continuo desde $\mathbb{C}/L \rightarrow \mathbb{P}^1$ es de la forma $R \circ \wp$ para algún mapa continuo $R : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Además, $\wp$ es un isomorfismo analítico local fuera de sus puntos de ramificación, por lo que R debe ser holomorfa allí si $R \circ \wp$ lo fuera. Para terminar de excluir problemas en los puntos excepcionales y concluir la prueba, utilizamos el siguiente resultado. □

PROPOSICIÓN 13. *Sea $f : S \rightarrow R$ un mapa continuo entre superficies de Riemann y supongamos que es holomorfo excepto en puntos aislados. Entonces f es holomorfo en todo su dominio.*

DEMOSTRACIÓN. Eligiendo entornos coordenados alrededor de los puntos problemáticos y sus imágenes, nos reducimos a un resultado conocido: una función continua en $\mathbb{D}$ que es holomorfa en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ es, de hecho, holomorfa en el origen. □

Dado que $\wp'(u)^2$ es una función elíptica par, es posible expresarla en términos de $\wp$. La relación entre ambas funciones se expresa en el siguiente Teorema

TEOREMA 7. (*Ecuación diferencial para $\wp$*) Las funciones $\wp$ y $\wp'$ verifican la siguiente ecuación diferencial:

$$\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3$$

$$\text{donde } g_2 = 60 \sum_{w \in L^*} w^{-4}, \quad g_3 = 140 \sum_{w \in L^*} w^{-6}.$$

DEMOSTRACIÓN. Para simplificar la notación, llamamos $G_r = \sum_{w \in L^*} w^{-r}$. Comenzamos con el siguiente Lema

LEMA 4. (*Expansión de Laurent de la función de Weierstrass*)

$$\wp(u) = u^{-2} + 3G_4(L)u^2 + 4G_6(L)u^4 + \dots$$

$$\wp'(u) = -2u^{-3} + 6G_4(L)u + 20G_6(L)u^3 + \dots$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que

$$(u - w)^{-k} = \frac{(-1)^k}{w^k} \left[1 + k \frac{u}{w} + \frac{k(k+1)}{2!} \frac{u^2}{w^2} + \frac{k(k+1)(k+2)}{w^3} \frac{u^3}{w^3} + \dots \right]$$

es convergente para $|u| < |w|$.

Haciendo la expansión de cada término de la función $\wp$ como antes y teniendo en cuenta que la serie doble converge para valores pequeños de u , observamos que los términos con exponentes impares, se cancelan y obtenemos

$$\wp(u) = u^{-2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{2m} G_{2m+2}(L) u^{2m} \right)$$

De manera análoga, obtenemos

$$\wp'(u) = -2u^{-3} + \sum_{m=0}^{\infty} -2 \left(\frac{-3}{2m+1} G_{2m+4}(L) u^{2m+1} \right)$$

□

Utilizando el lema, vemos que los primeros términos de la expansión de Laurent para $(\wp')^2$ y $4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ en $u = 0$ coinciden, por lo tanto su diferencia es una función elíptica sin polos, y por lo tanto constante, que se anula en $u = 0$. Concluimos entonces que las funciones coinciden. □

TEOREMA 8. (*Representación única por partes principales*) Una función elíptica puede expresarse de manera única, a menos de una constante aditiva, describiendo su parte principal en los polos dentro del paralelogramo que consideramos como dominio fundamental, contando multiplicidades.

DEMOSTRACIÓN. Dadas dos funciones elípticas que comparten polos y partes principales, tomando la resta de ellas, conseguimos una función elíptica sin polos y por lo tanto, utilizando el teorema de Liouville, debe ser constante. □

COROLARIO 2. *El cuerpo de las funciones meromorfas en $\mathbb{C}/L$ es isomorfo a*

$$\mathbb{C}[w]/(w^2 - 4z^3 + g_2z + g_3)$$

la extensión de grado 2 del cuerpo de funciones racionales $\mathbb{C}$ obtenido de agregar las soluciones w de la ecuación $w^2 = 4z^3 - g_2z - g_3$.

4.1. Interpretación geométrica para $\wp$. Teniendo en cuenta la ecuación diferencial para $\wp$, obtenemos el siguiente resultado.

LEMA 5. *Se cumple que $g_2^3 \neq 27g_3^2$ y los puntos e_1, e_2, e_3 son las raíces de la ecuación*

$$4z^3 - g_2z - g_3 = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Alcanza con observar que $\wp'$ se anula en los puntos medios del láctice, mientras que $\wp$ toma los valores e_1, e_2, e_3 en ellos. $\square$

Al valor $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ le llamaremos *discriminante* y será relevante más adelante.

TEOREMA 9. (*Interpretación Geométrica de $\wp$*) *El mapa $\mathbb{C}/L \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^2$ dado por*

$$u \mapsto (z(u), w(u)) = (\wp(u), \wp'(u))$$

es un isomorfismo analítico entre la superficie de Riemann $\mathbb{C}/L \setminus \{\bar{0}\}$ y la superficie de Riemann R correspondiente a la ecuación $w^2 = 4z^3 - g_2z - g_3$ en $\mathbb{C}^2$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}/L \setminus \{0\} & \xrightarrow{(\wp, \wp')} & R \\ & \searrow \wp & \downarrow \pi \\ & & \mathbb{C} \end{array}$$

y además se cumple que

- π es un mapa propio 2 a 1 excepto en los puntos de ramificación e_1, e_2, e_3 que son las raíces de $4z^3 - g_2z - g_3$.
- $\wp$ es un mapa propio 2 a 1 excepto en los puntos medios del láctice $w_1/2, w_2/2, (w_1 + w_2)/2$ a los cuales lleva a e_1, e_2, e_3 .
- $\wp(u) = \wp(-u)$ y $\wp'(u) = -\wp'(-u)$ lo que implica que a menos que u sea un punto medio, $\wp'$ toma ambos valores $\pm w = \pm \wp'(u)$ en dos puntos $\pm u$ que se llevan al mismo punto $z = \wp(u)$ de $\mathbb{C}$.

Con estas tres propiedades, probamos que el mapa $(\wp, \wp')$ construido es biyectivo. Además, no existe $u \in \mathbb{C}/L \setminus \{0\}$ tal que $\wp'(u) = \wp''(u) = 0$ pues $\wp'$ solo tiene ceros simples. Esto significa que para todo $u \in \mathbb{C}/L \setminus \{0\}$, alguno de los mapas $\wp$ o $\wp'$ da un isomorfismo analítico entre un entorno de u y un disco pequeño en el

plano de z o el plano de w .

Como la estructura de superficie de Riemann de R fue definida usando las proyecciones en los planos de z y w , concluimos que $(\wp, \wp')$ da un isomorfismo analítico $\mathbb{C}/L \rightarrow R$. $\square$

4.2. La función elíptica modular J . El teorema de Riemann-Roch implica que toda superficie de Riemann de género 1 cuenta con diferenciales holomorfos no nulos. Combinando esto con lo estudiado anteriormente, obtenemos los siguientes resultados.

TEOREMA 10. *Las clases de isomorfismos entre superficies de Riemann de género 1 están en biyección con los láti- ces en $\mathbb{C}$, módulo reescalar.*

PROPOSICIÓN 14. *El conjunto de láti- ces en $\mathbb{C}$ a menos de reescalar está en biyección con las órbitas de $PSL(2, \mathbb{Z})$ en el plano superior $\mathbb{H} = \{z : \text{Im}(z) > 0\}$, actuando por transformaciones de Möbius. La biyección lleva una base $(2w_1, 2w_2)$ de L al número $\tau = \pm w_2/w_1$, donde el signo se ajusta para que $\text{Im}(\tau) > 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Como ya hemos mencionado, podemos reescalar el látice para que uno de los períodos sea 1, por lo tanto, toda la información se encuentra en τ . Esto implica una elección de una base de L y cualquier otra base difiere de w_1, w_2 por la acción de $PGL(2, \mathbb{Z})$. Esto enviaría a τ a un transformado de Möbius de τ adecuado. La condición $\text{Im}(\tau) > 0$ reduce nuestro grupo a $PSL(2, \mathbb{Z})$. $\square$

Se cumple que un *dominio fundamental* para la acción de $SL(2, \mathbb{Z})$ en $\mathbb{H}$ consiste de la porción de la franja $-\frac{1}{2} \leq \text{Re}(z) \leq \frac{1}{2}$ que se encuentra fuera del círculo unidad. El mapa $\tau \mapsto \tau + 1$ identifica ambos lados de la franja, mientras que $\tau \mapsto -1/\tau$ identifica los arcos de circunferencia por reflexión. El resultado de esta identificación es un espacio topológico homeomorfo a $\mathbb{C}$.

DEFINICIÓN 7. *La función elíptica modular $J : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ envía $\tau \in \mathbb{H}$ a $g_2^3/(g_2^3 - 27g_3^2) \in \mathbb{C}$, donde g_2, g_3 son los coeficientes correspondientes a la función cúbica asociada al látice representado por τ .*

Utilizaremos esta función y sus propiedades para resolver el *problema de la inversión de las series de Eisenstein*. Hasta ahora, la teoría elíptica de Weierstrass nos permite, dado un látice $\Lambda = w_1\mathbb{Z} + w_2\mathbb{Z}$, determinar los invariantes g_2, g_3 dados por las siguientes ecuaciones

$$g_2 = g_2(w_1, w_2) = 60 \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(nw_1 + mw_2)^4}$$

$$g_3 = g_3(w_1, w_2) = 140 \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(nw_1 + mw_2)^6}$$

Buscamos ahora resolver el problema inverso, es decir, conociendo los invariantes g_2, g_3 , encontrar los períodos w_1, w_2 del látice. El siguiente teorema proporciona una solución a este problema.

TEOREMA 11. *Dados dos números complejos a_2 y a_3 tales que $a_2^3 \neq 27a_3^2$, existen dos números complejos w_1, w_2 tales que $w_2/w_1 \in \mathbb{H}$ y*

$$g_2(w_1, w_2) = a_2 \text{ y } g_3(w_1, w_2) = a_3$$

DEMOSTRACIÓN. Separaremos la demostración en los siguientes casos:

1. $a_2 = 0$
2. $a_3 = 0$
3. $a_2a_3 \neq 0$

Comencemos por el primer caso. Como $a_2 = 0$, dado que $a_2^3 \neq 27a_3^2$, tenemos que $a_3 \neq 0$. Sea $w_1 \in \mathbb{C}$ tal que

$$w_1^6 = \frac{g_3(1, \rho)}{a_3}$$

donde $\rho = e^{2\pi i/3}$, g_3 es el invariante asociado al látice determinado por $1, \rho$ y sea $w_2 = \rho w_1$. Tenemos que $g_3(1, \rho) \neq 0$ pues $g_2(1, \rho) = 0$. Para ver esto, observamos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{60}g_2(1, \rho) &= \sum_{m,n} \frac{1}{(m+n)^4} = \sum_{m,n} \frac{1}{(m\rho^3 + n\rho)^4} = \frac{1}{\rho} \sum_{m,n} \frac{1}{(n - m - m\rho)^4} = \\ &= \frac{1}{\rho} \sum_{M,N} \frac{1}{(N + M\rho)^4} = \frac{1}{60\rho}g_2(1, \rho) \end{aligned}$$

y $\Delta(1, \rho) = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} g_2(w_1, w_2) &= g_2(w_1, w_1\rho) = \frac{1}{w_1^4}g_2(1, \rho) = 0 = a_2 \\ g_3(w_1, w_2) &= g_3(w_1, w_1\rho) = \frac{1}{w_1^6}g_3(1, \rho) = a_3 \end{aligned}$$

Para el segundo caso, como $a_3 = 0$, tenemos que $a_2 \neq 0$. Tomamos w_1 tal que

$$w_1^4 = \frac{g_2(1, i)}{a_2}$$

y $w_2 = iw_1$. A partir de un cálculo similar al anterior, obtenemos que $g_3(1, i) = 0$ y por lo tanto, $g_2(1, i) \neq 0$. Se cumplen entonces las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} g_2(w_1, w_2) &= g_2(w_1, iw_1) = \frac{1}{w_1^4}g_2(1, i) = a_2 \\ g_3(w_1, w_2) &= g_3(w_1, iw_1) = \frac{1}{w_1^6}g_3(1, i) = 0 = a_3 \end{aligned}$$

Por último, si $a_2a_3 \neq 0$, tomamos $\tau \in \mathbb{H}$ tal que

$$J(\tau) = \frac{a_2^3}{a_2^3 - 27a_3^2}$$

Notamos que $J(\tau) \neq 0$ y

$$\frac{J(\tau) - 1}{J(\tau)} = \frac{27a_3^2}{a_2^3}$$

Ahora, para este τ , tomamos w_1 de modo que se cumpla la siguiente relación

$$w_1^2 = \frac{a_2}{a_3} \cdot \frac{g_3(1, \tau)}{g_2(1, \tau)}$$

y sea $w_2 = \tau w_1$. Entonces, tenemos que

$$\frac{g_2(w_1, w_2)}{g_3(w_1, w_2)} = \frac{w_1^{-4} g_2(1, \tau)}{w_1^{-6} g_3(1, \tau)} = w_1^2 \frac{g_2(1, \tau)}{g_3(1, \tau)} = \frac{a_2}{a_3}$$

y por lo tanto,

$$(1) \quad g_3(w_1, w_2) = \frac{a_3}{a_2} g_2(w_1, w_2)$$

Por otro lado, tenemos que

$$(2) \quad \frac{J(\tau) - 1}{J(\tau)} = \frac{27g_3^2(w_1, w_2)}{g_2^3(w_1, w_2)} = \frac{27(a_3/a_2)^2 g_2^2(w_1, w_2)}{g_2^3(w_1, w_2)} = \frac{27a_3^2}{a_2^2 g_2(w_1, w_2)}$$

Comparando (1) y (2), concluimos que $g_2(w_1, w_2) = a_2$ y por lo tanto, de (2), tenemos que $g_3(w_1, w_2) = a_3$. $\square$

De la biyección entre los pares (g_1, g_2) y los láti-ces de $\mathbb{C}$, obtenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 12. *J es holomorfa, invariante bajo la acción de $PSL(2, \mathbb{Z})$ y lleva las órbitas de $SL(2, \mathbb{Z})$ en $\mathbb{H}$ biyectivamente sobre $\mathbb{C}$*

En otras palabras, el cociente $\mathbb{H}/SL(2, \mathbb{Z})$ hereda la estructura de una superficie de Riemann y J establece un isomorfismo analítico entre esta superficie y $\mathbb{C}$.

CAPÍTULO 4

Interpretación dinámica de la función de Rademacher

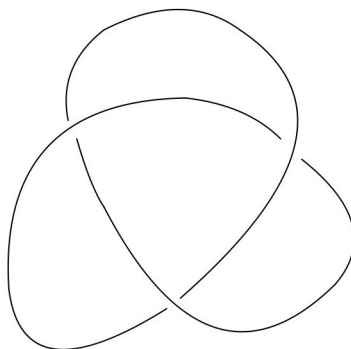
En este capítulo estudiaremos el flujo geodésico modular en la superficie modular y a partir de él, relacionaremos invariantes dinámicos con funciones clásicas de la teoría de nudos, específicamente, en S^3 .

1. Nudos y Linking Number

DEFINICIÓN 8. *Un nudo es un encaje del círculo S^1 en el espacio $\mathbb{R}^3$. También puede pensarse como un encaje en la esfera S^3 ya que éste es compacto.*

Decimos que dos nudos son equivalentes si existe una isotopía entre ellos

Un nudo importante que aparecerá más adelante en este capítulo es el *trébol*, en inglés *trefoil knot*, que notaremos l y se ve como en la siguiente figura.



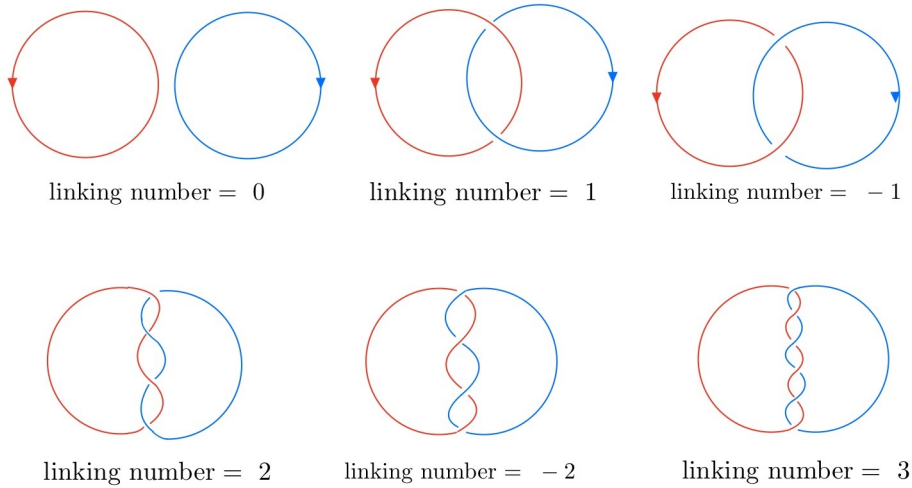
El trébol es en el ejemplo más simple de un nudo no trivial. Con esto nos referimos a que no es posible "desatar" un nudo trébol en tres dimensiones sin cortarlo. Formalmente, esto significa que, si llamamos *nudo trivial* o *no-nudo* a una circunferencia geométrica canónica encajada en S^3 , entonces el trébol no es isotópico al nudo trivial. Para probar este resultado, se necesita un invariante numérico que distinga a ambos nudos. El más simple de ellos es la *tricoloración*. Se le llama *tricoloreabilidad* a la propiedad de un nudo de ser coloreado de tres colores distintos siguiendo ciertas reglas. Esta propiedad es un invariante isotópico y es por esto que nos sirve para distinguir el trébol del nudo trivial.

Una posible descripción del trébol es a partir del siguiente sistema de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \sin(t) + 2\sin(2t) \\ y = \cos(t) - 2\cos(2t) \\ z = -\sin(3t) \end{cases}$$

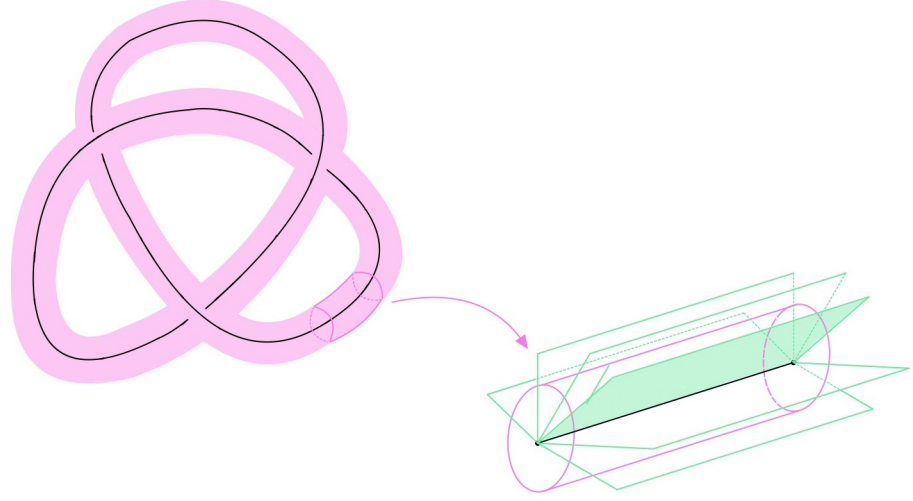
Antes de comenzar con la parte dinámica, definimos un invariante numérico que será relevante más adelante y relaciona nudos distintos.

PROPOSICIÓN 15. *Dos curvas cerradas en el espacio, pueden ser continuamente deformadas para llevarse a exactamente una de las siguientes posiciones estándar que determinan el linking number*

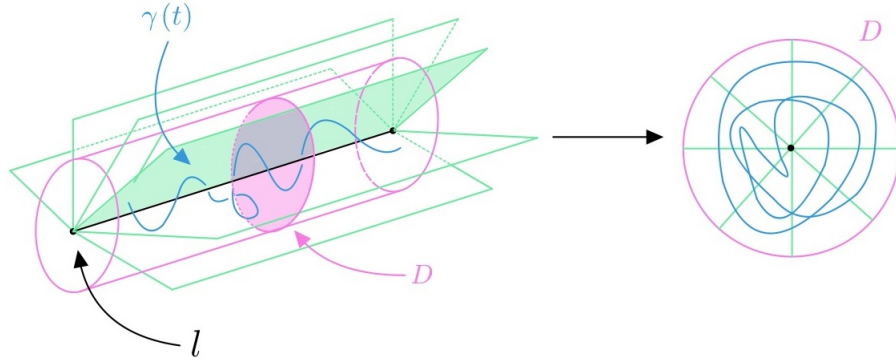


Intuitivamente, el linking number representa la cantidad de veces que un nudo *envuelve* al otro. Este número siempre será entero.

El trébol es un nudo fibrado, es decir, su complemento en S^3 es un fibrado sobre el círculo S^1 . Notar que otra forma de ver al trébol es como el conjunto de pares $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ tales que $|z|^2 + |w|^2 = 1$ y $z^2 + w^3 = 0$. Por lo tanto, el fibrado tiene al mapa de Milnor (4), dado por $\phi(z, w) = (z^2 + w^3)/|z^2 + w^3|$, como la proyección del complemento del nudo $S^3 \setminus l$ sobre el círculo S^1 . Las fibras de este mapa son toros pinchados y se pegan al nudo trébol como en la siguiente figura



Esto permite mostrar que el linking number entre l y $\gamma(t)$ en S^3 , que notaremos $link(l, \gamma(t))$ coincide con $VarArg(\Delta(\gamma(t)))$. Una forma de ver esto es considerar un nudo $\gamma(t)$ en S^3 que envuelva a l y un entorno tubular de l como en la figura anterior. Podemos llevar al nudo γ al entorno tubular y considerar un disco D de dicho entorno. En él, las fibras del mapa de Milnor se ven como segmentos desde el centro del disco, que es un punto de l , hasta el borde. Si luego llevamos γ a D , sin tocar l , como se muestra en la siguiente figura, vemos que la curva obtenida da cierta cantidad de vueltas al centro del disco. Esa cantidad, es la variación del argumento y a su vez, el linking number entre ambos nudos.



2. El Flujo Geodésico en $PSL(2, \mathbb{R})$

DEFINICIÓN 9. Definimos los grupos $SL(2, \mathbb{R})$ y $PSL(2, \mathbb{R})$ de la siguiente manera:

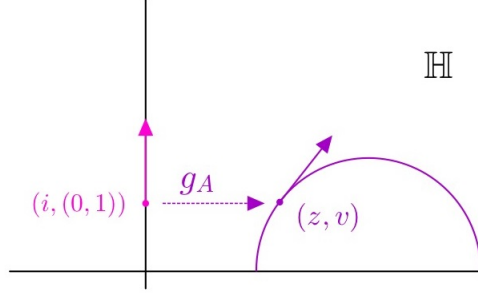
- $SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc = 1 \right\}$
- $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}) / \{\pm I\}$

Si consideramos $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$, entonces tenemos una acción de $PSL(2, \mathbb{R})$ en $\mathbb{H}$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto g_A \in \text{Mob}(\mathbb{H})$$

de modo que, dado $z \in \mathbb{H}$, $A.z = g_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Por otro lado, observamos que $PSL(2, \mathbb{R}) \cong T^1\mathbb{H}$ pues, considerando $p \in \mathbb{H}$ y $v \in \mathbb{R}^2$ de módulo 1, existe una única matriz $A \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que $g_A(i) = p$ y $d_i g_A(0, 1) = v$. Es decir, tenemos una correspondencia biyectiva entre los puntos vectores $(p, v) \in T^1\mathbb{H}$ y las matrices $A \in PSL(2, \mathbb{R})$.



Lo que buscamos ahora es conocer el flujo geodésico en el tangente unitario a $\mathbb{H}$. Para esto, utilizaremos la observación anterior de la siguiente forma. Notamos $[A]$ a la clase de equivalencia de $A \in SL(2, \mathbb{R})$ en $PSL(2, \mathbb{R})$ y definimos el flujo ϕ_t en este último espacio como

$$\phi_t[A] = \left[A \cdot \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \right]$$

donde la matriz A es algún representante de $[A]$.

Esto induce un flujo en $T^1\mathbb{H}$, que notamos ψ_t . Si consideramos la matriz $B = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$ como antes, su transformación de Möbius asociada es $g_B(z) = \frac{e^{t/2}z}{e^{-t/2}} = e^t z$.

El flujo ψ_t cumple que

- $\psi_t(i, (0, 1)) = (g_A(i), d_i g_A(0, 1)) = (e^t i, e^t(0, 1))$ que es la geodésica por $(i, (0, 1))$.
- Dado $(z, v) \in T^1\mathbb{H}$ y $A_{z,v}$ la matriz tal que $g_{A_{z,v}}(i) = z$ y $d_i g_{A_{z,v}}(0, 1) = v$, llamamos $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ a la geodésica por $(i, (0, 1))$. Tenemos que $\psi_t(z, v) = \psi_t(g_{A_{z,v}}(i), d_i g_{A_{z,v}}(0, 1)) = (g_{A_{z,v}}(\gamma(t)), d_i g_{A_{z,v}}(\dot{\gamma}(t)))$ que es la geodésica por (z, v) .

Básicamente estamos diciendo que comenzar en el punto vector (z, v) y movernos a través de la geodésica por éste un tiempo t , nos da el mismo punto vector que comenzar en $(i, (0, 1))$, movernos por su geodésica un tiempo t y luego aplicarle $A_{z,v}$. Concluimos entonces que ψ es el flujo geodésico en $T^1\mathbb{H}$.

3. Homeomorfismo entre $PSL(2, \mathbb{Z})/PSL(2, \mathbb{R})$ y $S^3 \setminus l$

En el capítulo anterior, mostramos que a un látice $\Lambda = w_1\mathbb{Z} + w_2\mathbb{Z}$, $w_2/w_1 \in \mathbb{H}$, le podemos asociar un par $(g_2(\Lambda), g_3(\Lambda)) \in \mathbb{C}^2$ tal que

$$g_2(\Lambda) = 60 \sum_{w \in \Lambda \setminus 0} w^{-4} \text{ y } g_3(\Lambda) = 140 \sum_{w \in \Lambda \setminus 0} w^{-6}$$

donde además, se cumple que $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$.

El recíproco también vale, es decir, si consideramos un par $(g_2, g_3) \in \mathbb{C}^2$ tal que $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, (1) entonces existe un único látice tal que $(g_2, g_3) = (g_2(\Lambda), g_3(\Lambda))$.

Por otro lado, llamándole $\mathcal{L}$ al espacio de látices, tenemos una acción natural de $PSL(2, \mathbb{R})$ en $\mathcal{L}$, definida de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (w_1\mathbb{Z} + w_2\mathbb{Z}) = (cw_2 + dw_1)\mathbb{Z} + (aw_2 + bw_1)\mathbb{Z}$$

y $(aw_2 + bw_1)/(cw_2 + dw_1) \in \mathbb{H}$.

El estabilizador de esta acción para cualquier punto es $PSL(2, \mathbb{Z})$. Tenemos que si $A \in PSL(2, \mathbb{Z})$, $B \in PSL(2, \mathbb{R})$, entonces, $A.B(\Lambda) = B(\Lambda)$ y por lo tanto, $PSL(2, \mathbb{Z})/PSL(2, \mathbb{R}) \cong \mathcal{L}$. De esta forma, para cada $[A]$ en este cociente, tenemos $g_2[A], g_3[A]$ que vienen de su látice asociado y por lo tanto $g_2[A]^3 \neq 27g_3[A]^2$.

Además, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(g_2[\lambda A], g_3[\lambda A]) \in S^3 \setminus l$. Por lo que obtenemos que esta transformación induce un homeomorfismo $H : PSL(2, \mathbb{Z})/PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow S^3 \setminus l$.

4. Flujo en $PSL(2, \mathbb{Z})/PSL(2, \mathbb{R})$

Consideremos ahora $B \in PSL(2, \mathbb{R})$ y $A \in PSL(2, \mathbb{Z})$. Se cumple que $\phi_t(BA) = BA \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} = B\phi_t(A)$. Es decir, el flujo baja al cociente $PSL(2, \mathbb{Z})/PSL(2, \mathbb{R})$. Llamamos $\overline{\phi}_t$ al flujo en el cociente.

Si ahora consideramos $B \in PSL(2, \mathbb{Z})/PSL(2, \mathbb{R})$ un elemento periódico de $\overline{\phi}_t$, esto significa que existe T tal que $\phi_T(B) = AB$ donde $A \in PSL(2, \mathbb{Z})$. Es decir, B es periódico de período T si y solo si existe $A \in PSL(2, \mathbb{Z})$ tal que $B \begin{pmatrix} e^{T/2} & 0 \\ 0 & e^{-T/2} \end{pmatrix} = AB$, o sea, si y solo si $\begin{pmatrix} e^{T/2} & 0 \\ 0 & e^{-T/2} \end{pmatrix} = B^{-1}AB$. Esto es lo mismo que decir que:

1. B conjug a una matriz hiperbólica $A \in PSL(2, \mathbb{Z})$ con su diagonal.
2. B manda la base canónica en la base de vectores propios de $A \in PSL(2, \mathbb{Z})$.

Si consideramos el flujo en $S^3 \setminus l$ obtenido por $H(\overline{\phi}_t)$ que también llamamos $\overline{\phi}_t$ y una órbita periódica $\gamma(t)$ de éste, dicha órbita es un nudo en $S^3 \setminus l$ por lo que podemos estudiar el linking number entre $\gamma(t)$ y l que notamos $link(\gamma(t), l)$.

5. Linking numbers

Como vimos en el capítulo 3, dado un nudo $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^3 \setminus l$, se cumple que $link(\gamma(t), l) = Var Arg(\Delta(\gamma(t)))$ donde $\Delta(z, w) = z^3 - 27w^2$.

Si consideramos $\gamma(t)$ una órbita del periódica de período T del flujo $\overline{\phi}_t$, tenemos que $\gamma(t) = \overline{\phi}_t(H([B]))$ donde $H : PSL(2, \mathbb{Z})/PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow S^3 \setminus l$ es el homeomorfismo que definimos antes. Por lo tanto, tomando un representante en $PSL(2, \mathbb{R})$ de B , se cumple que

$$\phi_t(B) = AB$$

donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z})$.

Si ahora consideramos el látice definido por los períodos $w_1 = B(1, 0)$ y $w_2 = B(0, 1)$, entonces, aplicando ϕ_t a B , podemos entender esto como una curva cerrada de látices $\mathbb{Z}\phi_t(B)(1, 0) + \mathbb{Z}\phi_t(B)(0, 1)$. Es decir, cada uno de estos látices, tiene como base a los elementos

$$w_1(t) = \phi_t(B)(1, 0) = B \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} (1, 0)$$

$$w_2(t) = \phi_t(B)(0, 1) = B \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} (0, 1)$$

Como B es un elemento de período T , se cumple que

$$w_2(T) = \phi_T(B)(0, 1) = AB(0, 1) = aw_1 + bw_2$$

$$w_1(T) = \phi_T(B)(1, 0) = AB(1, 0) = cw_1 + dw_2$$

Si $\gamma_B^*(t) = H(\gamma_B(t))$ donde $\gamma_B(t)$ es la órbita de $B \in PSL(2, \mathbb{Z})/PSL(2, \mathbb{R})$, tenemos que

$$link(\gamma_B^*(t), l) = Var Arg(\Delta(w_1(t), w_2(t))) , t \in [0, T]$$

6. Funciones de Dedekind y Rademacher

Lo que buscamos ahora es relacionar el $link(\gamma(t), l)$ donde γ es una órbita periódica de $\overline{\phi}$, con un invariante aritmético clásico. Para esto, comenzamos definiendo la función de *Dedekind*.

DEFINICIÓN 10. La función η de Dedekind es una función modular dada por

$$\eta(\tau) = e^{i\pi\tau} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2i\pi n\tau})$$

Esta función se define para $\text{Im}(\tau) > 0$ y es una de las más famosas y estudiadas en matemática. Su potencia 24 es una forma modular de peso 12, esto significa que cumple la siguiente ecuación

$$\eta^{24} \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d} \right) = \eta^{24}(\tau)(c\tau + d)^{12}$$

para toda matriz $A \in PSL(2, \mathbb{Z})$.

Como η no se anula pues $\text{Im}(b) > 0$, tenemos una determinación holomorfa de $\log \eta$ definida en el semiplano superior $\mathbb{H}$. Tomando logaritmo de ambos lados, obtenemos la siguiente ecuación

$$24 \log \left(\eta \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d} \right) \right) = 24 \log(\eta(\tau)) + 6 \log(-(c\tau + d)^2) + 2\pi i \Re(A, \tau)$$

para alguna función $\Re(A, \tau)$. Tomando el segundo logaritmo del lado de la derecha de la ecuación de forma que su argumento esté en el intervalo $(-\pi, \pi)$ y para los otros dos, permitimos cualquier elección, tenemos que la función $\Re(A, \tau)$ toma valores enteros pues corrige el error del argumento para que se cumpla la igualdad. Además, dado que no depende del valor de τ tenemos que $\Re(A, \tau) = \Re(A)$ y concluimos que $\Re : PSL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$. A esta función se la conoce como *función de Radamacher*.

7. Teoría de números y dinámica

La identidad de Jacobi (1) nos dice que

$$\Delta(w_1, w_2) = (2\pi)^{12} w^{-12} \eta(w_2/w_1)^{24}$$

Tomando VarArg de ambos lados, tenemos que

$$\text{VarArg}(\Delta(w_1(t), w_2(t))) = -12 \text{VarArg}(w_1(t)) + \frac{24}{2\pi} \text{Im} \left[\log \left(\eta \left(\frac{w_2(T)}{w_1(T)} \right) \right) - \log \left(\frac{w_2}{w_1} \right) \right]$$

Por un lado, el segundo término del lado de la derecha de la igualdad, teniendo en cuenta lo visto en la sección 5 y llamando $\tau = \frac{w_2}{w_1}$, queda

$$\begin{aligned} \frac{24}{2\pi} \text{Im} \left[\log \left(\eta \left(\frac{aw_2 + bw_1}{cw_2 + dw_1} \right) \right) - \log \left(\frac{w_2}{w_1} \right) \right] &= \frac{24}{2\pi} \text{Im} \left[\log \left(\eta \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d} \right) \right) - \log(\tau) \right] \\ &= \frac{6}{2\pi} \text{Im} \left[\log \left(- \left(c \frac{w_2}{w_1} + d \right)^2 \right) \right] + \Re(A) \end{aligned}$$

donde el logaritmo lo elegimos de modo que su argumento esté en el intervalo (π, π) .

Por otro lado, el primer término queda de la forma

$$\begin{aligned}
-12VarArg(w_1(t)) &= -12 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left[\log \left(- \left(\frac{w_2(T)}{w_1(T)} \right)^2 \right) \right] \right) = \\
&\quad -12 \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left[\log \left(- \frac{(cw_1 + dw_2)}{w_1} \right) \right]
\end{aligned}$$

Sumando ambos términos, concluimos que

$$VarArg(\Delta(w_1(t), w_2(t))) = \Re(A)$$

Es decir, $link(\gamma_B^*(t), l) = \Re(A)$ y conseguimos relacionar un concepto importante de teoría de números con el linking number de las órbitas periódicas en $S^3 \setminus l$, que es un concepto puramente dinámico.

Bibliografía

- [1] Apostol, T.M., *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*. Grad. Texts in Math.41, Springer-Verlag, New York 1976.
- [2] Étienne Ghys, *Knots and dynamics*.
- [3] C. Teleman, *Riemann Surfaces*, 2003.
- [4] John W. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, *Annals of Mathematics Studies*, No. 61. Princeton University Press, Princeton, NJ; University of Tokyo Press, Tokyo 1968.
- [5] Notas *Superficies de Riemann*, A. Passeggi, 2021.
- [6] Colin C. Adams, *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*, 1994.
- [7] S.K. Donaldson, *Riemann Surfaces*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, 2011.