Trabajo Monográfico

Regularidad elíptica

Por: Jonathan Acuña
Orientador: Martin Reiris

Licenciatura en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Uruguay

Jonathan Acuña

7 de marzo de 2023

Resumen

En el presente trabajo se estudia en profundidad los operadores pseudo-diferenciales definidos sobre un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Se concluye con la prueba del resultado central de la monografía: el Teorema de Regularidad elíptica. Éste relaciona el comportamiento de las ecuaciones pseudo-diferenciales elípticas sobre los espacios de Sobolev con el comportamiento de su solución.

Palabras clave: Espacio de Schwartz, Espacios de Sobolev, Operadores diferenciales, Símbolo, Operadores pseudo-diferenciales, Núcleo distribucional, Propiamente soportado, Expansión asintótica, Amplitud, Elíptico, Parametriz.

Abstract

In the present work, we study in depth the pseudo-differential operators defined on an open subset of $\mathbb{R}^n$. It concludes with the proof of the central result of the monograph: the Elliptic Regularity Theorem. It relates the behavior of elliptic pseudo-differential equations over Sobolev spaces to the behavior of their solution.

Keywords: Schwartz Space, Sobolev Spaces, Differential operators, Symbol, Pseudo-differential operators, Distribution kernel, Properly supported, Asymptotic expansion, Amplitude, Elliptic, Parametrix.

Índice general

Introducción

Los operadores diferenciales son operadores localmente de la forma,

$$Pu(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha\left(x\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} u\left(x\right)$$

done $a_\alpha\left(x\right)$ es una función matricial, $u(x)$ una función vectorial (reales o complejas) y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{Z}^+)^n$. Una clase particular y relevante de operadores diferenciales y el objeto central de esta monografía, son los operadores elípticos que se definen por la condición:

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \text{ es invertible } \forall \xi \neq 0,$$

donde $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_n^{\alpha_n}$. El arquetipo de operador elíptico es el Laplaciano en $\mathbb{R}^n$, definido como la suma de las derivadas parciales de segundo orden no mixtas, es decir,

$$\Delta u(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}(x).$$

El Laplaciano deriva su nombre del matemático francés Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827) quien aplicó por primera vez el operador al estudio de la Mecánica Celeste. Se utiliza con frecuencia en diversas ramas de la Física como Electrostática, Mecánica de Medios Continuos, Mecánica Cuántica y Termodinámica. Puede definirse también sobre una variedad Riemanniana M como,

$$\Delta_g u(x) = \sum_{j,k=1}^{n} g^{jk}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{1}{\sqrt{|g(x)|}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sqrt{|g(x)|}g^{jk}(x)\right)\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}$$

siendo g la métrica de M, $\left(g^{jk}(x)\right)_{j,k} = (g_{jk}(x))_{j,k}^{-1}$ y, $|g(x)| = \det(g_{jk}(x))$.

Una pregunta importante que se suele estudiar es la regularidad de las soluciones de las ecuaciones no homogéneas como,

$$\Delta u = f$$

dependiendo de la regularidad de la fuente o término no homogéneo f. El objetivo de este trabajo será probar el *Teorema de Regularidad Elíptica* en $\mathbb{R}^n$ que establece que si P es elíptico y $u(x)$ es solución a $Pu = f$, entonces $u(x)$ posee tantas derivadas débiles más que f como el orden de P. En particular, las soluciones de $\Delta u = f$ poseen dos derivadas débiles más que f y cuando f es suave entonces u también lo será.

En el Capítulo 1 se comienza con una breve introducción a los Espacios de Sobolev en $\mathbb{R}^n$ ya que son los espacios adecuados para trabajar con ecuaciones pseudo-diferenciales. Luego, en el Capítulo 2, se comienza estudiando los operadores diferenciales y la noción de símbolo para luego rápidamente generalizarlos a operadores pseudo-diferenciales. Se introduce el núcleo distribucional de un operador y la noción de conjunto propio. Se define operadores pseudo-diferenciales propiamente soportados como aquellos en los cuales el soporte de su núcleo distribucional es un conjunto propio. A continuación, nos centramos en el estudio de los operadores pseudo-diferenciales propiamente soportados y vemos como estos satisfacen buenas propiedades, entre las más destacadas, la composición de dos operadores pseudo-diferenciales propiamente soportados es otro operador pseudo-diferencial propiamente soportado y, todo operador pseudo-diferencial es equivalente a un operador pseudo-diferencial propiamente soportado. Por último, definimos operadores pseudo-diferenciales elípticos y probamos que son invertibles módulo operadores de orden infinito, esto nos permitirá probar la regularidad de las soluciones de las ecuaciones pseudo-diferenciales elípticas.

La Teoría de operadores pseudo-diferenciales fue iniciada alrededor de 1964 por Kohn (1932) y Nirenberg (1925-2020) aunque tiene sus raíces en trabajos anteriores en la teoría de integrales singulares y el análisis de Fourier. Posteriormente fue mejorada y ampliada por varios autores, entre los más destacados Hörmander (1931–2012). Se ha convertido en una de las herramientas esenciales en la teoría moderna de ecuaciones diferenciales ya que ofrece una forma poderosa y flexible de aplicar las técnicas de Fourier al estudio de operadores de coeficientes variables y singularidades de distribuciones.

Los resultados de este trabajo se pueden extender a variedades compactas para obtener que todo operador diferencial elíptico sobre una variedad compacta es invertible módulo operadores compactos, lo cual es equivalente a decir que es un operador de Fredholm. Los operadores de Fredholm entre espacios de Banach son los que satisfacen que su imagen es un conjunto cerrado y, la dimensión de su kernel y co-kernel son finitas. Esto permite a cada operador de Fredholm asociarle un número entero llamado índice analítico dado por la diferencia entre la dimensión del kernel y la dimensión del co-kernel. En 1963 Michael Atiyah (1929-2019) e Isadore Singer (1924-2021) probaron el *Teorema del índice* el cual establece que el índice analítico de un operador pseudo-diferencial elíptico sobre una variedad compacta es igual al índice topológico de la variedad. En consecuencia, el índice analítico depende solamente de las propiedades topológicas de la variedad.

Capítulo 1

Preliminares

Comenzaremos introduciendo algunas notaciones y definiciones que nos acompañarán a lo largo de todo el trabajo.

1.1 Conceptos Básicos

Dada $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ una n-ulpa de números enteros no negativos la cual llamaremos *multi-índice*, denotamos

$$|\alpha| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k, \quad \alpha! = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k!,$$

$$D^\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^{|\alpha|}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdot ... \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}, \text{ con } i^2 = -1.$$

Decimos que $\alpha \leq \beta$ si y solamente si $\alpha_k \leq \beta_k$ para todo k. Es claro que $\alpha \leq \beta$ implica $|\alpha| \leq |\beta|$. Observar que D es una especie de "abreviatura" de $\frac{1}{2\pi i}\partial$.

Para cada $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ denotamos

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n}.$$

Además, si $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_p) \in \mathbb{C}^p$ y $\eta = (\eta_1, ..., \eta_p) \in \mathbb{C}^p$ denotamos,

$$\zeta \cdot \eta = \sum_{k=1}^{p} \zeta_k \eta_k. \tag{1.1}$$

Observamos lo siguiente: para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ dado $k \in \{1, ..., n\}$ se tiene que

$$\xi_k^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 = |\xi|^2. \tag{1.2}$$

Por lo tanto, $|\xi^\alpha|^2 \leq |\xi|^{2|\alpha|}$. De donde concluimos que,

$$|\xi^\alpha|^2 \leq |\xi|^{2|\alpha|} \leq (1 + |\xi|)^{2|\alpha|}. \tag{1.3}$$

Sea s un entero positivo. Entonces, existen constantes c_1 y c_2 tales que

$$c_1(1 + |\xi|)^{2s} \leq 1 + |\xi|^2 + \dots + |\xi|^{2s} \leq c_2(1 + |\xi|)^{2s}. \tag{1.4}$$

En efecto, por la desigualdad de Hölder

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.5}$$

valida para todos $p, q \in (1; +\infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, con $p = q = 2$ obtenemos

$$\begin{aligned}(1+|\xi|)^{2s} &\leq \left(2^{\frac{1}{2}}\,(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}\right)^{2s}\\ &= 2^s\,(1+|\xi|^2)^s\\ &= 2^s\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}|\xi|^{2k}\\ &\leq 2^{2s}\sum_{k=0}^{s}|\xi|^{2k}. \end{aligned}\tag{1.6}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}(1+|\xi|)^{2s} &= \sum_{k=0}^{2s}\binom{2s}{k}|\xi|^{k}\\ &\geq \sum_{j=0}^{s}\binom{2s}{2j}|\xi|^{2j}\\ &\geq \sum_{j=0}^{s}|\xi|^{2j}.\end{aligned}$$

Observación 1.1. Para cada $N > 0$ entero existe una constante $d_N > 0$ tal que

$$(1+|\eta|)^N \leq d_N \sum_{|\lambda|\leq N}\eta^{2\lambda}\tag{1.7}$$

para todo $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Observar que

$$\begin{aligned}(1+|\eta|)^N &= \sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}|\eta|^j\\ &\leq \left[\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}^2\right]^{1/2}\left[\sum_{j=0}^{N}|\eta|^{2j}\right]^{1/2} \quad \text{(por (1.5))}\\ &= \left[\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}^2\right]^{1/2}\left[\sum_{j=0}^{N}\left(\sum_{k=1}^{n}\eta_k^2\right)^j\right]^{1/2}\\ &= \left[\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}^2\right]^{1/2}\left[\sum_{j=0}^{N}\sum_{|\lambda|=j}\frac{j!}{\lambda!}\eta^{2\lambda}\right]^{1/2}.\end{aligned}$$

Entonces como $(1+|\eta|)^N \geq 1$ elevando ambos lados al cuadrado se tiene que

$$\begin{aligned}(1+|\eta|)^N &\leq (1+|\eta|)^{2N}\\ &\leq \left[\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}^2\right]\left[\sum_{j=0}^{N}\sum_{|\lambda|=j}\frac{j!}{\lambda!}\eta^{2\lambda}\right]\\ &\leq \sum_{|\lambda|\leq N} d_N\eta^{2\lambda}\end{aligned}$$

siendo

$$d_N = \left[\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}^2\right]\text{máx}\left\{\frac{j!}{\lambda!}\;\middle|\; j\in\{0,\ldots,N\}\ \text{y}\ |\lambda| = j\right\}.$$

□

A lo largo de este trabajo asumiremos que las funciones con las que trabajamos tienen su imagen en $\mathbb{C}^p$ para algún p entero no negativo.

Definición 1.2. *Para cada entero $k \geq 0$, definimos el espacio*

$$C^k(\mathbb{R}^n) = \{u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^p \mid D^\alpha u \in C(\mathbb{R}^n) \text{ para todo } |\alpha| \leq k\}.$$

Este espacio tiene como subespacio

$$C_b^k(\mathbb{R}^n) = \{u \in C^k(\mathbb{R}^n) \mid \|D^\alpha u\|_\infty < \infty \text{ para todo } |\alpha| \leq k\}.$$

$C_b^k(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach equipado con la C^k-norma uniforme dada por

$$\|u\|_{C^k}^2 = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\leq k} |D^\alpha u(x)|^2 \tag{1.8}$$

para todo $u \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$.

1.2 Distribuciones

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Dada una sucesión $\{\phi_j\}_{j\geq 1}$ de funciones en $C_c^\infty(\Omega)$, diremos que

$$\phi_j \longrightarrow \phi \text{ en } C_c^\infty(\Omega)$$

para cierta función $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ si se satisfacen

- $\exists K \subset \Omega$ compacto tal que $\forall\, j \geq 1$, $\mathrm{sop}(\phi_j) \subset K$.
- $D^\alpha \phi_j \longrightarrow D^\alpha \phi$ uniformemente en K, $\forall\, \alpha$ multi-índice.

Definición 1.3. Una *distribución* sobre Ω es una funcional lineal $u\colon C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ que es continua en el sentido siguiente:

$$\text{si } \phi_j \longrightarrow \phi \text{ en } C_c^\infty(\Omega) \text{ entonces, } u(\phi_j) \longrightarrow u(\phi).$$

Llamaremos $D'(\Omega)$ al espacio de las distribuciones sobre Ω equipado con la topología siguiente:

$$u_j \longrightarrow u \text{ si y solamente si } u_j(\phi) \longrightarrow u(\phi) \text{ para todo } \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Definición 1.4. Sea $u \in D'(\Omega)$ una distribución. Definimos el *soporte* de u y, lo denotamos con $\mathrm{sop}(u)$, como

$$\mathrm{sop}(u) := \Omega \setminus \bigcup \{w \subset \Omega \text{ abierto} \mid u(\phi) = 0 \text{ para todo } \phi \in C_c^\infty(w)\}.$$

Denotamos con $\mathcal{E}'(\Omega)$ al siguiente espacio:

$$\mathcal{E}'(\Omega) = \{u \in D'(\Omega) \mid \mathrm{sop}(u) \text{ es compacto}\}.$$

Definición 1.5. Sean $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribución y $w \subset \Omega$ abierto. Diremos que u es de *clase C^∞ en w* y, lo denotamos $u|_w \in C^\infty(w)$, si existe $f \in C^\infty(\Omega)$ tal que

$$u(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\mathrm{sop}(\varphi) \subset w$.

Definición 1.6. Sea $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribución. Definimos el *soporte singular* de u y, lo denotamos con singsop(u), como el complemento del mayor conjunto abierto en donde u es de clase C^∞. Formalmente:

$$\operatorname{singsop}(u) = \Omega \setminus \bigcup \left\{ w \subset \Omega \text{ abierto} \mid u|_w \in C^\infty(w) \right\}.$$

Observar que el soporte y el soporte singular de una distribución están relacionados ya que, si un abierto $w \subset (\operatorname{sop}(u))^c$ entonces $u(\varphi) = 0$ para todo $\varphi \in C_c^\infty(w)$ y esto implica que $u|_w \in C^\infty(w)$ y, por lo tanto, $w \subset (\operatorname{singsop}(u))^c$. En conclusión

$$\operatorname{singsop}(u) \subset \operatorname{sop}(u). \tag{1.9}$$

1.3 Espacios de Schwartz

Definición 1.7 (Espacio de Schwartz)**.**
$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha \ \textit{multi-índice}, k \in \mathbb{Z}^+, \exists\, c_{\alpha,k} \geq 0 \ \textit{tal que} \ |D^\alpha u(x)| \leq c_{\alpha,k}(1+|x|)^{-k}\}$

Es claro que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset C(\mathbb{R}^n)$.

Para cada α, se deduce fácilmente que si $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces $D^\alpha u$ está acotada y se anula en el infinito. Como consecuencia, si $v, w \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ utilizando la fórmula de integración por partes obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha v) \cdot w \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} v \cdot (D^\alpha w) \, dx. \tag{1.10}$$

Además

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset C_b^k(\mathbb{R}^n) \tag{1.11}$$

para todo entero $k \geq 0$.

Definimos la Transformada de Fourier como el operador $\mathcal{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que si $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}u = \widehat{u}$ está dado por

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(x) \, dx \tag{1.12}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Aplicando (1.10) se verifica fácilmente que el operador $\mathcal{F}$ está bien definido. Además, es un isomorfismo lineal con inverso dado por la "Fórmula de Inversión":

$$(\mathcal{F}^{-1}\widehat{u})(x) = u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \widehat{u}(\xi) \, d\xi \tag{1.13}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Sean $u, v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. La *convolución* de u y v es una nueva función, que denotamos con $u * v$ y está dada por

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) v(x-y) \, dy,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Aplicando la Regla de Leibnitz se obtiene $u * v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

A continuación resumimos algunas de las propiedades de la transformada de Fourier, que damos por conocidas.

Para todo $u, v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y α multi-índice, se verifica

$$\widehat{D_x^\alpha u}(\xi) = \xi^\alpha \widehat{u}(\xi) \tag{1.14}$$

$$(D_\xi^\alpha \widehat{u})(\xi) = (-1)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha u(x)}(\xi) \tag{1.15}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \cdot v \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u} \cdot \widehat{v} \, dx \text{ (Fórmula de Plancherel)} \tag{1.16}$$

$$\widehat{uv} = \widehat{u} * \widehat{v} \tag{1.17}$$

$$\widehat{u * v} = \widehat{u}\widehat{v}. \tag{1.18}$$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Habitualmente si $u \in C_c^\infty(\Omega)$ diremos que $\widehat{u} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ asumiendo que para calcular la Transformada de Fourier de u, a la función u previamente la extendimos de forma nula en $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{sop}(u)$.

1.4 Espacios de Sobolev en $\mathbb{R}^n$

Definición 1.8. *Para cada $s \in \mathbb{R}$, la s-norma de Sobolev es la norma inducida por el s-producto interno de Sobolev*

$$\|u\|_s^2 = \langle u, u \rangle_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{2s} \widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{u}(\xi)} \, d\xi. \tag{1.19}$$

Naturalmente si $u = (u_1, ..., u_p)$ y $v = (v_1, ..., v_p)$ entonces,

$$\langle u, v \rangle_s = \langle u_1, v_1 \rangle_s + \cdots + \langle u_p, v_p \rangle_s .$$

Para cada $s \in \mathbb{R}^n$, definimos el espacio de Sobolev, como la completación del espacio $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ con la métrica inducida por la s-norma de Sobolev. Lo denotamos con $\mathcal{H}_s(\mathbb{R}^n)$.

Observar que si s es un entero no negativo existen constantes c_1' y c_2' tales que

$$c_1'\|u\|_s^2 \leq \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)|^2 \, dx \leq c_2'\|u\|_s^2.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
c_1\|u\|_s^2 &\leq \sum_{k=0}^{s} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2k} |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \text{ (por (1.4))} \\
&= \sum_{k=0}^{s} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \xi^{2\alpha} \right] |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&= \sum_{\substack{0 \leq k \leq s \\ |\alpha|=k}} \frac{k!}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&\leq \sum_{\substack{0 \leq k \leq s \\ |\alpha|=k}} 2^k \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{D_x^\alpha u}(\xi)|^2 \, d\xi \text{ (por (1.14))} \\
&\leq 2^s \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\mathbb{R}^n} |D_x^\alpha u(\xi)|^2 \, d\xi \text{ (por (1.16))}
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|\leq s}\int_{\mathbb{R}^n}|D_x^\alpha u(\xi)|^2\,d\xi &= \sum_{|\alpha|\leq s}\int_{\mathbb{R}^n}\xi^{2\alpha}|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi \\
&\leq \sum_{\substack{0\leq k\leq s\\ |\alpha|=k}}\frac{k!}{\alpha!}\int_{\mathbb{R}^n}\xi^{2\alpha}|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi \\
&= \sum_{k=0}^{s}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\xi^{2\alpha}\right]|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\sum_{k=0}^{s}|\xi|^{2k}|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi \\
&\leq c_2\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|)^{2s}|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi \text{ (por (1.4))} \\
&= c_2\|u\|_s^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si s es un entero no negativo la s-norma de Sobolev es equivalente a la norma

$$\|u\|_s'^2 := \sum_{|\alpha|\leq s}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha u(x)|^2\,dx.$$

La equivalencia $\|\ \|_s \sim \|\ \|_s'$ nos permite obtener información acerca de los elementos de los espacios de Sobolev siempre que s es un entero no negativo ya que, en este caso,

$$u\in\mathcal{H}_s(\mathbb{R}^n) \text{ si y solo si } D^\alpha u\in\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

para todo $|\alpha|\leq s$. En el caso que s es un entero negativo, el Teorema 1.9 siguiente nos muestra que los espacios de Sobolev se identifican con su dual.

Teorema 1.9. *La función bilineal* $\varphi:\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\times\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{C}$

$$\varphi(u,v)=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{u}(\xi)\cdot\widehat{v}(\xi)\,d\xi$$

es un apareado que se extiende a un apareado perfecto $\tilde{\varphi}:\mathcal{H}_s(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{H}_{-s}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{C}$ *que identifica a* $\mathcal{H}_{-s}(\mathbb{R}^n)$ *con el dual de* $\mathcal{H}_s(\mathbb{R}^n)$*, para todo* $s\in\mathbb{R}$*.*

Demostración. Es evidente que φ es un apareado. Ahora, sean $u,v\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$\begin{aligned}
|\varphi(u,v)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}(\xi)||\hat{v}(\xi)|\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}(\xi)|(1+|\xi|)^s(1+|\xi|)^{-s}|\hat{v}(\xi)|\,d\xi \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|)^{2s}|\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|)^{-2s}|\hat{v}(\xi)|^2\,d\xi\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \|u\|_s\,\|v\|_{-s}.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$|\varphi(u,v)|\leq\|u\|_s\,\|v\|_{-s} \tag{1.20}$$

para todo $u,v\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, φ tiene una extensión continua $\tilde{\varphi}$ a $\mathcal{H}_s(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{H}_{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Es claro que

$$\sup_{\|u\|_s=1} |\tilde{\varphi}(u,v)| \leq \|v\|_{-s}$$

para todo $v \in \mathcal{H}_{-s}(\mathbb{R}^n)$. Además, es una igualdad. En efecto, dado $v \in \mathcal{H}_{-s}(\mathbb{R}^n)$ tomamos w tal que $\widehat{w}(\xi) = \overline{\widehat{v}(\xi)}\,(1+|\xi|)^{-2s}$. Así,

$$\|w\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{w}(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2s}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{v}(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{-2s}\, d\xi = \|v\|_{-s}^2$$

de donde resulta que $w \in \mathcal{H}_s(\mathbb{R}^n)$ y

$$\tilde{\varphi}(w,v) = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{-2s}\, \overline{\hat{v}(\xi)} \cdot \hat{v}(\xi)\, d\xi = \|v\|_{-s}^2.$$

Entonces,

$$\sup_{\|u\|_s=1} |\tilde{\varphi}(u,v)| \geq \left| \tilde{\varphi}\left(\frac{w}{\|w\|_s}, v \right) \right| = \|v\|_{-s}.$$

En conclusión,

$$\sup_{\|u\|_s=1} |\tilde{\varphi}(u,v)| = \|v\|_{-s}. \tag{1.21}$$

Sea la función

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{H}_{-s}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \ (\mathcal{H}_s(\mathbb{R}^n))^* \\ v &\longmapsto \tilde{\varphi}_v : \mathcal{H}_s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C} \\ &\qquad\qquad\qquad u \longmapsto \tilde{\varphi}(u,v) \end{aligned}$$

es claro que es lineal, inyectiva por (1.21) y sobreyectiva como consecuencia del teorema de representación de Riesz. Entonces, ϕ es un isomorfismo lineal y, en conclusión, $\tilde{\varphi}$ es un apareado perfecto y $\mathcal{H}_{-s}(\mathbb{R}^n) \simeq (\mathcal{H}_s(\mathbb{R}^n))^*$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

□

Teorema 1.10. *(Encaje de Sobolev). Sean k un entero no negativo y un número real $s > \frac{n}{2} + k$. Entonces, existe una constante c_s tal que*

$$\|u\|_{C^k} \leq c_s \|u\|_s$$

para todo $u \in \mathcal{H}_s(\mathbb{R}^n)$. En consecuencia, para cada $s > \frac{n}{2} + k$ hay un encaje continuo $\mathcal{H}_s(\mathbb{R}^n) \subset C_b^k(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Supongamos primero que $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Si $k = 0$, por la fórmula de inversión de Fourier se tiene que

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|\, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{-s} |\hat{u}(\xi)| (1+|\xi|)^s\, d\xi. \end{aligned}$$

Como $(1+|\xi|)^{-2s}$ es integrable si $2s > n$, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{-2s}\, d\xi \right] \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2s}\, d\xi \right] \\ &= {c_s}^2 {\|u\|_s}^2. \end{aligned}$$

Luego tomando supremo sobre $x \in \mathbb{R}^n$ obtenemos

$$\|u\|_{C^0} \leq c_s \|u\|_s \tag{1.22}$$

para todo $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Para el caso $k > 0$, sea $|\alpha| \leq k$ observemos primero

$$\begin{aligned}
|D^\alpha u(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{D^\alpha u}(\xi)| \, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \hat{u}(\xi)| \, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{s-|\alpha|} |\xi^\alpha| |\hat{u}(\xi)| (1+|\xi|)^{-s+|\alpha|} \, d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{s-|\alpha|} (1+|\xi|)^{|\alpha|} |\hat{u}(\xi)| (1+|\xi|)^{-s+|\alpha|} \, d\xi \text{ (por (1.3))} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{s} |\hat{u}(\xi)| (1+|\xi|)^{-s+|\alpha|} \, d\xi.
\end{aligned}$$

Análogamente $(1+|\xi|)^{2(-s+|\alpha|)}$ es integrable si $2(s-|\alpha|) > n$ entonces,

$$\begin{aligned}
|D^\alpha u(x)|^2 &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \right] \left[\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{2(-s+|\alpha|)} \, d\xi \right] \\
&= {c_{s,\alpha}}^2 {\|u\|_s}^2.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\|u\|_{C^k}^2 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u(x)|^2 \leq {c_s}^2 {\|u\|_s}^2 \tag{1.23}$$

para todo $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Ahora, sabemos que si $u \in \mathcal{H}_s(\mathbb{R}^n)$ entonces existe una sucesión $\{u_n\} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$ con la s-norma de Sobolev. Luego por (1.22) y (1.23) se tiene que, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$ con la norma $\| \, \|_{C^k}$ y como $\{u_n\} \subset C_b^k(\mathbb{R}^n)$ por (1.11) y $C_b^k(\mathbb{R}^n)$ es de Banach, se verifica que $u \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$.

En conclusión, hay un encaje continuo $\mathcal{H}_s(\mathbb{R}^n) \subset C_b^k(\mathbb{R}^n)$ siempre que $s > \frac{n}{2} + k$.

$\square$

Capítulo 2

Operadores Pseudo-Diferenciales en $\mathbb{R}^n$

De ahora en más Ω indicará un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ no necesariamente acotado.

2.1 Operadores Diferenciales en $\mathbb{R}^n$

Sea m un entero no negativo, un operador lineal $L : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ diremos que es un *operador diferencial* de orden m si es de la forma

$$Lu(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) \tag{2.1}$$

donde D^α actúa en cada componente de u, $a_\alpha : \Omega \to \mathscr{M}_{q\times p}(\mathbb{C})$ son funciones suaves y, $a_\alpha \neq 0$ para algún α con $|\alpha| = m$. Observar que el dominio de L son funciones de $\Omega \to \mathbb{C}^p$ y el codominio de L funciones de $\Omega \to \mathbb{C}^q$.

A lo largo de este trabajo si L es un operador cuyo dominio son funciones de $\Omega \to \mathbb{C}^p$ y codominio funciones de $\Omega \to \mathbb{C}^q$ y, M es un operador cuyo dominio son funciones de $\Omega \to \mathbb{C}^r$ y codominio funciones de $\Omega \to \mathbb{C}^s$ entonces asumiremos que $q = r$ siempre que realicemos la composición ML.

Observar que aplicando la regla de Leibnitz se verifica fácilmente que si L y M son operadores diferenciales de orden m y n respectivamente entonces, la composición LM es un operador diferencial de orden $m + n$.

Cada operador diferencial tiene asociado un *símbolo* que denotamos con σ_L. El símbolo es una función $\sigma_L : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathscr{M}_{q\times p}(\mathbb{C})$ y está dada por

$$\sigma_L(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha. \tag{2.2}$$

Considerando solamente los términos de mayor orden, a los operadores diferenciales se le asocia el *símbolo principal* $\sigma_L^p : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathscr{M}_{q\times p}(\mathbb{C})$ tal que

$$\sigma_L^p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha. \tag{2.3}$$

Como ejemplo clásico de operadores diferenciales tenemos el Laplaciano actuando en $\mathbb{R}^n$ como veremos a continuación.

Ejemplo 2.1. Asumiendo $p = q = 1$, el operador Laplaciano usual en $\mathbb{R}^n$

$$\Delta_{\mathbb{R}^n} u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} u$$

es un operador diferencial de orden 2 con

$$a_\alpha = \begin{cases} -4\pi^2 & \text{si } |\alpha| = 2 \text{ y } \alpha_i \in \{0,2\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

Su símbolo y símbolo principal coinciden siendo

$$\sigma^p_{\Delta_{\mathbb{R}^n}}(x,\xi) = \sigma_{\Delta_{\mathbb{R}^n}}(x,\xi) = -4\pi^2\left(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2\right) = -4\pi^2|\xi|^2.$$

En virtud de la siguiente fórmula podremos simplificar la notación del Laplaciano compuesto k-veces consigo mismo.

$$\Delta^k_{\mathbb{R}^n} u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!}\left(\frac{\partial^{2\alpha_1}}{\partial x_1^{2\alpha_1}}\right) \cdots \left(\frac{\partial^{2\alpha_n}}{\partial x_n^{2\alpha_n}}\right) u$$

Ejemplo 2.2. Si k un entero positivo, tenemos que

$$\Delta^k_{\mathbb{R}^n} u = \sum_{|\beta|=k} \frac{k!}{\beta!}\left(\frac{\partial^{2\beta_1}}{\partial x_1^{2\beta_1}}\right) \cdots \left(\frac{\partial^{2\beta_n}}{\partial x_n^{2\beta_n}}\right) u.$$

De este modo, $\Delta^k_{\mathbb{R}^n}$ es un operador diferencial de orden $2k$ con

$$a_\alpha = \begin{cases} (-4\pi^2)^k \dfrac{k!}{(\alpha/2)!} & \text{si } |\alpha| = 2k \text{ y } \alpha_i = \dot{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

Su símbolo y símbolo principal están dados por

$$\sigma_{\Delta^k_{\mathbb{R}^n}}(x,\xi) = \left(-4\pi^2\right)^k \left(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2\right)^k = \left(-4\pi^2\right)^k |\xi|^{2k}$$
$$\sigma^p_{\Delta^k_{\mathbb{R}^n}}(x,\xi) = \left(-4\pi^2\right)^k \left(\xi_1^{2k} + \cdots + \xi_n^{2k}\right).$$

Definición 2.3. *Diremos que un operador diferencial L es elíptico en x (o elíptico si no depende de x) si $\sigma^p_L(x,\xi)$ es invertible para todo $\xi \neq 0$.*

Como $\sigma^p_{\Delta_{\mathbb{R}^n}}$ y $\sigma^p_{\Delta^k_{\mathbb{R}^n}}$ son invertibles para todo $\xi \neq 0$ tenemos que $\Delta_{\mathbb{R}^n}$ y $\Delta^k_{\mathbb{R}^n}$ son operadores elípticos.

Proposición 2.4. *Sean $L\colon C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$, $L'\colon C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ y, $M\colon C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ operadores diferenciales tales que L y L' tienen el mismo orden. Entonces, para todo $t, t' \in \mathbb{R}$ se verifica que*

$$\sigma^p_{tL+t'L'} = t\sigma^p_L + t'\sigma^p_{L'} \tag{2.4}$$

y,

$$\sigma^p_{ML} = \sigma^p_M \sigma^p_L. \tag{2.5}$$

Demostración. La afirmación (2.4), es consecuencia directa de la linealidad de los operadores diferenciales.

Para ver (2.5), nuevamente por la linealidad, alcanza con considerar el caso

$$L = a_\alpha D^\alpha \text{ y } M = b_\beta D^\beta$$

donde $|\alpha| = m$ y $|\beta| = n$ son los órdenes de L y M respectivamente. Por un lado,

$$\begin{aligned} M(Lu) &= b_\beta D^\beta \left(a_\alpha D^\alpha u\right) \\ &= b_\beta \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} D^\gamma a_\alpha D^{\alpha+\beta-\gamma} u \\ &= b_\beta a_\alpha D^{\alpha+\beta} u + r \end{aligned}$$

donde r está compuesto por términos que involucran derivadas de la función u de orden menor a $m+n$. Por lo tanto,

$$\sigma^p_{ML}(x,\xi) = b_\beta(x) a_\alpha(x) \xi^{\alpha+\beta}.$$

Por otro lado,

$$\sigma^p_M(x,\xi) = b_\beta(x)\xi^\beta \text{ y } \sigma^p_L(x,\xi) = a_\alpha(x)\xi^\alpha,$$

de donde resulta que

$$\sigma^p_M \sigma^p_L(x,\xi) = b_\beta(x) a_\alpha(x) \xi^{\alpha+\beta}.$$

□

Observemos que utilizando la fórmula de Inversión de Fourier podemos escribir L el operador (2.1) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Lu(x) &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \int e^{2\pi i x\cdot\xi} \widehat{D^\alpha u}(\xi)\, d\xi \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \int e^{2\pi i x\cdot\xi} \xi^\alpha \widehat{u}(\xi)\, d\xi \text{ (por (1.14))} \\ &= \int e^{2\pi i x\cdot\xi} \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \widehat{u}(\xi)\, d\xi \\ &= \int e^{2\pi i x\cdot\xi} \sigma_L(x,\xi) \widehat{u}(\xi)\, d\xi. \end{aligned}$$

Esto nos permite afirmar que todo operador diferencial en Ω es de la forma

$$Lu(x) = \int e^{2\pi i x\cdot\xi} p(x,\xi) \widehat{u}(\xi)\, d\xi \tag{2.6}$$

donde $p(x,\xi)$ es polinomial en ξ y sus coeficientes son funciones suaves en Ω.

Nuestro objetivo será generalizar los operadores diferenciales manteniendo el comportamiento de $p(x,\xi)$ en (2.6). Para eso pediremos que $p(x,\xi)$ sean funciones que se comporten cualitativamente como polinomios en la variable ξ. Formalmente tenemos la siguiente definición.

Definición 2.5. Sea $m \in \mathbb{R}$. Decimos que $p : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathscr{M}_{q\times p}(\mathbb{C})$ es un *símbolo de orden* m si es una función suave y para cada α, β y cada compacto $K \subset \Omega$ existe una constante $c_{\alpha,\beta,K} > 0$ tal que

$$\sup_{x\in K} \left| D^\beta_x D^\alpha_\xi p(x,\xi) \right| \leq c_{\alpha,\beta,K} (1+|\xi|)^{m-|\alpha|}. \tag{2.7}$$

Al espacio de estos símbolos lo denotamos con $S^m(\Omega)$.

Denotamos $S^{-\infty}(\Omega) = \bigcap_{m\in\mathbb{R}} S^m(\Omega)$ y $S^{\infty}(\Omega) = \bigcup_{m\in\mathbb{R}} S^m(\Omega)$.

Observar que por un lado, si $m' < m$ claramente

$$S^{m'}(\Omega) \subset S^m(\Omega) \text{ y } S^{m'}(\Omega) + S^m(\Omega) \subset S^m(\Omega).$$

Por otro lado, si $p \in S^{m_1}(\Omega)$ y $q \in S^{m_2}(\Omega)$ entonces, $pq \in S^{m_1+m_2}(\Omega)$. En efecto, aplicando la fórmula de Leibnitz

$$\begin{aligned}
\left|D_x^\beta D_\xi^\alpha pq\right| &= \left|D_x^\beta \left[\sum_{\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma} D_\xi^\gamma p D_\xi^{\alpha-\gamma} q\right]\right| \\
&= \left|\sum_{\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma} D_x^\beta \left\{D_\xi^\gamma p D_\xi^{\alpha-\gamma} q\right\}\right| \\
&= \left|\sum_{\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\sum_{\delta\leq\beta}\binom{\beta}{\delta}\left\{D_x^\delta D_\xi^\gamma p D_x^{\beta-\delta} D_\xi^{\alpha-\gamma} q\right\}\right| \\
&\leq \sum_{\gamma\leq\alpha}\sum_{\delta\leq\beta} c_{\gamma,\delta,K}(1+|\xi|)^{m_1-|\gamma|} c_{\alpha,\gamma,\beta,\delta,K}(1+|\xi|)^{m_2-|\alpha|+|\gamma|} \\
&= c'_{\alpha,\beta,K}(1+|\xi|)^{m_1+m_2-|\alpha|},
\end{aligned}$$

donde $c'_{\alpha,\beta,K} = \sum_{\gamma\leq\alpha}\sum_{\delta\leq\beta} c_{\gamma,\delta,K}\cdot c_{\alpha,\gamma,\beta,\delta,K}$. En consecuencia, $S^\infty(\Omega)$ es un álgebra con el producto punto a punto.

Ejemplo 2.6. Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces, $p(x,\xi) = f(\xi) \in S^{-\infty}(\Omega)$ ya que para todo $k > 0$ y α existe una constante $c_{\alpha,k}$ tal que

$$\left|D_\xi^\alpha f(\xi)\right| \leq c_{\alpha,k}\,(1+|\xi|)^{-k} \leq c_{\alpha,k}\,(1+|\xi|)^{k}.$$

Además, si $p(x,\xi) \in S^{m_1}(\Omega)$ entonces, $f(\xi)p(x,\xi) \in S^{m+m_1}(\Omega)$ para todo $m \in \mathbb{R}$ y, en consecuencia, $f(\xi)p(x,\xi) \in S^{-\infty}(\Omega)$.

2.2 Operadores Pseudo-Diferenciales en $\mathbb{R}^n$

Ahora definiremos una clase más general de operadores diferenciales usando (2.6) y pidiendo que $p(x,\xi)$ sean símbolos, pero primero debemos ver que estará bien definido.

Proposición 2.7. *Sean $u \in C_c^\infty(\Omega)$ y $p \in S^m(\Omega)$. Entonces Pu tal que*

$$Pu(x) := \int e^{2\pi i x\cdot\xi} p(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\,d\xi \in C^\infty(\Omega).$$

Demostración. Sean $x \in \Omega$ y $\epsilon > 0$ tales que $\overline{B_\epsilon(x)} \subset \Omega$. Si $K = \overline{B_\epsilon(x)}$ para cada β tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|D_x^\beta Pu(x)\right| &= \left|D_x^\beta \int e^{2\pi i x\cdot\xi} p(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\,d\xi\right| \\
&= \left|\int D_x^\beta \left[e^{2\pi i x\cdot\xi} p(x,\xi)\right] \widehat{u}(\xi)\,d\xi\right| \\
&= \left|\int \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} D_x^\gamma \left(e^{2\pi i x\cdot\xi}\right) D_x^{\beta-\gamma} p(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\,d\xi\right| \\
&= \left|\int \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} \xi^\gamma e^{2\pi i x\cdot\xi} D_x^{\beta-\gamma} p(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\,d\xi\right| \\
&\leq \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} \int |\xi|^{|\gamma|} \left|D_x^{\beta-\gamma} p(x,\xi)\right| |\widehat{u}(\xi)|\,d\xi \\
&\leq \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} c_{0,\beta-\gamma,K} \int |\xi|^{|\gamma|}(1+|\xi|)^m\,|\widehat{u}(\xi)|\,d\xi \\
&\leq \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} c_{0,\beta-\gamma,K} \int (1+|\xi|)^{m+|\gamma|}\,|\widehat{u}(\xi)|\,d\xi \\
&< \infty
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos que $\widehat{u} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Por lo tanto, $Pu|_{B_\epsilon(x)}$ es suave y como x es arbitrario se concluye que $Pu \in C^\infty(\Omega)$. □

Definición 2.8. Sea $m \in \mathbb{R}$. Diremos que un operador $P : C_c^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ es un operador *pseudo-diferencial* de orden m si es de la forma

$$Pu(x) = \int e^{2\pi i x\cdot\xi} p(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\,d\xi, \tag{2.8}$$

con $p(x,\xi) \in S^m(\Omega)$. Al espacio de estos símbolos lo denotamos con $\Psi^m(\Omega)$.

De este modo por lo visto en (2.6) todo operador diferencial es un operador pseudo-diferencial.

Proposición 2.9. *Los operadores pseudo-diferenciales son suaves. Es decir, si tenemos una sucesión* $\{u_j\}_{j\geq 1} \subset C_c^\infty(\Omega)$ *tal que* $u_j \longrightarrow u$ *en* $C_c^\infty(\Omega)$ *para una función* $u \in C_c^\infty(\Omega)$ *entonces,*

$$D_x^\alpha (Pu_j) \longrightarrow D_x^\alpha (Pu) \ \textit{ uniformemente en compactos de } \Omega \textit{ para todo } \alpha.$$

Demostración. Sea $K \subset \Omega$ compacto tal que $\mathrm{sop}(u_j) \subset K$ para todo j. Observamos que para cualquier $v \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\mathrm{sop}(v) \subset K$ por un lado

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{D_x^\alpha v}(\xi)\right| &= \left|\int e^{-2\pi i x\cdot\xi} D_x^\alpha v(x)\,dx\right| \\
&\leq \int_K |D_x^\alpha v(x)|\,dx \\
&\leq \mathrm{vol}(K) \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D_x^\alpha v(x)|,
\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
D_x^\alpha Pv(x) &= \int D_x^\alpha \left[e^{2\pi i x\cdot\xi} p(x,\xi)\right] \widehat{v}(\xi)\,d\xi \\
&= \sum_{\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \int e^{2\pi i x\cdot\xi} D_x^{\alpha-\gamma} p(x,\xi)\xi^\gamma \widehat{v}(\xi)\,d\xi.
\end{aligned}$$

Además, eligiendo $N > 0$ entero tal que

$$m - N < -n$$

el término $(1 + |\xi|)^{m-N}$ es integrable. Sea $H \subset \Omega$ compacto. Entonces si $x \in H$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|D_x^\alpha P\left[u_j - u\right](x)| &\leq \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \int \left| D_x^{\alpha-\gamma} p(x,\xi) \xi^\gamma \widehat{(u_j - u)}(\xi) \right| d\xi \\
&\leq \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} c_{0,\alpha,\gamma,H} \int (1 + |\xi|)^m \left| \xi^\gamma \widehat{(u_j - u)}(\xi) \right| d\xi \\
&= \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} c_{0,\alpha,\gamma,H} \int (1 + |\xi|)^{m-N} (1 + |\xi|)^N \left| \xi^\gamma \widehat{(u_j - u)}(\xi) \right| d\xi \\
&\leq \sum_{\substack{\gamma \leq \alpha \\ |\lambda| \leq N}} \binom{\alpha}{\gamma} c_{0,\alpha,\gamma,H} d_N \int (1 + |\xi|)^{m-N} \xi^{2\lambda} \left| \xi^\gamma \widehat{(u_j - u)}(\xi) \right| d\xi \text{ (por (1.7))} \\
&\leq \sum_{\substack{\gamma \leq \alpha \\ |\lambda| \leq N}} c'_{\alpha,H,N} \int (1 + |\xi|)^{m-N} \left| \xi^{\gamma+2\lambda} \left(\widehat{u_j - u}\right)(\xi) \right| d\xi \\
&\leq \sum_{\substack{\gamma \leq \alpha \\ |\lambda| \leq N}} c'_{\alpha,H,N} \int (1 + |\xi|)^{m-N} \left| \left(\widehat{D_x^{\gamma+2\lambda}\left[u_j - u\right]}\right)(\xi) \right| d\xi \text{ (por (1.14))} \\
&\leq \sum_{\substack{\gamma \leq \alpha \\ |\lambda| \leq N}} c'_{\alpha,H,N} \operatorname{vol}(K) \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| D_x^{\gamma+2\lambda}\left[u_j - u\right](x) \right| \int (1 + |\xi|)^{m-N} \, d\xi.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sup_{x \in H} |D_x^\alpha P\left[u_j - u\right](x)| \leq \sum_{\substack{\gamma \leq \alpha \\ |\lambda| \leq N}} c''_{\alpha,H,N} \underbrace{\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| D_x^{\gamma+2\lambda}\left[u_j - u\right](x) \right|}_{\to 0} \underbrace{\int (1 + |\xi|)^{m-N} \, d\xi}_{<\infty} \xrightarrow[j \to \infty]{} 0.$$

□

Denotamos $\Psi^{-\infty}(\Omega) = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} \Psi^m(\Omega)$ y $\Psi^\infty(\Omega) = \bigcup_{m \in \mathbb{R}} \Psi^m(\Omega)$.

A diferencia de lo que sucede con $S^\infty(\Omega)$, en $\Psi^\infty(\Omega)$ no hay un producto que esté bien definido.

Podemos establecer una correspondencia entre el espacio $S^\infty(\Omega)$ y $\Psi^\infty(\Omega)$ de la siguiente forma. Dado $p \in S^\infty(\Omega)$ construimos $p(X,D) \in \Psi^\infty(\Omega)$ tal que

$$p(X,D)u(x) = \int e^{2\pi i x \cdot \xi} p(x,\xi) \widehat{u}(\xi) \, d\xi$$

para todo $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Esta correspondencia por lo general no es inyectiva, la inyectividad de la misma depende de la naturaleza de Ω ya que, $p(X,D)$ no queda completamente determinado por p a menos que Ω sea muy grande como veremos más adelante.

Observemos que si $u \in C_c^\infty(\Omega)$ y $P \in \Psi^\infty(\Omega)$ entonces para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle Pu, \phi \rangle &= \int Pu(x) \phi(x) \, dx \\
&= \int \left(\int e^{2\pi i x \cdot \xi} p(x,\xi) \widehat{u}(\xi) \, d\xi \right) \phi(x) \, dx \\
&= \int \int e^{2\pi i x \cdot \xi} p(x,\xi) \widehat{u}(\xi) \phi(x) \, d\xi \, dx \\
&= \int \int e^{2\pi i x \cdot \xi} p(x,\xi) \phi(x) \widehat{u}(\xi) \, dx \, d\xi \\
&= \int g_\phi(\xi) \widehat{u}(\xi) \, d\xi
\end{aligned}$$

con

$$g_\phi(\xi) = \int e^{2\pi i x\cdot\xi} p(x,\xi)\phi(x)\,dx,$$

donde el cambio del orden de integración se debe a que ϕ tiene soporte compacto y $\widehat{u} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Lema 2.10. *Sean $p \in S^m(\Omega)$ y $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Entonces, la función $g_\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^q$ dada por*

$$g_\phi(\xi) = \int e^{2\pi i x\cdot\xi} p(x,\xi)\phi(x)\,dx$$

decae más rápido que cualquier polinomio.

Demostración. Sean $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ y α muti-índice entonces

$$\begin{aligned}
\eta^\alpha \int e^{2\pi i x\cdot\eta} p(x,\xi)\phi(x)\,dx &= \int \eta^\alpha e^{2\pi i x\cdot\eta} p(x,\xi)\phi(x)\,dx \\
&= \int D_x^\alpha \left(e^{2\pi i x\cdot\eta}\right) p(x,\xi)\phi(x)\,dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int e^{2\pi i x\cdot\eta} D_x^\alpha \left[p(x,\xi)\phi(x)\right]\,dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int e^{2\pi i x\cdot\eta} \sum_{\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D_x^\gamma p(x,\xi) D_x^{\alpha-\gamma}\phi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Ahora como el $\operatorname{sop}(\phi)$ es compacto, si $K = \operatorname{sop}(\phi)$ entonces

$$\begin{aligned}
\left|\eta^\alpha \int e^{2\pi i x\cdot\eta} p(x,\xi)\phi(x)\,dx\right| &= \left|\int_K e^{2\pi i x\cdot\eta} \sum_{\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D_x^\gamma p(x,\xi) D_x^{\alpha-\gamma}\phi(x)\,dx\right| \\
&\leq \sum_{\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \int_K \left|D_x^\gamma p(x,\xi) D_x^{\alpha-\gamma}\phi(x)\right|\,dx \\
&\leq \operatorname{vol}(K) \sum_{\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} c_{0,\gamma,K}(1+|\xi|)^m \sup_{x\in K} \left|D_x^{\alpha-\gamma}\phi(x)\right| \\
&\leq c'_\alpha (1+|\xi|)^m. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Combinando (2.9) y (1.7) obtenemos que para todo $N > 0$ entero existe una constante $c_N > 0$ tal que

$$(1+|\eta|)^N \left|\int e^{2\pi i x\cdot\eta} p(x,\xi)\phi(x)\,dx\right| \leq c_N (1+|\xi|)^m,$$

en particular si $\eta = \xi$ tenemos que

$$(1+|\xi|)^N \left|\int e^{2\pi i x\cdot\xi} p(x,\xi)\phi(x)\,dx\right| \leq c_N (1+|\xi|)^m.$$

Luego

$$|g_\phi(\xi)| \leq c_N (1+|\xi|)^{m-N} \qquad (2.10)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ y $N > 0$ entero. En conclusión, el decaimiento de g_ϕ es más rápido que cualquier polinomio. □

Observar que de la desigualdad (2.10) por el Teorema de Convergencia Dominada podemos asegurar que para toda sucesión $\{\phi_j\}_j \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$\phi_j \to \phi \text{ en } C_c^\infty(\Omega)$$

entonces, la sucesión $\{(1+|\xi|)^N g_{\phi_j}(\xi)\}_j$ satisface

$$(1+|\xi|)^N g_{\phi_j}(\xi) \to (1+|\xi|)^N g_{\phi}(\xi)$$

uniformemente en $\mathbb{R}^n$ para cada ξ. Por lo tanto

$$\int g_{\phi_j} \widehat{u}\, d\xi \to \int g_{\phi} \widehat{u}\, d\xi$$

y, en consecuencia, podemos definir una funcional lineal continua

$$\varphi \colon C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C} \text{ tal que } \varphi(\phi) = \int g_\phi \widehat{u}\, d\xi.$$

Esto nos permite definir $p(X,D)u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ para cualquier $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ de la siguiente forma

$$\langle p(X,D)u, \phi\rangle = \langle g_\phi, \widehat{u}\rangle$$

para todo ϕ. Además, esta correspondencia es continua ya que si $u_j \to u$ débilmente en $\mathcal{E}'(\Omega)$ se verifica fácilmente que $p(X,D)u_j \to p(X,D)u$ débilmente en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

2.3 Núcleos de Operadores Pseudo-Diferenciales

Si un operador $T \colon C_c^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ se escribe en la forma

$$Tu(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)\, dy$$

para todo $u \in C_c^\infty(\Omega)$, se dice que K es el *núcleo del operador* T. Por ejemplo, si $\Omega = \mathbb{R}^n$ el núcleo del operador Transformada de Fourier visto en (1.12) es $K(x,\xi) = e^{-2\pi i x\cdot\xi}$.

Para cada $v \in C_c^\infty(\Omega)$ tenemos que

$$\int_\Omega Tu(x)v(x)\, dx = \int\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)v(x)u(y)\, dydx$$

y en el lenguaje de distribuciones se escribe como

$$\langle Tu, v\rangle = \langle K, v\otimes u\rangle$$

siendo $v\otimes u \in C_c^\infty(\Omega\times\Omega)$ definido por

$$(v\otimes u)(x,y) = v(x)u(y).$$

Generalizando, el *Teorema del Núcleo de Schwartz* afirma que para todo operador $T \colon C_c^\infty(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ lineal continuo existe $K \in \mathcal{D}'(\Omega\times\Omega)$ una distribución que llamamos *núcleo distribucional* tal que

$$\langle Tu, v\rangle = \langle K, v\otimes u\rangle \text{ para todo } u,v \in C_c^\infty(\Omega)$$

y, K está completamente determinado por T ya que el conjunto

$$\operatorname{span}\{v\otimes u \mid u,v \in C_c^\infty(\Omega\times\Omega)\}$$

es denso en $C_c^\infty(\Omega)$.

Ahora, nuestro objetivo será calcular el núcleo distribucional de los operadores pseudo-diferenciales. Para eso necesitamos el siguiente resultado.

Lema 2.11. *Dado $p \in S^m(\Omega)$. Sean $B \subset \Omega$ compacto y, $N \in \mathbb{Z}^+$ entonces, existe una constante $c_{B,N} > 0$ tal que*

$$\left|\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi)w(x,y)\,dy\right| \leq c_{B,N}(1+|\xi|)^{m-N} \sum_{|\lambda|\leq N} \sup_{x,y\in B} \left|D_y^{2\lambda} w(x,y)\right|$$

para todo $w \in C_c^\infty(\Omega\times\Omega)$ tal que $\mathrm{sop}(w) \subset B\times B$ *y para todo $x \in B$.*

Demostración. Sean $B \subset \Omega$ compacto y $N \in \mathbb{Z}^+$. Para cada λ multi-índice, $w \in C_c^\infty(\Omega\times\Omega)$ tal que $\mathrm{sop}(w) \subset B\times B$ y, cada $x \in B$ usando que $p \in S^m(\Omega)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\xi^{2\lambda}\left|\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi)w(x,y)\,dy\right| &= \left|\xi^{2\lambda}\int_B e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi)w(x,y)\,dy\right| \\
&= \left|e^{2\pi i x\cdot\xi}\right| \left|\int_B \xi^{2\lambda} e^{-2\pi i y\cdot\xi} p(x,\xi)w(x,y)\,dy\right| \\
&= \left|\int_B (-1)^{2|\lambda|} D_y^{2\lambda}\left(e^{-2\pi i y\cdot\xi}\right) p(x,\xi)w(x,y)\,dy\right| \\
&= \left|\int_B e^{-2\pi i y\cdot\xi} p(x,\xi) D_y^{2\lambda} w(x,y)\,dy\right| \\
&\leq \int_B |p(x,\xi)| \left|D_y^{2\lambda} w(x,y)\right| dy \\
&\leq \int_B c_{0,0,B}\,(1+|\xi|)^m \left|D_y^{2\lambda} w(x,y)\right| dy \\
&\leq c'_{0,0,B}\,(1+|\xi|)^m \,\mathrm{vol}(B) \sup_{x,y\in B} \left|D_y^{2\lambda} w(x,y)\right|. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Luego, combinando (1.7) con (2.11) obtenemos que existe una constante $c_{B,N} > 0$ tal que

$$(1+|\xi|)^N \left|\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi)w(x,y)\,dy\right| \leq c_{B,N}\,(1+|\xi|)^m \sum_{|\lambda|\leq N} \sup_{x,y\in B} \left|D_y^{2\lambda} w(x,y)\right|.$$

□

Calculemos el núcleo de los operadores pseudo-diferenciales. Sea $p \in S^m(\Omega)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle K, v\otimes u\rangle &= \langle p(X,D)u, v\rangle \\
&= \int p(X,D)u(x)v(x)\,dx \\
&= \int \left[\int e^{2\pi i x\cdot\xi} p(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\,d\xi\right] v(x)\,dx \\
&= \int\int e^{2\pi i x\cdot\xi} p(x,\xi)\left[\int e^{-2\pi i y\cdot\xi} u(y)\,dy\right] v(x)\,d\xi dx \\
&= \int\int\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi)u(y)v(x)\,dy d\xi dx \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

donde la integral (2.12) no es necesariamente convergente pues en la variable ξ en general no está acotada. En consecuencia, tenemos dos situaciones:

- Si $m < -n$ la integral (2.12) es absolutamente convergente y podemos intercambiar el orden de integración. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle K, v\otimes u\rangle &= \int\int\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi)u(y)v(x)\,dy d\xi dx \\
&= \int\int\left[\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi) d\xi\right] u(y)v(x)\,dy dx \\
&= \int\int p_2^\vee(x, x-y)u(y)v(x)\,dy dx \\
&= \left\langle p_2^\vee(x,x-y), v\otimes u\right\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $K(x,y) = p_2^\vee(x, x-y)$ como función, donde $p_2^\vee$ indica la Transformada de Fourier Inversa de $p(x,\xi)$ en la variable ξ.

- Si $m \geq -n$ la integral en general no es convergente. Para obtener una interpretación similar a la anterior necesitamos intercambiar el orden de integración, para eso sea $\lambda \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$0 \leq \lambda(\xi) \leq 1,\ \lambda(\xi) = 1 \text{ si } |\xi| \leq 1 \text{ y},\ \lambda(\xi) = 0 \text{ si } |\xi| \geq 2$$

consideramos la sucesión de funciones $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ tal que $\lambda_k(\xi) = \lambda\left(\frac{\xi}{k}\right)$ para todo ξ. Entonces, para todo $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ se verifica que

$$p(x,\xi) = \lim_{k\to\infty} p_k(x,\xi) \tag{2.13}$$

siendo $p_k(x,\xi) = \lambda_k(\xi)p(x,\xi)$. Sean $B = \operatorname{sop}(u) \cup \operatorname{sop}(v)$ y N entero positivo tal que

$$m - N < -n$$

aplicando el Lema 2.11 tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left| \int\int\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi)u(x)v(y)\, dyd\xi dx \right| \\
&\qquad \leq \int\int \left| \int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi)u(x)v(y)\, dy \right| d\xi dx \\
&\qquad \leq \int\int c_{B,N}(1+|\xi|)^{m-N} \sup_{x,y\in B} \left| D_y^{2\lambda} v(y) \right| |u(x)|\, d\xi dx \\
&\qquad \leq c_{B,N} \left[\int (1+|\xi|)^{m-N}\, d\xi \right] \int_B \sup_{x,y\in B} \left| D_y^{2\lambda} v(y) \right| |u(x)|\, dx \\
&\qquad < \infty
\end{aligned}$$

ya que $(1+|\xi|)^{m-N}$ es integrable. Entonces, si en el integrando de la integral (2.12) reemplazamos $p(x,\xi)$ por $p_k(x,\xi)$ y usamos (2.13) podemos aplicar el Teorema de Convergencia Dominada y obtener una triple integral de soporte compacto en las tres variables para poder intercambiar el orden de integración. En efecto

$$\begin{aligned}
\langle K, v\otimes u\rangle &= \int\int\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi)u(y)v(x)\, dyd\xi dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \int\int\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} p_k(x,\xi)u(y)v(x)\, dyd\xi dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \int\int \left[\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} p_k(x,\xi)\, d\xi \right] u(y)v(x)\, dydx \\
&= \lim_{k\to\infty} \int\int (p_k)_2^\vee(x, x-y)u(y)v(x)\, dydx \\
&= \lim_{k\to\infty} \left\langle (p_k)_2^\vee(x, x-y), v\otimes u \right\rangle.
\end{aligned}$$

Entonces

$$(p_k)_2^\vee(x, x-y) \xrightarrow[k\to\infty]{\omega} K(x,y).$$

Asumiendo la discusión anterior, escribiremos

$$K(x,y) = p_2^\vee(x, x-y) \text{ para todo } x, y \in \Omega. \tag{2.14}$$

Definimos el conjunto diagonal y, lo denotamos Δ_Ω como

$$\Delta_\Omega := \{(x,y) \in \Omega\times\Omega \mid x = y\}.$$

Teorema 2.12. *Sean $p \in S^m(\Omega)$ y K la distribución en $\Omega \times \Omega$ dada por $K(x,y) = p_2^\vee(x, x-y)$. Entonces:*

i) Si $|\alpha| > m+n+j$, la función

$$f_\alpha(x,z) = z^\alpha p_2^\vee(x,z)$$

es de clase C^j en $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Además, las derivadas de orden $\leq j$ están acotadas en $A \times \mathbb{R}^n$ para algún compacto $A \subset \mathbb{R}^n$.

ii) Si $|\alpha| > m+n+j$, se satisface que $(x-y)^\alpha K(x,y)$ y sus derivadas de orden $\leq j$ son funciones continuas en $\Omega \times \Omega$. En particular, K es una función de clase C^∞ en $(\Omega \times \Omega) \setminus \Delta_\Omega$.

Demostración. Veamos primero la afirmación i).

Para cada α aplicando la transformada de Fourier inversa tenemos que

$$f_\alpha(x,z) = z^\alpha p_2^\vee(x,z) = \left((-1)^{|\alpha|} D_\xi^\alpha p(x,\xi)\right)^\vee_{\xi \mapsto z} = (-1)^{|\alpha|} \int e^{2\pi i z\cdot\xi} D_\xi^\alpha p(x,\xi)\, d\xi.$$

Luego, para cada θ, λ multi-índices se tiene que

$$\begin{aligned} D_x^\theta D_z^\lambda f_\alpha(x,z) &= (-1)^{|\alpha|} D_x^\theta D_z^\lambda \int e^{2\pi i z\cdot\xi} D_\xi^\alpha p(x,\xi)\, d\xi \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int D_z^\lambda \left(e^{2\pi i z\cdot\xi}\right) D_x^\theta D_\xi^\alpha p(x,\xi)\, d\xi \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int \xi^\lambda e^{2\pi i z\cdot\xi} D_x^\theta D_\xi^\alpha p(x,\xi)\, d\xi. \end{aligned}$$

Entonces, dado $A \subset \Omega$ compacto usando que p es un símbolo de orden m si $x \in A$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left|D_x^\theta D_z^\lambda f_\alpha(x,z)\right| &\leq \left|\int \xi^\lambda e^{2\pi i z\cdot\xi} D_x^\theta D_\xi^\alpha p(x,\xi)\, d\xi\right| \\ &\leq \int \left|\xi^\lambda\right| \left|D_x^\theta D_\xi^\alpha p(x,\xi)\right| d\xi \\ &\leq c_{\alpha,\theta,A} \int |\xi|^{|\lambda|} \left(1+|\xi|\right)^{m-|\alpha|}\, d\xi \\ &\leq c_{\alpha,\theta,A} \int \left(1+|\xi|\right)^{m-|\alpha|+|\lambda|}\, d\xi \end{aligned}$$

y como el término $(1+|\xi|)^{m-|\alpha|+|\lambda|}$ es integrable siempre que

$$-m + |\alpha| - |\lambda| > n$$

obtenemos

$$\sup_{(x,z)\in A\times\mathbb{R}^n} \left|D_x^\theta D_z^\lambda f_\alpha(x,z)\right| < \infty.$$

Por lo tanto, si $|\alpha| > m+n+j$ se verifica que las derivadas de orden $\leq j$ de la función f_α están acotadas en $A \times \mathbb{R}^n$. En particular, como A es arbitrario esto muestra que en las condiciones anteriores f_α es de clase C^j en $\Omega \times \mathbb{R}^n$.

Veamos la afirmación ii).

Dado $|\alpha| > m+n+j$ tenemos que ver que $(x-y)^\alpha K(x,y)$ es derivable en el sentido distribucional. En efecto, para cada $u, v \in C_c^\infty(\Omega)$ y cada $|\beta| + |\gamma| \leq j$ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle D_x^\beta D_y^\gamma \left[(x-y)^\alpha K(x,y)\right], u(x)v(y)\rangle &= (-1)^{|\beta|+|\gamma|} \left\langle K(x,y), (x-y)^\alpha D_x^\beta u(x) D_y^\gamma v(y)\right\rangle \\ &= (-1)^{|\beta|+|\gamma|} \int\int\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi)(x-y)^\alpha D_x^\beta u(x) D_y^\gamma v(y)\, dy d\xi dx. \quad (2.15) \end{aligned}$$

Por un lado sea $\lambda \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$0 \leq \lambda(\xi) \leq 1,\ \lambda(\xi) = 1 \text{ si } |\xi| \leq 1 \text{ y},\ \lambda(\xi) = 0 \text{ si } |\xi| \geq 2$$

consideramos la sucesión de funciones $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ tal que $\lambda_k(\xi) = \lambda\left(\dfrac{\xi}{k}\right)$ para todo ξ. Entonces, para todo $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ se verifica que

$$p(x,\xi) = \lim_{k\to\infty} p_k(x,\xi) \tag{2.16}$$

siendo $p_k(x,\xi) = \lambda_k(\xi)p(x,\xi)$.

Por otro lado, sean $B = \operatorname{sop}(u) \cup \operatorname{sop}(v)$ y N entero positivo tal que

$$m - N < -n$$

aplicando el Lema 2.11 tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left| \int\int\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi)(x-y)^\alpha D_x^\beta u(x) D_y^\gamma v(y)\, dyd\xi dx \right| \\
&\qquad\qquad \leq \int\int \left| \int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi)(x-y)^\alpha D_x^\beta u(x) D_y^\gamma v(y)\, dy \right| d\xi dx \\
&\qquad\qquad \leq \int\int c_{B,N}(1+|\xi|)^{m-N} \sup_{x,y\in B} \left| D_y^{2\lambda}\left[(x-y)^\alpha D_y^\gamma v(y)\right]\right| \left| D_x^\beta u(x)\right| d\xi dx \\
&\qquad\qquad \leq c_{B,N}\left[\int (1+|\xi|)^{m-N}\, d\xi\right] \int_B \sup_{x,y\in B} \left| D_y^{2\lambda}\left[(x-y)^\alpha D_y^\gamma v(y)\right]\right| \left| D_x^\beta u(x)\right| dx \\
&\qquad\qquad < \infty
\end{aligned}$$

ya que $(1+|\xi|)^{m-N}$ es integrable. Entonces, si en el integrando de la integral (2.15) reemplazamos $p(x,\xi)$ por $p_k(x,\xi)$ y usamos (2.16) podemos aplicar el Teorema de Convergencia Dominada y obtener una triple integral de soporte compacto en las tres variables para poder intercambiar el orden de integración:

$$\begin{aligned}
&\int\int\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi)(x-y)^\alpha D_x^\beta u(x) D_y^\gamma v(y)\, dyd\xi dx \\
&\quad = \lim_{k\to\infty} \int\int\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} p_k(x,\xi)(x-y)^\alpha D_x^\beta u(x) D_y^\gamma v(y)\, dyd\xi dx \\
&\quad = \lim_{k\to\infty} \int\int \left[\int D_\xi^\alpha \left(e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi}\right) p_k(x,\xi) d\xi\right] D_x^\beta u(x) D_y^\gamma v(y)\, dydx \\
&\quad = (-1)^{|\alpha|} \lim_{k\to\infty} \int\int \left[\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} D_\xi^\alpha p_k(x,\xi) d\xi\right] D_x^\beta u(x) D_y^\gamma v(y)\, dydx \text{ (por (1.10))} \\
&\quad = (-1)^{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|} \lim_{k\to\infty} \int\int D_x^\beta D_y^\gamma \left[\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} D_\xi^\alpha p_k(x,\xi) d\xi\right] u(x)v(y)\, dydx \\
&\quad = (-1)^{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|} \lim_{k\to\infty} \int\int D_x^\beta \left[\int D_y^\gamma \left(e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi}\right) D_\xi^\alpha p_k(x,\xi) d\xi\right] u(x)v(y)\, dydx \\
&\quad = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \lim_{k\to\infty} \int\int D_x^\beta \left[\int \xi^\gamma e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} D_\xi^\alpha p_k(x,\xi) d\xi\right] u(x)v(y)\, dydx \\
&\quad = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \lim_{k\to\infty} \int\int \left[\sum_{\mu\leq\beta} \binom{\beta}{\mu} \int \xi^{\gamma+\mu} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} D_x^{\beta-\mu} D_\xi^\alpha p_k(x,\xi) d\xi\right] u(x)v(y)\, dydx \\
&\quad = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \lim_{k\to\infty} \sum_{\mu\leq\beta} \binom{\beta}{\mu} \int\int \mathcal{F}_\xi^{-1}\left[\xi^{\gamma+\mu} D_x^{\beta-\mu} D_\xi^\alpha p_k(x,\xi)\right]\Big|_{(x-y)} u(x)v(y)\, dydx \\
&\quad \underset{(*)}{=} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \sum_{\mu\leq\beta} \binom{\beta}{\mu} \int\int \mathcal{F}_\xi^{-1}\left[\xi^{\gamma+\mu} D_x^{\beta-\mu} D_\xi^\alpha p(x,\xi)\right]\Big|_{(x-y)} u(x)v(y)\, dydx \\
&\quad = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \left\langle \sum_{\mu\leq\beta} \binom{\beta}{\mu} \mathcal{F}_\xi^{-1}\left[\xi^{\gamma+\mu} D_x^{\beta-\mu} D_\xi^\alpha p(x,\xi)\right]\Big|_{(x-y)}, u(x)v(y) \right\rangle
\end{aligned} \tag{2.17}$$

donde $\mathcal{F}_\xi^{-1}$ representa la transformada de Fourier Inversa en la variable ξ y, la igualdad $(*)$ es una afirmación que probaremos después.

De este modo usando (2.17) en (2.15) obtenemos

$$\begin{aligned}&\langle D_x^\beta D_y^\gamma \left[(x-y)^\alpha K(x,y)\right], u(x)v(y)\rangle \\ &\qquad = \left\langle (-1)^{|\gamma|+|\alpha|} \sum_{\mu\leq\beta} \binom{\beta}{\mu} \mathcal{F}_\xi^{-1}\left[\xi^{\gamma+\mu} D_x^{\beta-\mu} D_\xi^\alpha p(x,\xi)\right]\Big|_{(x-y)}, u(x)v(y)\right\rangle\end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$D_x^\beta D_y^\gamma \left[(x-y)^\alpha K(x,y)\right] = (-1)^{|\gamma|+|\alpha|} \sum_{\mu\leq\beta} \binom{\beta}{\mu} \mathcal{F}_\xi^{-1}\left[\xi^{\gamma+\mu} D_x^{\beta-\mu} D_\xi^\alpha p(x,\xi)\right]\Big|_{(x-y)}.$$

Pero observemos que

$$\begin{aligned}\left|\xi^{\gamma+\mu} D_x^{\beta-\mu} D_\xi^\alpha p(x,\xi)\right| &\leq |\xi|^{|\gamma|+|\mu|}\left|D_x^{\beta-\mu} D_\xi^\alpha p(x,\xi)\right| \\ &\leq (1+|\xi|)^{|\gamma|+|\mu|} c_{\alpha,\beta,\mu,B}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \\ &\leq c_{\alpha,\beta,\mu,B}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|+|\gamma|+|\beta|} \\ &< c_{\alpha,\beta,\mu,B}(1+|\xi|)^{-n-j+j} \\ &= c_{\alpha,\beta,\mu,B}(1+|\xi|)^{-n}\end{aligned}$$

entonces, la integral que representa $\mathcal{F}_\xi^{-1}\left[\xi^{\gamma+\mu} D_x^{\beta-\mu} D_\xi^\alpha p(x,\xi)\right]\Big|_{(x-y)}$ es convergente y, en consecuencia, podemos afirmar que $(x-y)^\alpha K(x,y) \in C^j(\Omega\times\Omega)$ pues

$$D_x^\beta D_y^\gamma \left[(x-y)^\alpha K(x,y)\right] = (-1)^{|\gamma|+|\alpha|} \sum_{\mu\leq\beta} \binom{\beta}{\mu} \int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} \xi^{\gamma+\mu} D_x^{\beta-\mu} D_\xi^\alpha p(x,\xi)\, d\xi. \tag{2.18}$$

Además como $(x-y)^\alpha$ se anula en la diagonal, en particular esto muestra que K es C^∞ en $(\Omega\times\Omega)\backslash\Delta_\Omega$.

Por último, veamos la afirmación $(*)$

$$\mathcal{F}_\xi^{-1}\left[\xi^{\gamma+\mu} D_x^{\beta-\mu} D_\xi^\alpha p(x,\xi)\right]\Big|_{(x-y)} = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}_\xi^{-1}\left[\xi^{\gamma+\mu} D_x^{\beta-\mu} D_\xi^\alpha p_k(x,\xi)\right]\Big|_{(x-y)}$$

lo cual es equivalente a probar

$$\sup_{x\in B}\left\|\xi^{\gamma+\mu} D_x^{\beta-\mu} D_\xi^\alpha \left[p_k-p\right](x,\xi)\right\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in B}\int \left|\xi^{\gamma+\mu} D_x^{\beta-\mu} D_\xi^\alpha \left[p_k-p\right](x,\xi)\right| d\xi \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \tag{2.19}$$

Ahora, por definición de p_k tenemos que

$$\left|\xi^{\gamma+\mu} D_x^{\beta-\mu} D_\xi^\alpha \left[p_k-p\right](x,\xi)\right| = \begin{cases} 0 & \text{si } |\xi|\leq k \\ \left|\xi^{\gamma+\mu} D_x^{\beta-\mu} D_\xi^\alpha p(x,\xi)\right| & \text{si } |\xi|\geq 2k \\ \left|\xi^{\gamma+\mu} D_x^{\beta-\mu} D_\xi^\alpha \left[p_k-p\right](x,\xi)\right| & \text{si } k\leq|\xi|\leq 2k\end{cases}$$

entonces, en (2.19) estudiemos la integral en cada una de las siguientes regiones

- Si $|\xi|\leq k$ no hay nada que probar pues $\left|\xi^{\gamma+\mu} D_x^{\beta-\mu} D_\xi^\alpha \left[p_k-p\right](x,\xi)\right| = 0$
- Si $k\leq|\xi|\leq 2k$

$$\begin{aligned}\xi^{\gamma+\mu} D_x^{\beta-\mu} D_\xi^\alpha \left[p_k-p\right](x,\xi) &= \xi^{\gamma+\mu} D_x^{\beta-\mu} D_\xi^\alpha \left[(\lambda_k(\xi)-1)p(x,\xi)\right] \\ &= \xi^{\gamma+\mu}\sum_{\theta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\theta} D_\xi^\theta\left[(\lambda_k(\xi)-1)\right] D_x^{\beta-\mu} D_\xi^{\alpha-\theta} p(x,\xi) \\ &= \xi^{\gamma+\mu}\sum_{\theta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\theta} k^{-|\theta|} D_{\xi/k}^\theta \lambda(\xi/k) D_x^{\beta-\mu} D_\xi^{\alpha-\theta} p(x,\xi)\end{aligned}$$

luego, tomando $r \in \mathbb{R}^+$ positivo tal que $|\alpha| > m+n+j+r$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\xi^{\gamma+\mu} D_x^{\beta-\mu} D_\xi^\alpha \left[p_k - p\right](x,\xi)\right| &\leq |\xi|^{|\gamma|+|\mu|} \sum_{\theta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\theta} k^{-|\theta|} \left|D^\theta_{\xi/k}\lambda(\xi/k)\right| \left|D_x^{\beta-\mu} D_\xi^{\alpha-\theta} p(x,\xi)\right| \\
&\leq |\xi|^{|\gamma|+|\mu|} \sum_{\theta\leq\alpha} k^{-|\theta|} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left|D^\theta_{\xi/k}\lambda(\xi/k)\right| c'_{\theta,\mu,B} \left(1+|\xi|\right)^{m-|\alpha|+|\theta|} \\
&\leq \sum_{\theta\leq\alpha} k^{-|\theta|} c''_{\theta,\mu,B} \left(1+|\xi|\right)^{m-|\alpha|+|\theta|+|\gamma|+|\mu|} \\
&\leq \sum_{\theta\leq\alpha} k^{-|\theta|} c''_{\theta,\mu,B} \left(1+|\xi|\right)^{-n-j-r+|\theta|+j} \\
&= \sum_{\theta\leq\alpha} k^{-|\theta|} c''_{\theta,\mu,B} \left(1+|\xi|\right)^{-n-r} \left(1+|\xi|\right)^{|\theta|} \\
&\leq \sum_{\theta\leq\alpha} k^{-|\theta|} c''_{\theta,\mu,B} \left(1+|\xi|\right)^{-n-r} \left(1+2k\right)^{|\theta|} \\
&\leq c'''_{\theta,\mu,B} \left(1+|\xi|\right)^{-n-r} \left(\frac{1+2k}{k}\right)^{|\alpha|}.
\end{aligned}$$

Finalmente si $A_k(0) := \{\xi \mid k \leq |\xi| \leq 2k\}$ como $(1+|\xi|)^{-n-r}$ es integrable se tiene que

$$\int_{A_k(0)} \left|\xi^{\gamma+\mu} D_x^{\beta-\mu} D_\xi^\alpha \left[p_k - p\right](x,\xi)\right| d\xi \leq c'''_{\theta,\mu,B} \left(\frac{1}{k}+2\right)^{|\alpha|} \int_{A_k(0)} \left(1+|\xi|\right)^{-n-r} d\xi \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

- Si $|\xi| \geq 2k$ sean $C_{2k}(0) := \{\xi \mid |\xi| \geq 2k\}$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $|\alpha| > m+n+j+r$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_{C_{2k}(0)} \left|\xi^{\gamma+\mu} D_x^{\beta-\mu} D_\xi^\alpha p(x,\xi)\right| d\xi &\leq \int_{C_{2k}(0)} |\xi|^{|\gamma|+|\mu|} c_{\alpha,\mu,B} \left(1+|\xi|\right)^{m-|\alpha|} \\
&\leq \int_{C_{2k}(0)} c_{\alpha,\mu,B} \left(1+|\xi|\right)^{m-|\alpha|+|\gamma|+|\mu|} \\
&< \int_{C_{2k}(0)} c_{\alpha,\mu,B} \left(1+|\xi|\right)^{-n-r} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

□

Corolario 2.13. *Si $p \in S^{-\infty}(\Omega)$. Entonces, la distribución $K(x,y) = p_2^\vee(x, x-y)$ satisface $K \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$.*

Demostración. Tomando $\alpha = 0$ en la demostración del Teorema 2.12 en (2.18) para todo β y γ obtenemos

$$D_x^\beta D_y^\gamma K(x,y) = (-1)^{|\gamma|} \sum_{\mu\leq\beta} \binom{\beta}{\mu} \int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} \xi^{\gamma+\mu} D_x^{\beta-\mu} p(x,\xi)\, d\xi$$

pero $p \in S^{-\infty}(\Omega)$ por lo tanto, la integral es absolutamente convergente y, en consecuencia, $K \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$. □

Definición 2.14. Diremos que un mapa lineal $T\colon C_c^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ es *local* si siempre que $u_1 = u_2$ en un conjunto $A \subset \Omega$ abierto implica que $Tu_1 = Tu_2$ en A.

Los operadores diferenciales son locales.

Se verifica fácilmente que un mapa lineal $T\colon C_c^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ sea local es equivalente a afirmar

$$\operatorname{sop}(Tu) \subset \operatorname{sop}(u)$$

para todo u.

Definición 2.15. Diremos que un mapa lineal $T\colon \mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ es *pseudo-local* si

$$\operatorname{singsop}(Tu) \subset \operatorname{singsop}(u).$$

La Definición 2.15 en otras palabras nos está diciendo que si un operador T es pseduo-local entonces "localmente preserva la suavidad" ya que, si $u|_w \in C^\infty(\Omega)$ implica que $Tu|_w \in C^\infty(\Omega)$. En particular los operadores diferenciales son pseudo-locales.

Teorema 2.16. *Todo operador pseudo-differencial es pseudo-local.*

Demostración. Sean $P \in \Psi^m(\Omega)$ y $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Por (1.9) el singsop$(u)$ es compacto por lo que existe $V \subset \Omega$ abierto tal que $\overline{V} \subset \Omega$, $\overline{V}$ es compacto y V es un entorno de singsop(u). Luego, por Lema de Urysohn considero $\phi \in C_c^\infty(V)$ tal que $\phi = 1$ en singsop(u).

Denotando $u_1 = \phi u$ y, $u_2 = (1-\phi)\,u$ tenemos que $u = u_1 + u_2$, $\operatorname{sop}(u_1) \subset V$ y, $u_2 \in C_c^\infty(\Omega)$.

Sea K el núcleo distribucional de P, por Teorema 2.12 se verifica que $K(x,y)$ es una función C^∞ fuera de la diagonal. En particular, $K(x,y)$ es C^∞ para $x \notin V$ e $y \in V$. Por un lado, para $x \notin V$ tenemos que

$$Pu_1(x) = \langle K(x,\cdot), u_1(\cdot)\rangle = \int_{\operatorname{sop}(u_1)} K(x,y)u_1(y)\,dy$$

además

$$\left(D^\alpha P u_1\right)(x) = \int_{\operatorname{sop}(u_1)} D_x^\alpha K(x,y)u_1(y)\,dy$$

para todo α, por lo que Pu_1 es C^∞ fuera de V. Por otro lado, como $u_2 \in C_c^\infty(\Omega)$ se tiene que $Pu_2 \in C^\infty(\Omega)$. Entonces, $Pu = Pu_1 + Pu_2$ es C^∞ fuera de V. Pero, como V es arbitrario se concluye que Pu es C^∞ fuera de singsop(u). □

Definición 2.17. Diremos que un mapa $T\colon \mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ es un *operador infinitamente suave* si

$$\operatorname{singsop}(Tu) = \varnothing, \text{ para todo } u \in \mathcal{E}'(\Omega).$$

Proposición 2.18. *Sea $P \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$. Entonces, P es un operador infinitamente suave.*

Demostración. Sean $P \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$ y K el núcleo distribucional de P. Si $P = p(X,D)$ entonces $p \in S^{-\infty}(\Omega)$ y, en consecuencia, por el Corolario 2.13 tenemos que K es suave en $\Omega \times \Omega$.

Para cada $x \in \Omega$ y cada α multi-índice

$$\left(D^\alpha P u\right)(x) = \langle D_x^\alpha K(x,\cdot), u(\cdot)\rangle = \int_\Omega D_x^\alpha K(x,y)u(y)\,dy$$

para todo $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Por lo tanto, Pu es de clase C^∞ en Ω y, en conclusión, singsop$(Pu) = \varnothing$. □

En lo que sigue

$$\Omega - \Omega = \{x - y \mid x, y \in \Omega\}.$$

Proposición 2.19. *Sea $p \in S^m(\Omega)$ tal que el mapa $p(X,D)\colon C_c^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ es nulo, es decir $p(X,D)u = 0$ para todo $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Entonces:*

i) $p \in S^{-\infty}(\Omega)$.

ii) *Si $\Omega - \Omega$ es denso en $\mathbb{R}^n$ entonces necesariamente $p = 0$. De lo contrario, p puede ser elegido de modo que $p \neq 0$.*

Demostración. Veamos primero la afirmación i).

Sea $p \in S^m(\Omega)$ por (2.14) tenemos que

$$p(X,D)u(x) = \left\langle p_2^{\vee}(x, x-z)\big|_{z\in\Omega}, u(z)\right\rangle$$

para todo $u \in C_c^{\infty}(\Omega)$.

Dado $x \in \Omega$ afirmo que la distribución $p_2^{\vee}(x,z)$ es nula en el conjunto abierto

$$\{x\} - \Omega = \{x - y \mid y \in \Omega\}.$$

En efecto, sea $\phi \in C_c^{\infty}(\{x\} - \Omega)$ considero $\tilde{\phi} \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\tilde{\phi} = \phi$ en $\{x\} - \Omega$ y, $\tilde{\phi} = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus (\{x\} - \Omega)$ entones,

$$\begin{aligned}
\left\langle p_2^{\vee}(x,z)\big|_{z\in\{x\}-\Omega}, \phi(z)\right\rangle &= \left\langle p_2^{\vee}(x,z), \tilde{\phi}(z)\right\rangle \\
&= \left\langle p_2^{\vee}(x,x-z), \tilde{\phi}(x-z)\right\rangle \\
&= \left\langle p_2^{\vee}(x,x-z)\big|_{z\in\Omega}, \tilde{\phi}(x-z)\Big|_{z\in\Omega}\right\rangle \\
&= p(X,D)\left[\tilde{\phi}(x-z)\Big|_{z\in\Omega}\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

donde en el último paso usamos que $p(X,D)$ es nulo por hipótesis. En conclusión, $p_2^{\vee}(x,z)$ es nula en $\{x\} - \Omega$. Ahora, como $x \in \Omega$ es arbitrario tenemos que $p_2^{\vee}(x,z)$ es nula en

$$H := \{(x,z) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \mid z \in \{x\} - \Omega\}$$

siendo H abierto por ser $H = (\Omega \times \mathbb{R}^n) \cap G^{-1}(\Omega)$ con $G\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $G(x,z) = x - z$ una función continua.

Dado γ consideramos la función $f_\gamma\colon \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathscr{M}_{q\times p}(\mathbb{C})$ tal que $f_\gamma(x,z) = z^\gamma p_2^{\vee}(x,z)$.

Por un lado, sabemos que para cada $(x_0, z_0) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ la función f_γ representa el valor de la distribución $z^\gamma p_2^{\vee}(x_0, z)$ en $z = z_0$ como punto formal. Entonces, como la distribución $p_2^{\vee}(x,z)$ es nula en H tenemos que f_γ es nula en H.

Por otro lado, del Teorema 2.12 sabemos que f_γ es de clase C^j en $\Omega\times\mathbb{R}$ siempre que $|\gamma| > m+n+j$. Entonces, al ser γ arbitrario podemos afirmar que para cada $x \in \Omega$ la función

$$z \mapsto p_2^{\vee}(x,z)$$

es suave en $\mathbb{R}^n$.

Ahora nuestro objetivo será probar lo siguiente: para cada $A \subset \Omega$ compacto y cada α, β, γ multiíndices se verifica que

$$\sup_{(x,z)\in A\times\Omega} \left| z^\gamma D_z^\beta D_x^\alpha p_2^{\vee}(x,z)\right| < \infty. \tag{2.20}$$

Separaremos la prueba en dos casos según la relación de $|\gamma|$ con $m + n + |\alpha| + |\beta|$.

- Primer caso: $|\gamma| > m + n + |\alpha| + |\beta|$. Lo haremos por inducción en $|\beta|$.

Si $|\beta| = 0$ como $|\gamma| > m + n + |\alpha|$ estamos en las condiciones del Teorema 2.12 con la función f_γ. Por lo tanto (2.20) se obtiene de tomar f_γ y aplicar dicho Teorema.

Si $|\beta| > 0$ por la regla de la cadena tenemos que

$$\begin{aligned}
D_z^\beta D_x^\alpha f_\gamma(x,z) &= D_z^\beta D_x^\alpha \left[z^\gamma p_2^\vee(x,z)\right] \\
&= D_z^\beta \left[z^\gamma D_x^\alpha p_2^\vee(x,z)\right] \\
&= \sum_{\lambda\le\beta} \binom{\beta}{\lambda} \left[D_z^\lambda z^\gamma\right] \left[D_z^{\beta-\lambda} D_x^\alpha p_2^\vee(x,z)\right] \\
&= \sum_{\lambda\le\beta} \binom{\beta}{\lambda} \left[\frac{\gamma!}{(2\pi i)^{|\lambda|}(\gamma-\lambda)!} z^{\gamma-\lambda}\right] \left[D_z^{\beta-\lambda} D_x^\alpha p_2^\vee(x,z)\right] \\
&= z^\gamma D_z^\beta D_x^\alpha p_2^\vee(x,z) + \sum_{0<\lambda\le\beta} \binom{\beta}{\lambda} \left[\frac{\gamma!}{(2\pi i)^{|\lambda|}(\gamma-\lambda)!} z^{\gamma-\lambda}\right] \left[D_z^{\beta-\lambda} D_x^\alpha p_2^\vee(x,z)\right]
\end{aligned}$$

entonces

$$z^\gamma D_z^\beta D_x^\alpha p_2^\vee(x,z) = D_z^\beta D_x^\alpha f_\gamma(x,z) - \sum_{0<\lambda\le\beta} \binom{\beta}{\lambda} \frac{\gamma!}{(2\pi i)^{|\lambda|}(\gamma-\lambda)!} \left[z^{\gamma-\lambda}\right] \left[D_z^{\beta-\lambda} D_x^\alpha p_2^\vee(x,z)\right].$$

Ahora, por un lado como $|\gamma| > m+n+|\alpha|+|\beta|$ por el Teorema 2.12 se obtiene que el término $D_z^\beta D_x^\alpha f_\gamma(x,z)$ está acotado en $A\times\Omega$. Por otro lado, $|\gamma| > |\gamma-\lambda| > m+n+|\alpha|+|\beta-\lambda|$ entonces por la hipótesis inductiva el término

$$\sum_{0<\lambda\le\beta} \binom{\beta}{\lambda} \frac{\gamma!}{(2\pi i)^{|\lambda|}(\gamma-\lambda)!} \left[z^{\gamma-\lambda}\right] \left[D_z^{\beta-\lambda} D_x^\alpha p_2^\vee(x,z)\right]$$

está acotado en $A\times\Omega$. En conclusión,

$$\sup_{(x,z)\in A\times\Omega} \left|z^\gamma D_z^\beta D_x^\alpha p_2^\vee(x,z)\right| < \infty \text{ si } |\gamma| > m+n+|\alpha|+|\beta|.$$

- Segundo caso: $|\gamma| \le m+n+|\alpha|+|\beta|$.

Sea $N\in\mathbb{Z}^+$ entero positivo tal que $2N > m+n+|\alpha|+|\beta|$ entonces, dado $(x,\xi)\in A\times\mathbb{R}^n$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|z^\gamma D_z^\beta D_x^\alpha p_2^\vee(x,z)\right| &\le |z|^{|\gamma|} \left|D_z^\beta D_x^\alpha p_2^\vee(x,z)\right| \\
&\le \begin{cases} \left|D_z^\beta D_x^\alpha p_2^\vee(x,z)\right| & \text{si } |z|\le 1 \\ |z|^{2N} \left|D_z^\beta D_x^\alpha p_2^\vee(x,z)\right| & \text{si } |z|>1 \end{cases} \\
&\le \begin{cases} \left|D_z^\beta D_x^\alpha p_2^\vee(x,z)\right| & \text{si } |z|\le 1 \\ \left||z|^{2N} D_z^\beta D_x^\alpha p_2^\vee(x,z)\right| & \text{si } |z|>1 \end{cases} \\
&\le \begin{cases} \left|D_z^\beta D_x^\alpha p_2^\vee(x,z)\right| & \text{si } |z|\le 1 \\ \left|\left[\sum_{|\lambda|=N} \frac{N!}{\lambda!} z^{2\lambda}\right] D_z^\beta D_x^\alpha p_2^\vee(x,z)\right| & \text{si } |z|>1 \end{cases} \\
&\le \begin{cases} \left|D_z^\beta D_x^\alpha p_2^\vee(x,z)\right| & \text{si } |z|\le 1 \\ \sum_{|\lambda|=N} \frac{N!}{\lambda!} \left|z^{2\lambda} D_z^\beta D_x^\alpha p_2^\vee(x,z)\right| & \text{si } |z|>1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ahora, por un lado $\left|D_z^\beta D_x^\alpha p_2^\vee(x,z)\right|$ está acotado en $A\times\{z \mid |z|\le 1\}$ por ser un conjunto compacto. Por otro lado, como $2N > m+n+|\alpha|+|\beta|$ y $|\lambda| = N$ se tiene que el término

$$\sum_{|\lambda|=N} \frac{N!}{\lambda!} \left|z^{2\lambda} D_z^\beta D_x^\alpha p_2^\vee(x,z)\right|$$

está acotado en $A \times \{z \mid |z| > 1\}$ por el caso anterior. En conclusión,

$$\sup_{(x,z)\in A\times\Omega} \left| z^\gamma D_z^\beta D_x^\alpha p_2^\vee(x,z) \right| < \infty \text{ si } |\gamma| \leq m + n + |\alpha| + |\beta|.$$

Finalmente, por un lado por continuidad de la Transformada de Fourier existe $c > 0$ una constante positiva y una colección finita de multi-índices $\{\beta_j, \gamma_j \mid j = 1, ..., M\}$ tales que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left| y^\gamma D_y^\beta \left(\widehat{\phi}\right) \right| \leq c \sum_{j=1}^{M} \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \left| z^{\gamma_j} D_z^{\beta_j} \phi \right| \tag{2.21}$$

para todo $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Por otro lado, (2.20) implica que para cada α y para cada $x \in \Omega$ la función $z \mapsto D_x^\alpha p_2^\vee(x,z)$ está en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y, en consecuencia, la transformada clásica de Fourier de $D_x^\alpha p_2^\vee(x,z)$ es $D_x^\alpha p(x,z)$. Entonces, dado $(x,y) \in A \times \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\left| y^\gamma D_y^\beta D_x^\alpha p(x,y) \right| &= \left| y^\gamma D_y^\beta D_x^\alpha \int e^{-2\pi i y\cdot z} p_2^\vee(x,z)\, dz \right| \\
&= \left| y^\gamma D_y^\beta \int e^{-2\pi i y\cdot z} D_x^\alpha p_2^\vee(x,z)\, dz \right| \\
&\leq c \sum_{j=1}^{M} \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \left| z^{\gamma_j} D_z^{\beta_j} \left[D_x^\alpha p_2^\vee(x,z) \right] \right| \text{ (por (2.21))} \\
&< \infty \text{ (por (2.20))}.
\end{aligned}$$

En conclusión, para todo $A \subset \Omega$ compacto y todo α, β, γ multi-índices se tiene que

$$\sup_{(x,y)\in A\times\mathbb{R}^n} \left| y^\gamma D_y^\beta D_x^\alpha p(x,y) \right| < \infty$$

lo cual implica que $p \in S^{-\infty}(\Omega)$.

Veamos ahora la afirmación *ii)*

Si $\Omega - \Omega$ es denso en $\mathbb{R}^n$. Por un lado, tenemos que la restricción $p_2^\vee(x,z)|_{\Omega\times(\Omega-\Omega)}$ determina a $p_2^\vee(x,z)$ completamente. Por otro lado, vimos que $p_2^\vee(x,z)$ es nula en H. Por lo tanto, $p_2^\vee(x,z)$ es nula en $\Omega \times \mathbb{R}^n$ por continuidad y, en conclusión, $p(x,\xi) = 0$.

Si $\Omega - \Omega$ no es denso en $\mathbb{R}^n$. Sean $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ y $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\operatorname{sop}(\phi) \cap (\Omega - \Omega) = \varnothing. \tag{2.22}$$

Considerando $p(x,\xi) = \psi(x)\widehat{\phi}(\xi)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
p_2^\vee(x,z) &= \int e^{2\pi i z\cdot\xi} p(x,\xi)\, dx \\
&= \int e^{2\pi i z\cdot\xi} \psi(x)\widehat{\phi}(\xi)\, dx \\
&= \psi(x) \int e^{2\pi i z\cdot\xi} \widehat{\phi}(\xi)\, dx \\
&= \psi(x)\phi(z).
\end{aligned}$$

En consecuencia, para cada $(x,z) \in \Omega \times \Omega$ por (2.22) se verifica que

$$K(x,z) = p_2^\vee(x, x - z) = \psi(x)\phi(x - z) = 0.$$

Por lo tanto,

$$p(X,D)u(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)\, dy = 0$$

para todo $u \in C_c^\infty(\Omega)$. En conclusión, podemos elegir $p(x,\xi) \neq 0$ de modo que $p(X,D)$ sea nulo. $\square$

Definición 2.20. Sean A un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\pi_x \colon A \times A \to A$ y $\pi_y \colon A \times A \to A$ los mapas proyección en el primer y segundo factor. Decimos que un conjunto $W \subset A \times A$ es *propio* si para todo conjunto compacto $K \subset A$ se tiene que los conjuntos $\pi_x^{-1}(K) \cap W$ y $\pi_y^{-1}(K) \cap W$ son compactos.

Como ejemplo trivial de conjunto propio tenemos si W en la Definición 2.20 es un conjunto compacto entonces, por continuidad es propio. Pero no necesariamente un conjunto debe ser acotado para ser propio, por ejemplo sea $\epsilon > 0$ entonces la "franja diagonal"

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid |x - y| \leq \epsilon\}$$

es un conjunto propio en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$. También el conjunto Δ_Ω es un conjunto propio en $\Omega \times \Omega$.

Será útil observar para más adelante que *todo conjunto cerrado contenido en un conjunto propio también es propio.* En efecto, si $W \subset A \times A$ es propio y tenemos un subcojunto $H \subset W$ cerrado entonces, en la Definición 2.20 se tiene que $\pi_x^{-1}(K) \cap H$ es un conjunto cerrado contenido en el conjunto compacto $\pi_x^{-1}(K) \cap W$ y, por lo tanto, es compacto. De forma análoga, $\pi_y^{-1}(K) \cap H$ es compacto. En conclusión, H es propio.

Definición 2.21. Sea $T \colon C_c^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ un mapa lineal continuo con núcleo distribucional K. Diremos que T es *propiamente soportado* si $\operatorname{sop}(K)$ es un conjunto propio de $\Omega \times \Omega$.

Observamos que todo operador diferencial es propiamente soportado. En efecto, sea $L \colon C_c^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ un operador diferencial entonces

$$\begin{aligned} Lu(x) &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha \left(\int_\Omega \delta(x - y) u(y)\, dy \right) \\ &= \int_\Omega \left(\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha \delta(x - y) \right) u(y)\, dy \\ &= \int_\Omega K(x, y) u(y)\, dy \end{aligned}$$

con

$$K(x, y) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha \delta(x - y).$$

Luego, es claro que $\operatorname{sop}(K) \subset \Delta_\Omega$ y como Δ_Ω es propio entonces, $\operatorname{sop}(K)$ es propio y en consecuencia L es propiamente soportado.

Teorema 2.22. *Un operador $T \colon C_c^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ es propiamente soportado si y solo si se satisfacen:*

i) Para todo conjunto compacto $A \subset \Omega$ existe un conjunto compacto $B \subset \Omega$ tal que si $\operatorname{sop}(u) \subset A$ *entonces* $\operatorname{sop}(Tu) \subset B$.

ii) Para todo conjunto compacto $A \subset \Omega$ existe un conjunto compacto $C \subset \Omega$ tal que si $u = 0$ en C entonces $Tu = 0$ en A.

Demostración. Comencemos probando el directo.

Si T es propiamente soportado y K el núcleo distribucional de T, entonces $\operatorname{sop}(K)$ es propio.

Para probar que *i)* se satisface, sea $A \subset \Omega$ compacto, considero

$$B = \pi_x \left[\pi_y^{-1}(A) \cap \operatorname{sop}(K) \right]. \tag{2.23}$$

Tenemos que B es compacto por ser la imagen de un conjunto compacto por una función continua. Ahora, afirmamos que

$$\operatorname{sop}(K) \cap (B^c \times A) = \varnothing. \tag{2.24}$$

En efecto, supongamos que existe

$$(z, w) \in \operatorname{sop}(K) \cap (B^c \times A)$$

entonces, $z \notin B$ y $w \in A$. Pero $z = \pi_x(z, w)$ y como $z \notin B$ por (2.23) necesariamente

$$(z, w) \notin \pi_y^{-1}(A) = \Omega \times A$$

y, en consecuencia, $w \notin A$ lo cual es absurdo.

Sea $u \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\operatorname{sop}(u) \subset A$ entonces, por (2.24) tenemos que para todo $v \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\operatorname{sop}(v) \subset B^c$ se verifica

$$\langle K, v \otimes u \rangle = 0$$

ya que $v \otimes u$ es una función soportada en $(\operatorname{sop}(K))^c$, y como

$$\langle K, v \otimes u \rangle = \langle Tu, v \rangle$$

concluimos que $\operatorname{sop}(Tu) \subset B$.

Para probar que $ii)$ se satisface. Sea $A \subset \Omega$ un conjunto compacto, considero $A' \subset \Omega$ compacto tal que $A \subset (\mathring{A}')$ y

$$C' = \pi_y \left[\pi_x^{-1}(A') \cap \operatorname{sop}(K) \right]. \tag{2.25}$$

Análogamente C' es compacto por ser la imagen de un conjunto compacto por una función continua. Ahora, afirmamos que

$$\operatorname{sop}(K) \cap \left(A' \times (C')^c\right) = \varnothing. \tag{2.26}$$

En efecto, supongamos que existe

$$(z, w) \in \operatorname{sop}(K) \cap \left(A' \times (C')^c\right)$$

entonces, $z \in A'$ y $w \notin C'$. Pero $w = \pi_y(z, w)$ y como $w \notin C'$ por (2.25) necesariamente

$$(z, w) \notin \pi_x^{-1}(A') = A' \times \Omega$$

y, en consecuencia, $z \notin A'$ lo cual es absurdo.

Ahora, tomo $C \subset \Omega$ compacto tal que $C' \subset \mathring{C}$. Sea $u \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $u = 0$ en C entonces, $\operatorname{sop}(u) \subset C^c \subset (C')^c$. Luego por (2.26) tenemos que para todo $v \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\operatorname{sop}(v) \subset (\mathring{A}')$ se verifica

$$\langle K, v \otimes u \rangle = 0$$

ya que $v \otimes u$ es una función soportada en $(\operatorname{sop}(K))^c$, y como

$$\langle K, v \otimes u \rangle = \langle Tu, v \rangle$$

concluimos que $Tu = 0$ en $(\mathring{A}')$ y, por lo tanto, $Tu = 0$ en A.

Recíprocamente, si $i)$ y $ii)$ se satisfacen probaremos que $\operatorname{sop}(K)$ es un conjunto propio en $\Omega \times \Omega$. Sea $A \subset \Omega$ compacto, primero veamos que $\operatorname{sop}(K) \cap (\Omega \times A)$ es compacto en $\Omega \times \Omega$. Considero $A' \subset \Omega$

compacto tal que $A \subset (\mathring{A}')$ entonces, por $i)$ existe $B' \subset \Omega$ compacto tal que si $\operatorname{sop}(u) \subset A'$ entonces $\operatorname{sop}(Tu) \subset B'$. Luego, para todos $u, v \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\operatorname{sop}(u) \subset (\mathring{A}')$ y $\operatorname{sop}(v) \subset (B')^c$ tenemos que

$$\langle Tu, v\rangle = 0,$$

pero

$$\langle K, v \otimes u\rangle = \langle Tu, v\rangle$$

entonces,

$$\operatorname{sop}(K) \cap \Big((B')^c \times (\mathring{A}')\Big) = \varnothing.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\operatorname{sop}(K) \cap (\Omega \times A) &= \operatorname{sop}(K) \cap \left((B' \times A) \cup ((B')^c \times A)\right)\\ &= \operatorname{sop}(K) \cap (B' \times A)\\ &\subset B' \times A\end{aligned}$$

y, en consecuencia, $\operatorname{sop}(K) \cap (\Omega \times A)$ es compacto ya que es un conjunto cerrado contenido en el conjunto compacto $B' \times A$.

Ahora, veamos que $\operatorname{sop}(K) \cap (A \times \Omega)$ es compacto en $\Omega \times \Omega$. Sea $A' \subset \Omega$ compacto tal que $A \subset (\mathring{A}')$ entonces, por $ii)$ existe $C' \subset \Omega$ compacto tal que si $u = 0$ en C' entonces $Tu = 0$ en A'. Luego, para todos $u, v \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\operatorname{sop}(u) \subset (C')^c$ y $\operatorname{sop}(v) \subset (\mathring{A}')$ tenemos que

$$\langle Tu, v\rangle = 0,$$

pero

$$\langle K, v \otimes u\rangle = \langle Tu, v\rangle$$

entonces

$$\operatorname{sop}(K) \cap \Big((\mathring{A}') \times (C')^c\Big) = \varnothing.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\operatorname{sop}(K) \cap (A \times \Omega) &= \operatorname{sop}(K) \cap \left((A \times C') \cup (A \times (C')^c)\right)\\ &= \operatorname{sop}(K) \cap (A \times C')\\ &\subset A \times C'\end{aligned}$$

y, en consecuencia, $\operatorname{sop}(K) \cap (A \times \Omega)$ es compacto ya que es un conjunto cerrado contenido en el conjunto compacto $A \times C'$.

□

Del Teorema 2.22 podemos deducir dos propiedades importantes de los operadores propiamente soportados. Si $T \colon C_c^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ es propiamente soportado por un lado, sea $u \in C_c^\infty(\Omega)$ por la propiedad $i)$ existe $B \subset \Omega$ compacto tal que $\operatorname{sop}(Tu) \subset B$ entonces, $Tu \in C_c^\infty(\Omega)$ y, por lo tanto, los operadores propiamente soportados mapean funciones de soporte compacto en funciones de soporte compacto. Por otro lado, de la propiedad $ii)$ podemos deducir que T se puede extender de forma continua a $C^\infty(\Omega)$. En efecto, sea $u \in C^\infty(\Omega)$. Para cada $x \in \Omega$ para definir $Tu(x)$ lo definimos en un entorno compacto de x es decir, dado $A \subset \Omega$ compacto tal que $x \in A$, tomo $C \subset \Omega$ como en $ii)$ y sea

$\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi|_C = 1$ defino $Tu(x) = T[\phi u](x)$ para todo $x \in A$. Luego, esto es independiente tanto de la elección de ϕ como de A. Por un lado, si hay otra $\phi' \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi'|_C = 1$ entonces

$$(\phi u - \phi' u)(x) = 1u(x) - 1u(x) = 0 \text{ para todo } x \in C$$

y, en conseucencia

$$T[\phi u - \phi' u](x) = 0 \text{ para todo } x \in A$$

por lo tanto

$$T[\phi u](x) = T[\phi' u](x) \text{ para todo } x \in A.$$

Por otro lado, sean $A_1 \subset \Omega$ y $A_2 \subset \Omega$ compactos tales que $x \in A_1$ y $x \in A_2$ entonces, existen $C_1 \subset \Omega$, $\phi_1 \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_1|_C = 1$ y $C_2 \subset \Omega$, $\phi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_2|_C = 1$. Entonces, defino $Tu(x) = T[\phi_1 u](x)$ para todo $x \in A_1$ y $Tu(x) = T[\phi_2 u](x)$ para todo $x \in A_2$ luego, tomando $\psi|_{C_1 \cap C_2} = 1$ defino $Tu(x) = T[\psi u](x)$ para todo $x \in A_1 \cap A_2$ y ambas definiciones coinciden. La continuidad de T en $C^\infty(\Omega)$ se deduce de la continuidad de T en $C_c^\infty(\Omega)$ y de las propiedades $i)$ y $ii)$.

La composición de operadores lineales de la forma $T\colon C_c^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ por lo general no está bien definida, pero si ambos son propiamente soportados por lo observado anteriormente la composición estará bien definida y, además, será propiamente soportado como veremos en Corolario 2.23.

Corolario 2.23. *Sean $T\colon C_c^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ y $S\colon C_c^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ operadores propiamente soportados. Entonces, la composición $ST\colon C_c^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ es un operador propiamente soportado.*

Demostración. Sean S y T propiamente soportados, para ver que ST es propiamente soportado veremos que satisface ambas propiedades del Teorema 2.22.

Dado $A \subset \Omega$ compacto, como T es propiamente soportado, por $i)$ existe $B \subset \Omega$ compacto tal que

$$\text{si } \operatorname{sop}(u) \subset A \text{ entonces } \operatorname{sop}(Tu) \subset B.$$

Luego para ese B como S es propiamente soportado, por $i)$ existe $C \subset \Omega$ compacto tal que

$$\text{si } \operatorname{sop}(u) \subset B \text{ entonces } \operatorname{sop}(Su) \subset C.$$

Por lo tanto,

$$\text{si } \operatorname{sop}(u) \subset A \text{ entonces } \operatorname{sop}(Tu) \subset B, \text{ entonces } \operatorname{sop}(S(Tu)) \subset C.$$

En conclusión, ST satisface la propiedad $i)$.

Dado $M \subset \Omega$ compacto como S es propiamente soportado, por $ii)$ existe $N \subset \Omega$ compacto tal que

$$\text{si } u = 0 \text{ en } N \text{ entonces } Su = 0 \text{ en } M.$$

Luego para ese N como T es propiamente soportado, por $ii)$ existe $P \subset \Omega$ compacto tal que

$$\text{si } u = 0 \text{ en } P \text{ entonces } Tu = 0 \text{ en } N.$$

Por lo tanto,

$$\text{si } u = 0 \text{ en } P \text{ entonces } Tu = 0 \text{ en } N, \text{ entonces } S(Tu) = 0 \text{ en } M.$$

En conclusión, ST satisface la propiedad $ii)$. □

Se verifica fácilmente que los operadores propiamente soportados forman un álgebra con la composición como producto.

Lema 2.24. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Entonces, existen $\{S_j\}_{j=1}^\infty \subset \Omega$ conjuntos abiertos tales que* *i)* $\overline{S_j}$ *es compacto para todo* j.

ii) $\overline{S_j} \subset S_{j+1}$ *para todo* j.

iii) $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j = \Omega$.

Demostración. Para cada $j \geq 1$ definimos

$$S_j := \left\{ x \in \Omega \mid |x| < j \text{ y } d(x;\Omega^c) > \frac{1}{j} \right\}.$$

Luego se verifica fácilmente que se satisfacen las condiciones del enunciado. □

Lema 2.25. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *abierto. Entonces, existen* $\{U_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Omega$ *y* $\{V_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Omega$*, familias de conjuntos abiertos tales que*

i) $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j = \Omega$.

ii) $\overline{U_j} \subset V_j$ *para todo* j.

iii) $\overline{V_j}$ *es compacto para todo* j.

iv) Cada punto de Ω *tiene un entorno que se interseca con una cantidad finita de* V_j.

Demostración. Sea $\{S_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Omega$ como en el Lema 2.24. Tomamos $U_1 = S_3$ y $V_1 = S_4$, luego

$$U_j = S_{j+2} \setminus \overline{S_j} \text{ para todo } j \geq 2 \text{ y}$$
$$V_j = S_{j+3} \setminus \overline{S_{j-1}} \text{ para todo } j \geq 2.$$

De este modo es fácil verificar que se satisfacen las condiciones del enunciado. □

Proposición 2.26. *Sea* W *un subconjunto propio de* $\Omega \times \Omega$*. Entonces existe* $\phi \in C^{\infty}(\Omega \times \Omega)$ *tal que* $\operatorname{sop}(\phi)$ *es propio y* $\phi = 1$ *en un entorno de* W.

Demostración. Sean $\{U_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Omega$ y $\{V_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Omega$ como en Lema 2.25. Considero

$$J = \{(j;k) \mid W \cap (U_j \times U_k) \neq \varnothing\}$$

entonces, para cada j pueden suceder solamente una de las siguientes situaciones

a) $W \cap (U_j \times U_k) = \varnothing$ para todo k

b) $W \cap (U_j \times U_k) \neq \varnothing$ para una cantidad finita de k

c) $W \cap (U_j \times U_k) \neq \varnothing$ para una cantidad infinita de k.

Afirmamos que la opción $c)$ no sucede. En efecto, supongamos que sí sucede. Entonces para un j fijo existe una sucesión $\{(x_k;y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$(x_k;y_k) \in W \cap (U_j \times U_k) \text{ para todo } k.$$

Como $W \cap (U_j \times U_k) \subset W \cap \pi_x^{-1}\left(\overline{U_j}\right)$, entonces

$$(x_k;y_k) \in W \cap \pi_x^{-1}\left(\overline{U_j}\right) \text{ para todo } k.$$

Pero W es propio por hipótesis entonces $W \cap \pi_x^{-1}\left(\overline{U_j}\right)$ es compacto y, en consecuencia, la sucesión $\{(x_k; y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ tiene un punto de acumulación

$$(x'; y') \in W \cap \pi_x^{-1}\left(\overline{U_j}\right).$$

Luego por continuidad de la proyección π_y se tiene que y' es un punto de acumulación de la sucesión $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$. Sea Z un entorno abierto de y' con clausura compacta. Por un lado, por construcción de los $\{V_j\}_{j=1}^{\infty}$ tenemos que $\overline{Z}$ interseca solamente una cantidad finita de V_j. Por otro lado, al ser y' punto de acumulación de $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ el entorno Z contiene una cantidad infinita de términos y_k y por ende $\overline{Z}$ interseca una cantidad infinita de V_k, lo cual es absurdo. Por lo tanto, la opción c) no sucede.

Sea

$$X = \bigcup_{(j;k)\in J} \overline{V_j} \times \overline{V_k}.$$

Nuestro objetivo ahora será probar que X es propio. Para eso debemos ver que para todo $K \subset \Omega$ compacto los conjuntos $\pi_x^{-1}(K) \cap X$ y $\pi_y^{-1}(K) \cap X$ son compactos, pero desde que $\{U_j\}_{j=1}^{\infty}$ es un cubrimiento de Ω alcanza con probar que $\pi_x^{-1}(\overline{U_j}) \cap X$ y $\pi_y^{-1}(\overline{U_j}) \cap X$ son compactos para todo j. En efecto, para cada j_0 fijo tenemos que

$$\pi_x^{-1}(\overline{U_{j_0}}) \cap X = \pi_x^{-1}(\overline{U_{j_0}}) \cap \bigcup \left\{\overline{V_j} \times \overline{V_k} \mid \overline{V_j} \cap \overline{U_{j_0}} \neq \varnothing \ ; \ (j;k) \in J\right\}$$

y como $\overline{U_{j_0}}$ es compacto por construcción interseca solamente una cantidad finita de $\overline{V_j}$. Entonces la unión de la derecha es finita y, por lo tanto, dicha unión es un conjunto compacto. En consecuencia, $\pi_x^{-1}(\overline{U_{j_0}}) \cap X$ es un conjunto compacto por ser igual a un conjunto que es cerrado y está contenido en un conjunto compacto. De forma análoga, obtenemos que $\pi_y^{-1}(\overline{U_{j_0}}) \cap X$ es un conjunto compacto.

Para cada j considero $\psi_j \in C_c^{\infty}(\Omega, [0,1])$ tal que $\psi_j = 1$ en $\overline{U_j}$ y $\operatorname{sop}(\psi_j) \subset V_j$. Sea

$$\psi(x; y) = \sum_{(j;k)\in J} \psi_j(x)\psi_k(y).$$

Como cada entorno de (x, y) interseca una cantidad finita de $\overline{V_j} \times \overline{V_k}$ se tiene que para cada $(x; y)$ la sumatoria tiene una cantidad finita de términos no nulos y, por lo tanto, $\psi \in C^{\infty}(\Omega \times \Omega)$. Luego por construcción y al ser ψ no negativa se tiene

$$\operatorname{sop}(\psi) \subset X,$$

pero X es propio entonces $\operatorname{sop}(\psi)$ es propio. Además, $\psi \geq 1$ en $\bigcup_{(j;k)\in J} U_j \times U_k$, que es un entorno de W. Finalmente para construir ϕ, tomando $\zeta \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que

$$0 \leq \zeta(t) \leq 1, \ \zeta(t) = 0 \text{ si } t \leq 0 \text{ y}, \ \zeta(t) = 1 \text{ si } t \geq 1$$

obtenemos que $\phi = \zeta \circ \psi$ es la función buscada ya que $\phi \in C^{\infty}(\Omega \times \Omega)$, $\phi = 1$ en un entorno de W, y $\operatorname{sop}(\phi)$ es propio ya que $\operatorname{sop}(\phi) \subset \operatorname{sop}(\psi)$. □

Proposición 2.27. *Sea N un entorno de la diagonal Δ_Ω. Entonces, existe $\phi \in C^{\infty}(\Omega \times \Omega)$ tal que* $\operatorname{sop}(\phi)$ *es propio,* $\operatorname{sop}(\phi) \subset N$ *y,* $\phi = 1$ *en un entorno de* Δ_Ω.

Demostración. Para cada $x \in \Omega$ considero O_x^1 y O_x^2 entornos abiertos de x tales que

$$\overline{O_x^1} \subset O_x^2 \text{ y } \overline{O_x^2} \times \overline{O_x^2} \subset N.$$

Sean $\{U_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Omega$ y $\{V_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Omega$ como en Lema 2.25. Entonces como cada $\overline{V_j}$ es compacto, es cubierto por una cantidad finita de O_x^1 y, por lo tanto, existen $x_1^j, ..., x_{n_j}^j$ tales que

$$\overline{V_j} = \bigcup_{l=1}^{n_j} \overline{V_j} \cap O^1_{x_l^j}.$$

Ahora, sean

$$U_{x_l^j} = U_j \cap O^1_{x_l^j} \text{ y } V_{x_l^j} = V_j \cap O^2_{x_l^j}$$

entonces, el conjunto

$$\bigcup_{\substack{j=1,\dots,\infty \\ l=1,\dots,n_j}} U_{x_l^j} \times U_{x_l^j}$$

es un entorno abierto de Δ_Ω. Además, se verifica que

$$\bigcup_{\substack{j=1,\dots,\infty \\ l=1,\dots,n_j}} \overline{V_{x_l^j}} \times \overline{V_{x_l^j}} \subset \bigcup_{\substack{j=1,\dots,\infty \\ l=1,\dots,n_j}} \overline{O^2_{x_l^j}} \times \overline{O^2_{x_l^j}} \subset N.$$

Por un argumento análogo al realizado en la Proposición 2.26 se obtiene que

$$\bigcup_{\substack{j=1,\dots,\infty \\ l=1,\dots,n_j}} \overline{V_{x_l^j}} \times \overline{V_{x_l^j}}$$

es un conjunto propio.

Para cada j, l considero $\psi_{x_l^j} \in C_c^\infty(\Omega, [0,1])$ tal que $\psi_{x_l^j} = 1$ en $\overline{U_{x_l^j}}$ y $\text{sop}(\psi_{x_l^j}) \subset V_{x_l^j}$. Entonces, sea

$$\psi(x; y) = \sum_{\substack{j=1,\dots,\infty \\ l=1,\dots,n_j}} \psi_{x_l^j}(x)\psi_{x_l^j}(y)$$

tenemos que para cada (x, y) hay una cantidad finita de términos no nulos y, por lo tanto, $\psi \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$. Además, por construcción

$$\text{sop}(\psi) \subset \bigcup_{\substack{j=1,\dots,\infty \\ l=1,\dots,n_j}} \overline{V_{x_l^j}} \times \overline{V_{x_l^j}} \text{ y } \psi \geq 1 \text{ en } \bigcup_{\substack{j=1,\dots,\infty \\ l=1,\dots,n_j}} U_{x_l^j} \times U_{x_l^j}.$$

Finalmente, tomando $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$0 \leq \zeta(t) \leq 1,\ \zeta(t) = 0 \text{ si } t \leq 0 \text{ y},\ \zeta(t) = 1 \text{ si } t \geq 1$$

obtenemos que $\phi = \zeta \circ \psi$ es la función buscada ya que $\phi \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$, $\phi = 1$ en un entorno de Δ_Ω, $\text{sop}(\phi) \subset \text{sop}(\psi) \subset N$ y, $\text{sop}(\phi)$ es propio ya que $\text{sop}(\psi)$ es propio.

□

2.4 Expansión Asintótica de Símbolos

Sean $\{m_j\}_{j=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ una sucesión estrictamente decreciente tal que

$$\lim_{j \to \infty} m_j = -\infty$$

y $p_j \in S^{m_j}(\Omega)$ para todo $j \geq 0$, decimos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j$$

es una *serie formal*. Notar que esta serie puede no ser convergente.

Una serie formal $\sum_{j=0}^{\infty} p_j$ diremos que es una *expansión asintótica* del símbolo $p \in S^{m_0}(\Omega)$ si se satisface que

$$p - \sum_{j=0}^{k-1} p_j \in S^{m_k}(\Omega)$$

para todo $k > 0$. Lo denotamos

$$p \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j.$$

El comportamiento asintótico de los símbolos es lo que nos importará al momento de comparar el comportamiento de operadores pseudo-diferenciales. Para esto nos basaremos en lo siguiente: *dos símbolos p y q tienen la misma expansión asintótica $\sum_{j=0}^{\infty} p_j$ si y sólo si $p - q \in S^{-\infty}(\Omega)$*. En efecto, si $\sum_{j=0}^{\infty} p_j$ es la expansión asintótica de p y q entonces

$$p - q = \underbrace{\left(p - \sum_{j<k} p_j\right)}_{\in S^{m_k}(\Omega)} - \underbrace{\left(q - \sum_{j<k} p_j\right)}_{\in S^{m_k}(\Omega)} \in S^{m_k}(\Omega)$$

para todo $k > 0$ y, por lo tanto, $p - q \in S^{-\infty}(\Omega)$. Si $p - q \in S^{-\infty}(\Omega)$ entonces, $q + 0 + 0 + 0...$ es una expansión asintótica de p y q.

Teorema 2.28. *Sean $p_j \in S^{m_j}(\Omega)$ para todo $j \geq 0$ siendo $\{m_j\}_{j=0}^{\infty}$ una sucesión estrictamente decreciente tal que $\lim_{j\to\infty} m_j = -\infty$. Entonces, existe $p \in S^{m_0}(\Omega)$ (único módulo $S^{-\infty}(\Omega)$) tal que $p \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j$.*

Demostración. Por Lema 2.24 tomo $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Omega$ una sucesión de conjuntos abiertos tal que

- $\overline{\Omega_j} \subset \Omega_{j+1}$
- $\overline{\Omega_j}$ es compacto para todo $j \geq 0$
- $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$.

Considero una función suave $\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que

$$0 \leq \phi(\xi) \leq 1,\ \phi(\xi) = 0 \text{ si } |\xi| \leq 1 \text{ y, } \phi(\xi) = 1 \text{ si } |\xi| \geq 2.$$

Afirmamos que existe una sucesión $\{t_j\}_{j=0}^{\infty}$ de números positivos estrictamente decreciente menores a 1 con $t_j \to 0$ cuando $j \to \infty$ en la que cada término verifica

$$\left| D_x^{\beta} D_{\xi}^{\alpha} \left[\phi(t_j\xi) p_j(x,\xi)\right]\right| \leq \frac{1}{2^j} \left(1 + |\xi|\right)^{m_{j-1} - |\alpha|} \tag{2.27}$$

para todo $x \in \Omega_j$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ y para todos $|\alpha| + |\beta| \leq j$.

Vamos a ir construyendo los términos de la sucesión exigiendo que para cada p_j se verifique (2.27) para $|\alpha| + |\beta| \leq j$ en Ω_j es decir, siguiendo el diagrama:

$$\begin{array}{llllll}
p_0 \to & |\alpha|+|\beta|=0 & \longleftrightarrow & & & \Omega_0 \\
p_1 \to & |\alpha|+|\beta|=0 \cdots & |\alpha|+|\beta|=1 & \longleftrightarrow & & \Omega_1 \\
p_2 \to & |\alpha|+|\beta|=0 \cdots & |\alpha|+|\beta|=1 \cdots & |\alpha|+|\beta|=2 & \longleftrightarrow & \Omega_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \leftrightarrow & \vdots \\
p_j \to & |\alpha|+|\beta|=0 \cdots & |\alpha|+|\beta|=1 \cdots & |\alpha|+|\beta|=2 \cdots & |\alpha|+|\beta|=j \leftrightarrow & \Omega_j \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

- Si $\alpha = \beta = 0$. Como $p_0 \in S^{m_0}(\Omega)$ para el compacto $\overline{\Omega_0}$ existe una constante $c_{0,0,\overline{\Omega_0}} > 0$ tal que

$$|\phi(t_0\xi)p_0(x,\xi)| \leq |p_0(x,\xi)| \leq c_{0,0,\overline{\Omega_0}} (1+|\xi|)^{m_0}$$

para todos $x \in \overline{\Omega_0}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ y, cualquier $t_0 > 0$. Entonces, tomo $t_0 \in (0,1)$ arbitrario.

- Si $|\alpha| + |\beta| \leq j$. En primer lugar si $\alpha = \beta = 0$ ó $\alpha = 0$ para cada $t < 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left|D_x^\beta \left[\phi(t\xi)p_j(x,\xi)\right]\right| &= \left|\phi(t\xi)D_x^\beta \left[p_j(x,\xi)\right]\right| \\
&\leq \left|D_x^\beta \left[p_j(x,\xi)\right]\right| \\
&\leq c_{0,\beta,\overline{\Omega_j}} (1+|\xi|)^{m_j} \\
&\leq c_j' (1+|\xi|)^{m_j} \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

siendo $c_j' = \max\left\{c_{0,\beta,\overline{\Omega_j}} \mid \alpha = \beta = 0 \text{ ó } 0 < |\alpha| + |\beta| \leq j \text{ con } \alpha = 0\right\}$.

En segundo lugar si $0 < |\alpha| + |\beta| \leq j$ y $\alpha \neq 0$ observamos que para cada $t < 1$ y cada α tenemos $D_\xi^\alpha \phi(t\xi) = t^{|\alpha|} D_{t\xi}^\alpha \phi(t\xi)$. Así,

$$|D_\xi^\alpha \phi(t\xi)| \leq t^{|\alpha|} m_\alpha \qquad (2.29)$$

donde

$$m_\alpha = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |D_\xi^\alpha \phi(\xi)|.$$

Además, $D_\xi^\alpha \phi(t\xi) = 0$ si $|\xi| \leq 1/t$ o $|\xi| \geq 2/t$ ya que $\phi(t\xi)$ es constante ahí. Entonces, alcanza con estimar (2.27) en

$$1/t \leq |\xi| \leq 2/t.$$

En esta región

$$t|\xi| \leq 2 \ \text{ y } \ 2/|\xi| < 4/(1+|\xi|).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\left|D_\xi^\alpha \phi(t\xi)\right| &\leq |\xi|^{-|\alpha|}|\xi|^{|\alpha|}t^{|\alpha|}m_\alpha \text{ (por (2.29))} \\
&\leq |\xi|^{-|\alpha|}2^{|\alpha|}m_\alpha \\
&< 4^{|\alpha|}(1+|\xi|)^{-|\alpha|} m_\alpha \\
&= c_\alpha(1+|\xi|)^{-|\alpha|}
\end{aligned}$$

donde $c_\alpha = 4^{|\alpha|} m_\alpha$. Entonces, para cada $0 < |\alpha| + |\beta| \le j$ con $\alpha \neq 0$, $t < 1$, $x \in \overline{\Omega_j}$ y, $\xi \in \mathbb{R}^n$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left| D_x^\beta D_\xi^\alpha \left[\phi(t\xi) p_j(x,\xi) \right] \right| &= \left| D_\xi^\alpha \left[\phi(t\xi) \left(D_x^\beta p_j(x,\xi) \right) \right] \right| \\
&= \left| \sum_{\gamma \le \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \left[D_\xi^{\alpha-\gamma} \phi(t\xi) \right] \left[D_\xi^\gamma D_x^\beta p_j(x,\xi) \right] \right| \\
&\le \sum_{\gamma \le \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} c_{\alpha,\gamma} (1+|\xi|)^{-|\alpha|+|\gamma|} c^j_{\gamma,\beta,\overline{\Omega_j}} (1+|\xi|)^{m_j - |\gamma|} \\
&= \sum_{\gamma \le \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} c_{\alpha,\gamma} c^j_{\gamma,\beta,\overline{\Omega_j}} (1+|\xi|)^{m_j - |\alpha|} \\
&= c'_{j,\alpha,\beta,\overline{\Omega_j}} (1+|\xi|)^{m_j-|\alpha|} \\
&\le d'_j (1+|\xi|)^{m_j - |\alpha|} \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

siendo $d'_j = \max \left\{ c'_{j,\alpha,\beta,\overline{\Omega_j}} \mid 0 < |\alpha| + |\beta| \le j \text{ y } \alpha \neq 0 \right\}$.

En conclusión, si

$$e'_j = \max \left\{ c'_j, d'_j \right\}$$

juntando ambos casos ((2.28) y (2.30)) y tomando t_j tal que

$$t_j < t_{j-1} \text{ y } e'_j \left(1 + t_j^{-1}\right)^{-1} \le 2^{-j}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\left| D_x^\beta D_\xi^\alpha \left[\phi(t_j\xi) p_j(x,\xi) \right] \right| &\le e'_j (1+|\xi|)^{m_j-|\alpha|} \\
&\le e'_j (1+|\xi|)^{-1} (1+|\xi|)^{m_{j-1}-|\alpha|} \\
&\le e'_j \left(1 + t_j^{-1}\right)^{-1} (1+|\xi|)^{m_{j-1}-|\alpha|} \\
&\le 2^{-j} (1+|\xi|)^{m_{j-1}-|\alpha|} \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

para todo $|\alpha| + |\beta| \le j$, $x \in \overline{\Omega_j}$ y, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Definimos $p : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathscr{M}_{q\times p}(\mathbb{C})$ dada por

$$p(x,\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi(t_j\xi) p_j(x,\xi). \qquad (2.32)$$

Para cada (x,ξ) como $t_j \to 0$ la sumatoria tiene una cantidad finita de términos no nulos entonces, p está bien definida y es suave.

Afirmamos que $p \in S^{m_0}(\Omega)$. En efecto, sean $B \subset \Omega$ compacto y α, β multi-índices entonces, existe un entero $k > 0$ tal que

$$k > |\alpha| + |\beta| \text{ y } B \subset \Omega_k$$

en consecuencia

$$p(x,\xi) = \sum_{j \le k} \phi(t_j\xi) p_j(x,\xi) + \sum_{j > k} \phi(t_j\xi) p_j(x,\xi).$$

Por lo tanto, para todo $(x,\xi) \in B \times \mathbb{R}^n$ por un lado usando que $p_j \in S^{m_j}(\Omega)$ tenemos

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j\leq k} D_x^\beta D_\xi^\alpha \left[\phi(t_j\xi)p_j(x,\xi)\right]\right| &\leq \sum_{j\leq k}\left|D_x^\beta D_\xi^\alpha \left[\phi(t_j\xi)p_j(x,\xi)\right]\right| \\ &\leq \sum_{j\leq k} c_{\alpha,\beta,\overline{\Omega_k}} \left(1+|\xi|\right)^{m_j-|\alpha|} \\ &\leq \sum_{j\leq k} c_{\alpha,\beta,\overline{\Omega_k}} \left(1+|\xi|\right)^{m_0-|\alpha|} \\ &= c'_{\alpha,\beta} \left(1+|\xi|\right)^{m_0-|\alpha|}.\end{aligned}$$

Por otro lado en virtud de que para $j > k$ se verifican

$$B \subset \Omega_k \subset \Omega_j \text{ y } |\alpha| + |\beta| < j$$

estamos en las condiciones de (2.31) entonces,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j> k} D_x^\beta D_\xi^\alpha \left[\phi(t_j\xi)p_j(x,\xi)\right]\right| &\leq \sum_{j> k}\left|D_x^\beta D_\xi^\alpha \left[\phi(t_j\xi)p_j(x,\xi)\right]\right| \\ &\leq \sum_{j> k} 2^{-j} \left(1+|\xi|\right)^{m_{j-1}-|\alpha|} \\ &\leq \left(\sum_{j> k} 2^{-j}\right) \left(1+|\xi|\right)^{m_0-|\alpha|} \\ &\leq 2^{-k} \left(1+|\xi|\right)^{m_0-|\alpha|}.\end{aligned}$$

Juntando ambos casos

$$\begin{aligned}\left|D_x^\beta D_\xi^\alpha p(x,\xi)\right| &\leq \left|\sum_{j\leq k} D_x^\beta D_\xi^\alpha \left[\phi(t_j\xi)p_j(x,\xi)\right]\right| + \left|\sum_{j> k} D_x^\beta D_\xi^\alpha \left[\phi(t_j\xi)p_j(x,\xi)\right]\right| \\ &\leq c'_{\alpha,\beta} \left(1+|\xi|\right)^{m_0-|\alpha|} + 2^{-k} \left(1+|\xi|\right)^{m_0-|\alpha|} \\ &\leq \left(c'_{\alpha,\beta} + 2^{-k}\right) \left(1+|\xi|\right)^{m_0-|\alpha|}\end{aligned}$$

para todo $(x,\xi) \in B \times \mathbb{R}^n$. En conclusión $p \in S^{m_0}(\Omega)$.

Del mismo modo obtenemos que

$$\sum_{j=h}^{\infty} \phi(t_j\xi)p_j(x,\xi) \in S^{m_h}(\Omega) \tag{2.33}$$

para todo $h \geq 1$. En efecto, sean $B \subset \Omega$ compacto y α, β multi-índices entonces, existe un entero $k > h$ tal que

$$k > |\alpha| + |\beta| \text{ y } B \subset \Omega_k.$$

Por un lado tenemos

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=h}^{k} D_x^\beta D_\xi^\alpha \left[\phi(t_j\xi)p_j(x,\xi)\right]\right| &\leq \sum_{j=h}^{k}\left|D_x^\beta D_\xi^\alpha \left[\phi(t_j\xi)p_j(x,\xi)\right]\right| \\ &\leq \sum_{j=h}^{k} c_{\alpha,\beta,\overline{\Omega_k}} \left(1+|\xi|\right)^{m_j-|\alpha|} \\ &\leq \sum_{j=h}^{k} c_{\alpha,\beta,\overline{\Omega_k}} \left(1+|\xi|\right)^{m_h-|\alpha|} \\ &= c'_{\alpha,\beta} \left(1+|\xi|\right)^{m_h-|\alpha|}.\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j>k} D_x^\beta D_\xi^\alpha \left[\phi(t_j\xi)p_j(x,\xi)\right]\right| &\leq \sum_{j>k} \left|D_x^\beta D_\xi^\alpha \left[\phi(t_j\xi)p_j(x,\xi)\right]\right| \\ &\leq \sum_{j>k} 2^{-j}\left(1+|\xi|\right)^{m_{j-1}-|\alpha|} \\ &\leq \left(\sum_{j>k} 2^{-j}\right)\left(1+|\xi|\right)^{m_h-|\alpha|} \\ &\leq 2^{-k}\left(1+|\xi|\right)^{m_h-|\alpha|}.\end{aligned}$$

Juntando ambos casos

$$\begin{aligned}\left|D_x^\beta D_\xi^\alpha \left[\sum_{j=h}^{\infty} \phi(t_j\xi)p_j(x,\xi)\right]\right| &\leq \left|\sum_{j=h}^{k} D_x^\beta D_\xi^\alpha \left[\phi(t_j\xi)p_j(x,\xi)\right]\right| + \left|\sum_{j>k} D_x^\beta D_\xi^\alpha \left[\phi(t_j\xi)p_j(x,\xi)\right]\right| \\ &\leq c'_{\alpha,\beta}\left(1+|\xi|\right)^{m_h-|\alpha|} + 2^{-k}\left(1+|\xi|\right)^{m_h-|\alpha|} \\ &\leq \left(c'_{\alpha,\beta}+2^{-k}\right)\left(1+|\xi|\right)^{m_h-|\alpha|}\end{aligned}$$

para todo $(x,\xi) \in B \times \mathbb{R}^n$. En conclusión $\displaystyle\sum_{j=h}^{\infty} \phi(t_j\xi)p_j(x,\xi) \in S^{m_h}(\Omega)$.

Por último veamos que efectivamente $p \sim \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} p_j$. En efecto, dado un entero $k > 0$

$$\begin{aligned}p(x,\xi) - \sum_{j=0}^{k-1} p_j(x,\xi) &= \sum_{j=0}^{k-1} \left(\phi(t_j\xi)-1\right)p_j(x,\xi) + \sum_{j=k}^{\infty} \phi(t_j\xi)p_j(x,\xi) \\ &= C(x,\xi) + D(x,\xi).\end{aligned}$$

El primer término tiene soporte compacto ya que si $|\xi| \geq 2/t_j$ entonces, $\phi(t_j\xi) = 1$ y, en consecuencia, por el Ejemplo 2.6 se verifica que $C(x,\xi) \in S^{-\infty}(\Omega)$. El segundo término por (2.33) se tiene que $D(x,\xi) \in S^{m_k}(\Omega)$. En conclusión,

$$p(x,\xi) - \sum_{j=0}^{k-1} p_j(x,\xi) \in S^{m_k}(\Omega).$$

□

Teorema 2.29. *Sean $p \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ y $p_j \in S^{m_j}(\Omega)$ para todo $j \geq 0$ siendo $\{m_j\}_{j=0}^{\infty}$ una sucesión estrictamente decreciente tal que $\lim_{j\to\infty} m_j = -\infty$. Entonces, $p \in S^{m_0}(\Omega)$ y $p \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j$ si se satisfacen las siguientes condiciones:*

i) Existe una sucesión de números reales $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$ con $\lim_{k\to\infty} \mu_k = -\infty$ tal que para todos $B \subset \Omega$ compacto y $k > 0$ entero se verifica

$$\sup_{x\in B}\left|p(x,\xi) - \sum_{j=0}^{k-1} p_j(x,\xi)\right| \leq c_{B,k}(1+|\xi|)^{\mu_k}. \tag{2.34}$$

ii) Dados α y β multi-índices existe un número real $\mu(\alpha,\beta)$ tal que para todo $B \subset \Omega$ compacto se verifica

$$\sup_{x\in B}\left|D_x^\beta D_\xi^\alpha p(x,\xi)\right| \leq c_{B,\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{\mu(\alpha,\beta)}. \tag{2.35}$$

Demostración. Sean $p_j \in S^{m_j}(\Omega)$ en las condiciones de la hipótesis, entonces por Teorema 2.28 existe $q \in S^{m_0}(\Omega)$ tal que

$$q \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j. \tag{2.36}$$

En consecuencia, el Teorema estará probado si probamos que $p - q \in S^{-\infty}(\Omega)$ lo cual es equivalente a probar que (2.7) se verifica para todo m entero negativo y, esto lo haremos según $|\alpha| + |\beta|$.

- Si $\alpha = \beta = 0$. Sean $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$ la sucesión de la condición i), $B \subset \Omega$ compacto y, $k > 0$ entero entonces, para todo $(x, \xi) \in B \times \mathbb{R}^n$ usando (2.34) y (2.36) tenemos que

$$\begin{aligned}
|p(x,\xi) - q(x,\xi)| &\leq \left| p(x,\xi) - \sum_{j=0}^{k-1} p_j(x,\xi) \right| + \left| q(x,\xi) - \sum_{j=0}^{k-1} p_j(x,\xi) \right| \\
&\leq c_{B,k}(1 + |\xi|)^{\mu_k} + c_{0,0,B}^{k}(1 + |\xi|)^{m_k} \\
&= c'_{B,k}\left[(1 + |\xi|)^{\mu_k} + (1 + |\xi|)^{m_k}\right].
\end{aligned}$$

Pero $\lim\limits_{j\to\infty} m_j = -\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_k = -\infty$ y, k es arbitrario por lo tanto, para todo $N > 0$ entero existe una constante $c_{B,N} > 0$ tal que

$$\sup_{x\in B} |(p - q)(x,\xi)| \leq c_{B,N}(1 + |\xi|)^{-N}. \tag{2.37}$$

- Si $|\alpha| + |\beta| = 1$ veamos primero la acotación para la derivada en la variable x.
  Sea $K \subset \Omega$ compacto, si

$$\delta_0 = \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$$

tomando $0 < \epsilon < \dfrac{\delta_0}{2}$ se verifica que

$$x + \epsilon v \in \Omega$$

para todos $x \in \Omega$ y $v \in \mathbb{R}^n$ con $\|v\| = 1$. Así para cada (x, ξ) podemos realizar el desarrollo de Taylor para la función $p - q$ en la variable x y acotar para obtener

$$\epsilon\,|\langle \partial_x(p - q)(x,\xi), v\rangle| \leq |(p - q)(x + \epsilon v, \xi)| + |(p - q)(x,\xi)| + c\epsilon^2 \sup_{x\in K_{\delta/2}} \left|\partial_x^2(p - q)(x,\xi)\right|$$

con

$$K_{\delta/2} = \left\{ x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, K) \leq \frac{\delta}{2} \right\}.$$

Entonces, usando que $\|u\| = \sup\limits_{\|v\|=1} \langle u, v\rangle$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in K_{\delta/2}} |\partial_x(p - q)(x,\xi)| &= \sup_{x\in K_{\delta/2}, \|v\|=1} |\langle \partial_x(p - q)(x,\xi), v\rangle| \\
&\leq \frac{2}{\epsilon} \sup_{x\in K_{\delta/2}} |(p - q)(x,\xi)| + c\epsilon \sup_{x\in K_{\delta/2}} \left|\partial_x^2(p - q)(x,\xi)\right|.
\end{aligned}$$

Luego, por un lado usando (2.37) tenemos

$$\sup_{x\in K_{\delta/2}} |(p - q)(x,\xi)| \leq c_{K_{\delta/2},N}(1 + |\xi|)^{-N}.$$

Por otro lado, usando (2.35) y que $q \in S^{m_0}(\Omega)$

$$\sup_{x\in K_{\delta/2}} \left|\partial_x^2(p-q)(x,\xi)\right| \leq c_{K_{\delta/2},0,2}(1+|\xi|)^{\mu(0,2)} + c_{0,2,K_{\delta/2}}(1+|\xi|)^{m_0}.$$

Por lo tanto, juntando ambos casos

$$\sup_{x\in K_{\delta/2}} |\partial_x(p-q)(x,\xi)| \leq \frac{2}{\epsilon} c_{K_{\delta/2},N}(1+|\xi|)^{-N} + c'_{K_{\delta/2},0,2}\epsilon(1+|\xi|)^{\text{máx}\,\{\mu(0,2),m_0\}}.$$

Ahora si $\epsilon = (1+|\xi|)^{-s}$ se tiene que

$$\sup_{x\in K_{\delta/2}} |\partial_x(p-q)(x,\xi)| \leq 2c_{K_{\delta/2},N}(1+|\xi|)^{s-N} + c'_{K_{\delta/2},0,2}(1+|\xi|)^{-s+\text{máx}\,\{\mu(0,2),m_0\}}.$$

Por lo tanto, dado un entero $j > 0$ tomo $s \in \mathbb{R}$ tal que

$$-s + \text{máx}\,\{\mu(0,2), m_0\} < -j \text{ y } (1+|\xi|)^{-s} < \frac{\delta_0}{2}$$

luego, tomo $N > 0$ entero tal que

$$s - N < -j$$

de este modo obtenemos

$$\begin{aligned} \sup_{x\in K} |\partial_x(p-q)(x,\xi)| &\leq \sup_{x\in K_{\delta/2}} |\partial_x(p-q)(x,\xi)| \\ &\leq c''_{0,1,K}(1+|\xi|)^{-j}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Para probar la acotación de la derivada en la variable ξ procedemos de forma análoga al caso anterior pero realizando el desarrollo de Taylor en la variable ξ para obtener

$$\sup_{x\in K} |\partial_\xi(p-q)(x,\xi)| \leq c''_{1,0,K}(1+|\xi|)^{-j-1} \tag{2.39}$$

para todo j entero positivo.

- Por último, el caso $|\alpha| + |\beta| > 1$ se demuestra aplicando sucesivamente el caso $|\alpha| + |\beta| = 1$.

□

2.5 Amplitudes

Queremos generalizar la noción de operador pseudo-diferencial, para ello observemos lo siguiente. Sean $P \in \Psi^\infty(\Omega)$ con símbolo p y $u \in C_c^\infty(\Omega)$ tenemos que

$$\begin{aligned} Pu(x) &= \int e^{2\pi i x\cdot\xi} p(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\,d\xi \\ &= \int e^{2\pi i x\cdot\xi} p(x,\xi)\left[\int e^{-2\pi i y\cdot\xi} u(y)\,dy\right] d\xi \\ &= \int\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi)u(y)\,dyd\xi. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Por lo tanto, si al símbolo p “le agregamos” la variable y y pedimos que se comporte de igual forma, podremos obtener una definición más general que incluye a la anterior como veremos a continuación.

Definición 2.30. Sea $m \in \mathbb{R}$. Decimos que $a : \Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathscr{M}_{q\times p}(\mathbb{C})$ es una *amplitud de orden m* si es una función suave y para cada α, β, γ y cada compacto $K \subset \Omega$ existe una constante $c_{\alpha,\beta,\gamma,K} > 0$ tal que

$$\sup_{x,y\in K} \left|D_x^\beta D_y^\gamma D_\xi^\alpha a(x,y,\xi)\right| \leq c_{\alpha,\beta,\gamma,K}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}. \tag{2.41}$$

Al espacio de estas amplitudes lo denotamos con $A^m(\Omega)$.

Denotamos $A^{-\infty}(\Omega) = \bigcap_{m\in\mathbb{R}} A^m(\Omega)$ y $A^{\infty}(\Omega) = \bigcup_{m\in\mathbb{R}} A^m(\Omega)$.

Si $p(x,\xi) \in S^{\infty}(\Omega)$ es un símbolo entonces es una amplitud si lo vemos de esta forma

$$a(x,y,\xi) := p(x,\xi) \tag{2.42}$$

dejando la variable y libre. Entonces $p(x,\xi) \in A^{\infty}(\Omega)$ y, por lo tanto,

$$S^{\infty}(\Omega) \subset A^{\infty}(\Omega).$$

Ahora que tenemos la definición de amplitudes, para generalizar la definición de operadores pseudo-diferenciales lo natural es tomar la integral (2.40) y reemplazar el símbolo p por una amplitud $a \in A^{\infty}(\Omega)$ para luego definir el operador lineal

$$P_a\colon C_c^{\infty}(\Omega) \to C^{\infty}(\Omega)$$

tal que

$$P_a u(x) = \int\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} a(x,y,\xi)u(y)\, dyd\xi. \tag{2.43}$$

Pero, por un lado la integral (2.43) no es convergente en general por lo que la consideraremos como una integral iterada en ese orden. Por otro lado, al igual que en operadores pseudo-diferenciales debemos ver que la definición es consistente es decir, que $P_a u \in C^{\infty}(\Omega)$ para todo $u \in C_c^{\infty}(\Omega)$. Para eso necesitamos previamente el siguiente resultado.

Lema 2.31. *Supongamos que $a \in A^m(\Omega)$. Sean $B \subset \Omega$ compacto, α multi-índice y $N \in \mathbb{Z}^+$. Entonces, existe una constante $c_{B,\alpha,N} > 0$ tal que*

$$\left|\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} D_x^{\alpha} a(x,y,\xi)w(x,y)\, dy\right| \leq c_{B,\alpha,N}(1+|\xi|)^{m-N} \sum_{|\lambda|\leq 2N} \sup_{(x,y)\in B\times B} \left|D_y^{2\lambda} w(x,y)\right|$$

para todo $w \in C_c^{\infty}(\Omega\times\Omega)$ tal que $\operatorname{sop}(w) \subset B\times B$ *y para todo $x \in B$.*

Demostración. Sean $B \subset \Omega$ compacto y $N \in \mathbb{Z}^+$. Para cada λ multi-índice, $w \in C_c^{\infty}(\Omega\times\Omega)$ tal que $\operatorname{sop}(w) \subset B\times B$ y, cada $x \in B$ usando que $a \in A^m(\Omega)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\xi^{2\lambda}&\left|\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} D_x^{\alpha} a(x,y,\xi)w(x,y)\, dy\right| \\
&= \left|\xi^{2\lambda}\int_B e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} D_x^{\alpha} a(x,y,\xi)w(x,y)\, dy\right| \\
&= \left|\int_B \xi^{2\lambda} e^{-2\pi i y\cdot\xi} D_x^{\alpha} a(x,y,\xi)w(x,y)\, dy\right| \\
&= \left|\int_B (-1)^{2|\lambda|} D_y^{2\lambda}\left(e^{-2\pi i y\cdot\xi}\right) D_x^{\alpha} a(x,y,\xi)w(x,y)\, dy\right| \\
&= \left|\int_B e^{-2\pi i y\cdot\xi} D_y^{2\lambda}\left[D_x^{\alpha} a(x,y,\xi)w(x,y)\right] dy\right| \\
&= \left|\int_B e^{-2\pi i y\cdot\xi} \sum_{\theta\leq 2\lambda}\binom{2\lambda}{\theta} D_x^{\alpha} D_y^{\theta} a(x,y,\xi) D_y^{2\lambda-\theta} w(x,y) dy\right| \\
&\leq \sum_{\theta\leq 2\lambda}\binom{2\lambda}{\theta}\int_B \left|D_x^{\alpha} D_y^{\theta} a(x,y,\xi)\right|\left|D_y^{2\lambda-\theta} w(x,y)\right| dy \\
&\leq \sum_{\theta\leq 2\lambda}\binom{2\lambda}{\theta}\int_B c_{0,\alpha,\theta,B}\,(1+|\xi|)^m \left|D_y^{2\lambda-\theta} w(x,y)\right| dy \\
&\leq c'_{\alpha,\lambda,B}\,(1+|\xi|)^m \operatorname{vol}(B) \sum_{\theta\leq 2\lambda} \sup_{(x,y)\in B\times B}\left|D_y^{2\lambda-\theta} w(x,y)\right|.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Luego, combinando (1.7) con (2.44) se obtiene el resultado. □

Proposición 2.32. *Sean $u \in C_c^\infty(\Omega)$ y $a \in A^m(\Omega)$. Entonces*

$$P_a u(x) = \int\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} a(x,y,\xi) u(y)\, dy d\xi \in C^\infty(\Omega).$$

Demostración. Sean $x \in \Omega$ y $\epsilon > 0$ tal que $\overline{B_\epsilon(x)} \subset \Omega$. Para cada β se verifica que

$$\begin{aligned} D_x^\beta P_a u(x) &= D_x^\beta \int\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} a(x,y,\xi) u(y)\, dy d\xi \\ &= \int\int \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} \xi^\gamma e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} D_x^{\beta-\gamma} a(x,y,\xi) u(y)\, dy d\xi. \end{aligned}$$

Considero $\nu \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\nu = 1$ en $\overline{B_\epsilon(x)}$ y, $K = \mathrm{sop}(u) \cup \mathrm{sop}(\nu)$. Entonces, para cada $x \in \overline{B_\epsilon(x)}$ aplicando el Lema 2.31 con $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $m - N + |\beta| < -n$ tenemos

$$\begin{aligned} \left| D_x^\beta P_a u(x) \right| &= \left| \int\int \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} \xi^\gamma e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} D_x^{\beta-\gamma} a(x,y,\xi) u(y)\, dy d\xi \right| \\ &\leq \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} \int |\xi|^{|\gamma|} \left| \int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} D_x^{\beta-\gamma} a(x,y,\xi) u(y)\, dy \right| d\xi \\ &\leq \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} \int |\xi|^{|\beta|} \left| \int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} D_x^{\beta-\gamma} a(x,y,\xi) \nu(x) u(y)\, dy \right| d\xi \\ &\leq \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} \int (1+|\xi|)^{|\beta|} \left[c_{K,\beta-\gamma,N} (1+|\xi|)^{m-N} \sup_{x,y\in K} \left| D_y^{2\lambda} \nu(x) u(y) \right| \right] d\xi \\ &\leq \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} c_{K,\beta-\gamma,N} \left[\int (1+|\xi|)^{m-N+|\beta|} d\xi \right] \sup_{x,y\in K} \left| D_y^{2\lambda} \nu(x) u(y) \right| \\ &< \infty \end{aligned}$$

Por lo tanto, $P_a u|_{B_\epsilon(x)}$ es suave y como x es arbitrario se concluye que $P_a u \in C^\infty(\Omega)$. □

Como consecuencia directa de la Proposición 2.32 y lo visto en (2.40) y (2.42) podemos afirmar que todo operador pseudo-diferencial de orden m puede ser visto como un operador que proviene de una amplitud de orden m. Por lo tanto

$$\Psi^m(\Omega) \subset \{P_a \mid a \in A^m(\Omega)\}.$$

Los operadores P_a son suaves y la demostración de este hecho se realiza con un desarrollo similar al realizado en la Proposición 2.32.

A diferencia de lo que sucede con la correspondencia $p \mapsto p(X,D)$ donde hemos visto en la Proposición 2.19 que la inyectividad depende de Ω, la correspondencia $a \mapsto P_a$ no es inyectiva. Basta tomar $\phi, \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\mathrm{sop}(\phi) \cap \mathrm{sop}(\varphi) = \varnothing$ y considerar $a(x,y,\xi) = \phi(x)\varphi(y)$ así, $a \in A^0(\Omega)$ y se verifica fácilmente que $P_a u(x) = \phi(x)\varphi(x)u(x) = 0$.

Cada operador P_a con $a \in A^m(\Omega)$ tiene asociado un núcleo distribucional $K \in D'(\Omega \times \Omega)$ el cual está dado por

$$\langle K, w\rangle = \int\int\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} a(x,y,\xi) w(x,y)\, dy d\xi dx \tag{2.45}$$

para todo $w \in C_c^\infty(\Omega \times \Omega)$. Con una discusión similar a la realizada para núcleos de operadores pseudo-diferenciales pero usando el Lema 2.31 en lugar del Lema 2.11 obtenemos

$$\begin{gathered} \text{si } m < -n \text{ entonces } K(x,y) = a_3^\vee(x,y,x-y) \\ \text{y, si } m \geq -n \text{ entonces } (a_k)_3^\vee(x,y,x-y) \xrightarrow[k\to\infty]{\omega} K(x,y) \end{gathered}$$

donde $a_3^\vee$ indica la Transformada de Fourier Inversa de $a(x,y,\xi)$ en la tercera variable y, $a_k(x,y,\xi) = \lambda_k(\xi)a(x,y,\xi)$. Luego, asumiendo dicha discusión denotamos

$$K(x,y) = a_3^\vee(x,y,x-y) \text{ para todo } x,y \in \Omega. \tag{2.46}$$

De (2.45) obtenemos que $\langle K, w\rangle = 0$ siempre que

$$\mathrm{sop}(w)\bigcap\overline{\{(x,y)\in\Omega\times\Omega \mid (x,y,\xi)\in\mathrm{sop}(a) \text{ para algún } \xi\in\mathbb{R}^n\}} = \varnothing.$$

Por lo tanto

$$\mathrm{sop}(K) \subset \overline{\{(x,y)\in\Omega\times\Omega \mid (x,y,\xi)\in\mathrm{sop}(a) \text{ para algún } \xi\in\mathbb{R}^n\}}.$$

Proposición 2.33. *Sea $a \in A^m(\Omega)$. Entonces, existe $b \in A^m(\Omega)$ tal que P_b es propiamente soportado y $P_a - P_b$ es un operador infinitamente suave.*

Demostración. Considero $W \subset \Omega\times\Omega$ un entorno propio de la diagonal Δ_Ω. Por Proposición 2.26 existe $\phi \in C^\infty(\Omega\times\Omega)$ tal que $\mathrm{sop}(\phi)$ es propio y $\phi = 1$ en un entorno de W.

Sea

$$b(x,y,\xi) = \phi(x,y)a(x,y,\xi)$$

entonces en virtud de que ϕ es suave, se verifica fácilmente usando la regla de Leibnitz que $b \in A^m(\Omega)$.

Si K y K' son el núcleo distribucional de P_a y P_b respectivamente, afirmo que $K' = \phi K$. En efecto, sean $u, v \in C_c^\infty(\Omega)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle P_b u, v\rangle &= \int P_b u(x)v(x)\,dx \\
&= \int \left[\int\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} b(x,y,\xi)u(y)\,dyd\xi\right] v(x)\,dx \\
&= \int \left[\int\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} \phi(x,y)a(x,y,\xi)u(y)\,dyd\xi\right] v(x)\,dx \\
&= \int\int \phi(x,y)\left[\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} a(x,y,\xi)u(y)\,d\xi\right] v(x)\,dydx \\
&= \int\int \phi(x,y)a_3^\vee(x,y,x-y)u(y)v(x)\,dydx
\end{aligned}$$

entonces

$$K'(x,y) = \phi(x,y)a_3^\vee(x,y,x-y) = \phi(x,y)K(x,y).$$

Luego

$$\mathrm{sop}(K') \subset \mathrm{sop}(\phi)$$

de donde concluimos que $\mathrm{sop}(K')$ es propio y, en consecuencia, P_b es propiamente soportado.

Con el mismo desarrollo anterior, obtenemos que el núcleo distribucional de $P_a - P_b$ es $K' - K = (1-\phi)K$.

Por el Teorema 2.12 sabemos que K es C^∞ lejos de Δ_Ω y como $\phi = 1$ en Δ_Ω entonces, $(1-\phi)K$ es C^∞ en $\Omega\times\Omega$. Por lo tanto, $P_a - P_b$ tiene núcleo distribucional suave en $\Omega\times\Omega$ y, en consecuencia, con el mismo argumento usado en la Proposición 2.18 obtenemos que $P_a - P_b$ es un operador infinitamente suave. ☐

Proposición 2.34. *Sea $a \in A^m(\Omega)$ tal que P_a es propiamente soportado. Entonces, existe $b \in A^m(\Omega)$ tal que* *i)* $b(x,y,\xi) = a(x,y,\xi)$ *para todo* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *y para* x, y *en algún entorno de la diagonal.*

ii) $\Sigma_b = \overline{\{(x,y) \in \Omega \times \Omega \mid (x,y,\xi) \in \operatorname{sop}(b) \text{ para algún } \xi \in \mathbb{R}^n\}}$ *es un conjunto propio en* $\Omega \times \Omega$.

iii) $P_b = P_a$.

Demostración. Si K es el núcleo distribucional de P_a entonces, como P_a es propiamente soportado tenemos que $\operatorname{sop}(K)$ un conjunto propio en $\Omega \times \Omega$ y, en consecuencia,

$$\operatorname{sop}(K) \cup \Delta_\Omega$$

es un conjunto propio en $\Omega \times \Omega$ ya que la unión de conjuntos propios es un conjunto propio.

Por Proposición 2.26 considero $\phi \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$ tal que $\operatorname{sop}(\phi)$ es propio y $\phi = 1$ en un entorno de $\operatorname{sop}(K) \cup \Delta_\Omega$. Sea $b(x,y,\xi) = \phi(x,y)a(x,y,\xi)$, al igual que en la Proposición 2.33 obtenemos que $b \in A^m(\Omega)$, P_b es propiamente soportado, ϕK es el núcleo distribucional de P_b y, $\operatorname{sop}(\phi K) \subset \operatorname{sop}(K)$.

Como $\phi = 1$ en un entorno de la diagonal y $b(x,y,\xi) = \phi(x,y)a(x,y,\xi)$ entonces,

$$b(x,y,\xi) = a(x,y,\xi)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ y para x, y en un entorno de la diagonal.

Sea $(x,y) \in (\operatorname{sop}(\phi))^c$ entonces, existe U un entorno abierto de (x,y) tal que $\phi|_U = 0$. Se tiene así, $b|_{U\times\mathbb{R}^n} = 0$ y, en consecuencia, $(x,y) \in U \subset (\Sigma_b)^c$. Por lo tanto, $\Sigma_b \subset \operatorname{sop}(\phi)$ y, en conclusión, Σ_b es propio.

Como $\phi = 1$ en un entorno de $\operatorname{sop}(K)$ entonces, $\phi K = K$ y en consecuencia, $P_a = P_b$.

□

Lema 2.35 (Desigualdad de Peetre)**.** *Para todo* $s \in \mathbb{R}$ *y para todos* $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ *se verifica que*

$$(1 + |\eta|)^s \leq (1 + |\xi|)^s (1 + |\xi - \eta|)^{|s|}$$

Demostración. Por un lado, si $s > 0$ se tiene que

$$1 + |\eta| \leq 1 + |\xi| + |\eta - \xi| \leq (1 + |\xi|)(1 + |\eta - \xi|)$$

entonces,

$$(1 + |\eta|)^s \leq (1 + |\xi|)^s (1 + |\xi - \eta|)^s .$$

Por otro lado, si $s < 0$ se tiene que

$$1 + |\xi| \leq 1 + |\eta| + |\xi - \eta| \leq (1 + |\eta|)(1 + |\xi - \eta|),$$

luego

$$(1 + |\xi|)^{-s} \leq (1 + |\eta|)^{-s} (1 + |\xi - \eta|)^{-s}$$

y, por lo tanto,

$$(1 + |\eta|)^s \leq (1 + |\xi|)^s (1 + |\xi - \eta|)^{-s} .$$

□

Para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ considero la función $E_\xi \in C^\infty(\Omega)$ tal que

$$E_\xi(x) = e^{2\pi i x\cdot\xi}$$

para todo $x \in \Omega$. Supongamos que $a \in A^m(\Omega)$ tal que P_a es propiamente soportado entonces, como ya comentamos P_a lo podemos extender de forma continua a $C^\infty(\Omega)$. Por lo tanto, tiene sentido aplicar P_a a la función E_ξ. Con abuso de notación denotaremos a $P_a(E_\xi)(x)$ con $P_a\left(e^{2\pi i x\cdot\xi}\right)$.

Teorema 2.36. *Sea $a \in A^m(\Omega)$ tal que P_a es propiamente soportado. Defino*

$$p(x,\xi) = e^{-2\pi i x\cdot\xi} P_a\left(e^{2\pi i x\cdot\xi}\right) = e^{-2\pi i x\cdot\xi}\left(P_a\left(E_\xi\right)\right)(x).$$

Entonces

i) $p \in S^m(\Omega)$.

ii) $P_a = p(X,D)$.

iii) $p(x,\xi) \sim \displaystyle\sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x,y,\xi)\Big|_{y=x}$.

Demostración. En primer lugar observemos que por la Proposición 2.34 podemos modificar a para que Σ_a sea propio sin afectar a P_a y sin afectar el comportamiento de a en un entorno de Δ_Ω que es lo que importa en la afirmación *iii*). Entonces asumiremos que Σ_a es propio.

Sean $x \in \Omega$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$ afirmo que la función $y \mapsto a(x,y,\xi)$ tiene soporte compacto. En efecto, como Σ_a es propio se tiene que

$$\pi_x^{-1}\left(\{x\}\right) \cap \Sigma_a = \left(\{x\} \times \Omega\right) \cap \Sigma_a$$

es un conjunto compacto. Entonces, por definición de Σ_a se tiene que la función $y \mapsto a(x,y,\xi)$ tiene soporte compacto.

Para cada $x \in \Omega$ y $\eta \in \mathbb{R}^n$ defino

$$p(x,\eta) = e^{-2\pi i x\cdot\eta} P_a\left(e^{2\pi i x\cdot\eta}\right).$$

Entonces

$$\begin{aligned} p(x,\eta) &= e^{-2\pi i x\cdot\eta} P_a\left(e^{2\pi i x\cdot\eta}\right) \\ &= e^{-2\pi i x\cdot\eta}\int\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} a(x,y,\xi) e^{2\pi i y\cdot\eta}\, dyd\xi \end{aligned}$$

por consiguiente la integral interior en la variable y converge lo cual nos permitirá hacer cambio de variable más adelante.

Observemos que la afirmación *iii*) es equivalente a

$$p(x,\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x,\xi)$$

con

$$p_j(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x,y,\xi)\Big|_{y=x} \in S^{m-j}(\Omega). \tag{2.47}$$

Entonces, para probar las afirmaciones *i*) y *iii*) usaremos el Teorema 2.29 con los p_j en (2.47), para eso comencemos probando que se satisface la acotación (2.35). Denotamos

$$b(x,y,\xi) = a(x,x+y,\xi)$$

entonces

$$b(x,y-x,\xi) = a(x,y,\xi).$$

Luego

$$
\begin{aligned}
p(x,\eta) &= e^{-2\pi i x\cdot\eta}\int\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi}a(x,y,\xi)e^{2\pi i y\cdot\eta}\,dyd\xi\\
&= e^{-2\pi i x\cdot\eta}\int\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi}b(x,y-x,\xi)e^{2\pi i y\cdot\eta}\,dyd\xi\\
&= \int\int e^{2\pi i(x-y)\cdot(\xi-\eta)}b(x,y-x,\xi)\,dyd\xi\\
&= \int\int e^{-2\pi i z\cdot(\xi-\eta)}b(x,z,\xi)\,dzd\xi \text{ (cambio variable } z=y-x)\\
&= \int \widehat{b_2}(x,\xi-\eta,\xi)\,d\xi\\
&= \int \widehat{b_2}(x,\xi,\xi+\eta)\,d\xi \text{ (cambio variable } \xi\mapsto\xi+\eta)
\end{aligned}
$$

donde el subíndice 2 en $\widehat{b_2}$ indica la Transformada de Fourier de b en la segunda variable. Por lo tanto

$$p(x,\eta)=\int\widehat{b_2}(x,\xi,\xi+\eta)\,d\xi.$$

Necesitamos acotar las derivadas de $p(x,\eta)$ en conjuntos compactos para eso, empecemos primero viendo la Transformada de Fourier de b en la segunda variable para acotar sus derivadas y luego usar esa cota para acotar las derivadas de $p(x,\eta)$. En efecto

$$\widehat{b_2}(x,\theta,\mu)=\int e^{-2\pi i\theta\cdot y}b(x,y,\mu)\,dy \tag{2.48}$$

entonces

$$D_\mu^\alpha D_x^\gamma\widehat{b_2}(x,\theta,\mu)=\int e^{-2\pi i\theta\cdot y}D_\mu^\alpha D_x^\gamma b(x,y,\mu)\,dy.$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\theta^\beta D_\mu^\alpha D_x^\gamma\widehat{b_2}(x,\theta,\mu) &= \int\theta^\beta e^{-2\pi i\theta\cdot y}D_\mu^\alpha D_x^\gamma b(x,y,\mu)\,dy\\
&= \int(-1)^{|\beta|}D_y^\beta\left(e^{-2\pi i\theta\cdot y}\right)D_\mu^\alpha D_x^\gamma b(x,y,\mu)\,dy\\
&= (-1)^{|\beta|}\int(-1)^{|\beta|}e^{-2\pi i\theta\cdot y}D_\mu^\alpha D_y^\beta D_x^\gamma b(x,y,\mu)\,dy\\
&= \int e^{-2\pi i\theta\cdot y}D_\mu^\alpha D_y^\beta D_x^\gamma b(x,y,\mu)\,dy.
\end{aligned}
$$

Sea $K\subset\Omega$ compacto, para cada $x\in K$ se verifica que

$$
\begin{aligned}
\left|\theta^\beta D_\mu^\alpha D_x^\gamma\widehat{b_2}(x,\theta,\mu)\right| &\le \int_{\pi_y(H)}\left|D_\mu^\alpha D_y^\beta D_x^\gamma b(x,y,\mu)\right|dy\\
&= \int_{\pi_y(H)}\left|D_\mu^\alpha D_y^\beta D_x^\gamma a(x,x+y,\mu)\right|dy\\
&= \int_{\pi_y(H)}c_{\alpha,\gamma,\beta,H}\,(1+|\mu|)^{m-|\alpha|}\,dy\\
&\le c_{\alpha,\gamma,\beta,H}\operatorname{vol}(\pi_y(H))\,(1+|\mu|)^{m-|\alpha|}
\end{aligned} \tag{2.49}
$$

siendo $H=\pi_x^{-1}(K)\cap\Sigma_a$.

Ahora, como β es arbitrario combinando (2.49) con (1.7) obtenemos que para cada $K\subset\Omega$ compacto y cada entero $t>0$ existe una constante $c_{\alpha,\gamma,t,K}>0$ tal que

$$\left|D_\mu^\alpha D_x^\gamma\widehat{b_2}(x,\theta,\mu)\right|\le c_{\alpha,\gamma,t,K}\,(1+|\theta|)^{-t}\,(1+|\mu|)^{m-|\alpha|}. \tag{2.50}$$

En particular cambiando notación y aplicando el Lema (2.35)

$$\begin{aligned}
\left|D_\eta^\alpha D_x^\gamma \widehat{b_2}(x,\xi,\xi+\eta)\right| &\leq c_{\alpha,\gamma,t,K}\,(1+|\xi|)^{-t}\,(1+|\xi+\eta|)^{m-|\alpha|}\\
&\leq c_{\alpha,\gamma,t,K}\,(1+|\xi|)^{-t}\,(1+|\xi+\eta|)^{|m|+|\alpha|}\\
&\leq c_{\alpha,\gamma,t,K}\,(1+|\xi|)^{-t}\,(1+|\xi|)^{|m|+|\alpha|}\,(1+|\eta|)^{|m|+|\alpha|}\\
&\leq c_{\alpha,\gamma,t,K}\,(1+|\xi|)^{-t+|m|+|\alpha|}\,(1+|\eta|)^{|m|+|\alpha|}\,.
\end{aligned}$$

Por último acotemos las derivadas de $p(x.\eta)$

$$\begin{aligned}
\left|D_\eta^\alpha D_x^\gamma p(x,\eta)\right| &= \left|D_\eta^\alpha D_x^\gamma \int \widehat{b_2}(x,\xi,\xi+\eta)\,d\xi\right|\\
&\leq \int \left|D_\eta^\alpha D_x^\gamma \widehat{b_2}(x,\xi,\xi+\eta)\right| d\xi\\
&\leq c_{\alpha,\gamma,t,K}\int (1+|\xi|)^{-t+|m|+|\alpha|}\,(1+|\eta|)^{|m|+|\alpha|}\,d\xi\\
&= c_{\alpha,\gamma,t,K}\,(1+|\eta|)^{|m|+|\alpha|}\int (1+|\xi|)^{-t+|m|+|\alpha|}\,d\xi\\
&= c'_{\alpha,\gamma,t,K}\,(1+|\eta|)^{|m|+|\alpha|}
\end{aligned}$$

donde hemos usado que eligiendo t entero tal que

$$t-|m|-|\alpha|>n$$

se verifica que $(1+|\xi|)^{-t+|m|+|\alpha|}$ es integrable. En conclusión, obtuvimos

$$\sup_{x\in K}\left|D_\eta^\alpha D_x^\gamma p(x,\eta)\right| \leq c'_{\alpha,\gamma,K}\,(1+|\eta|)^{|m|+|\alpha|}\,.$$

Entonces $p(x,\eta)$ satisface (2.35).

Ahora necesitamos probar que se satisface (2.34). Comencemos realizando el desarrollo de Taylor de orden ℓ en la tercera variable a la función

$$\eta \mapsto \widehat{b_2}(x,\xi,\xi+\eta)$$

Obtenemos

$$\widehat{b_2}(x,\xi,\xi+\eta) = S_\ell(x,\xi,\xi+\eta) + R_\ell(x,\xi,\xi+\eta),$$

donde

$$S_\ell(x,\xi,\xi+\eta) = \sum_{|\alpha|\leq\ell}\frac{1}{\alpha!}\xi^\alpha\left(\partial_\eta^\alpha \widehat{b_2}\right)(x,\xi,\eta)$$

y el resto está dado por

$$R_\ell(x,\xi,\xi+\eta) = (\ell+1)\sum_{|\mu|=\ell+1}\frac{1}{\mu!}\xi^\mu\int_0^1 (1-h)^\ell\left(\partial_\eta^\mu\,\widehat{b_2}\right)(x,\xi,\eta+h\xi)\,dh.$$

Observemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\int S_\ell(x,\xi,\xi+\eta)\,d\xi &= \int \sum_{|\alpha|\leq \ell} \frac{1}{\alpha!}\xi^\alpha \left(\partial_\eta^\alpha \widehat{b_2}\right)(x,\xi,\eta)\,d\xi \\
&= \sum_{|\alpha|\leq \ell} \frac{1}{\alpha!}\int \xi^\alpha \left(\partial_\eta^\alpha \widehat{b_2}\right)(x,\xi,\eta)\,d\xi \\
&= \sum_{|\alpha|\leq \ell} \frac{1}{\alpha!}\partial_\eta^\alpha \int \xi^\alpha \widehat{b_2}(x,\xi,\eta)\,d\xi \\
&= \sum_{|\alpha|\leq \ell} \frac{1}{\alpha!}\partial_\eta^\alpha \left[\int e^{2\pi i y\cdot\xi}\xi^\alpha \widehat{b_2}(x,\xi,\eta)\,d\xi\right]\Big|_{y=0} \\
&= \sum_{|\alpha|\leq \ell} \frac{1}{\alpha!}\partial_\eta^\alpha \left[\int D_y^\alpha \left(e^{2\pi i y\cdot\xi}\right) \widehat{b_2}(x,\xi,\eta)\,d\xi\right]\Big|_{y=0} \\
&= \sum_{|\alpha|\leq \ell} \frac{1}{\alpha!}\partial_\eta^\alpha \left[D_y^\alpha \int e^{2\pi i y\cdot\xi} \widehat{b_2}(x,\xi,\eta)\,d\xi\right]\Big|_{y=0} \\
&= \sum_{|\alpha|\leq \ell} \frac{1}{\alpha!}\partial_\eta^\alpha \; D_y^\alpha b(x,y,\eta)\,\Big|_{y=0} \\
&= \sum_{|\alpha|\leq \ell} \frac{1}{\alpha!}\partial_\eta^\alpha \; D_y^\alpha a(x,x+y,\eta)\,\Big|_{y=0} \\
&= \sum_{|\alpha|\leq \ell} \frac{1}{\alpha!}\partial_\eta^\alpha \; D_y^\alpha a(x,y,\eta)\,\Big|_{y=x}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\left|p(x,\xi) - \sum_{|\alpha|\leq \ell} \frac{1}{\alpha!}\partial_\eta^\alpha \; D_y^\alpha a(x,y,\eta)\,\Big|_{y=x}\right| &= \left|p(x,\eta) - \int S_\ell(x,\xi,\xi+\eta)\,d\xi\right| \\
&= \left|\int \widehat{b_2}(x,\xi,\xi+\eta)\,d\xi - \int \sum_{|\alpha|\leq \ell} \frac{1}{\alpha!}\xi^\alpha \left(\partial_\eta^\alpha \widehat{b_2}\right)(x,\xi,\eta)\,d\xi\right| \\
&= \left|\int \left[\widehat{b_2}(x,\xi,\xi+\eta) - \sum_{|\alpha|\leq \ell} \frac{1}{\alpha!}\xi^\alpha \left(\partial_\eta^\alpha \widehat{b_2}\right)(x,\xi,\eta)\right]d\xi\right| \\
&= \left|\int R_\ell(x,\xi,\xi+\eta)d\xi\right| \\
&\leq \int |R_\ell(x,\xi,\xi+\eta)|\,d\xi \qquad (2.51)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la acotación (2.34) estará probada si acotamos (2.51). En efecto, comencemos acotando el resto

$$
\begin{aligned}
|R_\ell(x,\xi,\xi+\eta)| &\leq (\ell+1)\sum_{|\mu|=\ell+1}\frac{1}{\mu!}|\xi|^{|\mu|}\int_0^1(1-h)^\ell\left|\left(\partial_\eta^\mu\,\widehat{b_2}\right)(x,\xi,\eta+h\xi)\right|dh\\
&\leq \sum_{|\mu|=\ell+1}\frac{\ell+1}{\mu!}|\xi|^{\ell+1}\sup_{0\leq h\leq 1}\left|\left(\partial_\eta^\mu\,\widehat{b_2}\right)(x,\xi,\eta+h\xi)\right|\\
&\leq \sum_{|\mu|=\ell+1}\frac{\ell+1}{\mu!}(1+|\xi|)^{\ell+1}\sup_{0\leq h\leq 1}c_{\mu,0,s,K}(1+|\xi|)^{-s}\left(1+|\eta+h\xi|\right)^{m-|\mu|}\ \text{(por (2.50))}\\
&\leq \sum_{|\mu|=\ell+1}\frac{\ell+1}{\mu!}c_{\mu,0,s,K}(1+|\xi|)^{\ell+1-s}\sup_{0\leq h\leq 1}\left(1+|\eta+h\xi|\right)^{m-(\ell+1)}\\
&\leq c'_{\ell,0,s,K}(1+|\xi|)^{\ell+1-s}\sup_{0\leq h\leq 1}\left(1+|\eta|\right)^{m-(\ell+1)}\left(1+h|\xi|\right)^{|m-(\ell+1)|}\ \text{(por Lema (2.35))}\\
&\leq c'_{\ell,0,s,K}(1+|\xi|)^{\ell+1-s}(1+|\eta|)^{m-(\ell+1)}\left(1+|\xi|\right)^{|m-(\ell+1)|}\\
&\leq c'_{\ell,0,s,K}(1+|\xi|)^{\ell+1-s}(1+|\eta|)^{m-(\ell+1)}\left(1+|\xi|\right)^{|m|+\ell+1}\\
&\leq c'_{\ell,0,s,K}(1+|\xi|)^{-s+|m|+2(\ell+1)}\left(1+|\eta|\right)^{m-(\ell+1)}. \qquad (2.52)
\end{aligned}
$$

Luego tomando s entero tal que

$$s>\text{máx}\left\{|m|+3(\ell+1)+2n,|m|+m+2(\ell+1)+2n\right\} \qquad (2.53)$$

se verifica que

- si $|\xi|\leq|\eta|$ entonces

$$(1+|\xi|)^{-s+|m|+2(\ell+1)}\left(1+|\eta|\right)^{m-(\ell+1)}\leq(1+|\eta|)^{m-(\ell+1)}\ \text{(por } s \text{ en (2.53))} \qquad (2.54)$$

- si $|\eta|\leq|\xi|$ y $m-(\ell+1)\leq 0$ entonces

$$
\begin{aligned}
(1+|\xi|)^{-s+|m|+2(\ell+1)}\left(1+|\eta|\right)^{m-(\ell+1)} &\leq (1+|\xi|)^{-s+|m|+2(\ell+1)}\\
&\leq (1+|\xi|)^{-(\ell+1)-2n}\ \text{(por } s \text{ en (2.53))} \qquad (2.55)
\end{aligned}
$$

- si $|\eta|\leq|\xi|$ y $m-(\ell+1)>0$ entonces

$$
\begin{aligned}
(1+|\xi|)^{-s+|m|+2(\ell+1)}\left(1+|\eta|\right)^{m-(\ell+1)} &\leq (1+|\xi|)^{-s+|m|+2(\ell+1)}\left(1+|\xi|\right)^{m-(\ell+1)}\\
&= (1+|\xi|)^{-s+|m|+m+(\ell+1)}\\
&\leq (1+|\xi|)^{-(\ell+1)-2n}\ \text{(por } s \text{ en (2.53))} \qquad (2.56)
\end{aligned}
$$

Entonces, aplicando (2.54), (2.55) y, (2.56) en (2.52) obtenemos

$$|R_\ell(x,\xi,\xi+\eta)|\leq\begin{cases} c'_{\ell,0,s,K}(1+|\eta|)^{m-(\ell+1)} & \text{si } |\xi|\leq|\eta|\\ c'_{\ell,0,s,K}(1+|\xi|)^{-(\ell+1)-2n} & \text{si } |\eta|\leq|\xi|\end{cases}.$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\int|R_\ell(x,\xi,\xi+\eta)|\,d\xi &= \int_{|\xi|\leq|\eta|}|R_\ell(x,\xi,\xi+\eta)|\,d\xi+\int_{|\eta|\leq|\xi|}|R_\ell(x,\xi,\xi+\eta)|\,d\xi\\
&\leq \int_{|\xi|\leq|\eta|}c'_{\ell,0,s,K}(1+|\eta|)^{m-(\ell+1)}d\xi+\int_{|\eta|\leq|\xi|}c'_{\ell,0,s,K}(1+|\xi|)^{-(\ell+1)-2n}d\xi. \qquad (2.57)
\end{aligned}
$$

Ahora, por un lado tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|\leq|\eta|}(1+|\eta|)^{m-(\ell+1)}d\xi &= \int_{|\xi|\leq|\eta|}(1+|\eta|)^{m-(\ell+1)+2n}\,(1+|\eta|)^{-2n}d\xi \\
&= (1+|\eta|)^{m-(\ell+1)+2n}\int_{|\xi|\leq|\eta|}(1+|\eta|)^{-2n}d\xi \\
&\leq (1+|\eta|)^{m-(\ell+1)+2n}\underbrace{\int_{|\xi|\leq|\eta|}(1+|\xi|)^{-2n}d\xi}_{<\infty} \\
&= c'_{m,\ell}\,(1+|\eta|)^{m-(\ell+1)+2n}\,. \qquad (2.58)
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\int_{|\eta|\leq|\xi|}(1+|\xi|)^{-(\ell+1)-2n}d\xi &\leq \int_{|\eta|\leq|\xi|}(1+|\xi|)^{-(\ell+1)}\,(1+|\xi|)^{-2n}d\xi \\
&\leq \int_{|\eta|\leq|\xi|}(1+|\eta|)^{-(\ell+1)}\,(1+|\xi|)^{-2n}d\xi \\
&\leq (1+|\eta|)^{-(\ell+1)}\underbrace{\int_{|\eta|\leq|\xi|}(1+|\xi|)^{-2n}d\xi}_{<\infty} \\
&= c''_{m,\ell}\,(1+|\eta|)^{-(\ell+1)}\,. \qquad (2.59)
\end{aligned}$$

Entonces aplicando (2.58) y (2.59) en (2.57) obtenemos

$$\begin{aligned}
\int|R_\ell(x,\xi,\xi+\eta)|\,d\xi &\leq c'_{\ell,0,s,K}\left[c'_{m,\ell}\,(1+|\eta|)^{m-(\ell+1)+2n} + c''_{m,\ell}\,(1+|\eta|)^{-(\ell+1)}\right] \\
&\leq c'_{\ell,K}\,(1+|\eta|)^{\lambda_\ell}
\end{aligned}$$

siendo

$$\lambda_\ell = \text{máx}\,\{m+2n,0\} - (\ell+1)\,.$$

En conclusión,

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in K}\left|p(x,\xi) - \sum_{|\alpha|\leq\ell}\frac{1}{\alpha!}\partial_\eta^\alpha\;D_y^\alpha a(x,y,\eta)\,\Big|_{y=x}\right| &\leq \int|R_\ell(x,\xi,\xi+\eta)|\,d\xi \\
&\leq c'_{\ell,K}\,(1+|\eta|)^{\lambda_\ell}
\end{aligned}$$

con $\lim\limits_{\ell\to+\infty}\lambda_\ell = -\infty$. Entonces (2.34) se satisface.

Por último, probemos la afirmación *ii*). En efecto, sea $u\in C_c^\infty(\Omega)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int e^{2\pi i x\cdot\xi}\widehat{u}(\xi)\,d\xi \\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{j=1}^{N} e^{2\pi i x\cdot\xi_j}\,\widehat{u}(\xi_j)\Delta_{\xi_j}
\end{aligned}$$

siendo la convergencia en la topología de $C^\infty(\Omega)$. Entonces, por la continuidad y linealidad de P_a se tiene que

$$
\begin{aligned}
P_a u(x) &= P_a\left(\lim_{N\to+\infty}\sum_{j=1}^{N} e^{2\pi i x\cdot\xi_j}\,\widehat{u}(\xi_j)\Delta_{\xi_j}\right)\\
&= \lim_{N\to+\infty} P_a\left(\sum_{j=1}^{N} e^{2\pi i x\cdot\xi_j}\,\widehat{u}(\xi_j)\Delta_{\xi_j}\right)\\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{j=1}^{N} P_a\left(e^{2\pi i x\cdot\xi_j}\right)\widehat{u}(\xi_j)\Delta_{\xi_j}\\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{j=1}^{N} e^{2\pi i x\cdot\xi_j} p\left(x,\xi_j\right)\widehat{u}(\xi_j)\Delta_{\xi_j}\\
&= \int e^{2\pi i x\cdot\xi} p\left(x,\xi\right)\widehat{u}(\xi)\,d\xi\\
&= p(X,D)u(x).
\end{aligned}
$$

En conclusión $P_a = p(X,D)$.

□

Corolario 2.37. *Sea $a \in A^m(\Omega)$ entonces, existe $Q \in \Psi^m(\Omega)$ propiamente soportado tal que $P_a - Q$ es un operador infinitamente suave. Sea $a \in S^m(\Omega)$ entonces, existe $R \in \Psi^m(\Omega)$ propiamente soportado tal que $a(X;D) - R \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$.*

Demostración. Sea $a \in A^m(\Omega)$ entonces por la Proposición 2.33 existe $b \in A^m(\Omega)$ tal que P_b es propiamente soportado y $P_a - P_b$ es un operador infinitamente suave. Ahora como P_b es propiamente soportado, por Teorema 2.36 se tiene que $P_b = q_b(X,D)$ siendo

$$q_b(x,\xi) = e^{-2\pi i x\cdot\xi} P_b\left(e^{2\pi i x\cdot\xi}\right) \in S^m(\Omega).$$

Entonces, $P_b \in \Psi^m(\Omega)$ y $Q = P_b$ es el operador buscado.

Sea $a \in S^m(\Omega)$ entonces $a \in A^m(\Omega)$ y, por lo tanto, por la Proposición 2.33 existe $b \in A^m(\Omega)$ tal que P_b es propiamente soportado. Además, por construcción el núcleo distribucional de $P_a - P_b$ se anula en un entorno de la diagonal. Si q_b es el símbolo de P_b dado por el Teorema 2.36, como por (2.14) sabemos que $(a - q_b)_2^{\vee}(x, x-y)$ es el núcleo distribucional de $P_a - P_b$ entonces, para cada $x \in \Omega$ existe Z_x un entorno compacto de 0 tal que

$$(a - q_b)_2^{\vee}(x,z) = 0 \tag{2.60}$$

para todo $z \in Z_x$. Por otro lado, como $a - q_b \in S^m(\Omega)$ por el Teorema 2.12 para cada $|\alpha| > m + n + j$ la función

$$f_\alpha(x,z) = z^\alpha\,(a - q_b)_2^{\vee}(x,z) \tag{2.61}$$

es de clase C^j y está acotada en $A \times \mathbb{R}^n$ para todo $A \subset \Omega$ compacto. Por lo tanto, combinando (2.60) y (2.61) tenemos que para cada $x \in A$ la función

$$z \mapsto (a - q_b)_2^{\vee}(x,z) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Luego para cada $x \in A$ la función

$$\xi \mapsto (a - q_b)(x,\xi) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

lo cual implica que $a - q_b \in S^{-\infty}(\Omega)$. Entonces $P_b \in \Psi^m(\Omega)$, $a(X;D) - P_b \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$ y, en conclusión, $R = P_b$ es el operador buscado. □

Del Corolario 2.37 deducimos uno de los hechos más importantes acerca de los operadores pseudo-diferenciales propiamente soportados: sea $P \in \Psi^m(\Omega)$ con $P = p(X,D)$ para algún $p \in S^m(\Omega)$ entonces

$$P = Q + S$$

lo podemos escribir como suma de $Q \in \Psi^m(\Omega)$ un operador pseudo-diferencial propiamente soportado de igual orden que P y, $S \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$ un operador pseudo-diferencial de orden $-\infty$. Considerando la equivalencia módulo operadores de orden $-\infty$ establecemos que *todo operador pseudo-diferencial es equivalente a un operador pseudo-diferencial propiamente soportado de igual orden*. Esto nos permite dar una representación canónica del símbolo de P a partir del símbolo de Q el cual denotamos con σ_P y está dado por

$$\sigma_P(x,\xi) = e^{-2\pi i x\cdot\xi} P\left(e^{2\pi i x\cdot\xi}\right) \tag{2.62}$$

y satisface

$$\sigma_P(x,\xi) \equiv p(x,\xi) \quad \text{mód } (S^{-\infty}(\Omega)) \tag{2.63}$$

es decir, *σ_P es el símbolo del operador pseudo-diferencial propiamente soportado equivalente con P.*

2.6 Adjuntos y Composiciones

Sea $T\colon C_c^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ un mapa lineal, decimos que $S\colon C_c^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ es el operador *transupesto* de T y anotamos $S = T^t$ si se satisface

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, Sv\rangle$$

para todo $u, v \in C_c^\infty(\Omega)$. Diremos que $R\colon C_c^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ es el operador *adjunto* de T y anotamos $R = T^*$ si se satisface

$$\langle Tu, \overline{v}\rangle = \langle u, \overline{Rv}\rangle$$

para todo $u, v \in C_c^\infty(\Omega)$.

Si $K(x,y)$ es el núcleo distribucional de T entonces, $K^t(x,y) = K(y,x)$ y $K^*(x,y) = \overline{K(y,x)}$ son los núcleos distribucionales de T^t y T^* respectivamente. En efecto, por un lado

$$\begin{aligned}
\int\!\!\int K(x,y)u(x)v(y)\,dxdy &= \langle Tu, v\rangle \\
&= \langle u, T^t v\rangle = \langle T^t v, u\rangle \\
&= \int\!\!\int K^t(x,y)v(x)u(y)\,dxdy \\
&= \int\!\!\int K^t(y,x)v(y)u(x)\,dydx \\
&= \int\!\!\int K^t(y,x)u(x)v(y)\,dxdy
\end{aligned}$$

entonces $K^t(y,x) = K(x,y)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\int\!\!\int K(x,y)u(x)\overline{v(y)}\,dxdy &= \langle Tu, \overline{v}\rangle \\
&= \langle u, \overline{T^* v}\rangle = \overline{\langle T^* v, \overline{u}\rangle} \\
&= \overline{\int\!\!\int K^*(x,y)v(x)\overline{u(y)}\,dxdy} \\
&= \overline{\int\!\!\int K^*(y,x)v(y)\overline{u(x)}\,dydx} \\
&= \overline{\int\!\!\int K^*(y,x)\overline{u(x)}v(y)\,dxdy} \\
&= \int\!\!\int \overline{K^*(y,x)}u(x)\overline{v(y)}\,dxdy
\end{aligned}$$

entonces $K^*(y,x) = \overline{K(x,y)}$. Por lo tanto, *si un operador pseudo-diferencial es propiamente soportado entonces, su adjunto y transpuesto también son propiamente soportados.*

Lema 2.38. *Supongamos que $p \in S^m(\Omega)$. Entonces, $p(X,D)^t = P_a$ siendo $a(x,y,\xi) = p(y,-\xi)$ y, $p(X,D)^* = P_b$ siendo $b(x,y,\xi) = \overline{p(y,\xi)}$.*

Demostración. Veamos primero el caso del operador transpuesto. Sean $u, v \in C_c^\infty(\Omega)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle p(X,D)u, v\rangle &= \int \left[\int e^{2\pi i y\cdot\xi} p(y,\xi)\widehat{u}(y)\, d\xi\right] v(y)\, dy \\
&= \int\int e^{2\pi i y\cdot\xi} p(y,\xi)\widehat{u}(\xi)v(y)\, d\xi dy \\
&= \int\int e^{2\pi i y\cdot\xi} p(y,\xi)\widehat{u}(\xi)v(y)\, dy d\xi \\
&= \int \left[\int e^{2\pi i y\cdot\xi} p(y,\xi)v(y)\, dy\right] \widehat{u}(\xi)\, d\xi \\
&= \int g(\xi)\widehat{u}(\xi)\, d\xi
\end{aligned}$$

siendo

$$g(\xi) = \int e^{2\pi i y\cdot\xi} p(y,\xi)v(y)\, dy \tag{2.64}$$

y, hemos intercambiado el orden de integración debido a que como $v \in C_c^\infty(\Omega)$ y $\widehat{u} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ la doble integral es absolutamente convergente. Por el Lema 2.10 se verifica que la función g decae más rápido que cualquier polinomio entonces, podremos considerar su transformada de Fourier. En consecuencia

$$\begin{aligned}
\langle u, p(X,D)^t v\rangle &= \langle p(X,D)u, v\rangle \\
&= \langle g, \widehat{u}\rangle \\
&= \langle \widehat{g}, u\rangle = \langle u, \widehat{g}\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
p(X,D)^t v(x) &= \widehat{g}(x) \\
&= \int e^{-2\pi i x\cdot\xi} g(\xi)\, d\xi \\
&= \int e^{-2\pi i x\cdot\xi}\left[\int e^{2\pi i y\cdot\xi} p(y,\xi)v(y)\, dy\right] d\xi \text{ (por (2.64))} \\
&= \int\int e^{2\pi i (y-x)\cdot\xi} p(y,\xi)v(y)\, dy d\xi \\
&= \int\int e^{2\pi i (x-y)\cdot\xi} p(y,-\xi)v(y)\, dy d\xi \text{ (cambio variable } \xi \mapsto -\xi).
\end{aligned}$$

En conclusión, $p(X,D)^t = P_a$ con $a(x,y,\xi) = p(y,-\xi)$.

Para el caso del operador adjunto procedemos de forma análoga. Sean $u, v \in C_c^\infty(\Omega)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle p(X,D)u, \overline{v}\rangle &= \int \left[\int e^{2\pi i y\cdot\xi} p(y,\xi)\widehat{u}(y)\, d\xi\right] \overline{v(y)}\, dy \\
&= \int\int e^{2\pi i y\cdot\xi} p(y,\xi)\widehat{u}(\xi)\overline{v(y)}\, d\xi dy \\
&= \int\int e^{2\pi i y\cdot\xi} p(y,\xi)\widehat{u}(\xi)\overline{v(y)}\, dy d\xi \\
&= \int \left[\int e^{2\pi i y\cdot\xi} p(y,\xi)\overline{v(y)}\, dy\right] \widehat{u}(\xi)\, d\xi \\
&= \int h(\xi)\widehat{u}(\xi)\, d\xi
\end{aligned}$$

siendo

$$h(\xi) = \int e^{2\pi i y\cdot\xi} p(y,\xi)\overline{v(y)}\, dy \tag{2.65}$$

y, por el mismo motivo hemos intercambiado el orden de integración. Luego, mismo argumento para tomar $\widehat{h}$ y obtener

$$\begin{aligned}
\langle u, \overline{p(X,D)^* v}\rangle &= \langle p(X,D)u, \overline{v}\rangle \\
&= \langle h, \widehat{u}\rangle \\
&= \langle \widehat{h}, u\rangle = \langle u, \widehat{h}\rangle.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\overline{p(X,D)^* v(x)} &= \widehat{h}(x) \\
&= \int e^{-2\pi i x\cdot\xi} h(\xi)\, d\xi \\
&= \int e^{-2\pi i x\cdot\xi}\left[\int e^{2\pi i y\cdot\xi} p(y,\xi)\overline{v(y)}\, dy\right] d\xi \text{ (por (2.65))} \\
&= \int\int e^{2\pi i(y-x)\cdot\xi} p(y,\xi)\overline{v(y)}\, dy d\xi.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
p(X,D)^* v(x) &= \overline{\int\int e^{2\pi i(y-x)\cdot\xi} p(y,\xi)\overline{v(y)}\, dy d\xi} \\
&= \int\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} \overline{p(y,\xi)} v(y)\, dy d\xi.
\end{aligned}$$

En conclusión, $p(X,D)^* = P_b$ con $b(x,y,\xi) = \overline{p(y,\xi)}$. □

Teorema 2.39. *Sea $P \in \Psi^m(\Omega)$ propiamente soportado. Entonces $P^t \in \Psi^m(\Omega)$, $P^* \in \Psi^m(\Omega)$ y,*

$$\begin{aligned}
\sigma_{P^t}(x,\xi) &\sim \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \sigma_P(x,-\xi), \\
\sigma_{P^*}(x,\xi) &\sim \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{\sigma_P(x,\xi)}.
\end{aligned}$$

Demostración. Sea $P \in \Psi^m(\Omega)$ propiamente soportado veamos primero el caso del operador transpuesto. Como $P = p(X,D)$ para algún $p \in S^m(\Omega)$ entonces, por Lema 2.38 $P^t = P_a$ con $a(x,y,z) = p(y,-\xi)$. Además, al ser P^t propiamente soportado por Teorema 2.36 tenemos que $P^t = P_a \in \Psi^m(\Omega)$, $P_a = \sigma_{P^t}(X,D)$ y,

$$\begin{aligned}
\sigma_{P^t}(x,\xi) = \sigma_{P_a}(x,\xi) &\sim \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x,y,\xi)\Big|_{y=x} \\
&= \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha \left(p(y,-\xi)\right)\Big|_{y=x} \\
&= \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\left(\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha p\right)(y,-\xi)\Big|_{y=x} \\
&\sim \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\left(\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha \sigma_P\right)(y,-\xi)\Big|_{y=x}.
\end{aligned}$$

Análogamente se razona el caso del operador adjunto, para obtener que $P^* \in \Psi^m(\Omega)$ y

$$\begin{aligned}\sigma_{P^*}(x,\xi) &\sim \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha b(x,y,\xi)\Big|_{y=x}\\ &= \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha \left(\overline{p(y,\xi)}\right)\Big|_{y=x}\\ &\sim \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{1}{\alpha!}\left(\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha\right)\overline{\sigma_P(y,\xi)}\Big|_{y=x}.\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 2.40. *Sean $P \in \Psi^m(\Omega)$ y $Q \in \Psi^r(\Omega)$ operadores propiamente soportados. Entonces, $QP \in \Psi^{m+r}(\Omega)$ y*

$$\sigma_{QP}(x,\xi) \sim \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha \sigma_Q(x,\xi) D_x^\alpha \sigma_P(x,\xi). \tag{2.66}$$

Demostración. Sea $P \in \Psi^m(\Omega)$ se verifica fácilmente que $\left(P^t\right)^t = P$. Entonces

$$\begin{aligned}\int e^{2\pi i x\cdot\xi}\widehat{Pu}(\xi)d\xi &= Pu(x)\\ &= \left(P^t\right)^t u(x)\\ &= \int\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi}\sigma_{P^t}(y,-\xi)u(y)dyd\xi \text{ (por Lema 2.38)}\\ &= \int e^{2\pi i x\cdot\xi}\left[\int e^{-2\pi i y\cdot\xi}\sigma_{P^t}(y,-\xi)u(y)\,dy\right]d\xi.\end{aligned}$$

En consecuencia, por la unicidad de la Transformada de Fourier tenemos que

$$\widehat{Pu}(\xi) = \int e^{-2\pi i y\cdot\xi}\sigma_{P^t}(y,-\xi)u(y)\,dy.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}QPu(x) &= Q(Pu)(x)\\ &= \int e^{2\pi i x\cdot\xi}\sigma_Q(x,\xi)\widehat{Pu}(\xi)\,d\xi\\ &= \int e^{2\pi i x\cdot\xi}\sigma_Q(x,\xi)\left[\int e^{-2\pi i y\cdot\xi}\sigma_{P^t}(y,-\xi)u(y)\,dy\right]d\xi\\ &= \int\int e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi}\sigma_Q(x,\xi)\sigma_{P^t}(y,-\xi)u(y)\,dyd\xi.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $QP = P_a$ con

$$a(x,y,\xi) = \sigma_Q(x,\xi)\sigma_{P^t}(y,-\xi)$$

además, claramente $a \in A^{m+r}(\Omega)$ y QP por el Corolario 2.23 es propiamente soportado entonces, por el Teorema 2.36 tenemos que $QP \in \Psi^{m+r}(\Omega)$ y

$$\sigma_{QP}(x,\xi) \sim \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha\left[\sigma_Q(x,\xi)\sigma_{P^t}(y,-\xi)\right]\Big|_{y=x}. \tag{2.67}$$

Ahora, por la regla de Leibnitz tenemos que

$$\begin{aligned}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha\left[\sigma_Q(x,\xi)\sigma_{P^t}(y,-\xi)\right]\Big|_{y=x} &= \sum_{\beta+\gamma=\alpha}\frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}\left[\partial_\xi^\beta\sigma_Q(x,\xi)\partial_\xi^\gamma D_y^\alpha\sigma_{P^t}(y,-\xi)\right]\Big|_{y=x}\\ &= \sum_{\beta+\gamma=\alpha}\frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}\partial_\xi^\beta\sigma_Q(x,\xi)\partial_\xi^\gamma D_x^\alpha\sigma_{P^t}(x,-\xi).\end{aligned} \tag{2.68}$$

Sustituyendo (2.68) en (2.67) obtenemos

$$
\begin{aligned}
\sigma_{QP}(x,\xi) &\sim \sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{1}{\alpha!}\left[\sum_{\beta+\gamma=\alpha}\frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}\partial_\xi^\beta\sigma_Q(x,\xi)\partial_\xi^\gamma D_x^\alpha\sigma_{P^t}(x,-\xi)\right]\\
&\underset{(a)}{=} \sum_{\beta,\gamma}\frac{1}{\beta!\gamma!}\partial_\xi^\beta\sigma_Q(x,\xi)\partial_\xi^\gamma D_x^{\beta+\gamma}\sigma_{P^t}(x,-\xi)\\
&\underset{(b)}{\sim} \sum_{\beta,\gamma}\frac{1}{\beta!\gamma!}\partial_\xi^\beta\sigma_Q(x,\xi)\partial_\xi^\gamma D_x^{\beta+\gamma}\left[\sum_{|\delta|\geq 0}\frac{(-1)^{|\delta|}}{\delta!}\partial_\xi^\delta D_x^\delta\sigma_P\left(x,-(-\xi)\right)\right]\\
&= \sum_{\beta,\gamma,\delta}\frac{(-1)^{|\delta|}}{\beta!\gamma!\delta!}\partial_\xi^\beta\sigma_Q(x,\xi)\partial_\xi^{\gamma+\delta}D_x^{\beta+\gamma+\delta}\sigma_P(x,\xi)\\
&\underset{(c)}{=} \sum_{\beta,\lambda}\left[\sum_{\gamma+\delta=\lambda}\frac{(-1)^{|\delta|}}{\gamma!\delta!}\right]\frac{1}{\beta!}\partial_\xi^\beta\sigma_Q(x,\xi)\partial_\xi^\lambda D_x^{\beta+\lambda}\sigma_P(x,\xi)
\end{aligned}
$$

donde en cada paso se realizó lo siguiente:

(a) agrupamos los términos según $|\beta|+|\gamma|=j$ pues son finitos y verifican

$$\partial_\xi^\beta\sigma_Q(x,\xi)\partial_\xi^\gamma D_x^{\beta+\gamma}\sigma_{P^t}(x,-\xi)\in S^{m+r-j}(\Omega),$$

(b) aplicamos el Teorema 2.39 a $\sigma_{P^t}(x,-\xi)$,

(c) agrupamos los términos tales que $\gamma+\delta=\lambda$.

Por el *Teorema n-dimensional del Binomio* en particular si $x=(1,...,1)$ tenemos que

$$\sum_{\gamma+\delta=\lambda}\frac{(-1)^{|\delta|}}{\gamma!\delta!}=(x-x)^\lambda=\begin{cases}1 & \text{si } \lambda=0\\ 0 & \text{si } \lambda\neq 0\end{cases}.$$

En conclusión,

$$
\begin{aligned}
\sigma_{QP}(x,\xi) &\sim \sum_{\beta,\lambda}\left[\sum_{\gamma+\delta=\lambda}\frac{(-1)^{|\delta|}}{\gamma!\delta!}\right]\frac{1}{\beta!}\partial_\xi^\beta\sigma_Q(x,\xi)\partial_\xi^\lambda D_x^{\beta+\lambda}\sigma_P(x,\xi)\\
&= \sum_\beta\frac{1}{\beta!}\partial_\xi^\beta\sigma_Q(x,\xi)D_x^\beta\sigma_P(x,\xi).
\end{aligned}
$$

□

Corolario 2.41. *Se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

a) Sean $P\in\Psi^m(\Omega)$ y $Q\in\Psi^r(\Omega)$ operadores propiamente soportados. Entonces,

$$
\begin{aligned}
\sigma_{PQ}&\equiv\sigma_P\sigma_Q \quad \text{mód } (S^{m+r-1}(\Omega))\\
\sigma_{P^*}&\equiv\overline{\sigma_P} \quad \text{mód } (S^{m-1}(\Omega)).
\end{aligned}
$$

b) Sean $p\in S^m(\Omega)$ y $q\in S^r(\Omega)$ tales que $p(X,D)$ y $q(X,D)$ son propiamente soportados. Entonces,

$$
\begin{aligned}
p(X,D)q(X,D)&\equiv(pq)(X,D) \quad \text{mód } (\Psi^{m+r-1}(\Omega))\\
p(X,D)^*&\equiv\overline{p}(X,D) \quad \text{mód } (\Psi^{m-1}(\Omega)).
\end{aligned}
$$

Demostración. Para probar la afirmación *a*) por Teorema 2.40 y, Teorema 2.39 se tiene que

$$\sigma_{QP}(x,\xi) \sim \sigma_Q(x,\xi)\sigma_P(x,\xi) + \sum_{|\alpha|\neq 0} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha \sigma_Q(x,\xi) D_x^\alpha \sigma_P(x,\xi)$$
$$\sigma_{P^*}(x,\xi) \sim \overline{\sigma_P(x,\xi)} + \sum_{|\alpha|\neq 0} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{\sigma_P(x,\xi)}$$

entonces por Teorema 2.28,

$$\sigma_{PQ} \equiv \sigma_P\sigma_Q \quad \text{mód } (S^{m+r-1}(\Omega))$$
$$\sigma_{P^*} \equiv \overline{\sigma_P} \quad \text{mód } (S^{m-1}(\Omega)).$$

Por otro lado, para probar la afirmación *b*) en virtud de (2.63) tenemos que

$$\begin{aligned} p(X,D)q(X,D) &\equiv \left(\sigma_{p(X,D)q(X,D)}\right)(X,D) \\ &\equiv \left(\sigma_{p(X,D)}\sigma_{q(X,D)}\right)(X,D) \text{ (por parte anterior)} \\ &\equiv pq(X,D) \quad \text{mód } (\Psi^{m+r-1}(\Omega)) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} p(X,D)^* &\equiv \sigma_{p(X,D)^*}(X,D) \\ &\equiv \overline{\sigma_{p(X,D)}}(X,D) \text{ (por parte anterior)} \\ &\equiv \overline{p}(X,D) \quad \text{mód } (\Psi^{m-1}(\Omega)). \end{aligned}$$

□

Si L es un operador diferencial de orden m es claro que

$$\sigma_L(x,\xi) \equiv \sigma_L^p(x,\xi) \quad \text{mód } (S^{m-1}(\Omega)).$$

Por lo tanto, el Corolario 2.41 generaliza lo que ya hemos visto en la Proposición 2.4 para operadores diferenciales.

2.7 Operadores Pseudo-Diferenciales Elípticos

Definición 2.42. *Diremos que un símbolo $p \in S^m(\Omega)$ es elíptico de orden m si para todo $A \subset \Omega$ compacto existen c_A y C_A constantes positivas tales que para todo $x \in A$ y $|\xi| \geq C_A$ se verifica que $p(x,\xi)$ es invertible y*

$$\left|p(x,\xi)^{-1}\right| \leq c_A(1+|\xi|)^{-m}. \tag{2.69}$$

Ejemplo 2.43. El operador $\Delta_{\mathbb{R}^n}^k$ es un operador pseudo-diferencial elíptico de orden $2k$ pues

$$\sigma_{\Delta_{\mathbb{R}^n}^k}(x,\xi) = \left(-4\pi^2\right)^k |\xi|^{2k}$$

entonces, para cada $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto si $|\xi| \geq 2$ tenemos que $\sigma_{\Delta_{\mathbb{R}^n}^k}(x,\xi)$ es invertible y por (1.4) sucede que

$$\begin{aligned} \left|\sigma_{\Delta_{\mathbb{R}^n}^k}(x,\xi)^{-1}\right| &= \left(-4\pi^2\right)^{-k}|\xi|^{-2k} \\ &\leq \left(-4\pi^2\right)^{-k}(k+1)c_1^{-1}(1+|\xi|)^{-2k}. \end{aligned}$$

En la Proposición 2.44 siguiente veremos que la elipticidad de un símbolo es una propiedad invariante bajo clase de equivalencia en $S^{-\infty}(\Omega)$, esto es importante pues nos permitirá asumir que *todo operador pseudo-diferencial elíptico es equivalente a un operador pseudo-diferencial propiamente soportado que además es elíptico.*

Proposición 2.44. *Sean $p \in S^m(\Omega)$ elíptico de orden m y $q \in S^m(\Omega)$ tal que*

$$q \equiv p \quad \text{mód } (S^{-\infty}(\Omega)).$$

Entonces, q es elíptico de orden m.

Demostración. Sea $A \subset \Omega$ compacto. Como p es elíptico de orden m existen c_A y C_A constantes positivas tal que $p(x,\xi)$ es invertible y

$$\left|p(x,\xi)^{-1}\right| \leq c_A \left(1+|\xi|\right)^{-m} \text{ para todo } (x,\xi) \in A \times \{\xi \mid |\xi| \geq C_A\}\,. \tag{2.70}$$

Como $q \equiv p$ mód $(S^{-\infty}(\Omega))$ se tiene que $p-q \in S^s(\Omega)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. En particular $p - q \in S^{m-1}(\Omega)$ por lo que existe $d^m_{0,0,A}$ constante positiva tal que

$$|p(x,\xi) - q(x,\xi)| \leq d^m_{0,0,A} \left(1+|\xi|\right)^{m-1} \text{ para todo } (x,\xi) \in A \times \mathbb{R}^n. \tag{2.71}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
c_A d^m_{0,0,A} \left(1+|\xi|\right)^{-1} \leq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{1}{c_A d^m_{0,0,A}} \left(1+|\xi|\right) \geq 2\\
&\Leftrightarrow 1+|\xi| \geq 2c_A d^m_{0,0,A}\\
&\Leftrightarrow |\xi| \geq -1 + 2c_A d^m_{0,0,A}
\end{aligned}$$

entonces, para todo $(x,\xi) \in A \times \{\xi \mid |\xi| \geq f_{m,A}\}$ con

$$f_{m,A} = \text{máx}\left\{-1 + 2c_A d^m_{0,0,A}, C_A\right\}$$

se verifica que

$$\begin{aligned}
|p(x,\xi) - q(x,\xi)| &\leq d^m_{0,0,A} \left(1+|\xi|\right)^{m-1} \text{ (por (2.71))}\\
&= d^m_{0,0,A} \left(1+|\xi|\right)^{-1} c_A \frac{1}{c_A} \left(1+|\xi|\right)^{m}\\
&\leq d^m_{0,0,A} \left(1+|\xi|\right)^{-1} c_A \left|p(x,\xi)^{-1}\right|^{-1} \text{ (por (2.70))}\\
&\leq \frac{1}{2}\left|p(x,\xi)^{-1}\right|^{-1}\\
&< \left|p(x,\xi)^{-1}\right|^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $p(x,\xi)$ es invertible se verifica que $q(x,\xi)$ también es invertible para cada $(x,\xi) \in A \times \{\xi \mid |\xi| \geq f_{m,A}\}$ y

$$\left|q(x,\xi)^{-1}\right| \leq \frac{1}{1 - |p(x,\xi) - q(x,\xi)|\,|p(x,\xi)^{-1}|}\left|p(x,\xi)^{-1}\right|.$$

Veamos que $q(x,\xi)$ satisface la condición (2.69). En efecto, sea $(x,\xi) \in A \times \{\xi \mid |\xi| \geq f_{m,A}\}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|p(x,\xi) - q(x,\xi)| \left|p(x,\xi)^{-1}\right| &\leq d^m_{0,0,A} \left(1+|\xi|\right)^{m-1} c_A \left(1+|\xi|\right)^{-m}\\
&= d^m_{0,0,A} c_A \left(1+|\xi|\right)^{-1}\\
&\leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

entonces,

$$1 - |p(x,\xi) - q(x,\xi)| \left|p(x,\xi)^{-1}\right| \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left|q(x,\xi)^{-1}\right| &\leq \frac{1}{1 - |p(x,\xi) - q(x,\xi)| \, |p(x,\xi)^{-1}|}\left|p(x,\xi)^{-1}\right| \\ &\leq 2\left|p(x,\xi)^{-1}\right| \\ &\leq 2c_A \left(1 + |\xi|\right)^{-m}.\end{aligned}$$

En conclusión, hemos probado que para cada $A \subset \Omega$ compacto existen $2c_A, f_{m,A}$ constantes positivas tales que para todo $x \in A$ y $|\xi| \geq f_{m,A}$ se verifica que $q(x,\xi)$ es invertible y

$$\left|q(x,\xi)^{-1}\right| \leq 2c_A \left(1 + |\xi|\right)^{-m},$$

lo cual significa que $q(x,\xi)$ es elíptico de orden m. □

Sea $p \in S^m(\Omega)$ es elíptico de orden m. En virtud de que para cada $K \subset \Omega$ compacto para valores de ξ grandes p es invertible y satisface la condición (2.69), la pregunta natural es si podremos "definir" p^{-1} el símbolo inverso de p y, si será de orden $-m$. Pero se nos presenta el problema de que p puede tener ceros en $K \times \mathbb{R}^n$ y no ser invertible en esos puntos. Para esto recurriremos a una función ζ que vale 0 en los ceros de p en $K \times \mathbb{R}^n$ y vale 1 para grandes valores de ξ para, luego definir ζp^{-1} como el *símbolo inverso* de p y probar que efectivamente es un símbolo de orden $-m$.

A continuación, en el Lema 2.45 veremos la existencia de la función ζ y en la Proposición 2.46 definiremos formalmente el inverso de p y probaremos que es un símbolo de orden $-m$.

Lema 2.45. *Sea $p \in S^m(\Omega)$ elíptico. Entonces, existe $\zeta \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n, [0,1])$ con la siguiente propiedad: para todo $A \subset \Omega$ compacto existen constantes positivas d_A, D_A tales que si $x \in A$ se verifica que*

i) $\zeta(x,\xi) = 1$ *si* $|\xi| \geq D_A$

ii) $|p(x,\xi)^{-1}| \leq d_A(1 + |\xi|)^{-m}$ *si* $\zeta(x,\xi) \neq 0$.

Demostración. Sean $\{U_j\}_{j=1}^\infty \subset \Omega$ y $\{V_j\}_{j=1}^\infty \subset \Omega$ como en el Lema 2.25. Para cada j considero $\psi_j \in C_c^\infty(\Omega, [0,1])$ tal que $\psi_j = 1$ en $\overline{U_j}$ y $\operatorname{sop}(\psi_j) \subset V_j$.

Como p es elíptico y cada $\overline{V_j}$ es compacto, existen constantes positivas $c_{\overline{V_j}}$ y $C_{\overline{V_j}}$ para las cuales (2.69) se satisface. Entonces, para cada j considero $\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$0 \leq \varphi_j(\xi) \leq 1,\ \varphi_j(\xi) = 0 \text{ si } |\xi| \leq C_{\overline{V_j}} \text{ y, } \varphi_j(\xi) = 1 \text{ si } |\xi| \geq 2C_{\overline{V_j}}.$$

Luego si

$$\phi(x,\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x)\varphi_j(\xi)$$

como para cada (x,ξ) por construcción $\psi_j(x) \neq 0$ para una cantidad finita de j entonces, la sumatoria tiene una cantidad finita de términos no nulos y, por lo tanto, $\phi \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$.

Ahora sea $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$0 \leq \eta(t) \leq 1,\ \eta(t) = 0 \text{ si } t \leq 0 \text{ y, } \eta(t) = 1 \text{ si } t \geq 1$$

afirmo que $\zeta = \eta \circ \phi$ es la función buscada. En efecto, dado $A \subset \Omega$ compacto. Por un lado, es evidente que la desigualdad (2.69) se satisface para las constantes $c_{\overline{V_j}}$ y $C_{\overline{V_j}}$ para los j en los que $\overline{V_j} \cap A \neq \varnothing$.

Por otro lado, como para cada $x \in \Omega$ existe un j tal que $\psi_j(x) = 1$ entonces, $\psi_j(x)\varphi_j(\xi) = 1$ si $(x,\xi) \in \overline{U_j} \times \left\{\xi \mid |\xi| \geq 2C_{\overline{V_j}}\right\}$ y, en consecuencia,

$$\zeta(x,\xi) = 1 \text{ si } (x,\xi) \in \bigcup_{j \mid A\cap\overline{U_j}\neq\varnothing} \left(A \cap \overline{U_j}\right) \times \left\{\xi \mid |\xi| \geq 2C_{\overline{V_j}}\right\}.$$

Además, $p(x,\xi)$ es invertible en

$$\bigcup_{k \mid A\cap\overline{V_k}\neq\varnothing} \left(A \cap \overline{V_k}\right) \times \left\{\xi \mid |\xi| \geq C_{\overline{V_k}}\right\}.$$

Por lo tanto, tomando

$$d_A = \text{mín}\{c_{\overline{V_j}} \mid \overline{V_j} \cap A \neq \varnothing\} \text{ y } D_A = \text{máx}\left(\{2C_{\overline{V_j}} \mid A \cap \overline{U_j} \neq \varnothing\} \cup \{C_{\overline{V_k}} \mid A \cap \overline{V_k} \neq \varnothing\}\right)$$

se satisfacen las condiciones $i)$ y $ii)$. $\square$

Proposición 2.46. *Sean $p \in S^m(\Omega)$ elíptico de orden m y $\zeta \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n, [0,1])$ como en el Lema 2.45. Entonces,*

$$q(x,\xi) := \begin{cases} 0 & si\ \zeta(x,\xi) = 0 \\ \zeta(x,\xi)p(x,\xi)^{-1} & si\ \zeta(x,\xi) \neq 0 \end{cases}$$

verifica que $q \in S^{-m}(\Omega)$.

Demostración. Debemos probar que para todo $K \subset \Omega$ compacto y para cada α, β existe una constante $f_{\alpha,\beta,K} > 0$ tal que

$$\sup_{x\in K} \left|D_x^\beta D_\xi^\alpha q(x,\xi)\right| \leq f_{\alpha,\beta,K}(1+|\xi|)^{-m-|\alpha|}.$$

Lo haremos según $|\alpha| + |\beta|$.

Sean $K \subset \Omega$ compacto y d_K, D_K las constantes dadas por la función ζ para K.

- Si $\alpha = \beta = 0$ entonces por construcción de ζ se tiene que

$$|q(x,\xi)| \leq \left|p(x,\xi)^{-1}\right| \leq d_K(1+|\xi|)^{-m}$$

para todo $(x,\xi) \in K \times \mathbb{R}^n$.

- Si $|\alpha| + |\beta| > 0$. Primero observemos que para cada j tomando derivadas se tiene que

$$\begin{aligned} pp^{-1} = Id &\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}p\right)p^{-1} + p\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}p^{-1}\right) = 0 \\ &\Rightarrow p\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}p^{-1}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}p\right)p^{-1} \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\xi_j}p^{-1} = -p^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}p\right)p^{-1} \end{aligned} \tag{2.72}$$

análogamente, para cada i

$$\frac{\partial}{\partial x_i}p^{-1} = -p^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}p\right)p^{-1}. \tag{2.73}$$

Entonces, por un lado para cada

$$(x,\xi) \in K \times \{\xi \mid |\xi| \geq D_K\}$$

si $|\alpha| = 1$

$$\begin{aligned}
\left|D_\xi^\alpha q(x,\xi)\right| &= \left|D_\xi^\alpha p(x,\xi)^{-1}\right| \\
&= \left|p(x,\xi)^{-1}\right| \left|D_\xi^\alpha p(x,\xi)\right| \left|p(x,\xi)^{-1}\right| \\
&\leq d_K(1+|\xi|)^{-m} c_{\alpha,0,K}(1+|\xi|)^{m-1} d_K(1+|\xi|)^{-m} \\
&= c'_{\alpha,0,K}(1+|\xi|)^{-m-1}, \qquad (2.74)
\end{aligned}$$

si $|\beta| = 1$

$$\begin{aligned}
\left|D_x^\beta q(x,\xi)\right| &= \left|D_x^\beta p(x,\xi)^{-1}\right| \\
&= \left|p(x,\xi)^{-1}\right| \left|D_x^\beta p(x,\xi)\right| \left|p(x,\xi)^{-1}\right| \\
&\leq d_K(1+|\xi|)^{-m} c_{0,\beta,K}(1+|\xi|)^{m} d_K(1+|\xi|)^{-m} \\
&= c'_{0,\beta,K}(1+|\xi|)^{-m} \qquad (2.75)
\end{aligned}$$

y, para las derivadas de mayor orden respecto a x y ξ y las derivadas mixtas utilizando (2.72) y (2.73) por recurrencia las podemos expresar en función de p^{-1} y derivadas de p para luego realizando el mismo desarrollo que en (2.74) y (2.75) obtener

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha q(x,\xi)| \leq c'_{\alpha,\beta,K}(1+|\xi|)^{-m-|\beta|}.$$

Por otro lado, si

$$(x,\xi) \in K \times \{\xi \mid 0 \leq |\xi| \leq D_K\}$$

como $q(x,\xi)$ es suave y $K \times \{\xi \mid 0 \leq |\xi| \leq D_K\}$ es compacto, existe $c''_{\alpha,\beta,K}$ constante positiva tal que

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha q(x,\xi)| \leq c''_{\alpha,\beta,K}(1+|\xi|)^{-m-|\beta|}.$$

En conclusión, tomando $f_{\alpha,\beta,K} = \max\left\{c'_{\alpha,\beta,K}, c''_{\alpha,\beta,K}\right\}$ obtenemos

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha q(x,\xi)| \leq f_{\alpha,\beta,K}(1+|\xi|)^{-m-|\beta|}$$

para todo $(x,\xi) \in K \times \mathbb{R}^n$.

□

Definición 2.47. Sean $p \in S^\infty(\Omega)$ y $q \in S^\infty(\Omega)$ dos símbolos. Definimos el *producto de Leibnitz* de p y q módulo $S^{-\infty}(\Omega)$, que denotamos con $p \circ q$, como

$$p \circ q \sim \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha p D_x^\alpha q.$$

Por el Teorema 2.40 si $p \in S^m(\Omega)$ y $q \in S^r(\Omega)$ entonces $p \circ q \in S^{m+r}(\Omega)$.

Definición 2.48. Sea $P \in \Psi^\infty(\Omega)$ un operador pseudo-diferencial, diremos que $Q \in \Psi^\infty(\Omega)$ es un *parametriz* para P si satisface

$$PQ - Id \in \Psi^{-\infty}(\Omega) \ \text{ y } \ QP - Id \in \Psi^{-\infty}(\Omega).$$

Sea $p \in S^\infty(\Omega)$ un símbolo diremos que $q \in S^\infty(\Omega)$ es un *parametriz* para p si satisface

$$p \circ q - 1 \in S^{-\infty}(\Omega) \ \text{ y } \ q \circ p - 1 \in S^{-\infty}(\Omega)$$

donde 1 denota la matriz identidad.

Teorema 2.49. *Sea $P \in \Psi^m(\Omega)$ elíptico. Entonces, existe $Q \in \Psi^{-m}(\Omega)$ parametriz para P.*

Demostración. Dado $P \in \Psi^m(\Omega)$ elíptico, a menos de equivalentes, suponemos que P es propiamente soportado. Entonces $P = \sigma_P(X, D)$.

Por Proposición 2.46, existe $t \in S^{-m}(\Omega)$ elíptico que verifica lo siguiente para todo $K \subset \Omega$ compacto existe D_K una constante positiva tal que

$$\sigma_P(x,\xi)t(x,\xi) - 1 = 0 \text{ para todo } (x,\xi) \in K \times \{\xi \mid |\xi| \geq D_K\}$$

entonces, $\sigma_P t - 1 \in S^{-\infty}(\Omega)$ y, por lo tanto,

$$\sigma_P t \sim 1.$$

Sea $T = \sigma_{t(X,D)}(X, D)$ por Teorema 2.40 tenemos que

$$\begin{aligned}
\sigma_{PT}(x,\xi) \sim \sigma_P(x,\xi) \circ \sigma_T(x,\xi) &= \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha \sigma_P(x,\xi) D_x^\alpha \sigma_T(x,\xi) \\
&\sim 1 - \left[-\sum_{|\alpha|\geq 1} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha \sigma_P(x,\xi) D_x^\alpha \sigma_T(x,\xi) \right] \\
&= 1 - r(x,\xi)
\end{aligned} \tag{2.76}$$

con

$$r(x,\xi) = -\sum_{|\alpha|\geq 1} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha \sigma_P(x,\xi) D_x^\alpha \sigma_T(x,\xi).$$

Por lo tanto, por Teorema 2.28 se verifica que $r(x,\xi) \in S^{-1}(\Omega)$.

Sea para cada $M \geq 1$ entero

$$r^{\circ^M}(x,\xi) = \underbrace{r(x,\xi) \circ \ldots \circ r(x,\xi)}_{M \text{ factores}}$$

entonces

$$r^{\circ^M}(x,\xi) \in S^{-M}(\Omega).$$

Ahora, observemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
&\sigma_P(x,\xi) \circ \sigma_T(x,\xi) \circ \left(1 + r(x,\xi) + r^{\circ^2}(x,\xi) + \cdots + r^{\circ^M}(x,\xi)\right) \\
&\quad \sim (1 - r(x,\xi)) \circ \left(1 + r(x,\xi) + r^{\circ^2}(x,\xi) + \cdots + r^{\circ^M}(x,\xi)\right) \text{ (por (2.76))} \\
&\quad \sim 1 + r(x,\xi) + r^{\circ^2}(x,\xi) + \cdots + r^{\circ^M}(x,\xi) \\
&\qquad\quad - r(x,\xi) - r^{\circ^2}(x,\xi) - \cdots - r^{\circ^M}(x,\xi) - r^{\circ^{M+1}}(x,\xi) \\
&\quad = 1 - r^{\circ^{M+1}}(x,\xi)
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\sigma_P(x,\xi) \circ \sigma_T(x,\xi) \circ \left(1 + r(x,\xi) + r^{\circ^2}(x,\xi) + \cdots + r^{\circ^M}(x,\xi)\right) \sim 1 - r^{\circ^{M+1}}(x,\xi) \tag{2.77}$$

para todo $M \geq 1$.

Dada la sucesión $\left\{r^{\circ^k}(x,\xi)\right\}_{k=1}^{\infty}$ por Teorema 2.28 existe

$$r_1'(x,\xi) \in S^{-1}(\Omega)$$

tal que

$$r_1'(x,\xi) \sim \sum_{k\geq 1} r^{\circ^k}(x,\xi).$$

Análogamente para cada $M \geq 1$, para la sucesión $\left\{r^{\circ^k}(x,\xi)\right\}_{k=M+1}^{\infty}$ existe

$$r_{M+1}'(x,\xi) \in S^{-M-1}(\Omega)$$

tal que

$$r_{M+1}'(x,\xi) \sim \sum_{k\geq M+1} r^{\circ^k}(x,\xi). \tag{2.78}$$

Ahora, afirmamos que

$$\sigma_P(x,\xi) \circ \sigma_T(x,\xi) \circ \left(1 + r_1'(x,\xi)\right) \sim 1.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\sigma_P(x,\xi) \circ \sigma_T(x,\xi) \circ \left(1 + r_1'(x,\xi)\right) \sim& \\
&\sim \sigma_P(x,\xi) \circ \sigma_T(x,\xi) \circ \left(1 + r^{\circ^1}(x,\xi) + r^{\circ^2}(x,\xi) + \cdots + r^{\circ^M}(x,\xi) + \sum_{k\geq M+1} r^{\circ^k}(x,\xi)\right) \\
&\sim \sigma_P(x,\xi) \circ \sigma_T(x,\xi) \circ \left(1 + r^{\circ^1}(x,\xi) + r^{\circ^2}(x,\xi) + \cdots + r^{\circ^M}(x,\xi)\right) + \\
&+ \sigma_P(x,\xi) \circ \sigma_T(x,\xi) \circ \left(\sum_{k\geq M+1} r^{\circ^k}(x,\xi)\right) \\
&\sim 1 - r^{\circ^{M+1}}(x,\xi) + \sigma_P(x,\xi) \circ \sigma_T(x,\xi) \circ r_{M+1}'(x,\xi) \text{ (por (2.77) y (por (2.78))}
\end{aligned}$$

entonces,

$$\sigma_P \circ \sigma_T \circ \left(1 + r_1'\right) - 1 \sim -r^{\circ^{M+1}} + \sigma_P \circ \sigma_T \circ r_{M+1}'$$

y como

$$-r^{\circ^{M+1}} + \sigma_P \circ \sigma_T \circ r_{M+1}' \in S^{-M-1}(\Omega)$$

tenemos que

$$\sigma_P \circ \sigma_T \circ \left(1 + r_1'\right) - 1 \in S^{-M-1}(\Omega)$$

para todo $M \geq 1$. De donde concluimos que

$$\sigma_P \circ \sigma_T \circ \left(1 + r_1'\right) \sim 1.$$

Sea $q \in S^{-m}(\Omega)$ tal que $q \sim \sigma_T \circ (1 + r_1')$ entonces

$$\sigma_P \circ q \sim 1. \tag{2.79}$$

De forma análoga construimos $q' \in S^{-m}(\Omega)$ tal que

$$q' \circ \sigma_P \sim 1.$$

Ahora, afirmamos que

$$q \circ \sigma_P \sim 1. \tag{2.80}$$

En efecto,

$$q \circ \sigma_P - 1 \sim \underbrace{(1 - q' \circ \sigma_P)}_{\in S^{-\infty}(\Omega)} \circ q \circ \sigma_P + q' \circ \underbrace{(\sigma_P \circ q - 1)}_{\in S^{-\infty}(\Omega)} \circ \sigma_P + \underbrace{(q' \circ \sigma_P - 1)}_{\in S^{-\infty}(\Omega)}$$

por lo tanto

$$q \circ \sigma_P - 1 \in S^{-\infty}(\Omega).$$

En conclusión, por (2.79) y (2.80) se verifica que q es el parametriz para p y, en consecuencia $Q = q(X, D) \in \Psi^{-m}(\Omega)$ es el parametriz para P buscado.

□

2.8 Regularidad Elíptica

En esta sección estudiaremos la regularidad de las soluciones de ecuaciones pseudo-diferenciales elípticas. Para ello necesitamos previamente definir los siguientes espacios de Sobolev sobre Ω.

Para cada $s \in \mathbb{R}$ definimos

$$\mathcal{H}_s^0(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\ \|_s}$$

y

$$\mathcal{H}_s^{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}^p \text{ medibles} \mid \phi f \in \mathcal{H}_s(\mathbb{R}^n) \text{ para todo } \phi \in C_c^\infty(\Omega)\}.$$

Teorema 2.50. *Sea $P \in \Psi^m(\Omega)$. Entonces*

a) P se extiende a un operador lineal suave $P\colon \mathcal{H}_{s+m}^0(\Omega) \to \mathcal{H}_s^{loc}(\Omega)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Es decir, para todos $s \in \mathbb{R}$ y $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ existe $c_{s,\phi} > 0$ tal que $\|\phi P u\|_s \leq c_{s,\phi}\|u\|_{s+m}$ para todo $u \in \mathcal{H}_{s+m}^0(\Omega)$.

b) Si P es propiamente soportado, entonces P se extiende a un operador lineal suave $P\colon \mathcal{H}_{s+m}^{loc}(\Omega) \to \mathcal{H}_s^{loc}(\Omega)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Es decir, para todos $s \in \mathbb{R}$ y $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ existen $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ y $c_{s,\phi} > 0$ tal que $\|\phi P u\|_s \leq c_{s,\phi}\|\psi u\|_{s+m}$ para todo $u \in \mathcal{H}_{s+m}^{loc}(\Omega)$.

Demostración. Veamos primero la afirmación a). Sean $s \in \mathbb{R}$ y $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Si $P = p(X, D)$ entonces, $Q := \phi P = q(X, D)$ con

$$q(x, \xi) = \phi(x)p(x, \xi) \in S^m(\Omega)$$

y $q(x, \xi)$ tiene soporte compacto en la variable x. Luego

$$\begin{aligned}
\widehat{Qu}(\eta) &= \int e^{-2\pi i \eta \cdot x}\, (\phi P)\, u(x)\, dx \\
&= \int e^{-2\pi i \eta \cdot x} \left[\int e^{2\pi i \xi \cdot x} \phi(x) p(x, \xi) \widehat{u}(\xi)\, d\xi\right] dx \\
&= \int\int e^{-2\pi i (\eta - \xi) \cdot x} \phi(x) p(x, \xi) \widehat{u}(\xi)\, d\xi dx \\
&= \int\int e^{-2\pi i (\eta - \xi) \cdot x} q(x, \xi) \widehat{u}(\xi)\, dx d\xi \\
&= \int \left[\int e^{-2\pi i (\eta - \xi) \cdot x} q(x, \xi)\, dx\right] \widehat{u}(\xi)\, d\xi \\
&= \int \widehat{q_1}(\eta - \xi, \xi) \widehat{u}(\xi)\, d\xi
\end{aligned}$$

donde hemos intercambiado el orden de integración debido a que, como la función $x \mapsto q(x,\xi)$ tiene soporte compacto y $\widehat{u} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, la doble integral es absolutamente convergente y, $\widehat{q_1}$ indica la transformada de Fourier de q en la primera variable.

Ahora, como

$$\widehat{q_1}(\eta - \xi, \xi) = \int e^{-2\pi i(\eta-\xi)\cdot x} q(x,\xi)\, dx \tag{2.81}$$

observamos que (2.81) es similar a (2.48). Entonces, realizando el mismo razonamiento que hicimos para obtener la acotación (2.50), podemos obtener una acotación similar. Es decir, para todo $t > 0$ entero tomando el compacto $K = \operatorname{sop}(\phi)$ existe $c_{K,t} > 0$ constante positiva tal que

$$|\widehat{q_1}(\eta - \xi, \xi)| \leq c_{K,t}\, (1 + |\eta - \xi|)^{-t}\, (1 + |\xi|)^m\,.$$

Sea $\Phi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\Phi(\eta,\xi) = |\widehat{q_1}(\eta - \xi, \xi)|\, (1 + |\xi|)^{-s-m}\, (1 + |\eta|)^s \tag{2.82}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\Phi(\eta,\xi) &\leq c_{K,t}\, (1 + |\eta - \xi|)^{-t}\, (1 + |\xi|)^m\, (1 + |\xi|)^{-s-m}\, (1 + |\eta|)^s \\
&= c_{K,t}\, (1 + |\eta - \xi|)^{-t}\, (1 + |\xi|)^{-s}\, (1 + |\eta|)^s \\
&\leq c_{K,t}\, (1 + |\eta - \xi|)^{-t}\, (1 + |\eta - \xi|)^{|s|} \quad \text{(por Lema 2.35)} \\
&= c_{K,t}\, (1 + |\eta - \xi|)^{-t+|s|}\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si t es suficientemente grande podemos afirmar que existe una constante $C_s > 0$ tal que

$$\int \Phi(\eta,\xi)\, d\eta < C_s \quad \text{y} \quad \int \Phi(\eta,\xi)\, d\xi < C_s \tag{2.83}$$

para todos η y ξ.

Denotamos

$$(Qu, v) = \int \widehat{Qu}(\eta) \cdot \widehat{v}(\eta)\, d\eta$$

entonces,

$$\begin{aligned}
(Qu, v) &= \int \widehat{Qu}(\eta) \cdot \widehat{v}(\eta)\, d\eta \\
&= \int \left[\int e^{-2\pi i \eta\cdot x} Qu(x)\, dx \right] \cdot \widehat{v}(\eta)\, d\eta \\
&= \int \left[\int e^{-2\pi i \eta\cdot x} \left\{ \int e^{2\pi i \xi\cdot x} q(x,\xi) \widehat{u}(\xi)\, d\xi \right\} dx \right] \cdot \widehat{v}(\eta)\, d\eta \\
&= \int\!\!\int\!\!\int e^{-2\pi i(\eta-\xi)\cdot x} q(x,\xi) \widehat{u}(\xi) \cdot \widehat{v}(\eta)\, d\xi\, dx\, d\eta \\
&= \int\!\!\int\!\!\int e^{-2\pi i(\eta-\xi)\cdot x} q(x,\xi) \widehat{u}(\xi) \cdot \widehat{v}(\eta)\, dx\, d\xi d\eta
\end{aligned}$$

donde hemos intercambiado el orden de integración ya que, como la función $x \mapsto q(x,\xi)$ tiene soporte compacto, $\widehat{u} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y, $\widehat{\eta} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que la triple integral es absolutamente convergente.

Ahora, si

$$U(\xi) = \widehat{u}(\xi)(1 + |\xi|)^{s+m} \text{ y } V(\eta) = \widehat{v}(\eta)(1 + |\eta|)^{-s}$$

aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$\begin{aligned}
|(Qu,v)| &\leq \iint\left|\int e^{-2\pi i(\eta-\xi)\cdot x} q(x,\xi)\,dx\right| |\widehat{u}(\xi)||\widehat{v}(\eta)|\,d\xi\,d\eta \\
&= \iint |\widehat{q_1}(\eta-\xi,\xi)|(1+|\xi|)^{-s-m}(1+|\eta|)^{s}|U(\xi)||V(\eta)|\,d\xi\,d\eta \\
&= \iint \Phi(\xi,\eta)|U(\xi)||V(\eta)|\,d\xi\,d\eta \text{ (por (2.82))} \\
&\leq \left[\iint \Phi(\xi,\eta)|U(\xi)|^2\,d\xi\,d\eta\right]^{\frac{1}{2}}\left[\iint \Phi(\xi,\eta)|V(\eta)|^2\,d\xi\,d\eta\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left[\int C_s|U(\xi)|^2\,d\xi\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int C_s|V(\eta)|^2\,d\eta\right]^{\frac{1}{2}} \text{ (por (2.83))} \\
&= \left[\int C_s|\widehat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|)^{2s+2m}\,d\xi\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int C_s|\widehat{v}(\eta)|^2(1+|\eta|)^{-2s}\,d\eta\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= C_s\|u\|_{s+m}\|v\|_{-s}.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$|(Qu,v)| \leq C_s\|u\|_{s+m}\|v\|_{-s}$$

para todos $u, v \in C_c^\infty(\Omega)$. En consecuencia, por el Teorema 1.9 se tiene que

$$\|Qu\|_s = \sup_{\|v\|_{-s}=1} |(Qu,v)| \leq C_s\|u\|_{s+m}$$

para todo $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Por lo tanto, dado $s \in \mathbb{R}$ para todos $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ y $u \in C_c^\infty(\Omega)$ se verifica que

$$\|\phi P u\|_s \leq C_s\|u\|_{s+m}.$$

De donde concluimos que P tiene una extensión continua a $\mathcal{H}_{s+m}^0(\Omega) \to \mathcal{H}_s^{loc}(\Omega)$ para todo s.

Para la afirmación b). Sean $u \in C^\infty(\Omega)$ y $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ como ya hemos observado, al ser P propiamente soportado se puede extender a $P\colon C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ y, existe $C \subset \Omega$ compacto tal que el valor de Pu en $\operatorname{sop}(\phi)$ depende del valor de u en C, es decir existe $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\psi|_C = 1$ y

$$\phi P u = \phi P(\psi u).$$

Entonces, por parte anterior

$$\|\phi P u\|_s = \|\phi P(\psi u)\|_s \leq C_s\|\psi u\|_{s+m}.$$

Luego como s, u y, ϕ son arbitrarios concluimos que P tiene una extensión continua a $\mathcal{H}_{s+m}^{loc}(\Omega) \to \mathcal{H}_s^{loc}(\Omega)$ para todo s.

□

Teorema 2.51. *(Regularidad elíptica). Sean $u \in \mathcal{H}_k^{loc}(\Omega)$ para algún k y $P \in \Psi^m(\Omega)$ elíptico y propiamente soportado. Entonces, si $Pu \in \mathcal{H}_s^{loc}(\Omega)$ se verifica que $u \in \mathcal{H}_{s+m}^{loc}(\Omega)$. En particular, si $Pu \in C^\infty(\Omega)$ se tiene que $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Demostración. Por Teorema 2.49 considero $Q \in \Psi^{-m}(\Omega)$ parametriz para P.

Por un lado, como Q es de orden $-m$ y propiamente soportado por el Teorema 2.50 se extiende a $\mathcal{H}_s^{loc}(\Omega) \to \mathcal{H}_{s+m}^{loc}(\Omega)$. Por lo tanto, como $Pu \in \mathcal{H}_s^{loc}(\Omega)$ entonces

$$QPu \in \mathcal{H}_{s+m}^{loc}(\Omega).$$

Por otro lado, como $Id - QP \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$ tenemos que $Id - QP$ es de cualquier orden. En particular, es de orden

$$k - s - m.$$

Además, $Id - QP$ es propiamente soportado. Por lo tanto, por el Teorema 2.50 tenemos que $Id - QP$ se extiende a $\mathcal{H}_k^{loc}(\Omega) \to \mathcal{H}_{s+m}^{loc}(\Omega)$. En consecuencia,

$$(Id - QP)\, u \in \mathcal{H}_{s+m}^{loc}(\Omega).$$

Por último, como

$$u = (Id - QP)u + QPu$$

obtenemos que $u \in \mathcal{H}_{s+m}^{loc}(\Omega)$.

Si $Pu \in C^{\infty}(\Omega)$ tenemos que $Pu \in \bigcap_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{H}_t^{loc}(\Omega)$ entonces por parte anterior, $u \in \bigcap_{t>1} \mathcal{H}_t^{loc}(\Omega)$. Lo cual implica que

$$\phi u \in \bigcap_{t>1} \mathcal{H}_t(\mathbb{R}^n) \text{ para todo } \phi \in C_c^{\infty}(\Omega).$$

En consecuencia, por el Teorema 1.10 se tiene que

$$\phi u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n) \text{ para todo } \phi \in C_c^{\infty}(\Omega).$$

Por lo tanto $u \in C^{\infty}(\Omega)$.

□

Bibliografía

[1] Gerald B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations,* Princeton University Press, 2nd Ed, 1995.

[2] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III, Pseudo-Differential Operators, Grundlehren Math. Wiss. vol. 274,* Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[3] H.B. Lawson y M.L. Michelsohn, *Spin Geometry,* Princeton University Press, Princeton, 1989.

[4] G. Grubb, *Distributions and Operators,* Graduate Texts in Mathematics 252, Springer, (2009).

[5] G. K. Pedersen, *Analysis Now,* Graduate Texts in Mathematics 118, Springer, (1989).