

TRABAJO MONOGRÁFICO

SOBRE EL MAPPING CLASS GROUP Y LA
HIPERBOLICIDAD DEL GRAFO DE CURVAS
EN SUPERFICIES DE TIPO FINITO

SOFÍA LLAVAYOL ALVARIÑO

DICIEMBRE 2022

Orientador:

SÉBASTIEN ALVAREZ

FACULTAD DE CIENCIAS, UDELAR.

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

MONTEVIDEO, URUGUAY

Resumen

Sea S una superficie conexa, compacta y orientable de género g , con b componentes de borde y n puntos removidos. El *mapping class group* de S es el grupo de clases de isotopía de homeomorfismos que fijan el ∂S con el producto natural inducido por la composición. En esta monografía estudiaremos propiedades del grupo y de sus elementos. En particular, veremos que actúa sobre un espacio Gromov hiperbólico. Empezaremos por computar, de forma elemental, ejemplos explícitos de mapping class groups en superficies como el disco compacto, la esfera pinchada, el anillo, el toro, etc. Para seguir con otras superficies, precisaremos desarrollar más la teoría.

Lo más básico de la teoría son las clases *Dehn twist*. Dedicaremos un capítulo a estudiar cómo interactúan entre ellas, y cómo actúan sobre las clases de curvas de S .

Los Dehn twist son simples, pero juntos generan todo el grupo. El principal objetivo del último capítulo será probar que el mapping class group de una superficie de género g es generado por finitos Dehn twists. (Para otras superficies tendremos resultados análogos.) Esto fue debido a Dehn (1920), y mejorado por Humphries (1979), quien dio generadores explícitos.

Una consecuencia de lo anterior es que el *problema de la palabra* es soluble; dado un grupo y un generador finito, el problema de la palabra plantea la pregunta de si existe un algoritmo que determine si una palabra en los generadores representa la identidad.

Nosotros veremos un algoritmo para el mapping class group.

En el cuarto capítulo abandonaremos temporalmente nuestro grupo para estudiar el denominado *grafo de curvas*, y otros grafos asociados. Dichos espacios están fuertemente relacionados al mapping class group ya que este actúa en ellos. De hecho, será una de estas acciones la que servirá para probar el resultado de generador finito.

El grafo de curvas $\mathcal{C}(S)$ tiene un vértice por cada clase de isotopía de curva cerrada simple y esencial en S , y las aristas conectan clases con representantes disjuntos. Para superficies de género $g \geq 2$, Masur y Minsky probaron (1999) que $\mathcal{C}(S)$ es un espacio Gromov hiperbólico. En esta monografía seguiremos la prueba de Przytycki y Sisto (2015) en [2], basada en el criterio de hiperbolicidad de Bowditch [7]. Debilitando la tesis de Bowditch lo suficiente, lograremos dar una prueba más simple del criterio.

Para terminar, comentaremos sobre la clasificación de Nielsen-Thurston. En particular, hablaremos sobre las clases pseudo-Anosov y mostraremos algunos ejemplos de ellos.

Un hecho interesante sobre estas clases en relación al grafo de curvas es que actúan loxodrómicamente en él.

Índice general

| | |
|---|----|
| Capítulo 1. PRELIMINARES SOBRE SUPERFICIES | 5 |
| 1. SUPERFICIES DE TIPO FINITO | 5 |
| 2. CURVAS CERRADAS SIMPLES | 6 |
| 3. EL PRINCIPIO DE CAMBIO DE COORDENADAS | 11 |
| Capítulo 2. MAPPING CLASS GROUP | 13 |
| 1. DEFINICIÓN Y PRIMEROS EJEMPLOS | 13 |
| 2. EL MÉTODO DE ALEXANDER | 17 |
| Capítulo 3. DEHN TWISTS | 19 |
| 1. DEHN TWISTS Y SU ACCIÓN EN LAS CURVAS | 19 |
| 2. DEHN TWISTS Y NÚMERO DE INTERSECCIÓN | 20 |
| 3. HECHOS BÁSICOS SOBRE DEHN TWISTS | 21 |
| 4. CORTANDO, TAPANDO E INCLUYENDO | 23 |
| Capítulo 4. EL GRAFO DE CURVAS | 27 |
| 1. HIPERBOLICIDAD DEL GRAFO DE CURVAS | 27 |
| 2. LA ACCIÓN DE LOS PSEUDO-ANOSOV EN EL GRAFO DE CURVAS | 33 |
| 3. EL GRAFO DE CURVAS QUE NO SEPARAN | 33 |
| Capítulo 5. GENERADORES DEL MAPPING CLASS GROUP | 35 |
| 1. LA SUCESIÓN EXACTA DE BIRMAN | 36 |
| 2. LA ESFERA Y EL DISCO CON FINES | 38 |
| 3. GENERADOR FINITO | 41 |
| 4. SUPERFICIES CON FINES | 43 |
| 5. TIPOS DE MAPPING CLASSES | 44 |
| Apéndice A. FIBRADOS, ISOTOPÍAS Y FOLIACIONES | 47 |
| 1. FIBRADOS | 47 |
| 2. FIBRADOS DE VECTORES Y ENTORNOS TUBULARES | 47 |
| 3. EXTENSIÓN DE ISOTOPÍAS | 48 |
| 4. LA SUCESIÓN EXACTA DE BIRMAN | 49 |
| 5. EL MÉTODO DE ALEXANDER | 51 |
| 6. FOLIACIONES CON MEDIDA | 53 |
| Apéndice. Bibliografía | 55 |

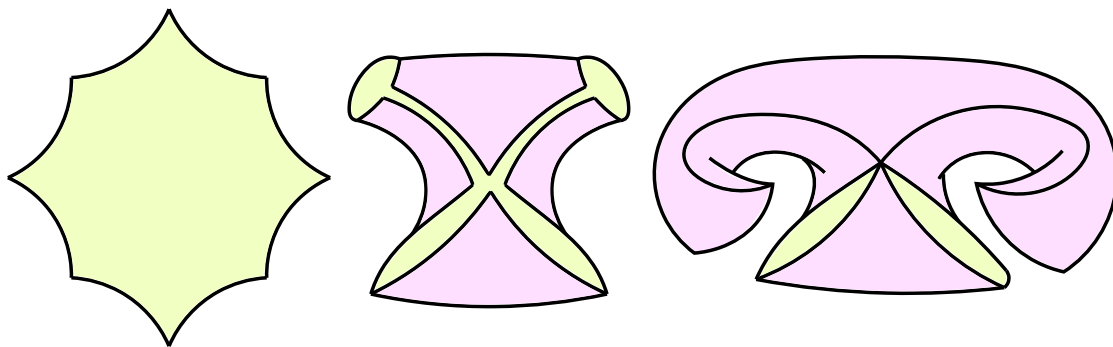
PRELIMINARES SOBRE SUPERFICIES

1. SUPERFICIES DE TIPO FINITO

Una *superficie* es una variedad de dimensión dos, es decir, un espacio topológico localmente homeomorfo al plano. Una *superficie con borde* es una superficie con una cantidad finita de discos abiertos removidos.

TEOREMA 1.1 (CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES). Cualquier superficie compacta sin borde, conexa y orientable es homeomorfa a la suma conexa de la esfera y un $g \geq 0$ toro. Cualquier superficie compacta, conexa y orientable se obtiene de remover $b \geq 0$ discos abiertos con clausuras disjuntas de una superficie cerrada sin borde. El conjunto de superficies compactas a menos de homeomorfismo está en biyección con el conjunto $\{(g, b) : g, b \geq 0\}$.

De ahora en más, por “superficie” nos referiremos a una superficie compacta, conexa y orientable, posiblemente con n puntos del interior removidos, que denominaremos *finés*. (Evidentemente, la superficie no es compacta si $n \geq 1$.) Podemos entonces determinar una superficie dando los números g , b y n . Denotaremos por $S_{g,n}$ a una superficie de género g y n finés, y abreviaremos a S_g si $n = 0$.



La característica de Euler $\chi(S)$ de una superficie es el resultado de sumar los vértices, restar las aristas y sumar las caras de una triangulación de esta. Resulta que

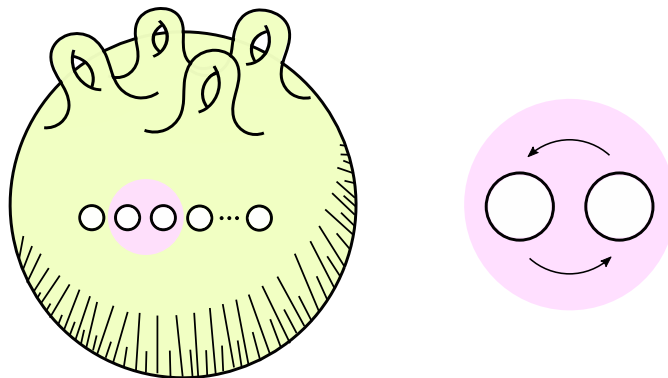
$$\chi(S) = 2 - 2g - (b + n).$$

Esto viene de que S_g es el conocido $4g$ -gono con pares de lados identificados y, por lo tanto, la característica de Euler es $\chi(S_g) = 1 - 2g + 1$. Para obtener n finés y b componentes de borde, podemos tomar una triangulación suficientemente fina, sacar n

vértices y sacar b caras de triángulos sin lados en común. Esto modifica la característica de S_g restando n y b .

Como $\chi(S)$ es invariante por homeomorfismo, se sigue que una superficie queda determinada, a menos de homeomorfismo, por tres de los cuatro números g , b , n y $\chi(S)$.

Dada una permutación de las componentes de borde de una superficie S , existe un homeomorfismo $\varphi : S \rightarrow S$ que preserva orientación y que realiza dicha permutación. En efecto, por el teorema de clasificación de superficies, alcanza con chequearlo en una esfera con asas, puntos removidos y discos removidos, como la de la figura. En el disco que contiene las componentes de borde podemos trasponer cada par de componentes consecutivas con una rotación en un subdisco que las aísle de las demás. En un anillo alrededor del borde del subdisco podemos hacer que la rotación se vaya debilitando hasta tener ángulo cero en el borde. Así conseguimos que el borde quede fijo, y podemos extender la función al resto de la superficie por la identidad.



Con estas trasposiciones obtenemos cualquier permutación de las componentes de borde, como queríamos.

2. CURVAS CERRADAS SIMPLES

Una *curva cerrada* en una superficie S es un mapa continuo $S^1 \rightarrow S$. Esta se dice *simple* si el mapa es inyectivo. Usualmente identificaremos a una curva cerrada con su imagen. Una *homotopía* de curvas cerradas es una familia a un parámetro de curvas cerradas $\gamma_t : S^1 \rightarrow S$ que varía continuamente con $t \in I$; es decir, el mapa $S^1 \times I \rightarrow S$ dado por $(x, t) \mapsto \gamma_t(x)$ es continuo. Una curva cerrada es *esencial* si no es borde de un disco o un disco pinchado, y si no es homotópica a una componente de borde.

Cualquier curva cerrada α puede ser aproximada por una curva cerrada suave α' , y una aproximación α' de α suficientemente cercana es homotópica a α . Más aún, si α es simple, α' puede ser elegida simple. Como trabajaremos con clases de homotopía, asumiremos que nuestras curvas representantes son suaves sin mencionar.

Representantes geodésicos. Para superficies compactas que admiten métricas hiperbólicas (las de característica $\chi(S) < 0$) resulta que toda clase de homotopía libre de curvas contiene una única geodésica. El caso del toro T^2 lo estudiamos a continuación.

Sea $\mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ el mapa de cubrimiento usual, donde el grupo de transformaciones de cubrimiento es generado por las traslaciones en $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Si basamos el $\pi_1(T^2) \simeq \mathbb{Z}^2$ en la imagen del origen, entonces un representante de la curva (p, q) se obtiene proyectando el segmento de $(0, 0)$ a (p, q) . Observar que dicha proyección es una curva simple si y solo si p y q son coprimos o si (p, q) es alguno de $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$. A un par (p, q) así lo llamamos *primitivo*. En caso de que (p, q) no sea primitivo, la proyección de la recta asociada es una de las curvas simples, pero recorrida más de una vez.

Sea γ una curva cerrada simple y orientada en T^2 . A menos de homotopar γ , podemos asumir que pasa por la imagen del origen. El levantado $\tilde{\gamma}$ de γ que empieza en el origen termina en cierto (p, q) de \mathbb{Z}^2 , y la homotopía por rectas de $\tilde{\gamma}$ al segmento de $(0, 0)$ a (p, q) baja a una homotopía en T^2 . Ahora, si una curva cerrada en T^2 es simple, entonces su recta representante también es simple. Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 1.2. Las clases no triviales de curvas cerradas simples y orientadas en T^2 están en correspondencia biyectiva con el conjunto de elementos primitivos de \mathbb{Z}^2 .

2.1. NÚMERO DE INTERSECCIÓN. Sean α y β curvas cerradas simples orientadas y transversales. Se define el *número de intersección algebraico* $\hat{i}(\alpha, \beta)$ como la suma de los índices de las intersecciones entre α y β . Recordamos que una intersección entre α y β tiene índice $+1$ cuando la orientación de la intersección coincide con la de S , y tiene índice -1 si no. Si cambiamos el orden en que miramos las curvas, entonces los índices son opuestos y obtenemos $\hat{i}(\beta, \alpha) = -\hat{i}(\alpha, \beta)$.

Si ahora miramos clases de homotopía a y b de curvas cerradas simples, podemos definir el *índice de intersección geométrico* como

$$i(a, b) = \text{mín}\{|\alpha \cap \beta| : [\alpha] = a, [\beta] = b\}.$$

Notar que, en este caso, tenemos $i(a, b) = i(b, a)$. También se puede observar que $i(a, a) = 0$ para cualquier clase a ¹. Por último, podemos ver que si α es una curva que separa S en dos componentes, entonces para cualquier β se tiene que $\hat{i}(\alpha, \beta) = 0$ y que $i(a, b)$ es un número par.

Número de intersección en el toro. Si (p, q) y (r, s) son elementos primitivos de \mathbb{Z}^2 representando clases de curvas en el toro, entonces

$$\hat{i}((p, q), (r, s)) = ps - rq \text{ e } i((p, q), (r, s)) = |ps - rq|.$$

Esto se puede chequear en el caso $(p, q) = (1, 0)$: los cortes son siempre con el mismo índice y corresponden a los puntos $\{(rk/s, k) : k = 0, \dots, s-1\}$ de \mathbb{R}^2 . Para el caso general, tomamos $a, b \in \mathbb{Z}$ que cumplan $ap + bq = \text{mcd}(p, q) = 1$. Entonces la matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -q & p \end{pmatrix}$ está en $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ y $M \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Como M es un homeomorfismo lineal de \mathbb{R}^2 que preserva orientación y que preserva \mathbb{Z}^2 , M induce un homeomorfismo en $T^2 = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ que preserva orientación, y cuya acción en el $\pi_1(T^2) \simeq \mathbb{Z}^2$ es la dada por M . Como los números de intersección de las curvas se mantienen por homeomorfismos que preservan orientación, tenemos

$$\hat{i}((p, q), (r, s)) = \hat{i}\left(M \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, M \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}\right) = \hat{i}((1, 0), (ar + bs, ps - rq)) = ps - rq.$$

¹Se puede tomar un entorno tubular de un representante de a , y se tiene que los bordes son representantes disjuntos.

2.2. CRITERIO DEL BÍGONO. Dadas dos curvas cerradas simples α y β representando clases a y b , ¿cómo podemos saber si están en posición minimal? La respuesta la da el criterio que introduciremos a continuación. Decimos que dos curvas transversales α y β forman un *bígono* si hay un disco encajado en S (el bígono) cuyo borde es la unión de un arco de α y uno de β , los cuales se intersectan en exactamente dos puntos.

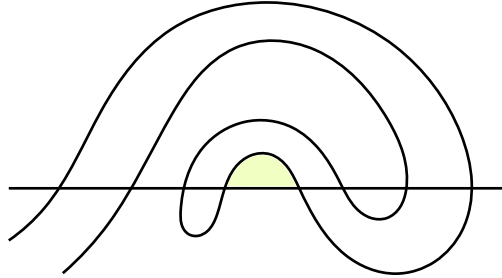
Dos curvas cerradas simples transversales se cortan en una cantidad finita de puntos, en particular, pueden formar solamente una cantidad finita de bígono.

PROPOSICIÓN 1.3 (EL CRITERIO DEL BÍGONO). Dos curvas cerradas simples transversales en una superficie están en posición minimal si y solo si no forman un bígono.

LEMA 1.4. Si dos curvas cerradas simples transversales α y β en una superficie S no forman bígono, entonces cualquier par de levantados $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ al cubrimiento universal \tilde{S} se cortan en a lo sumo un punto.

DEMOSTRACIÓN. Lo probamos para $\chi(S) < 0$, de forma que $S = \mathbb{D}/\Gamma$, siendo \mathbb{D} el disco hiperbólico y $\Gamma \simeq \pi_1(S)$ el grupo de transformaciones de cubrimiento. Llamamos p a la proyección $p : \mathbb{D} \rightarrow S$. Recordamos que Γ está formado por transformaciones hiperbólicas.

Supongamos que $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ se cortan en al menos dos puntos. Entonces existen dos subarcos, uno de $\tilde{\alpha}$ y otro de $\tilde{\beta}$, que se cortan solamente en sus extremos. Como la unión de dichos subarcos es una curva cerrada simple en el plano, es borde de un disco encajado D_0 . Por compacidad y transversalidad, se tiene que $(p^{-1}(\alpha) \cup p^{-1}(\beta)) \cap D_0$ es un grafo finito, pensando en los puntos de intersección como vértices. Además, los levantados de una curva simple son simples y no se cortan entre sí. Por lo tanto, hay un bígono *innermost*, es decir, un disco D encajado en \mathbb{D} bordeado por un subarco de $p^{-1}(\alpha)$ y uno de $p^{-1}(\beta)$, de forma que $p^{-1}(\alpha) \cup p^{-1}(\beta)$ no corta el interior de D . Denotamos por $\tilde{\alpha}_1$ y $\tilde{\beta}_1$ a los arcos que lo conforman.



Veremos que la restricción de p a D es inyectiva. Esto probará el resultado ya que $p(D)$ será un bígono entre α y β .

Para empezar, notar que los puntos de intersección que se forman en un bígono siempre tienen índices opuestos. Entonces no puede haber una transformación de cubrimiento que mande un vértice en el otro, porque estaría revirtiendo orientación. Entonces los vértices se proyectan a puntos distintos. Por otro lado, si un punto de $\tilde{\alpha}_1$ y uno de $\tilde{\beta}_1$ se proyectan al mismo, entonces en S hay una intersección de α y β y, por lo tanto, ambos puntos estaban en una intersección de $p^{-1}(\alpha) \cap p^{-1}(\beta)$, lo cual viola la asunción de *innermost*. Por último, supongamos que dos puntos de $\tilde{\alpha}_1$ (análogamente, dos puntos

de $\tilde{\beta}_1$) se proyectan al mismo punto de S . Si v es uno de los vértices del bígono, entonces existe levantado de $p(v)$ que está sobre $\tilde{\alpha}_1$ y entre los puntos de $\tilde{\alpha}_1$ en cuestión. Esto de nuevo contradice que D sea *innermost*.

Obtenemos entonces que toda transformación $\phi \in \Gamma$ distinta de la identidad manda el ∂D disjunto de sí mismo. Ahora, el ∂D separa el plano en D y $\mathbb{D} \setminus D$. Entonces $\phi(D) \subset D$ o $\phi(D) \subset \mathbb{D} \setminus D$. Si fuese lo primero, el teorema del punto fijo de Brower daría que ϕ tiene un punto fijo, lo cual no puede ser porque es hiperbólica. Entonces concluimos lo segundo, y ϕ manda D disjunto de sí mismo, para toda $\phi \neq \text{id}$. \square

Ahora sí, la demostración del criterio.

DEMOSTRACIÓN. (CRITERIO DEL BÍGONO) Sean α y β curvas cerradas simples y transversales. Supongamos que α y β forman un bígono D_0 . Como vimos en el lema anterior, podemos elegirlo siendo *innermost*. Entonces existe un disco encajado D que contiene a D_0 y tal que la intersección entre $\alpha \cup \beta$ y D consiste de un subarco α' de α y uno β' de β que se cortan en exactamente dos puntos. El disco D es simplemente conexo y los extremos de β' están en la misma componente de $D \setminus \alpha$. Podemos entonces hacer una isotopía entre β' y un arco con los mismos extremos que esté contenido en la componente de $D \setminus \alpha$. La nueva curva isotópica a β tiene dos intersecciones menos con α , lo que muestra que α y β no están en posición minimal.

Probamos el recíproco para $\chi(S) < 0$. Sea δ una curva cerrada simple y $\tilde{\delta}$ un levantado al cubrimiento universal. Recordamos que existe una única geodésica cerrada γ a la cual δ es libremente homotópica. Una tal homotopía se levanta a una entre $\tilde{\delta}$ y un levantado $\tilde{\gamma}$ de γ . En particular, dichos levantados tienen los mismos extremos en $\partial \mathbb{D}$. Denotaremos por $\phi_{\tilde{\delta}}$ a una transformación de cubrimiento hiperbólica de eje $c_{\tilde{\delta}} = \tilde{\gamma}$ que deja $\tilde{\delta}$ invariante.

Supongamos que α y β no forman bígono. Queremos ver que están en posición minimal. Por el LEMA 1.4, sabemos que $|\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta}| \leq 1$, para todo par de levantados $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ de α y β respectivamente.

Si $c_{\tilde{\alpha}} = c_{\tilde{\beta}}$, existe una potencia ϕ en común de $\phi_{\tilde{\alpha}}$ y $\phi_{\tilde{\beta}}$. Necesariamente $|\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta}| = 0$ ya que, si existiese un punto x en la intersección de los levantados, entonces $\phi(x)$ también lo sería, lo cual contradice la cota. Por otro lado, tampoco puede ser que los ejes $c_{\tilde{\alpha}}$ y $c_{\tilde{\beta}}$ tengan extremos en común en el $\partial \mathbb{D}$, ya que estos se proyectan en S a geodésicas que son cerradas, y no pueden ser asintóticas. Entonces hay dos posibilidades: que $c_{\tilde{\alpha}}$ y $c_{\tilde{\beta}}$ sean disjuntos en $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \partial \mathbb{D}$, o que se corten exactamente una vez.

En el primer caso, vemos que $|\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta}|$ tiene que ser un número par, porque $\tilde{\beta}$ tiene sus extremos en la misma componente de $\overline{\mathbb{D}} \setminus \tilde{\alpha}$. Se sigue $|\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta}| = 0$. En particular,

$$|\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta}| \leq |\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta}'|,$$

para cualquier levantado $\tilde{\beta}'$ de una curva β' homotópica a β . En el segundo caso tenemos que $\tilde{\beta}$ tiene sus extremos en distintas componentes de $\overline{\mathbb{D}} \setminus \tilde{\alpha}$. Entonces la desigualdad anterior se cumple si $\tilde{\beta}'$ es un levantado con los mismos extremos que $\tilde{\beta}$.

Para terminar, sea $k = |\alpha \cap \beta|$. Si $\tilde{\alpha}_1$ es un subarco de $\tilde{\alpha}$ que es dominio fundamental de α , entonces $\tilde{\alpha}_1$ corta k levantados de β , todos distintos porque cada uno la puede cortar solo una vez (LEMA 1.4). Por lo visto en el párrafo anterior, sabemos que una

homotopía de β a un β' no va a reducir el número intersección con α porque eso no ocurre con los levantados. \square

2.3. HOMOTOPÍAS E ISOTOPÍAS ENTRE CURVAS. Una *isotopía* de curvas es una homotopía de curvas simples $\gamma_t : S^1 \rightarrow S$.

PROPOSICIÓN 1.5. Sean α y β dos curvas cerradas simples y esenciales en una superficie S . Si α y β son homotópicas y disjuntas, entonces son borde de un anillo encajado en S .

DEMOSTRACIÓN. Lo probamos para superficies de característica negativa. Sean $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ levantados homotópicos de α y β en \mathbb{D} . Necesariamente $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ tienen los mismos extremos en $\partial\mathbb{D}$ y no se cortan en \mathbb{D} . Entonces bordean una banda $B \subset \mathbb{D}$, es decir, homeomorfa a $[0, 1] \times \mathbb{R}$. Una transformación de cubrimiento ϕ preserva $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ si y solo si su eje de traslación c tiene los mismos extremos que ellos. En otro caso, se tiene $\phi(\tilde{\alpha}) \cap \tilde{\alpha} = \phi(\tilde{\beta}) \cap \tilde{\beta} = \emptyset$. Se cumple entonces que $\phi(B) = B$ o $\phi(B) \cap B = \emptyset$, para toda transformación de cubrimiento ϕ .

Sea c la geodésica en \mathbb{D} con los mismos extremos que $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$. Sea ϕ con eje c y longitud de traslación mínima. Sea δ un segmento geodésico conectando un punto p de $\tilde{\alpha}$ con uno q de $\tilde{\beta}$. Llamamos $\tilde{\alpha}_1$ al subsegmento de $\tilde{\alpha}$ que conecta p con $\phi(p)$, y sea $\tilde{\beta}_1$ definido de forma análoga. Tenemos que los arcos δ , $\tilde{\alpha}_1$, $\phi(\delta)$ y $\tilde{\beta}_1$ forman una curva cerrada simple. Entonces esta curva encierra un disco cerrado A' .

Cualquier transformación de cubrimiento distinta de la identidad, de ϕ y de ϕ^{-1} manda A' disjunto de sí mismo, mientras que ϕ y ϕ^{-1} solo pegan los lados δ y $\phi(\delta)$. Entonces A' se proyecta a un anillo en S de bordes α y β . \square

COROLARIO 1.6. Sean α y β dos curvas cerradas simples y esenciales en una superficie S . Entonces α y β son isotópicas si y solo si α y β son homotópicas.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que α y β son homotópicas. Por la proposición anterior, alcanza con probar que existe una isotopía que deja a α disjunta de β .

Se puede isotopar α para que sea transversal con β . Como α y β son homotópicas, sus clases de homotopía tienen índice de intersección nulo. Entonces, si no son disjuntas, forman bígono. Consideramos un bígono entre α y β que sea *innermost*. Como los subarcos de α y β que forman dicho bígono delimitan un disco, existe una isotopía que lo deshace. Aplicando este proceso en cada bígono, terminaremos en finitos pasos, dejando a α y β disjuntas. \square

2.4. ISOTOPÍAS DE SUPERFICIES. Una *isotopía* de una superficie S es una homotopía de homeomorfismos $H_t : S \rightarrow S$. En ese caso, decimos que H_0 y H_1 son *isotópicas*.

PROPOSICIÓN 1.7. Dados dos puntos en el interior de una superficie S , existe un homeomorfismo $\varphi : S \rightarrow S$ isotópico a la identidad que manda un punto en el otro.

DEMOSTRACIÓN. Fijado $x \in S$, sea A el conjunto de puntos $y \in S$ tales que existe $\varphi \in \text{Homeo}^+(S)$ isotópico a la identidad con $\varphi(x) = y$. Tomando $\varphi = \text{id}$, vemos que $x \in A$. Como S es conexa, alcanza con ver que A es abierto y cerrado.

Dado y en A , consideramos un disco compacto $D \subset S$ centrado en y . Para cada y' en el interior del disco, definimos $\varphi(z) = |z|z + (1 - |z|)y'$ en D (donde identificamos

a D con el disco \mathbb{D}), y extendemos a S por la identidad. Este mapa del disco manda cada segmento desde el origen a un punto del $\partial\mathbb{D}$ linealmente en el segmento desde y' al mismo punto del borde. Se puede ver que φ es isotópico a la identidad con el “truco de Alexander” del capítulo siguiente.

Por último, para y' en la clausura de A , podemos tomar $y \in A$ suficientemente cercano a y' de forma que exista una carta que contenga a ambos puntos, y repetimos el argumento anterior para ver que y' está en A . \square

PROPOSICIÓN 1.8 (EXTENSIÓN DE ISOTOPÍAS). Sea S una superficie. Si $\gamma_t : S^1 \rightarrow S$ es una isotopía de curvas suave, entonces existe una isotopía $H_t : S \rightarrow S$ tal que H_0 es la identidad y $H_t\gamma_0 = \gamma_t$.

2.5. ARCOS. Un *arco propio* en una superficie S es un mapa $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$ tal que $\alpha^{-1}(\mathcal{P} \cup \partial S) = \{0, 1\}$, donde \mathcal{P} denota el conjunto de puntos marcados. El arco es *simple* si es un encaje en su interior. La clase de homotopía de un arco propio es dentro de la clase de arcos propios. Por lo tanto, los puntos en el ∂S no pueden salir de él durante la homotopía. Una homotopía de arcos se dice *relativa al borde* si los extremos se quedan fijos durante toda la homotopía.

El criterio del bígono vale para arcos, siempre y cuando las clases sean de homotopías relativas al borde.

3. EL PRINCIPIO DE CAMBIO DE COORDENADAS

Empezaremos viendo una versión simplificada de este principio, que es el caso de las curvas que *separan* y las que *no separan*. Se define la superficie S_α como la obtenida al “cortar” una superficie S a lo largo de una curva cerrada simple α . Es decir, es una superficie compacta tal que dos de sus componentes de borde se relacionan por un homeomorfismo h , de forma que el cociente de S_α por la relación $x \sim h(x)$ es homeomorfo a S , y la imagen de dichas componentes de borde por el mapa cociente es α .

Decimos que α *no separa* si S_α es conexa. El principio dice que, a menos de homeomorfismo, hay una única curva que no separa:

Si α y β son curvas cerradas simples que no separan en una superficie S , entonces existe un homeomorfismo $\varphi : S \rightarrow S$ tal que $\varphi(\alpha) = \beta$.

Básicamente, cada vez que queramos probar una propiedad topológica sobre curvas que no separan, alcanzará con probarla sobre una particular de ellas.

La afirmación se sigue de lo visto en la primera sección, como argumentaremos a continuación. Las superficies S_α y S_β tienen la misma cantidad de fines, de componentes de borde, y la misma característica de Euler; por lo tanto, son homeomorfas. Como podemos permutar las componentes de borde de cualquier forma con homeomorfismos que preservan orientación, podemos suponer que el homeomorfismo anterior $\varphi : S_\alpha \rightarrow S_\beta$ manda las componentes asociadas a α en las asociadas a β . Pegando S_α de nuevo por α , y haciendo lo mismo con S_β , recuperamos S y tenemos el homeomorfismo $\varphi : S \rightarrow S$ deseado.

Por otro lado, se dice que una curva cerrada simple α *separa* si S_α no es conexa. Observar que todas las curvas cerradas simples en $S_{0,n}$ separan. Parecido al caso anterior,

existen finitas curvas que separan a menos de homeomorfismo. Que exista o no un homeomorfismo $\varphi : S \rightarrow S$ entre curvas que separan α y β dependerá de si las componentes de S_α y S_β son homeomorfas o no.

3.1. EJEMPLOS DEL PRINCIPIO. Más en general, el principio de cambio de coordenadas dice que si dos colecciones de curvas tienen los mismos patrones de intersección, entonces se puede llevar una a la otra mediante un homeomorfismo que preserva la orientación de S . A continuación se enumeran algunos de estos patrones.

- Pares de curvas cerradas simples que se intersectan una sola vez. Es decir, si α_1, β_1 y α_2, β_2 son dos colecciones de ese tipo, entonces existe un homeomorfismo de S que manda α_1, β_1 en α_2, β_2 .
- Pares (o k -tuplas) de curvas cerradas simples disjuntas cuya unión no separa.
- Pares de curvas cerradas simples con $i(\alpha, \beta) = 2$ e $\hat{i}(\alpha, \beta) = 0$.
- Arcos propios que no separan S , apoyados en la misma cantidad de componentes de borde.
- Cadenas que no separan de curvas cerradas simples. Una *cadena* de curvas cerradas simples es una secuencia $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tal que $i(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 1$ e $i(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ si $|i - j| > 1$. Decimos que la cadena no separa si la unión de las curvas no separa la superficie. Cualquier par de cadenas que no separan de curvas cerradas simples con la misma cantidad de curvas son topológicamente equivalentes.

MAPPING CLASS GROUP

1. DEFINICIÓN Y PRIMEROS EJEMPLOS

Sea S una superficie de género $g \geq 0$, con $b \geq 0$ componentes de borde y $n \geq 0$ fines. Sea $\text{Homeo}^+(S, \partial S)$ el grupo de homeomorfismos de S que preservan orientación y que son la identidad restringidos al ∂S . Este es un grupo topológico con la topología compactoabierta. Recordamos que una base de dicha topología son los abiertos $V = \mathcal{V}(K, W)$ que consisten de los homeomorfismos φ tales que $\varphi(K) \subset W$, para K y W respectivamente un compacto y un abierto de S .

El *mapping class group* de una superficie S , que denotamos por $\text{MCG}(S)$, es el grupo de componentes conexas de $\text{Homeo}^+(S, \partial S)$:

$$\text{MCG}(S) = \pi_0(\text{Homeo}^+(S, \partial S)) = \text{Homeo}^+(S, \partial S) / \text{Homeo}_0(S, \partial S),$$

donde $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$ denota la componente conexa de la identidad (subgrupo normal).

En otras palabras, el $\text{MCG}(S)$ es el grupo de clases de isotopía de elementos de $\text{Homeo}^+(S, \partial S)$, donde las isotopías fijan el borde punto a punto¹. Se le llama *mapping classes* a los elementos del mapping class group.

Resulta que, en el contexto de superficies, dos homeomorfismos que preservan orientación son homotópicos si y solo si son isotópicos². Por lo tanto, podemos pensar tanto en clases de isotopía como en clases de homotopía. A su vez, también es cierto que todo homeomorfismo de una superficie compacta es isotópico a un difeomorfismo de dicha superficie. Es por esto que también podemos pensar en el $\pi_0(\text{Diff}^+(S, \partial S))$.

Puntos removidos versus puntos marcados. Si S es una superficie con fines, a veces es más conveniente pensar (algunos de) los puntos removidos como puntos marcados de S . En ese caso, $\text{MCG}(S)$ es el grupo de homeomorfismos de S que dejan el conjunto de puntos marcados invariante, módulo isotopías que dejan el conjunto de puntos marcados invariante. Acá hay que tener cuidado cuando se usan homotopías en vez de isotopías: en todo momento, la homotopía debe mandar puntos marcados a puntos marcados, y puntos no marcados a puntos no marcados.

Puntos removidos versus borde. Notar que una mapping class puede permutar los fines de una superficie, pero no puede permutar las componentes de borde.

¹Dos homeomorfismos en la misma componente conexa están conectados por un camino en $\text{Homeo}^+(S, \partial S)$, que es una isotopía entre ellos.

²De hecho, si los homeomorfismos revierten orientación, el resultado vale salvo en unos pocos casos particulares (ver capítulo 1 de [1]).

1.1. EL DISCO Y EL DISCO PINCHADO. Empezamos por ver que tanto el mapping class group del disco cerrado D^2 como el del disco cerrado pinchado son triviales. En otras palabras, todo homeomorfismo φ del disco (y del disco pinchado) que fija ∂D^2 es isotópico a la identidad.

LEMA 2.1 (TRUCO ALEXANDER). El grupo $\text{MCG}(D^2)$ es trivial.

La prueba consiste simplemente en considerar la isotopía definida abajo. El homeomorfismo F_t fija el anillo complemento del disco de radio t y “copia” la definición de φ en dicho disco.

$$F_t(x) = \begin{cases} t\varphi(x/t) & \text{si } 0 \leq |x| < t \\ x & \text{si } t \leq |x| \leq 1. \end{cases}$$

El truco funciona también en el disco pinchado, removiendo el origen.

El anterior es un ejemplo en el cual es más conveniente usar homeomorfismos que difeomorfismos³.

1.2. LA ESFERA Y LA ESFERA PINCHADA. También es fácil ver que $\text{MCG}(S^2)$ y $\text{MCG}(S_{0,1})$ son triviales. Identificando $S_{0,1}$ con \mathbb{R}^2 , podemos hacer la homotopía por rectas entre la identidad y cualquier homeomorfismo de \mathbb{R}^2 que preserva orientación. Por lo tanto, $\text{MCG}(S_{0,1}) \simeq \{\text{id}\}$.

Por otro lado, sea x el punto marcado de $S_{0,1}$. “Olvidar” que dicho punto está marcado induce un morfismo natural $\text{MCG}(S_{0,1}) \rightarrow \text{MCG}(S^2)$. Como consecuencia de la PROPOSICIÓN 1.7, todo homeomorfismo φ de S^2 puede ser modificado por isotopía para que fije x . Luego el morfismo es sobreyectivo, y se obtiene $\text{MCG}(S^2) \simeq \{\text{id}\}$ también.

1.3. LA ESFERA PINCHADA TRES VECES. En esta sección pensaremos a los fines de $S_{0,3}$ como puntos marcados. Sea Σ_n al grupo de permutaciones de n elementos.

LEMA 2.2. Cualquier par de arcos simples esenciales en $S_{0,3}$ con los mismos extremos $p \neq q$ son isotópicos vía una isotopía que fija los puntos marcados de $S_{0,3}$.

PROPOSICIÓN 2.3. El mapa $\text{MCG}(S_{0,3}) \rightarrow \Sigma_3$ inducido por la acción del $\text{MCG}(S_{0,3})$ en los puntos marcados de $S_{0,3}$ es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. El mapa es claramente un morfismo sobreyectivo; resta ver que es inyectivo. Esto último significa que todo homeomorfismo φ de $S_{0,3}$ que fija los puntos marcados p, q y r es homotópico a la identidad.

Elegimos un arco α cualquiera en $S_{0,3}$ con extremos distintos p y q . Como φ fija p y q , por el lema anterior tenemos que existe una isotopía de $\varphi(\alpha)$ a α . Por la PROPOSICIÓN 1.8, podemos extender dicha isotopía a una isotopía H_t de toda la superficie. Vemos así que φ es isotópico al homeomorfismo $H_1\varphi$, que fija α . Podemos entonces suponer que φ es quien deja α fijo.

Si cortamos $S_{0,3}$ a lo largo de α , obtenemos un disco con borde α y un punto marcado en el interior, que es r . Como φ fija el borde del disco pinchado, induce una mapping class en él, que es trivial por el truco de Alexander. La isotopía entre el homeomorfismo que induce φ y la identidad del disco, nos da una entre φ y la identidad de $S_{0,3}$. \square

³Resulta que la prueba para $\text{Diff}(D^2, \partial D^2)$ no es tan simple como esta.

Una prueba análoga a la anterior nos da un isomorfismo $MCG(S_{0,2}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

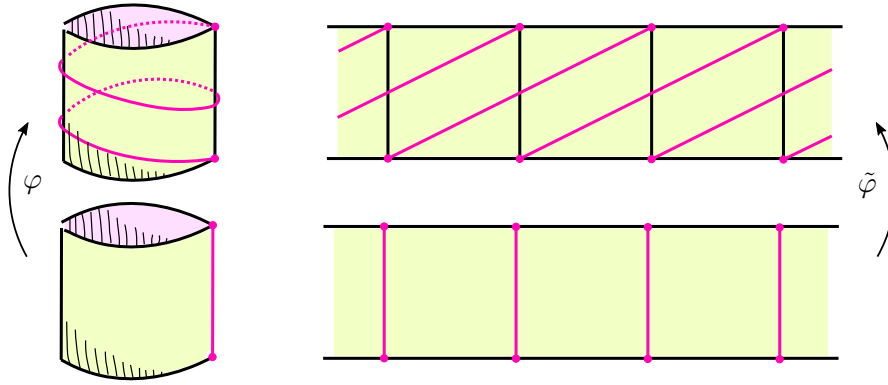
DEMOSTRACIÓN. (LEMA 2.2) Sean α y β dos arcos simples en $S_{0,3}$ conectando los mismos dos puntos marcados. Podemos isotoparlos para que sean transversales. Pensando al tercer punto como el infinito, α y β son arcos en el plano. Como hemos argumentado en el primer capítulo, si α y β no son disjuntos, entonces forman un bígono, que podemos elegirlo *innermost*. El bígono lo deshacemos modificando a β por isotopía, y repetimos esto hasta lograr que los arcos sean disjuntos en el interior.

En este punto, $\alpha \cup \beta$ es una curva cerrada simple en el plano y, por lo tanto, es borde de un disco (que tiene dos puntos marcados en el borde). Podemos hacer una isotopía entre ellas que fije los puntos marcados. \square

1.4. EL ANILLO. Será nuestro primer ejemplo de superficie con mapping class group infinito. Básicamente, la clase de un homeomorfismo φ del anillo $A = S^1 \times [0, 1]$ queda determinada por la cantidad de vueltas (con sentido) que da el arco $\varphi(\{0\} \times [0, 1])$ al anillo.

PROPOSICIÓN 2.4. $MCG(A) \simeq \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN. Empezamos por construir un mapa $\rho : MCG(A) \rightarrow \mathbb{Z}$. Sea f en $MCG(S)$ y $\varphi : A \rightarrow A$ un homeomorfismo representando a f . Sea $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ el levantamiento al cubrimiento universal $\tilde{A} \simeq \mathbb{R} \times [0, 1]$ que fija el origen. Sea $\tilde{\varphi}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la restricción de $\tilde{\varphi}$ a $\mathbb{R} \times \{1\}$. Como φ es la identidad en ∂A , tenemos que $\tilde{\varphi}_1$ es una traslación entera. Identificando \mathbb{Z} con el grupo de traslaciones, pensamos a $\tilde{\varphi}_1$ como un entero, y definimos $\rho(f) = \tilde{\varphi}_1$.



Probemos que ρ es sobreyectivo. La transformación lineal de \mathbb{R}^2 dada por la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ preserva $\mathbb{R} \times [0, 1]$ y es equivariante con las transformaciones del cubrimiento (traslaciones enteras en la primera coordenada). Por lo tanto, la transformación baja al cociente y da un homeomorfismo $\varphi_M : A \rightarrow A$ tal que $\rho([\varphi_M]) = k$.

Resta ver que ρ es inyectivo. Supongamos que $\rho(f) = 0$. Entonces $\tilde{\varphi}$ es la identidad en \tilde{A} . Afirmamos que la homotopía por rectas

$$\tilde{H}_t(x, y) = t\tilde{\varphi}(x, y) + (1 - t)(x, y)$$

entre $\tilde{\varphi}$ y la identidad de \tilde{A} es equivariante. Por lo tanto, dicha homotopía baja a una del anillo entre φ y la identidad de A , y que fija ∂A en todo tiempo.

Para terminar, probemos la afirmación. Sea τ la transformación de cubrimiento dada por $(x, y) \mapsto (x + k, y)$. Tanto $\tau\tilde{\varphi}$ como $\tilde{\varphi}\tau$ son levantados de φ . Además, usando que $\tilde{\varphi}$ fija $\partial\tilde{A}$, vemos que $\tau\tilde{\varphi}(0, 0) = (k, 0)$ y que $\tilde{\varphi}\tau(0, 0) = (k, 0)$. Por unicidad del levantado, se sigue que $\tau\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}\tau$. Es fácil verificar que esto implica $\tilde{H}_t\tau = \tau\tilde{H}_t$. \square

1.5. EL TORO. Un homeomorfismo φ del toro T^2 induce un automorfismo φ_* en el grupo fundamental $\pi_1(T^2) \simeq \mathbb{Z}^2$. Además, homeomorfismos homotópicos inducen el mismo mapa. Por lo tanto, $\varphi \mapsto \varphi_*$ induce un morfismo $\sigma : \text{MCG}(T^2) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}^2) \simeq \text{GL}_2(\mathbb{Z})$. Resulta más aún que $\sigma(f)$ está en $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$, para toda mapping class f . Para ver esto, recordamos del pasado capítulo que curvas (p, q) y (r, s) en el toro tienen número de intersección algebraico dado por:

$$\hat{i}((p, q), (r, s)) = \det \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}.$$

Si φ es un homeomorfismo de T^2 que preserva la orientación, entonces preserva el número de intersección algebraico. Por lo tanto, si $M \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ es el automorfismo asociado a φ , se tiene

$$\det \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = \hat{i}((p, q), (r, s)) = \hat{i} \left(M \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, M \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \right) = \det(M) \det \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix},$$

para todo par de curvas (p, q) y (r, s) . Se sigue que $\det(M) = 1$.

TEOREMA 2.5. El mapa $\sigma : \text{MCG}(T^2) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ es un isomorfismo.

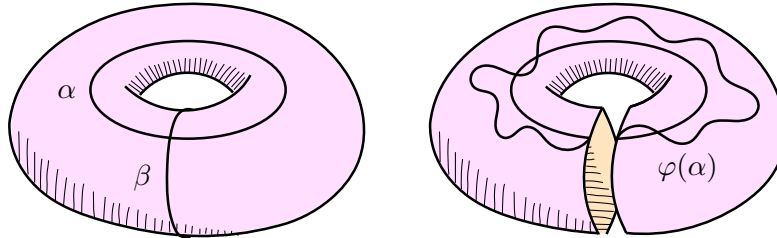
DEMOSTRACIÓN. Empezamos por probar que σ es sobreyectivo. Cualquier $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ induce un homeomorfismo lineal $\bar{\varphi}_M$ de \mathbb{R}^2 que preserva la orientación. Además,

$$\bar{\varphi}_M((x, y) + (k, l)) = \bar{\varphi}_M(x, y) + \bar{\varphi}_M(k, l),$$

donde $\bar{\varphi}_M(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ si $k, l \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $\bar{\varphi}_M$ baja al cociente e induce un homeomorfismo φ_M de $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, con inversa $\varphi_{M^{-1}}$. La acción de $[\varphi_M]$ en las clases de homotopía de curvas en T^2 es la dada por M en los vectores primitivos de \mathbb{Z}^2 . Por lo tanto, $\sigma([\varphi_M]) = M$.

Veamos ahora que σ es inyectivo. Supongamos que $\sigma(f)$ es la matriz identidad de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$, y sea φ representante de f ; queremos ver que φ es isotópico a la identidad. Sean α y β las curvas correspondientes a $(1, 0)$ y $(0, 1)$ en $\pi_1(T^2)$.

Como φ_* es la identidad, tenemos que $\varphi(\beta)$ es isotópica a β . Por el argumento dado en la prueba de la PROPOSICIÓN 2.3, podemos suponer que φ fija β punto a punto. Además, como φ preserva orientación, sabemos que preserva los dos lados de β .



Sea A el anillo obtenido al cortar T^2 a lo largo de β , y sea $\bar{\varphi}$ el homeomorfismo del anillo inducido por φ , que representa un elemento \bar{f} de $\text{MCG}(A)$. Podemos pensar a α y $\bar{\varphi}(\alpha)$ como arcos en A . Como α es isotópico a $\varphi(\alpha)$ en T^2 , vemos que $\rho(\bar{f}) = 0$, siendo $\rho : \text{MCG}(A) \rightarrow \mathbb{Z}$ el morfismo de la PROPOSICIÓN 2.4. Entonces, \bar{f} es isotópico al mapa identidad de A , vía una isotopía que fija ∂A . Pero entonces, φ es isotópico a la identidad. \square

COROLARIO 2.6. $\text{MCG}(S_{1,1}) \simeq \text{MCG}(T^2) \simeq \text{SL}_2(\mathbb{Z})$.

DEMOSTRACIÓN. Sea x el punto marcado de $S_{1,1}$. Análogo al caso de la esfera y la esfera pinchada, tenemos que “olvidar” que x está marcado induce un morfismo sobre-yectivo $\text{MCG}(S_{1,1}) \rightarrow \text{MCG}(T^2)$. Así que resta ver que el morfismo es inyectivo.

Sea $f \in \text{MCG}(S_{1,1})$ en el kernel del morfismo y $\varphi : S_{1,1} \rightarrow S_{1,1}$ un representante. Pensamos a φ como un homeomorfismo de T^2 . Existe una isotopía $H_t : T^2 \rightarrow T^2$ tal que $H_0 = \text{id}$ y $H_1 = \varphi$ pero, para ver que φ es trivial en $\text{MCG}(S_{1,1})$, queremos una isotopía que fije x en todo tiempo.

Como φ fija x , tenemos que $\alpha(t) = H_t(x)$ es un loop en T^2 . Sea $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ el levantado empezando en el origen. La isotopía $\tilde{F}_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\tilde{F}_t(X) = X - \tilde{\alpha}(t)$ baja a una isotopía F_t en el toro tal que $F_0 = F_1 = \text{id}$. Por lo tanto, $F_t H_t$ es otra isotopía de la identidad en φ . Además, como $\tilde{F}_t(\tilde{\alpha}(t)) = (0, 0)$ para todo t , tenemos $F_t H_t(x) = F_t(\alpha(t)) = x$ para todo t . \square

2. EL MÉTODO DE ALEXANDER

La metodología de cortar superficies en discos y aplicar el truco de Alexander también se puede generalizar a otras superficies con el *método de Alexander* descrito a continuación.

Decimos que una colección de curvas cerradas simples esenciales y arcos propios simples $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ cumple la propiedad (\star) si:

- Los γ_i 's están dos a dos en posición minimal.
- Los γ_i 's son dos a dos no homotópicos.
- Para i, j y k distintos, al menos una de $\gamma_i \cap \gamma_j$, $\gamma_i \cap \gamma_k$ o $\gamma_j \cap \gamma_k$ es vacía.

Supongamos que φ es un homeomorfismo que cumple que $\varphi(\cup \gamma_i)$ es isotópica a $\cup \gamma_i$ relativo a ∂S . Si pensamos a $\cup \gamma_i$ como un grafo Γ (posiblemente desconexo) en S , con vértices los puntos de intersección de los arcos, entonces la composición de φ con dicha isotopía da un automorfismo φ_* de Γ .

PROPOSICIÓN 2.7 (MÉTODO DE ALEXANDER). Sea S una superficie compacta, posiblemente con puntos marcados, y sea $\varphi \in \text{Homeo}^+(S, \partial S)$. Sea $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ una colección de curvas cerradas simples esenciales y arcos propios simples con la propiedad (\star) . Entonces:

- (1) Si hay una permutación σ de $\{1, \dots, n\}$ tal que $\varphi(\gamma_i)$ es homotópica a $\gamma_{\sigma(i)}$ relativo a ∂S , para cada i , entonces $\varphi(\cup \gamma_i)$ es isotópica a $\cup \gamma_i$ relativo a ∂S .
- (2) Supongamos que las γ_i 's llenan S , es decir, cortar S por los γ_i 's resulta en una unión disjunta de discos y discos pinchados. Si además φ_* fija cada vértice y cada arista con orientación, entonces φ es isotópico a la identidad. En caso contrario, φ tiene una potencia que es isotópica a la identidad.

No lo probaremos, pero es un hecho general que si un homeomorfismo de una superficie tiene una potencia que es isotópica a la identidad, entonces es él mismo isotópico a un homeomorfismo de orden finito.

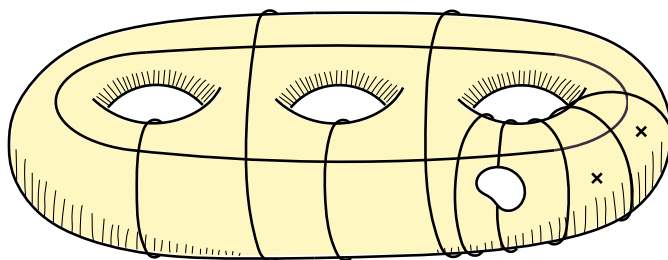
El primer punto es consecuencia directa del siguiente lema, cuya idea de la prueba se puede encontrar en el apéndice.

LEMA 2.8. Sea S una superficie compacta, posiblemente con puntos marcados, y sea $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ una colección de curvas cerradas simples esenciales y arcos propios simples con la propiedad (\star) . Si $\gamma'_1, \dots, \gamma'_n$ es otra tal colección tal que γ'_i es isotópica a γ_i relativo a ∂S , entonces existe una isotopía de S relativa a ∂S que lleva $\cup \gamma'_i$ en $\cup \gamma_i$.

DEMOSTRACIÓN. (MÉTODO DE ALEXANDER.) Aplicando el lema anterior, tenemos el primer punto de la proposición. Componiendo la isotopía de dicho lema con φ , vemos que φ es isotópico a un mapa que deja $\Gamma = \cup \gamma_i$ invariante, así que podemos suponer que φ es quien cumple eso.

Como Γ es un grafo finito, existe r tal que $(\varphi_*)^r$ es el automorfismo identidad, es decir, fija cada vértice y cada arista con orientación. Llamemos $\psi = \varphi^r$. Como $\psi_* = (\varphi^r)_* = (\varphi_*)^r$, tenemos que ψ fija cada vértice y manda cada arista en sí misma con la misma orientación. Nos gustaría modificar a ψ por isotopía para que fije cada punto de Γ . Para ello, podemos hacer lo siguiente. En cada arista $[v, w]$ elegimos una isotopía α_t de la arista que fija los vértices y tal que $\alpha_1 \psi(x) = x$, para todo x en $[v, w]$. Luego tomamos un entorno abierto $U \subset S$ de forma que su intersección con $\cup \gamma_i$ sea la arista (v, w) sin los extremos. En este entorno U extendemos la isotopía de forma que fije su borde. A su vez, podemos extender la isotopía de U a toda la superficie con la identidad. Haciendo estas isotopías para cada arista, logramos una isotopía de toda la superficie que, compuesta con ψ , fija Γ punto a punto. Podemos entonces suponer que ψ es quien fija $\cup \gamma_i$ punto a punto.

Ahora, supongamos que si cortamos S por los γ_i , obtenemos discos y discos pinchados. Como ψ preserva la orientación de S , no intercambia los lados de las aristas. Por lo tanto, ψ manda el interior de un disco (o un disco pinchado) en sí mismo. Aplicando el truco de Alexander en cada uno de los discos, vemos que ψ es isotópico a la identidad. \square



El dibujo ilustra cómo se puede elegir curvas y arcos que llenen una superficie. Notar que solo se usan arcos cuando hay componentes de borde.

DEHN TWISTS

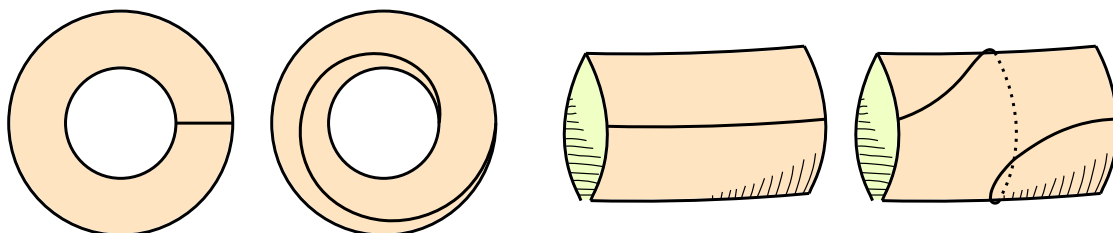
Los *Dehn twists* serán las mapping classes protagonistas de esta monografía; más adelante veremos que los $MCG(S)$ son generados por finitos de estos. Antes que nada, debemos conocerlos y estudiar sus propiedades básicas.

1. DEHN TWISTS Y SU ACCIÓN EN LAS CURVAS

Consideramos $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y sea $A = S^1 \times [0, 1]$ el anillo, que encajamos en el plano con $(\theta, r) \mapsto ((r+1) \cos \theta, (r+1) \sin \theta)$. Damos a A la orientación inducida por el encaje. Sea $T : A \rightarrow A$ el *mapa twist* de A definido como

$$T(\theta, r) = (\theta + 2r\pi, r).$$

Este es un homeomorfismo de A que preserva orientación y fija todo punto del ∂A . El siguiente dibujo muestra el resultado de aplicar T a una fibra del anillo.



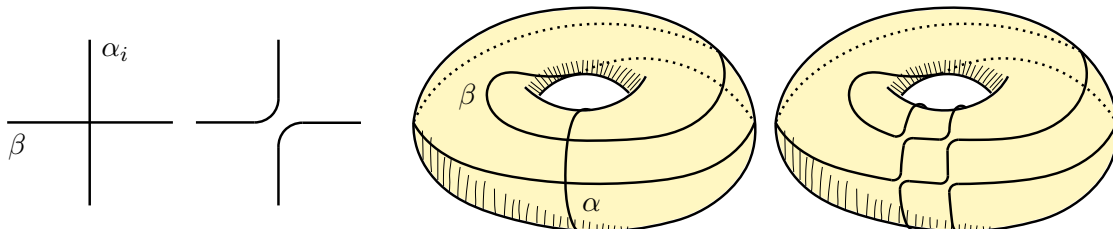
Sea α una curva cerrada simple en una superficie S . Consideramos N entorno tubular de α homeomorfo al cilindro por $\Phi : A \rightarrow N$ que preserva orientación. Se define el *Dehn twist* sobre α como el homeomorfismo $T_\alpha : S \rightarrow S$ dado por

$$T_\alpha(x) = \begin{cases} \Phi T \Phi^{-1}(x) & \text{si } x \in N \\ x & \text{si } x \in S \setminus N. \end{cases}$$

Evidentemente esta definición depende del N y el Φ elegido. Sin embargo, la unicidad de los entornos tubulares¹ nos da que: cambiar el entorno resulta en un mapa twist que es isotópico al original. Además, la propiedad de extensión de isotopías implica que, si α y β son curvas isotópicas, entonces T_α y T_β son mapas isotópicos. Por lo tanto, podemos definir el Dehn twist de una clase de curva a como la mapping class T_a asociada a T_α , siendo α un representante de a .

¹Ver apéndice.

La acción en curvas cerradas simples. Si b es una clase de isotopía con $i(a, b) = 0$, entonces $T_a(b) = b$. En caso contrario, podemos hacer cirugías para obtener un representante de $T_a(b)$ de la siguiente manera. Empezamos con un representante β de la clase de b , y con $i(a, b)$ copias paralelas α_i en la clase de a , en posición minimal con β . En cada punto de intersección entre α_i y β , hacemos cirugía como en la parte izquierda de la siguiente figura. En la parte derecha se muestra la cirugía para un caso con $i(a, b) = 2$.



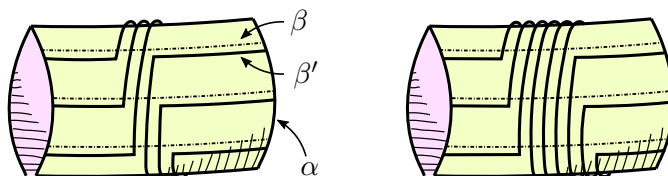
2. DEHN TWISTS Y NÚMERO DE INTERSECCIÓN

PROPOSICIÓN 3.1. Sean a y b clases de isotopía de curvas cerradas simples esenciales en una superficie. Si k es entero, entonces

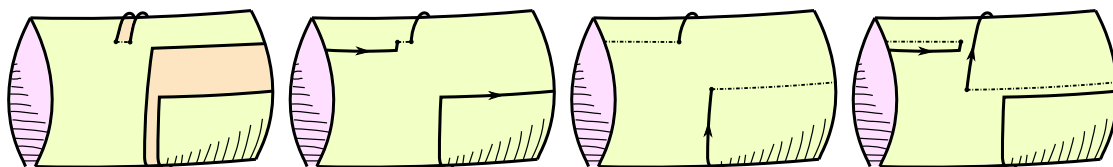
$$i(T_a^k(b), b) = |k|i(a, b)^2.$$

En particular, los Dehn twists tienen orden infinito.

DEMOSTRACIÓN. Sean α y β representantes en posición minimal, y sea β' representante de $T_a^k(b)$ como en el siguiente dibujo; el de la izquierda muestra el caso $k = 1$, y el de la derecha el caso $k = 2$, ambos con $i(a, b) = 3$. Afuera del cilindro donde se hace el twist, β y β' son paralelas.



Observamos que $|\beta \cap \beta'| = |k|i(a, b)^2$. Por lo tanto, alcanza con ver que β y β' están en posición minimal, es decir, que no forman bígonos. Un posible bígono consistiría de dos arcos: uno de β y uno de β' . Abajo se ven, para $i(a, b) = 3$ y $k = 1$, las partes de los arcos que están en el cilindro de los candidatos a bígonos. (El arco de β se dibuja punteado para distinguirlo del de β' .) Para otros valores de $i(a, b)$ y k es igual.



Supongamos que los subarcos como en el caso de la izquierda forman un bígono. Entonces, como la región del cilindro pintada es un disco, se ve que β' y α forman un bígono (formado por un subarco de β' que se sale del cilindro). Es decir, hay un subarco de α que parte el bígono en dos discos: el que está pintado, y uno que no se ve en el dibujo. Como β es paralela a β' afuera, lo anterior nos da un bígono entre α y β , que no puede ser. Para descartar los otros tres casos, notar que los vértices de un bígono siempre tienen índices algebraicos opuestos. Sin embargo, las intersecciones de los arcos del dibujo coinciden en índice, por lo que no pueden estar formando bígono. \square

3. HECHOS BÁSICOS SOBRE DEHN TWISTS

HECHO 3.2. $T_a = T_b$ si y solo si $a = b$.

DEMOSTRACIÓN. El recíproco ya fue comentado. Supongamos que $a \neq b$, y veamos que $T_a \neq T_b$. Para esto, alcanza con encontrar una clase c de curva cerrada simple tal que $i(a, c) = 0$ e $i(b, c) \neq 0$, ya que la PROPOSICIÓN 3.1 nos da

$$i(T_a(c), c) = i(a, c)^2 = 0 \neq i(b, c)^2 = i(T_b(c), c)$$

y, por lo tanto, $T_a(c) \neq T_b(c)$.

Para probar la existencia de una tal c , separamos en dos casos. Si $i(a, b) \neq 0$, podemos elegir $c = a$. Si $i(a, b) = 0$, se puede aplicar cambio de coordenadas para tener un homeomorfismo $\varphi : S \rightarrow S$ que mande a y b en unas buenas curvas. Según las propiedades de separación que cumplan a y b tenemos los distintos casos, y es fácil encontrar $\varphi(c)$. \square

HECHO 3.3. Para todo $f \in \text{MCG}(S)$ y toda clase de isotopía de curva cerrada simple a tenemos

$$T_{f(a)} = fT_a f^{-1}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea φ representante de f y α representante de a . Sean $\Phi : A \rightarrow N$ y $T_\alpha : S \rightarrow S$ como en la definición del twist T_a . Tenemos que $N' = \varphi(N)$ es un entorno tubular de $\varphi(\alpha)$ y $\Phi' = \varphi\Phi : A \rightarrow N'$ un homeomorfismo que preserva orientación. Obtenemos que la composición $\varphi T_\alpha \varphi^{-1}$ en el anillo N' tiene fórmula $\Phi' T(\Phi')^{-1}$, de donde $\varphi T_\alpha \varphi^{-1}$ es un representante de $T_{f(a)}$. \square

Usando los HECHOS 3.2 y 3.3, se obtiene el siguiente resultado.

HECHO 3.4. f conmuta con T_a si y solo si $f(a) = a$.

HECHO 3.5. Si a y b no separan, entonces T_a y T_b son conjugados en $\text{MCG}(S)$.

DEMOSTRACIÓN. Por el principio de cambio de coordenadas, sabemos que existe $h \in \text{MCG}(S)$ tal que $h(a) = b$. Por el HECHO 3.3, tenemos $T_b = hT_a h^{-1}$. \square

Usando cambio de coordenadas de la misma forma, el hecho anterior se puede generalizar para curvas con otro tipo de propiedades de separación.

HECHO 3.6. Para cualquier par de clases a y b tenemos

$$i(a, b) = 0 \Leftrightarrow T_a(b) = b \Leftrightarrow T_a T_b = T_b T_a.$$

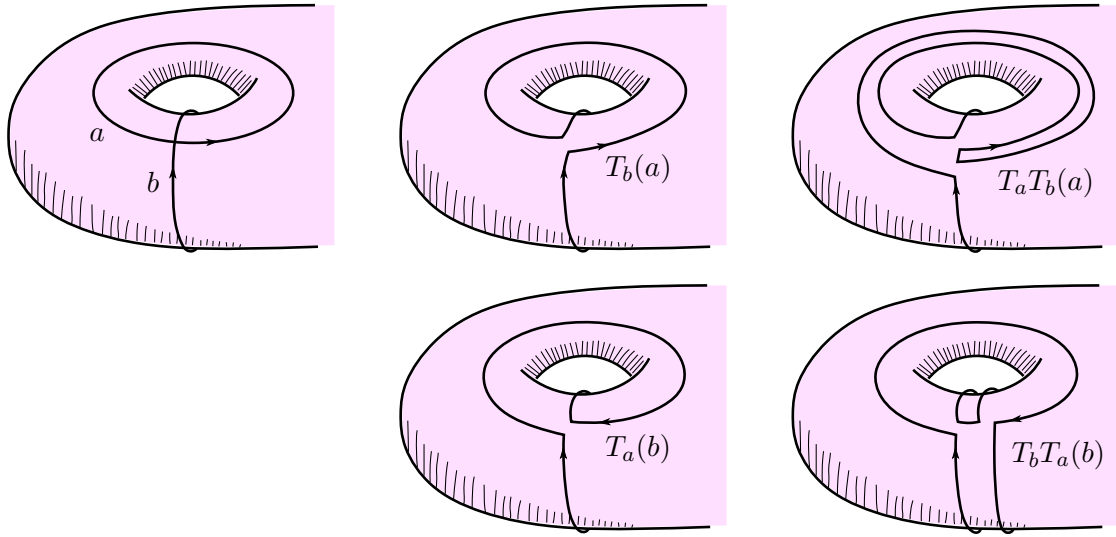
DEMOSTRACIÓN. La última equivalencia es el HECHO 3.4. La implicancia “ $i(a, b) = 0$ entonces $T_a(b) = b$ ” se ve haciendo el twist de α en un entorno disjunto de β . Por último, la PROPOSICIÓN 3.1 nos da que $T_a(b) = b$ implica

$$i(a, b)^2 = i(T_a(b), b)^2 = i(b, b)^2 = 0 \Rightarrow i(a, b) = 0.$$

□

PROPOSICIÓN 3.7. Si $i(a, b) = 1$, entonces $T_a T_b(a) = b$. Además, si orientamos a , entonces $T_b T_a^2 T_b(a) = a$ revirtiendo su orientación.

DEMOSTRACIÓN. Que las curvas tengan índice uno implica que sean curvas que no separan. Haciendo un cambio de coordenadas, llevamos las curvas a y b en curvas como en la figura de abajo. Notar que $T_b T_a^2 T_b(a) = T_b T_a(b)$. □



PROPOSICIÓN 3.8. Sean a_1, \dots, a_m clases de curvas cerradas simples no esenciales en S que son distintas, disjuntas y no homotópicas dos a dos. Entonces el mapa $\mathbb{Z}^m \rightarrow \text{MCG}(S)$ dado por

$$(k_1, \dots, k_m) \mapsto T_{a_1}^{k_1} \dots T_{a_m}^{k_m}$$

es un morfismo inyectivo.

DEMOSTRACIÓN. Como las curvas son disjuntas dos a dos, sus twist conmutan y el mapa es un morfismo. Para probar que el morfismo es inyectivo, sea (k_1, \dots, k_m) no trivial. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $k_1 \neq 0$.

Cortamos S en (representantes de) a_2, \dots, a_m y consideramos la componente S' que contiene a a_1 . Por hipótesis, a_1 no es la misma clase que ninguna componente de borde de S' . Por esto existe una clase de curva o arco c en S' disjunta de las componentes de borde a_2, \dots, a_m y tal que $i(a, c) \neq 0$. Como $T_{a_1}^{k_1}(c) \neq c$ y $T_{a_2}^{k_2}(c) \dots T_{a_m}^{k_m}(c) = c$, se sigue que $T_{a_1}^{k_1} \dots T_{a_m}^{k_m}$ no fija c y, por lo tanto, no es trivial. □

4. CORTANDO, TAPANDO E INCLUYENDO

En esta sección introduciremos tres operaciones geométricas en una superficie, y veremos cómo ellas inducen morfismos entre mapping class group. Para empezar, si S es una subsuperficie cerrada de S' , entonces la inclusión $S \rightarrow S'$ induce un morfismo

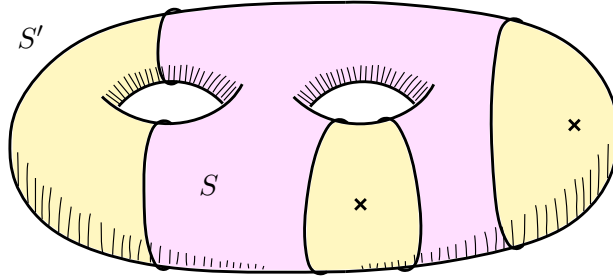
$$\eta : \text{MCG}(S) \rightarrow \text{MCG}(S')$$

de la siguiente manera. Dado $f \in \text{MCG}(S)$ y $\varphi \in \text{Homeo}^+(S, \partial S)$ un representante, consideramos la extensión $\widehat{\varphi} \in \text{Homeo}^+(S', \partial S')$ de φ que vale la identidad en $S' - S$. Definimos $\eta(f)$ como la clase de $\widehat{\varphi}$ en $\text{MCG}(S')$. El valor de $\eta(f)$ no depende del representante porque si $\varphi, \psi \in \text{Homeo}^+(S, \partial S)$ son homotópicos en S relativo a ∂S , alcanza extender la homotopía por la identidad en $S' - S$ para ver que $\widehat{\varphi}$ y $\widehat{\psi}$ son homotópicos.

TEOREMA 3.9. Consideramos S una superficie compacta con borde. Supongamos que S es subsuperficie de S' tal que ninguna componente de $S' - S$ es un disco abierto. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ las componentes de borde de S que bordean discos pinchados en $S' - S$. Sean $\{\beta_1, \gamma_1\}, \dots, \{\beta_k, \gamma_k\}$ los pares de componentes de borde de S que bordean anillos en $S' - S$. Entonces el kernel de η es

$$\ker(\eta) = \langle T_{\alpha_1}, \dots, T_{\alpha_m}, T_{\beta_1} T_{\gamma_1}^{-1}, \dots, T_{\beta_k} T_{\gamma_k}^{-1} \rangle,$$

siendo a_i, b_i y c_i las clases de isotopía de α_i, β_i y γ_i respectivamente. En particular, si ninguna componente de $S' - S$ es un disco abierto, un disco abierto pinchado, o un anillo abierto, entonces η es inyectivo.



DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in \ker(\eta)$ y $\varphi \in \text{Homeo}^+(S, \partial S)$ un representante. Entonces $\widehat{\varphi}$ está en la componente conexa de la identidad en $\text{Homeo}^+(S', \partial S')$.

Sea δ una curva esencial orientada en S . Como $\widehat{\varphi}$ es isotópica a la identidad en S' , tenemos que $\varphi(\delta) = \widehat{\varphi}(\delta)$ es isotópica a δ en S' ; queremos ver que lo es en S . Si no son disjuntas, se las puede modificar por isotopía en S para que sean transversales. Por el criterio del bígono, sabemos que δ y $\varphi(\delta)$ forman un bígono en S' . Como δ y $\varphi(\delta)$ son disjuntas de ∂S , y como $S' - S$ no tiene componentes que sean discos, el bígono es disjunto de ∂S . Entonces se puede hacer una isotopía que deshaga el bígono dentro de S . Haciendo esto en cada bígono, dejamos a δ y $\varphi(\delta)$ disjuntas. Ahora, si δ y $\varphi(\delta)$ son disjuntas e isotópicas, son el borde de un anillo en S' . Dicho anillo no puede contener una componente de ∂S porque sino δ sería homotópica a ella (no esencial). El anillo tampoco puede ser atravesado por una componente de ∂S , porque sino este no sería disjunto de

$\delta \cup \varphi(\delta)$. Concluimos que el anillo es disjunto de ∂S y, por lo tanto, está contenido en S . Podemos isotopar δ y $\varphi(\delta)$ en el anillo.

Ahora, elegimos una colección $\delta_1, \dots, \delta_k$ de curvas cerradas simples en S que satisfaga las tres propiedades del método de Alexander y de forma que el resultado de cortar S por $\cup \delta_i$ sea una unión disjunta de discos, discos pinchados y anillos N_i que sean entornos de las componentes de borde. Por ejemplo, elegimos las curvas vistas al final de la sección del método de Alexander sin los arcos de las componentes de borde. En este caso, φ no puede permutar los anillos N_i .

Por el primer punto del método de Alexander, φ es isotópica (en S) a un homeomorfismo de S que fija $\cup \delta_i \cup \partial S$. Como el mapping class group del disco y el del disco pinchado son triviales, se sigue que f tiene un representante soportado en los N_i . Es decir, f es de la forma

$$f = T_{a_1}^{r_1} \dots T_{a_m}^{r_m} \cdot T_{b_1}^{s_1} T_{c_1}^{t_1} \dots T_{b_k}^{s_k} T_{c_k}^{t_k} \cdot T_{d_1}^{u_1} \dots T_{d_\ell}^{u_\ell},$$

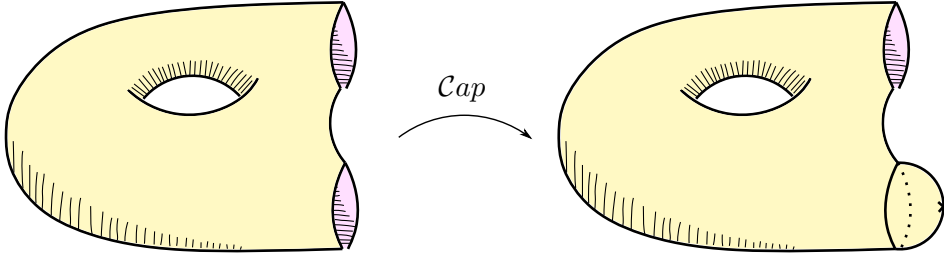
donde los a_i , b_i y c_i son los del enunciado, y los d_i son las otras componentes de borde que no bordean discos pinchados ni anillos. (Acá usamos que esos twists conmutan entre sí.) Como $T_{a_i}^{r_i}$ es trivial en $\text{MCG}(S')$, y como los twists T_{b_i} y T_{c_i} son iguales en $\text{MCG}(S')$, tenemos

$$\eta(f) = T_{b_1}^{s_1+t_1} \dots T_{b_k}^{s_k+t_k} \cdot T_{d_1}^{u_1} \dots T_{d_\ell}^{u_\ell}.$$

Por definición de f , este producto es trivial en $\text{MCG}(S')$. Entonces, por la PROPOSICIÓN 3.8, sabemos que $(s_1 + t_1, \dots, s_k + t_k, u_1, \dots, u_\ell)$ tiene que ser la tupla nula, lo que prueba el resultado. \square

Un caso particular de lo anterior es cuando $S' - S$ es un disco pinchado una vez. Se puede pensar como elegir una componente de borde α de S' y “taparla” con un disco pinchado.

PROPOSICIÓN 3.10. Consideramos S una superficie compacta con borde. Sea S' obtenida de S al tajar una componente de borde α con un disco pinchado. Entonces el kernel del morfismo inducido $\mathcal{C}ap : \text{MCG}(S) \rightarrow \text{MCG}(S')$ es $\langle T_a \rangle$.



La última operación consiste en borrar una curva cerrada simple y esencial de una superficie S , que resulta en una superficie $S - \alpha$ con dos fines más que S . Sea a la clase de isotopía de α , y sea

$$\text{MCG}(S, a) = \{f \in \text{MCG}(S) : f(a) = a\}$$

el estabilizador de a . Resulta que hay un morfismo $\mathcal{C}ut : \text{MCG}(S, a) \rightarrow \text{MCG}(S - \alpha)$, como definimos a continuación. Dado $f \in \text{MCG}(S, a)$, elegimos un representante φ tal

que $\varphi(\alpha) = \alpha$. El homeomorfismo φ se restringe a uno de $S - \alpha$ y, por lo tanto, nos da un elemento $\mathcal{C}ut(f)$ en $\text{MCG}(S - \alpha)$.

PROPOSICIÓN 3.11. Sea S una superficie con finitos puntos marcados. Sea α una curva cerrada simple y esencial en S , y sea a su clase de isotopía. El morfismo $\mathcal{C}ut : \text{MCG}(S, a) \rightarrow \text{MCG}(S - \alpha)$ está bien definido, y su kernel es $\ker(\mathcal{C}ut) = \langle T_a \rangle$.

DEMOSTRACIÓN. Sea N un entorno tubular de α . La inclusión $(S - N) \rightarrow S$ induce un morfismo $\eta_1 : \text{MCG}(S - N) \rightarrow \text{MCG}(S)$. Este es sobreyectivo en $\text{MCG}(S, a)$ porque un homeomorfismo de S que fija α puede ser modificado por isotopía para que fije todo el anillo N . Sean b y c las clases en $S - N$ de las dos componentes de borde de N . Por el **TEOREMA 3.9**, el kernel de η_1 es $\langle T_b T_c^{-1} \rangle$.

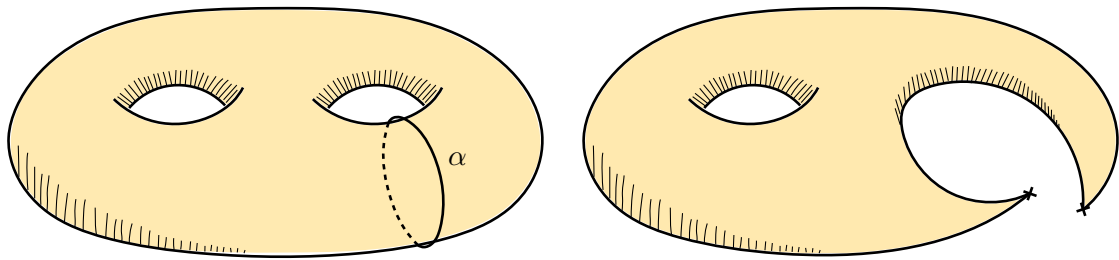
Sea $\overline{S - N}$ la superficie obtenida luego de tapar cada componente de borde de $S - N$ con un disco pinchado. Como $\overline{S - N}$ es homomorfa a $S - \alpha$, tenemos un isomorfismo natural $\tau : \text{MCG}(\overline{S - N}) \rightarrow \text{MCG}(S - \alpha)$.

Por último, el **TEOREMA 3.9** nos dice que el kernel del morfismo $\eta_2 : \text{MCG}(S - N) \rightarrow \text{MCG}(\overline{S - N})$ inducido por la inclusión es $\langle T_b, T_c \rangle$.

Consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \langle T_b T_c^{-1} \rangle & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 1 & \longrightarrow & \langle T_b, T_c \rangle & \longrightarrow & \text{MCG}(S - N) & \xrightarrow{\eta_2} & \text{MCG}(\overline{S - N}) \\
 & & & & \downarrow \eta_1 & & \simeq \downarrow \tau \\
 & & & & \text{MCG}(S, a) & \xrightarrow{\mathcal{C}ut} & \text{MCG}(S - \alpha) \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 1 & &
 \end{array}$$

Como $\langle T_b T_c^{-1} \rangle$ es un subgrupo de $\langle T_b, T_c \rangle = \ker(\eta_2)$, se puede definir $\tau \eta_2 \eta_1^{-1}$, que es exactamente el morfismo $\mathcal{C}ut$. □



EL GRAFO DE CURVAS

Dada una superficie S , el *grafo de curvas* $\mathcal{C}(S)$ es un grafo que tiene un vértice por cada clase de isotopía de curva cerrada simple y esencial en S , y que tiene una arista entre cada par de vértices que represente clases a y b con $i(a, b) = 0$.

En el caso de las superficies S^2 , $S_{0,1}$, $S_{0,2}$ y $S_{0,3}$, el grafo de curvas es vacío; no hay curvas esenciales. En el caso de T^2 , $S_{1,1}$ y $S_{0,4}$, el grafo de curvas es una unión numerable y disjunta de vértices. En el resto de los casos tenemos lo siguiente.

TEOREMA 4.1. Si $3g + n \geq 5$, entonces $\mathcal{C}(S_{g,n})$ es conexo.

Notar que de cada vértice c salen infinitas aristas: elegimos a y b disjuntas de c con $i(a, b) > 0$, y tenemos que $T_a^k(b)$ son todas curvas distintas y disjuntas de c . Otra observación que podemos hacer es que: el hecho de que dos clases a y b tengan número de intersección grande no implica que estén lejos en el grafo de curvas, ya que podría existir una tercer curva que sea disjunta de ambas.

1. HIPERBOLICIDAD DEL GRAFO DE CURVAS

Sea X un espacio métrico geodésico; esto es, para todo par de puntos x, y existe un segmento geodésico $[x, y]$ que los conecta¹. Decimos que X tiene la *propiedad de triángulos δ -finos* si para todo triángulo geodésico de lados $[x, y]$, $[y, z]$, $[z, x]$ vale

$$[x, y] \subset \mathcal{B}([y, z] \cup [z, x], \delta).$$

Si esto se cumple para algún δ , entonces X se denomina *hiperbólico*.

El objetivo de esta sección es probar que el grafo de curvas de una superficie $S = S_g$ de género $g \geq 2$ es un espacio métrico hiperbólico. Para esto, usaremos el criterio que introducimos a continuación.

Supongamos que X es un grafo conexo cuyas aristas miden uno y tal que todo par de vértices $x, y \in X^{(0)}$ tiene asociado un subgrafo conexo $\eta(x, y) = \eta(y, x)$ que contiene a los vértices y que cumple las siguientes propiedades para cierta constante D :

- Para todo $x, y, z \in X^{(0)}$, se tiene $\eta(x, y) \subset \mathcal{B}(\eta(x, z) \cup \eta(z, y), D)$.
- Para todo $x, y \in X^{(0)}$ tal que $d(x, y) \leq 1$, el diámetro de $\eta(x, y)$ en X es $\leq D$.

En ese caso, diremos que X cumple la propiedad $(*)$.

Notar que la primera propiedad es similar a la de triángulos finos, solo que con ciertos subgrafos en vez de con segmentos. Un espacio con la propiedad de triángulos δ -finos cumple con la descripción anterior, tomando $D = \delta$ y $\eta(x, y)$ como algún segmento $[x, y]$.

¹Un *segmento geodésico* entre x e y es un mapa continuo $c : [0, \ell] \rightarrow X$ tal que $c(0) = x$, $c(\ell) = y$ y $d(c(t), c(t')) = |t - t'|$ para todo $t, t' \in [0, \ell]$.

TEOREMA 4.2. Si un grafo cumple la propiedad (*), existe una constante $K = K(D)$ tal que la distancia Hausdorff entre $\eta(x, y)$ y cualquier segmento $[x, y]$ es $\leq K$.

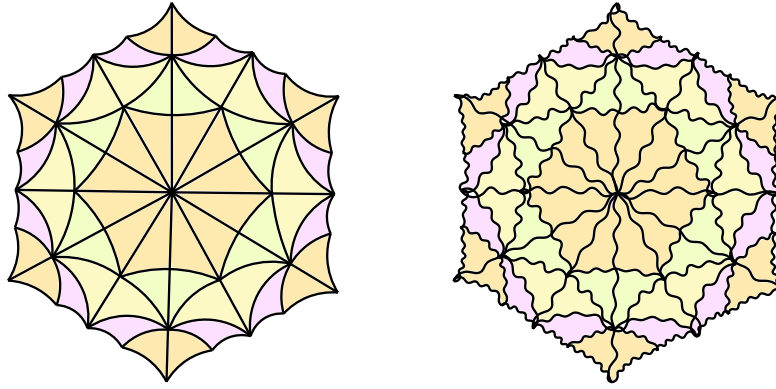
COROLARIO 4.3. (CRITERIO DE HIPERBOLICIDAD.) Un grafo que cumple con la propiedad (*) es hiperbólico.

DEMOSTRACIÓN. Tomamos la constante $\delta = 2K + D$. Dados x, y, z vértices y $[x, y]$, $[y, z]$, $[z, x]$ segmentos, tenemos:

$$[x, y] \subset \mathcal{B}(\eta(x, y), K) \subset \mathcal{B}(\eta(x, z) \cup \eta(z, y), K + D) \subset \mathcal{B}([x, z] \cup [z, y], \delta).$$

□

La prueba del TEOREMA 4.2 se encuentra más adelante. Antes, veamos cómo usar el criterio de hiperbolicidad en el grafo de curvas (aumentado).

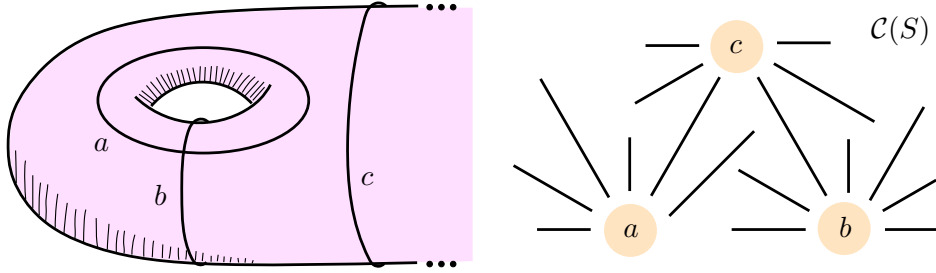


1.1. PRUEBA DE HIPERBOLICIDAD. Sea $S = S_g$ con $g \geq 2$. Para probar la hiperbolicidad de $\mathcal{C}(S)$, precisaremos introducir al *grafo de curvas aumentado* $\mathcal{C}_{\text{au}}(S)$. Este tiene los mismos vértices que $\mathcal{C}(S)$, y un par de ellos se conecta cuando las clases asociadas a y b cumplen $i(a, b) \leq 1$. Resulta que este nuevo grafo es quasi-isométrico a $\mathcal{C}(S)$, por lo que alcanza probar su hiperbolicidad para tener la de $\mathcal{C}(S)$.

Probemos primero que efectivamente son quasi-isométricos. Empezamos por observar que si $i(a, b) \leq 1$, entonces $d(a, b) \leq 2$ en $\mathcal{C}(S)$. En efecto, si $i(a, b) = 1$, entonces a y b son del tipo que no separa, y podemos aplicar el principio de cambio de coordenadas para ver que están a dos de distancia en $\mathcal{C}(S)$ (ver el dibujo de abajo). Se sigue que las distancias en $\mathcal{C}(S)$ se duplican a lo sumo respecto a las de $\mathcal{C}_{\text{au}}(S)$. Podemos definir una función $\mathcal{C}_{\text{au}}(S) \rightarrow \mathcal{C}(S)$ que valga la identidad en $\mathcal{C}(S)$ y que mande las aristas $[v, w]$ que no están en $\mathcal{C}(S)$ linealmente en algún camino de largo dos entre sus extremos v y w .

Luego, el mapa inclusión $\mathcal{C}(S) \rightarrow \mathcal{C}_{\text{au}}(S)$ y el $\mathcal{C}_{\text{au}}(S) \rightarrow \mathcal{C}(S)$ son quasi-isometrías con constante multiplicativa y aditiva igual a dos.

Curvas bicorn. Dadas a y b clases de curvas cerradas simples en S , consideramos representantes α y β puestos en posición minimal. Una clase de curva cerrada simple c es una *curva bicorn* entre a y b si es la clase de una unión de un subarco α' de α con uno β' de β , que llamamos a -arco y b -arco respectivamente. Está permitido $c = a$, es decir, que el b -arco sea vacío. De la misma forma, está permitido $c = b$.



Básicamente, por cada par de subarcos α' y β' que solo se cortan en los extremos, tenemos una bicorn, y no hay más que esas. Notar entonces que existen solamente finitas curvas bicorn entre a y b . Además, la condición de posición minimal nos da que cualquier curva bicorn es esencial, porque sino α y β estarían formando un bígono.

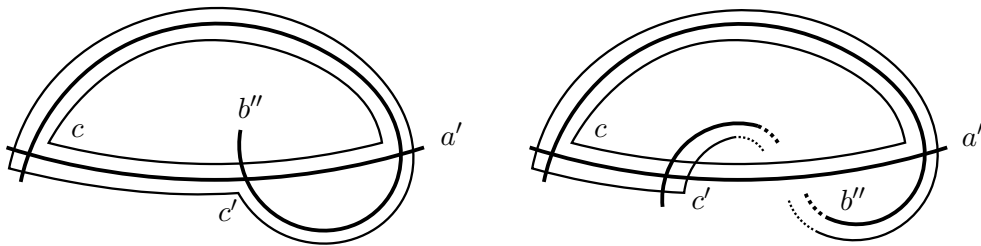
Para usar el criterio de hiperbolicidad, definimos $\eta(a, b)$ como el subgrafo de $\mathcal{C}_{\text{au}}(S)$ generado por todas las bicorns entre a y b . Es decir, al conjunto de vértices que representan bicorns entre a y b se le agrega las aristas entre ellos.

Para ver que $\eta(a, b)$ es un subgrafo conexo, definiremos un orden parcial en las clases de bicorns entre a y b : decimos que $c < c'$ si el b -arco de c está estrictamente contenido en el b -arco de c' , pensando que los arcos están formados por representantes fijos α y β .

LEMA 4.4. El subgrafo $\eta(a, b)$ es conexo².

DEMOSTRACIÓN. (Todas las bicorn de esta prueba son entre a y b .) Afirmamos que si $c \neq b$ es una curva bicorn, entonces existe otra bicorn c' , que es vecina de c en $\mathcal{C}_{\text{au}}(S)$, y tal que $c < c'$. Como el conjunto de bicorns es finito, y como b es más grande que todas, se sigue que toda bicorn c se puede conectar con b por un camino de bicorns.

Para el caso $i(c, b) \leq 1$ podemos tomar $c' = b$. Así que asumamos que c y b se cortan al menos dos veces. Si $c \neq a$, sean α' y β' el a -arco y b -arco de c respectivamente. Para encontrar c' prolongamos β' por uno de los extremos hasta que este se cruce con α' . Llamamos β'' a dicho subarco, que será el b -arco de c' . El a -arco de c' lo tomamos como el subarco de α' adecuado para cerrar la curva. Hay dos posibilidades dependiendo de si las intersecciones tienen el mismo índice algebraico o no. Es decir, puede que β'' corte α' viniendo de lados opuestos de α' , o que lo haga viniendo del mismo lado. En el primer caso, $i(c, c') = 0$, y en el segundo $i(c, c') = 1$ (ver dibujo).

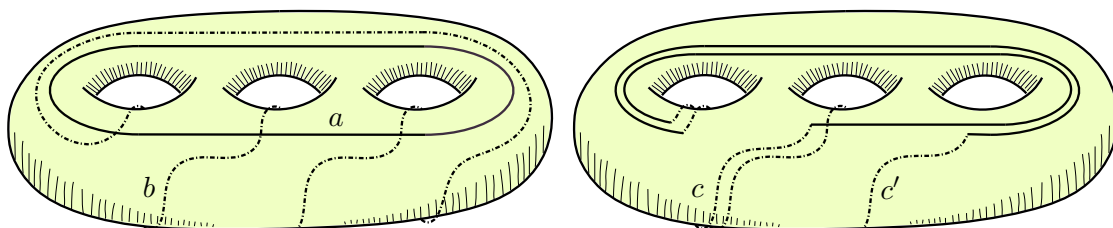


Por otro lado, si $c = a$ elegimos un subarco β' de β con extremos en α , de forma que dichos puntos sean las únicas intersecciones de β' con α . Tomamos c' como siendo

²Esto da una prueba de que, para $g \geq 2$, el grafo aumentado de S_g es conexo y, por lo tanto, también lo es el grafo de curvas $\mathcal{C}(S_g)$.

cualquiera de las dos bicorn definidas por β' y un subarco de α con los mismos extremos. Igual que antes, tenemos dos casos dependiendo de cómo corte β' a α y, en ambos casos, c y c' son vecinos en el grafo aumentado. \square

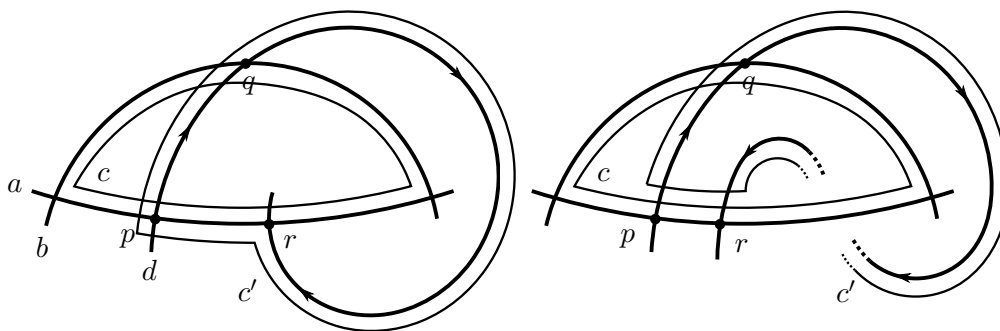
La siguiente imagen ilustra el proceso de la prueba anterior, donde se obtienen bicorns c y c' adyacentes a a y b respectivamente, que también son adyacentes entre ellas, y que verifican $a < c < c' < b$.



LEMA 4.5. Sean a , b y d clases de curvas cerradas simples y c una bicorn entre a y b . Entonces existe una bicorn c' entre a y d o entre b y d que corta c a lo sumo dos veces.

Este lema nos da la condición de finesa $\eta(a, b) \subset \mathcal{B}(\eta(a, d) \cup \eta(d, b), 2)$ con constante $D = 2$ pues: clases de curvas que se intersectan a lo sumo dos veces están a distancia menor o igual que dos en el grafo aumentado. Esta última afirmación se sigue de la construcción de la prueba anterior ya que, en el caso en que $i(a, b) = 2$, tenemos una primer bicorn c adyacente a a que cumple que, si extendemos su b -arco, obtenemos la curva b . Entonces c es adyacente tanto a a como a b .³

DEMOSTRACIÓN. (LEMA 4.5) Si $i(c, d) \leq 2$, elegimos $c' = d$. Si $i(c, d) \geq 3$, elegimos representantes en posición minimal y consideramos tres intersecciones consecutivas p, q, r entre c y d (ordenadas según una parametrización del representante de d). Dos de los tres puntos estarán en el mismo arco de c ; digamos que es en α' , el a -arco de c .



Si p y r están ambos sobre α' , entonces hay dos posibilidades dependiendo de si las intersecciones en p y r tienen el mismo índice o no. En ambos casos, elegimos c' formada

³La idea anterior se podría replicar para acotar distancias del grafo aumentado (y, por lo tanto, en el grafo de curvas también) en un contexto más general: si $i(a, b) \geq 2$, entonces $d_{\text{au}}(a, b) \leq i(a, b)$.

por el subarco δ' de d delimitado por p y r que contiene a q , y el subarco α'' de α' delimitado por p y r . En un caso tenemos $i(c, c') = 2$, y en otro $i(c, c') = 1$ (ver dibujo).

En el caso en que tenemos dos puntos consecutivos sobre α' , podemos formar c' tomando δ' el subarco de d entre dichos puntos y α'' el subarco de α' que los conecta. \square

1.2. PRUEBA DEL CRITERIO. Ahora queremos probar el TEOREMA 4.2. Para esto, empezaremos por definir la función

$$f(n) = \text{máx} \{d(w, [x, y]) : x, y \in X^{(0)}, d(x, y) \leq n, w \in \eta(x, y)\}.$$

El teorema se reduce a probar que esta función está acotada por una constante $K' = K'(D)$, como veremos a continuación.

PROPOSICIÓN 4.6. Supongamos que $f(n) \leq K'$ para todo $n \geq 0$, siendo $K' = K'(D)$ una constante. Entonces la distancia Hausdorff entre $\eta(x, y)$ y cualquier segmento $[x, y]$ es $\leq K$, para $K = 2K' + 1$.

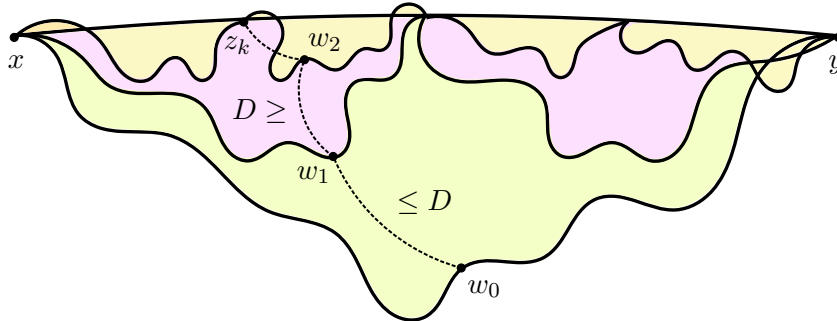
DEMOSTRACIÓN. Tenemos $\eta(x, y) \subset \mathcal{B}([x, y], K')$ por definición de $f(n)$. Para probar la proposición, falta ver que $[x, y] \subset \mathcal{B}(\eta(x, y), K)$. Dado v en $[x, y]$, llamamos $\alpha^- = [x, v]$ y $\alpha^+ = [v, y]$. Consideramos los conjuntos

$$A^- = \{w \in \eta(x, y) : d(w, \alpha^-) \leq K'\} \text{ y } A^+ = \{w \in \eta(x, y) : d(w, \alpha^+) \leq K'\}.$$

Por hipótesis se cumple $\eta(x, y) = A^- \cup A^+$. Notar que, como x e y están en $\eta(x, y)$, se tiene $x \in A^-$ e $y \in A^+$. Como además $\eta(x, y)$ es conexo, hay un $w \in A^-$ tal que $d(w, A^+) \leq 1$. Por lo tanto, existen $v^\pm \in \alpha^\pm$ tales que $d(w, v^-) \leq K'$ y $d(w, v^+) \leq K' + 1$. De ello a su vez se sigue que el subsegmento $[v^-, v^+]$ de $[x, y]$ mide $\leq 2K' + 1$. Entonces, $d(v, \{v^-, v^+\}) \leq K'$, lo que nos da $d(v, w) \leq 2K' + 1 = K$. \square

Notar que, como f es una función en los naturales, alcanza con acotarla a partir de un N . En los siguientes lemas nos conformaremos solamente con acotar el orden de su crecimiento. En el primer lema probaremos que el crecimiento es de orden logarítmico, y en el segundo daremos una “cota recursiva”. Con estos dos resultados seremos capaces de probar que f es una función acotada por una constante.

LEMA 4.7. Si un grafo cumple la propiedad (*), entonces la distancia de $\eta(x, y)$ a cualquier segmento $[x, y]$ es $\leq (2 + \log_2 n)D$, siendo $n = d(x, y)$.



DEMOSTRACIÓN. Fijamos w_0 en $\eta(x, y)$. Sea $z_1 \in X^{(0)}$ punto medio de $[x, y]$, esto es, un punto en $[x, y]$ que corta el segmento en dos subsegmentos cuyas longitudes difieren en a lo sumo una unidad. Por la propiedad (*) sabemos que

$$w_0 \in \mathcal{B}(\eta(x, z_1) \cup \eta(z_1, y), D).$$

Entonces existe w_1 , digamos en $\eta(x, z_1)$, tal que $d(w_0, w_1) \leq D$. Sea z_2 punto medio del subsegmento $[x, z_1]$ de $[x, y]$. Existe w_2 en $\eta(x, z_2) \cup \eta(z_2, z_1)$ tal que $d(w_1, w_2) \leq D$. En este punto, tenemos $d(w_0, w_2) \leq 2D$. Digamos que $w_2 \in \eta(z_2, z_1)$, y tomamos z_3 punto medio de $[z_2, z_1]$. De forma análoga tomamos un w_3 cumpliendo $d(w_0, w_3) \leq 3D$.

Continuamos este proceso hasta que no podemos tomar más puntos medios. Es decir, luego de a lo sumo $k = 1 + \log_2 n$ pasos, obtenemos z_ℓ y z_k vértices en $[x, y]$ y w_k en $\eta(z_\ell, z_k)$, para algún $\ell < k$, tales que $d(z_\ell, z_k) = 1$ y $d(w_0, w_k) \leq kD$. Por la propiedad (*), el diámetro de $\eta(z_\ell, z_k)$ es $\leq D$, de donde $d(w_k, z_k) \leq D$. Obtenemos entonces que $d(w_0, z_k) \leq kD + D = (2 + \log_2 n)D$.

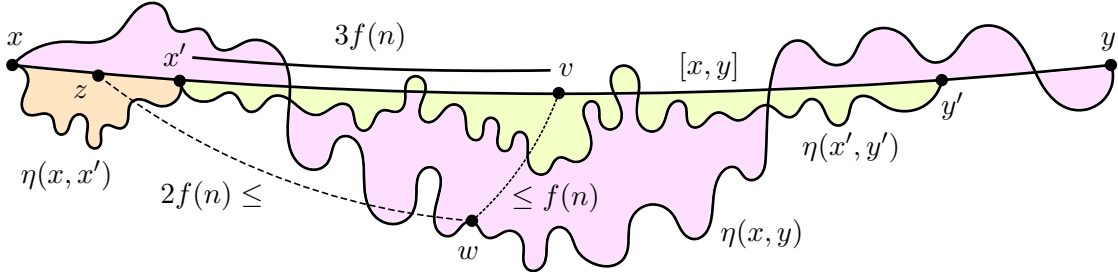
Como z_k está en $[x, y]$, y como w_0 era arbitrario en $\eta(x, y)$, queda probado el lema. \square

LEMA 4.8. Si $f(n) > 2D$, entonces $f(n) \leq 2D + f(6f(n))$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $x, y \in X^{(0)}$ con $d(x, y) \leq n$, y sea $w \in \eta(x, y)$. Consideramos un punto v del segmento $[x, y]$ tal que $d(w, v) = d(w, [x, y])$. Sean x', y' respectivamente a la izquierda y a la derecha de v en el segmento $[x, y]$, y a distancia $3f(n)$ de dicho punto. (En caso de no existir, tomamos $x' = x$ o $y' = y$). Aplicando la propiedad (*) dos veces, obtenemos

$$w \in \mathcal{B}(\eta(x, x') \cup \eta(x', y') \cup \eta(y', y), 2D).$$

Veremos más en particular que $w \in \mathcal{B}(\eta(x', y'), 2D)$. Para ello, hay que probar que $w \notin \mathcal{B}(\eta(x, x'), 2D)$ si $x' \neq x$, y es análogo que $w \notin \mathcal{B}(\eta(y', y), 2D)$ si $y' \neq y$.



Si existiese un $z \in [x, x']$ tal que $d(w, z) < 2f(n)$, entonces el camino $[v, w] \cup [w, z] \cup [z, x]$ que se ve en el dibujo sería más corto que el $[v, z] \cup [z, x]$, lo cual contradice que $[x, y]$ sea geodésico. Por lo tanto, $d(w, [x, x']) \geq 2f(n)$. Como $d(x, x') \leq n$, por definición de f vale $\eta(x, x') \subset \mathcal{B}([x, x'], f(n))$. Entonces, usando la hipótesis, vemos que

$$d(w, \eta(x, x')) \geq d(w, [x, x']) - f(n) \geq 2f(n) - f(n) = f(n) > 2D.$$

Es decir, $w \notin \mathcal{B}(\eta(x, x'), 2D)$. Queda probado que $w \in \mathcal{B}(\eta(x', y'), 2D)$.

Dado que $[x', y']$ mide $\leq 6f(n)$, sabemos que $\eta(x', y')$ está a menos que $f(6f(n))$ de $[x', y'] \subset [x, y]$. Obtenemos entonces que $d(w, [x, y]) \leq 2D + f(6f(n))$. Como x, y, w eran arbitrarios con $d(x, y) \leq n$ y $w \in \eta(x, y)$, se sigue que $f(n) \leq 2D + f(6f(n))$. \square

Ahora sí, terminamos con la prueba del teorema.

PROPOSICIÓN 4.9. Existe $K' = K'(D)$ tal que $f(n) \leq K'$, para todo n .

DEMOSTRACIÓN. Si $f(n) \leq 2D$ para todo n , entonces ya está. Sino, como f es creciente, existe un $N \geq 0$ a partir del cual $f(n) > 2D$. Combinando los lemas anteriores obtenemos

$$f(n) \leq 2D + (2 + \log_2(6f(n)))D \leq (7 + \log_2(f(n)))D.$$

Por órdenes, existe M tal que $(7 + \log_2(m))D < m$ para todo $m \geq M$. Es absurdo suponer que $f(n) \geq M$ para algún $n \geq N$, ya que esto implicaría que

$$f(n) \leq (7 + \log_2(f(n)))D < f(n).$$

Concluimos que $f(n) < M$ para todo $n \geq N$. Como f está definida en los naturales, se sigue el resultado. \square

2. LA ACCIÓN DE LOS PSEUDO-ANOSOV EN EL GRAFO DE CURVAS

Decimos que una mapping class f es *loxodrómica* en el grafo de curvas si para toda clase de curvas a existe $C > 0$ tal que $d(a, f^n(a)) \geq C|n|$, para todo entero n .

Comentaremos nada más⁴ que el $\text{MCG}(S_g)$ contiene elementos loxodróxicos, que son las clases pseudo-Anosov introducidas al final del capítulo siguiente. En particular, el grafo $\mathcal{C}(S_g)$ tiene diámetro infinito. Esto último de hecho no es cierto para superficies de tipo infinito. Por ejemplo, cualquier par de curvas a y b en el *monstruo del lago ness* S viven en una subsuperficie de tipo finito $S' \subset S$. Por lo tanto, podemos tomar una clase c en el complemento de S' que, por ser disjunta de a y b , está conectada por una arista a ambas. Se sigue que $\mathcal{C}(S)$ tiene diámetro dos.

3. EL GRAFO DE CURVAS QUE NO SEPARAN

Para $S = S_{g,p}$, introduciremos otro grafo en el que $\text{MCG}(S)$ actúa: se trata del *grafo de curvas que no separan* $\widehat{\mathcal{N}}(S)$. Este tiene como vértices las clases de isotopía de curvas cerrada simples que no separan, y las aristas son entre clases a y b tales que $i(a, b) = 1$.

PROPOSICIÓN 4.10. Si $g \geq 2$, entonces $\widehat{\mathcal{N}}(S_{g,p})$ es conexo.⁵

Nos interesa particularmente el $\widehat{\mathcal{N}}(S)$ dado que, en el capítulo siguiente, usaremos la acción del mapping class group en él para probar que es un grupo finitamente generado. Que $\text{MCG}(S)$ actúa en $\widehat{\mathcal{N}}(S)$ viene de que: homeomorfismos de S llevan curvas que no separan en curvas que no separan y preservan la intersección geométrica uno. Más aún, nos interesa el hecho de que la acción es transitiva en los vértices y en los pares de vértices conectados por una arista. Ambas afirmaciones se obtienen del principio de cambio de coordenadas.

En efecto, dados dos vértices en $\widehat{\mathcal{N}}(S)$ asociados a clases a y b , el principio nos dice que existe un homeomorfismo de S que manda cualquier representante α de a en cualquier representante β de b , por ser α y β curvas que no separan. Entonces, la mapping

⁴Para más información, se puede referir al trabajo [2].

⁵Una prueba simple y clara de este resultado puede encontrarse en la sección 4.1 de la referencia [1].

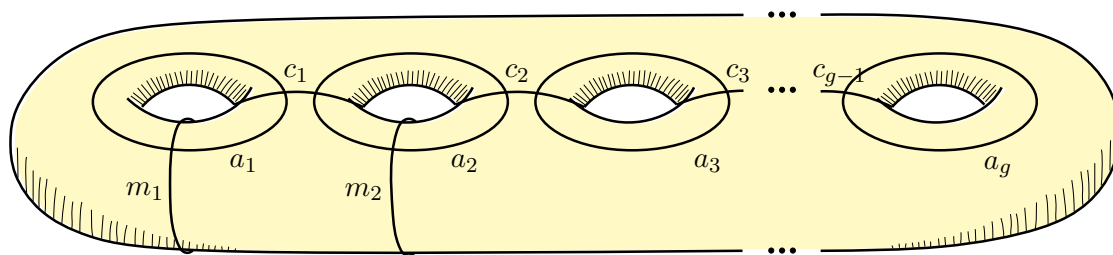
class de dicho homeomorfismo manda a en b . De forma parecida, si (a, b) y (c, d) son pares de vértices conectados por una arista en $\widehat{\mathcal{N}}(S)$, existe un homeomorfismo de S que manda representantes α y β de a y b en representantes γ y δ de c y d , dado que $\alpha \cap \beta = \gamma \cap \delta = 1$.

GENERADORES DEL MAPPING CLASS GROUP

Recordemos el isomorfismo $\sigma : \text{MCG}(T^2) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ del TEOREMA 2.5. Resulta que σ manda los twist en las curvas $(1, 0)$ y $(0, 1)$ en las matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ respectivamente, siendo estas generadores de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Por lo tanto, el grupo $\text{MCG}(T^2)$ es generado por dichos Dehn twists. En los demás g -toros tenemos un resultado análogo.

TEOREMA 5.1. Para $g \geq 0$ el grupo $\text{MCG}(S_g)$ es generado por finitos Dehn twists sobre curvas cerradas simples que no separan.

Se puede probar más aún que un conjunto de generadores explícitos son los Dehn twist sobre las $2g + 1$ curvas del dibujo de abajo¹. Estos se denominan *generadores de Humphries*. Además, $2g + 1$ es la cantidad de curvas mínima necesaria para generar $\text{MCG}(S_g)$ con twists.



Observar que el TEOREMA 5.1 es falso para superficies con fines, pues ninguna composición de twist los puede permutar. Al final del capítulo comentaremos cómo son los generadores de $\text{MCG}(S_{g,n})$.

Sea $\text{PMCG}(S_{g,n})$ el *pure mapping class group* de $S_{g,n}$, definido como el subgrupo de $\text{MCG}(S_{g,n})$ de elementos que fijan cada punto marcado individualmente. Es decir, tenemos la sucesión exacta

$$1 \rightarrow \text{PMCG}(S_{g,n}) \rightarrow \text{MCG}(S_{g,n}) \rightarrow \Sigma_n \rightarrow 1,$$

donde el morfismo $\text{MCG}(S_{g,n}) \rightarrow \Sigma_n$ es el inducido por la acción en los puntos marcados. Veremos que este nuevo subgrupo sí es generado por finitos Dehn twists, que es un resultado más general que el TEOREMA 5.1.

El problema de la palabra. Se plantea lo siguiente: dado un grupo finitamente generado y un generador finito fijo, ¿existe un algoritmo que reciba un producto en los

¹Ver capítulo 4 de [1].

generadores y sus inversos, y determine si este producto representa la identidad o no? Hay ejemplos de grupos para los cuales no hay un tal algoritmo. Asumiendo el TEOREMA 5.1, veremos que en el caso de $\text{MCG}(S)$ sí lo hay.

Fijamos un conjunto \mathcal{C} de curvas que llenan S y un generador explícito (por ejemplo, los generadores de Humphries). Si ω es una palabra en los generadores, podemos ver cómo actúa su homeomorfismo asociado φ en \mathcal{C} con el método visto en el tercer capítulo. Con el método de Alexander determinaremos si ω es trivial o no de la siguiente manera. Para cada $\gamma \in \mathcal{C}$ y cada bígono entre γ y $\phi(\gamma)$, cambiamos el subarco de $\phi(\gamma)$ que forma el bígono por el de γ . Esta operación no cambia la clase de $\varphi(\gamma)$. Si al terminar con los (finitos) bígono las curvas quedan iguales, entonces φ fija la clase de γ . Según el enunciado de Alexander, también hay que tener en cuenta las orientaciones.

1. LA SUCESIÓN EXACTA DE BIRMAN

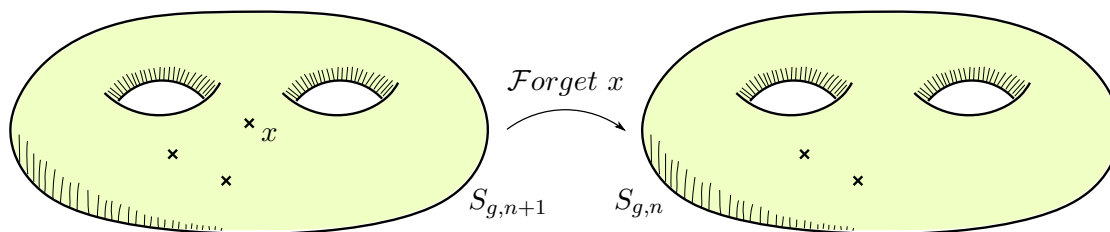
Esta sucesión nos servirá para el paso inductivo en el número de fines.

1.1. LOS MAPAS PUSH Y FORGET. En esta sección cambiaremos constantemente la forma en que interpretamos los fines: a veces las interpretaremos como puntos removidos, y a veces como puntos marcados.

Consideramos $\text{MCG}(S_{g,n+1})$ con $n \geq 0$, y elegimos un punto marcado x de $S_{g,n+1}$. Sea f una mapping class en $\text{MCG}^*(S_{g,n+1})$, siendo este el subgrupo de $\text{MCG}(S_{g,n+1})$ formado por los elementos que fijan x . Como f no intercambia x con ningún otro punto marcado de $S_{g,n+1}$, tiene sentido pensar a f como un elemento de $\text{MCG}(S_{g,n})$. Más específicamente, tenemos un mapa

$$\text{Forget} : \text{MCG}^*(S_{g,n+1}) \rightarrow \text{MCG}(S_{g,n})$$

inducido por la inclusión $S_{g,n+1} \rightarrow S_{g,n}$. En el resto de esta sección denotaremos con “techo” a los homeomorfismos $\bar{\varphi}$ de $S_{g,n}$, y sin él al φ asociado en $S_{g,n+1}$.

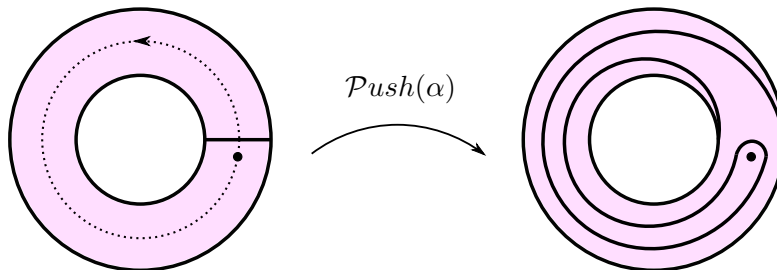


Como argumentamos en el segundo capítulo², *Forget* es sobreyectivo. Ahora nos interesa describir el núcleo. Lo primero que observaremos es que podemos asociar un elemento del $\pi_1(S_{g,n}, x)$ a cada elemento $f \in \text{MCG}^*(S_{g,n+1})$ del kernel de *Forget* de la siguiente manera. Sea φ representante de f . Que $\text{Forget}(f) = 1$ significa que existe una isotopía \bar{H}_t en $S_{g,n}$ de la identidad a $\bar{\varphi}$. Dado que $\bar{\varphi}$ fija x , la curva $\alpha(t) = \bar{H}_t(x)$ es un loop de $S_{g,n}$ basado en x . Asociamos a f la clase de α en el grupo fundamental.

Recíprocamente, veremos que si “apoyamos un dedo” sobre x y “empujamos” los puntos de la superficie a lo largo de α , obtendremos la clase de f en $\text{MCG}^*(S_{g,n+1})$.

²Ver sección de LA ESFERA Y LA ESFERA PINCHADA.

Para formalizar, pensamos un loop $\alpha : I \rightarrow S_{g,n}$ en x como una isotopía entre puntos y la extendemos a una isotopía $\overline{H}_t : S_{g,n} \rightarrow S_{g,n}$ de toda la superficie, como en la PROPOSICIÓN 1.8. Definimos $\mathcal{P}ush(\alpha) \in \text{MCG}^*(S_{g,n+1})$ como la mapping class de H_1 .

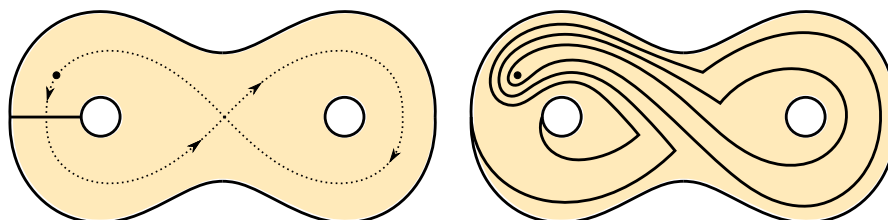


Lo que uno querría sería que la mapping class de $\mathcal{P}ush(\alpha)$ no dependa de la extensión de la isotopía, y que tampoco dependa de la elección de α dentro de su clase de homotopía. En otras palabras, uno querría tener un mapa bien definido

$$\mathcal{P}ush : \pi_1(S_{g,n}, x) \rightarrow \text{MCG}^*(S_{g,n+1}).$$

Resulta que ese es el caso.

Por comodidad, denotaremos por α tanto a la curva como a su clase de homotopía en el π_1 . Observamos que, si tenemos dos loops α y β que son isotópicos, entonces podemos extender la isotopía de curvas a toda la superficie para ver que $\mathcal{P}ush(\alpha)$ y $\mathcal{P}ush(\beta)$ están en la misma mapping class. Sin embargo, las clases del π_1 son de homotopía, y no hay una forma general de extender homotopías de loops a homotopías de superficies. Por otro lado, podríamos modificar un loop α por homotopía y obtener uno β que pase por el punto marcado x , y no hay una forma obvia de probar que sus $\mathcal{P}ush$'s asociados son homotópicos en la superficie pinchada $S_{g,n+1}$. Resulta ser que el mayor problema en la prueba del TEOREMA 5.3 es probar que $\mathcal{P}ush$ está bien definido.



Asumiendo que $\mathcal{P}ush$ está bien definido, podemos dar un representante explícito de $\mathcal{P}ush(\gamma)$ para el caso en que γ es un loop simple en x . Empezamos por identificar un entorno de γ en $S_{g,n}$ homeomórficamente con el anillo $S^1 \times [0, 2]$, de forma que $\gamma(t)$ se corresponda con $(2\pi t, 1)$. Consideramos la isotopía en el anillo dada por

$$G_t((\theta, r)) = \begin{cases} (\theta + 2\pi r t, r) & 0 \leq r \leq 1 \\ (\theta + 2\pi(2-r)t, r) & 1 \leq r \leq 2. \end{cases}$$

Mandando G_t por el homeomorfismo, obtenemos una isotopía \overline{F}_t en el entorno de γ , que se extiende por la identidad a una isotopía de toda la superficie $S_{g,n}$. Dado que

$G_t((0,1)) = (2\pi t, 1)$, obtenemos que \overline{F}_t mueve x a lo largo de γ . Entonces F_1 es un representante de $\mathcal{P}ush(\gamma)$.

Además, notar que G_1 es el pegado del twist en el anillo $S^1 \times [0, 1]$ con el inverso del twist en el anillo $S^1 \times [1, 2]$. Si α es la curva en $S_{g,n+1}$ que se identifica con $S^1 \times \{0\}$, y β es la que se identifica con $S^1 \times \{2\}$, entonces \overline{F}_1 es $T_\alpha T_\beta^{-1}$. De esto se sigue:

HECHO 5.2. Sea γ un loop simple en $S_{g,n}$ representando a un elemento del $\pi_1(S_{g,n}, x)$. Entonces

$$\mathcal{P}ush(\gamma) = T_a T_b^{-1},$$

donde a y b son clases de isotopía de curvas cerradas simples en $S_{g,n+1}$ obtenidas al empujar γ hacia la izquierda y la derecha respectivamente.

1.2. LA SUCESIÓN EXACTA DE BIRMAN.

TEOREMA 5.3 (SUCESIÓN EXACTA DE BIRMAN). Sea $S = S_{g,n}$ con $\chi(S) < 0$ y $n \geq 0$. Supongamos que $S_{g,n+1}$ es obtenida de $S_{g,n}$ al remover un punto interior x . Entonces la siguiente sucesión es exacta:

$$1 \rightarrow \pi_1(S_{g,n}, x) \xrightarrow{\mathcal{P}ush} \text{MCG}^*(S_{g,n+1}) \xrightarrow{\mathcal{F}orget} \text{MCG}(S_{g,n}) \rightarrow 1.$$

Una vez que se sabe que $\mathcal{P}ush$ está bien definido, es directo de su definición que la imagen está contenida en el kernel de $\mathcal{F}orget$. Que es sobreyectiva en él, viene de lo que comentamos arriba: dimos una forma de asociar, a cada f del kernel de $\mathcal{F}orget$, la clase en el π_1 de cierta α , y la isotopía \overline{H}_t de la identidad a $\overline{\varphi}$ precisamente extiende a α por construcción. Esto nos dice que φ es un representante de $\mathcal{P}ush(\alpha)$ y que, por lo tanto, $\mathcal{P}ush(\alpha) = f$. La prueba de que $\mathcal{P}ush$ está bien definido y es inyectivo es la parte compleja del teorema y se puede encontrar en el apéndice.

Resulta además que podemos tomar la restricción de la sucesión anterior al subgrupo $\text{PMCG}(S_{g,n+1})$ de $\text{MCG}(S_{g,n+1})$ para obtener

$$1 \rightarrow \pi_1(S_{g,n}, x) \rightarrow \text{PMCG}(S_{g,n+1}) \rightarrow \text{PMCG}(S_{g,n}) \rightarrow 1.$$

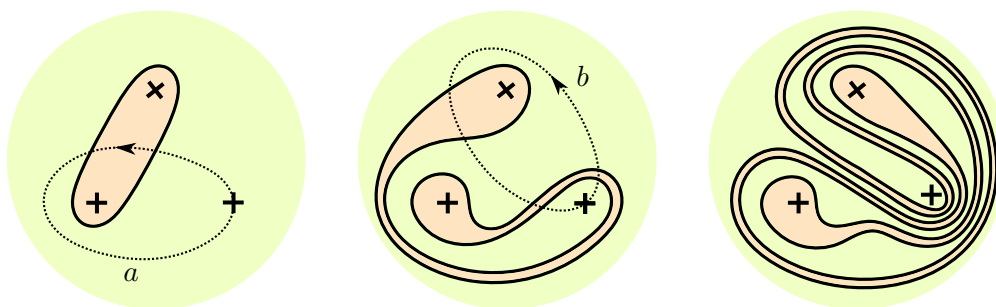
2. LA ESFERA Y EL DISCO CON FINES

2.1. LA ESFERA. En el segundo capítulo vimos que $\text{PMCG}(S_{0,n})$ es trivial si $n \leq 3$. Para conocer el PMCG de esferas con más fines, podemos usar la sucesión exacta de Birman. Primero, tenemos:

$$1 \rightarrow \pi_1(S_{0,3}) \xrightarrow{\mathcal{P}ush} \text{PMCG}(S_{0,4}) \xrightarrow{\mathcal{F}orget} \text{PMCG}(S_{0,3}) \rightarrow 1.$$

Como $\text{PMCG}(S_{0,3}) = 1$, obtenemos $\text{PMCG}(S_{0,4}) \simeq \pi_1(S_{0,3}) \simeq F_2$. Más aún, los generadores estándar a y b del $\pi_1(S_{0,3})$ tienen representantes que son curvas cerradas simples y, por lo tanto, $\mathcal{P}ush(a)$ y $\mathcal{P}ush(b)$ son productos de Dehn twists (HECHO 5.2) que generan el $\text{PMCG}(S_{0,4})$.

En el dibujo de abajo aparece el disco abierto pinchado tres veces, que es homeomorfo a $S_{0,4}$. En ella se muestran dos generadores a y b del $\pi_1(S_{0,3})$, tomando como punto base uno de los tres puntos marcados de $S_{0,4}$, y también se muestra una curva encerrando los otros dos puntos. En la segunda imagen se ve el resultado de aplicar el $\mathcal{P}ush(a)$, y la tercera el de aplicar el $\mathcal{P}ush(b)$.



Podemos seguir con la sucesión

$$1 \rightarrow \pi_1(S_{0,4}) \xrightarrow{\text{Push}} \text{PMCG}(S_{0,5}) \xrightarrow{\text{Forget}} \text{PMCG}(S_{0,4}) \rightarrow 1.$$

Sean a , b y c generadores simples el $\pi_1(S_{0,4})$, y sean p_a , p_b y p_c sus Push 's. Como aplicar Forget a p_a y p_b da p_a y p_b (mantenemos el nombre aunque estén en grupos distintos), tenemos que toda clase f en $\text{PMCG}(S_{0,5})$ cumple

$$\text{Forget}(f) = p_a^{n_1} p_b^{m_1} \cdots p_a^{n_k} p_b^{m_k} = \text{Forget}(p_a^{n_1} p_b^{m_1} \cdots p_a^{n_k} p_b^{m_k}).$$

Como el kernel de Forget es generado por p_a , p_b y p_c , se sigue que f es un producto de p_a , p_b y p_c .

Concluimos que $\text{PMCG}(S_{0,5})$ es generado por $\text{Push}(a)$, $\text{Push}(b)$ y $\text{Push}(c)$. Además, es claro que este argumento se generaliza a $\text{PMCG}(S_{0,n})$, y tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 5.4. El $\text{PMCG}(S_{0,n})$ es generado por finitos Dehn twists.

2.2. EL GRUPO DE TRENZAS. En esta parte queremos dar una forma de pensar al mapping class group del disco compacto con n fines. Para ello, daremos una breve descripción del *grupo de trenzas de n hebras*.

Sean z_1, \dots, z_n puntos distinguidos en el plano complejo \mathbb{D} . Una *trenza* es una colección de n caminos $f_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D} \times [0, 1]$, llamados *hebras*, y una permutación τ de $\{1, \dots, n\}$ tales que:

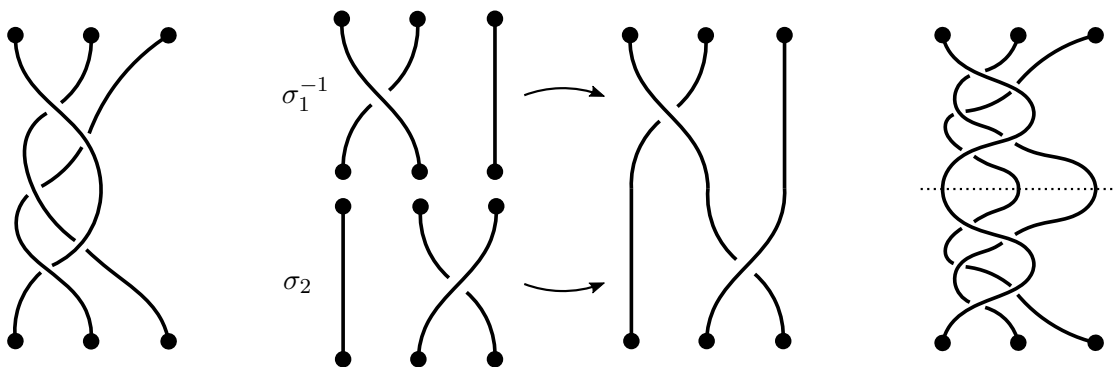
- Las hebras $f_i([0, 1])$ son disjuntas.
- $f_i(0) = z_i$ y $f_i(1) = z_{\tau(i)}$.
- $f_i(t) \in \mathbb{D} \times \{t\}$.

El grupo de trenzas de n hebras, que denotamos por B_n , es el grupo de clases de isotopía de hebras. Una isotopía de hebras fija el conjunto $\{z_i\} \times \{0, 1\}$ y preserva los niveles $\mathbb{D} \times \{t\}$. El producto de la hebra (f_1, \dots, f_n) con la hebra (g_1, \dots, g_n) es:

$$(f_i g_i)(t) = \begin{cases} f_i(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ g_{\tau(i)}(2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Las hebras se representan de forma plana, como se muestra en el dibujo de abajo. Se puede pensar como proyectar las hebras en un plano de \mathbb{R}^3 disjunto de $\mathbb{D} \times I$ solo que, cuando las proyecciones de dos hebras se cortan en un punto, dibujamos cortada la proyección de la hebra que está “más atrás” (más cerca del plano).

Visualmente, la inversa de una trenza se obtiene tomando su reflexión en el plano $\mathbb{D} \times \{0\}$ o en el plano $\mathbb{D} \times \{1\}$.



Para $0 \leq i \leq n - 1$ sea $\sigma_i \in B_n$ la trenza cuyo único cruce es la $(i + 1)$ -ésima hebra pasando adelante de la i -ésima hebra. Resulta que el grupo B_n es generado por las trenzas $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$. Esto es porque toda trenza β se puede isotopar de forma que sus (finitos) cruces ocurran en niveles horizontales $\mathbb{D} \times \{t\}$ distintos, y leer los cruces de arriba a abajo da el producto deseado de los σ_i 's y sus inversos.

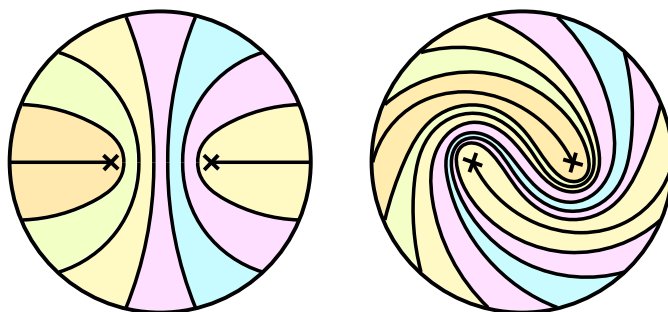
Ahora consideramos a D_n , el disco compacto D^2 con n puntos marcados. Resulta que B_n es isomorfo al mapping class group de D_n :

$$B_n \simeq \text{MCG}(D_n) = \pi_0(\text{Homeo}^+(D_n, \partial D_n)).$$

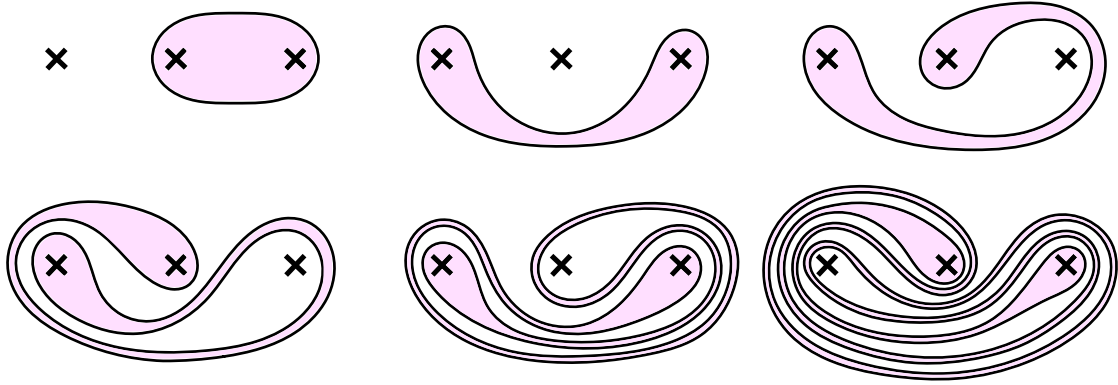
La identificación entre los grupos la describimos abajo.

Sea φ un homeomorfismo de D^2 que fija el borde y deja el conjunto de puntos marcados invariante. Si olvidamos que los puntos están marcados, entonces φ es simplemente un homeomorfismo de D^2 que fija ∂D^2 . Por el truco de Alexander, sabemos que φ es isotópico a la identidad. Durante una tal isotopía, cada punto marcado se mueve por el interior del disco y, en tiempo uno, termina en algún otro punto marcado. Entonces φ produce una trenza. No lo veremos, pero esta identificación baja bien al cociente y da un isomorfismo $\text{MCG}(D_n) \rightarrow B_n$.

Bajo el isomorfismo $B_n \simeq \text{MCG}(D_n)$ cada generador σ_i corresponde a la clase de homotopía de un homeomorfismo de D_n que tiene como soporte un disco pinchado dos veces, en donde hace un “half twist”, como se describe en la figura.



En el siguiente dibujo se muestra cómo se va transformando una curva que encierra dos puntos marcados al aplicar $\sigma_0 \sigma_1^{-1} \sigma_0 \sigma_1^{-1} \sigma_0$.



3. GENERADOR FINITO

Finalmente, en esta sección probamos el TEOREMA 5.6. Para la inducción en el género, usaremos el siguiente lema.

LEMA 5.5. Sea a y b clases en $S = S_g$ tales que $i(a, b) = 1$. Entonces el $\text{MCG}(S_g)$ es generado por $T_b T_a$ y el estabilizador de a en $\text{MCG}(S_g)$.

DEMOSTRACIÓN. Recordar del capítulo anterior el grafo de curvas que no separan $\widehat{\mathcal{N}}(S)$. Usaremos que el grafo es conexo, y que el $\text{MCG}(S)$ actúa de manera transitiva en los vértices y en los pares de vértices conectados por una arista.

Sea $f \in \text{MCG}(S)$ y $H < \text{MCG}(S)$ el subgrupo generado por $T_b T_a$ y el estabilizador de a en $\text{MCG}(S)$. Como $\widehat{\mathcal{N}}(S)$ es conexo, existen vértices $a = a_0, \dots, a_k = f(a)$ tales que a_i y a_{i+1} están conectados por una arista $[a_i, a_{i+1}]$. Como $\text{MCG}(S)$ actúa transitivamente en los vértices, podemos elegir $g_i \in \text{MCG}(S)$ tales que $g_i(a) = a_i$. Elegimos $g_0 = \text{id}$ y $g_k = f$. Probaremos por inducción que $g_i \in H$, siendo el caso base $g_0 = \text{id} \in H$.

Supongamos que $g_i \in H$. Si aplicamos g_i^{-1} a la arista $[a_i, a_{i+1}] = [g_i(a), g_{i+1}(a)]$, obtenemos la arista $[a, g_i^{-1}g_{i+1}(a)]$. Como $\text{MCG}(S)$ actúa transitivamente en los pares de vértices conectados por una arista, existe un $h \in \text{MCG}(S)$ que manda la arista $[a, g_i^{-1}g_{i+1}(a)]$ en la $[a, b]$. Es decir, $h(a) = a$ y $hg_i^{-1}g_{i+1}(a) = b$. Como $T_b T_a(b) = a$ (PROPOSICIÓN 3.7), tenemos $T_b T_a hg_i^{-1}g_{i+1}(a) = a$. Esto implica que $T_b T_a hg_i^{-1}g_{i+1}$ está en H . Como $T_b T_a$, h y g_i^{-1} están en H , concluimos que g_{i+1} también lo está. \square

TEOREMA 5.6. Para $g \geq 1$ y $n \geq 0$, el grupo $\text{PMCG}(S_{g,n})$ es generado por finitos Dehn twists sobre curvas cerradas simples que no separan.

DEMOSTRACIÓN. Haremos doble inducción en el género y en la cantidad de fines, con casos base $T^2 = S_{1,0}$ y $S_{1,1}$.

Inducción en la cantidad de fines. Supongamos que vale el teorema para el $\text{PMCG}(S_{g,n})$, con $g, n \geq 1$; queremos probar que vale para $\text{PMCG}(S_{g,n+1})$.

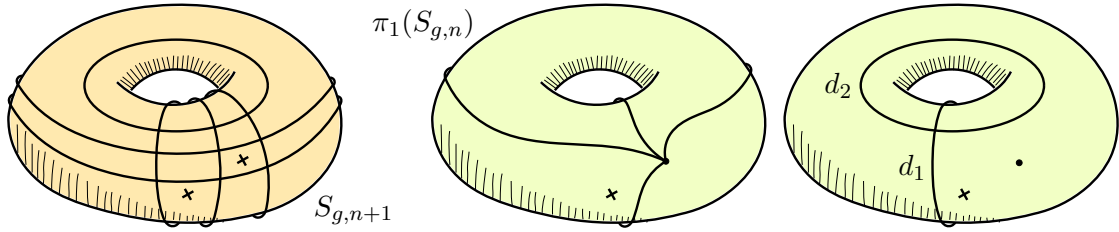
Tenemos la sucesión exacta de Birman,

$$1 \rightarrow \pi_1(S_{g,n}) \xrightarrow{\text{Push}} \text{PMCG}(S_{g,n+1}) \xrightarrow{\text{Forget}} \text{PMCG}(S_{g,n}) \rightarrow 1.$$

Como $g \geq 1$, el $\pi_1(S_{g,n})$ es generado por finitas clases de homotopía de loops simples que no separan $S_{g,n}$. Por el HECHO 5.2, el *Push* asociado a cada uno de estos loops es de la forma $T_{a_j}T_{b_j}^{-1}$, siendo a_j y b_j clases de curvas cerradas simples que no separan $S_{g,n+1}$. Por otro lado, la hipótesis inductiva nos da finitas clases $\{d_i\}$ de curvas cerradas simples que no separan $S_{g,n}$ tales que $\text{PMCG}(S_{g,n}) = \langle T_{d_i} \rangle$. Mirando d_i como una clase c_i en $S_{g,n+1}$, tenemos que $\text{Forget}(T_{c_i}) = T_{d_i}$. Afirmamos que $\text{PMCG}(S_{g,n+1})$ es generado por los T_{a_j} , T_{b_j} y T_{c_i} . Asumamos que en la lista de los T_{a_j} , T_{b_j} y T_{c_i} están los twist y sus inversos. Entonces, dado $f \in \text{PMCG}(S_{g,n+1})$, existen i_1, \dots, i_k tales que

$$\text{Forget}(f) = T_{d_{i_1}} \cdots T_{d_{i_k}} = \text{Forget}(T_{c_{i_1}}) \cdots \text{Forget}(T_{c_{i_k}}) = \text{Forget}(T_{c_{i_1}} \cdots T_{c_{i_k}}).$$

Se sigue que $f(T_{c_{i_1}} \cdots T_{c_{i_k}})^{-1}$ está en el kernel de *Forget*, que es la imagen de *Push*. Esta última es generada por los $T_{a_j}T_{b_j}^{-1}$, entonces f es producto de T_{a_j} 's, T_{b_j} 's y T_{c_i} 's. Queda probado el paso inductivo en el número de fines.



Como $\text{MCG}(T^2)$ y $\text{MCG}(S_{1,1})$ son generados por finitos Dehn twists sobre curvas cerradas simples que no separan, se sigue del paso inductivo que $\text{PMCG}(S_{1,n})$ lo es también, para todo $n \geq 0$.

Inducción en el género. Dado $g \geq 2$, asumiremos que vale el teorema en el $\text{PMCG}(S_{g-1,n})$ para todo $n \geq 0$, y queremos ver que vale para $\text{PMCG}(S_g) = \text{MCG}(S_g)$.

Fijamos a y b curvas que no separan con $i(a,b) = 1$. El LEMA 5.5 nos dice que $\text{MCG}(S_g)$ es generado por T_a , T_b y el estabilizador

$$\text{MCG}(S_g, a) = \{f \in \text{MCG}(S_g) : f(a) = a\}.$$

Por lo tanto, alcanza probar que $\text{MCG}(S_g, a)$ es generado por finitos Dehn twists sobre curvas cerradas simples que no separan.

Sea $\text{MCG}(S_g, \vec{a})$ el subgrupo de $\text{MCG}(S_g, a)$ cuyos elementos son las clases que preservan la orientación de a . Como $T_bT_a^2T_b$ revierte dicha orientación (PROPOSICIÓN 3.7), representa la coclase no trivial en $\text{MCG}(S_g, a)/\text{MCG}(S_g, \vec{a})$. Observar entonces que, si f es una clase en $\text{MCG}(S_g, a)$ que revierte la orientación de a , entonces $f(T_bT_a^2T_b)^{-1}$ está en $\text{MCG}(S_g, \vec{a})$. Se sigue que $\text{MCG}(S_g, a)$ es generado por $T_bT_a^2T_b$ y $\text{MCG}(S_g, \vec{a})$. Entonces solo resta probar que $\text{MCG}(S_g, \vec{a})$ es generado por finitos Dehn twists sobre curvas cerradas simples que no separan.

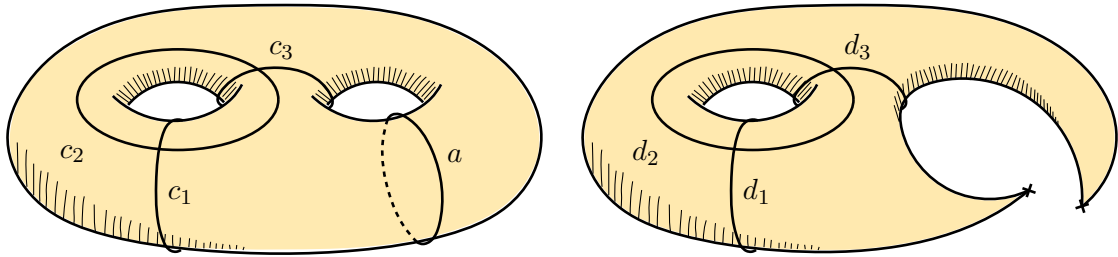
Por la PROPOSICIÓN 3.11, tenemos la sucesión exacta

$$1 \rightarrow \langle T_a \rangle \rightarrow \text{MCG}(S_g, a) \xrightarrow{\text{Cut}} \text{MCG}(S_g - \alpha) \rightarrow 1,$$

donde $S_g - \alpha$ es la superficie obtenida al borrar de S_g un representante α de a . Si restringimos a $\text{MCG}(S_g, \vec{a})$, obtenemos:

$$1 \rightarrow \langle T_a \rangle \rightarrow \text{MCG}(S_g, \vec{a}) \xrightarrow{\text{Cut}} \text{PMCG}(S_g - \alpha) \rightarrow 1.$$

Como $S_g - \alpha$ es homomorfa a $S_{g-1,2}$, vale la hipótesis inductiva, y $\text{PMCG}(S_g - \alpha)$ es generado por finitos Dehn twists sobre curvas cerradas simples que no separan, a quienes llamamos $\{d_i\}$. Como cada clase d_i en $S_g - \alpha$ se puede pensar como una c_i en S_g , y como Cut manda T_{c_i} en T_{d_i} , obtenemos que $\text{MCG}(S_g, \vec{a})$ es generado por T_a y los T_{c_i} . \square



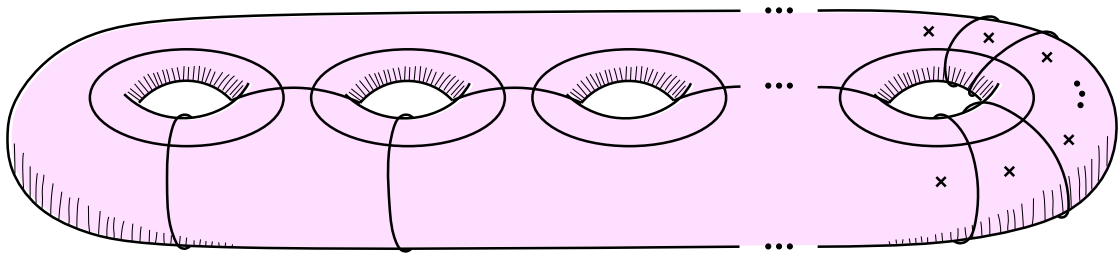
4. SUPERFICIES CON FINES

Para $\text{PMCG}(S_{g,n})$ tenemos también unos generadores explícitos, parecidos a los de Humphries. Estos son los Dehn twist sobre las curvas del dibujo de abajo.

Si queremos generar todo $\text{MCG}(S_{g,p})$, podemos considerar la sucesión exacta

$$1 \rightarrow \text{PMCG}(S_{g,n}) \rightarrow \text{MCG}(S_{g,n}) \rightarrow \Sigma_n \rightarrow 1.$$

Alcanza con tomar un generador de $\text{PMCG}(S_{g,n})$ y agregarle elementos de $\text{MCG}(S_{g,n})$ que se proyecten a generadores de Σ_n para obtener un generador de todo $\text{MCG}(S_{g,n})$. Un generador estándar de Σ_n es el de las $n - 1$ trasposiciones y, como se comentó más arriba, tenemos los *half twist* que se proyectan en ellas. Por lo tanto, tenemos el siguiente corolario del TEOREMA 5.6.



COROLARIO 5.7. Para cualquier $g, n \geq 0$, el grupo $\text{MCG}(S_{g,n})$ es generado por finitos Dehn twists y *half twists*.

5. TIPOS DE MAPPING CLASSES

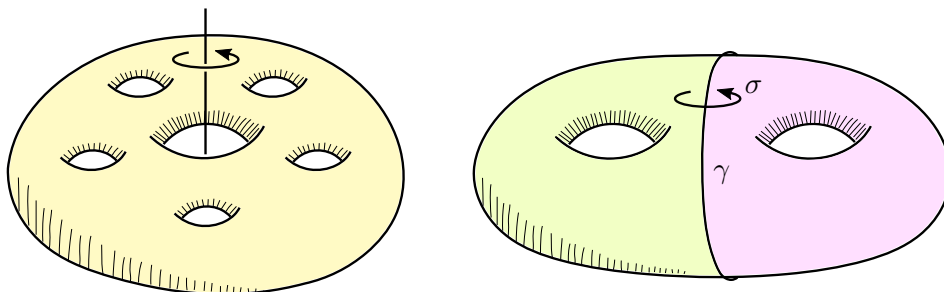
Para terminar, comentaremos sobre la clasificación de Nielsen-Thurston. Esta afirma que toda mapping class cae dentro de alguna de las tres categorías que describimos a continuación. Comentaremos también algunos ejemplos que, para mayor detalle, se pueden encontrar en los capítulos 13 y 14 de la referencia [1].

Clases periódicas. Decimos que $f \in \text{MCG}(S)$ es *periódica* si es de orden finito. Por definición, esto significa que φ^k es isotópico a la identidad, para φ representante de f . Sin embargo, además es un teorema³ el hecho de que existe un representante ψ de f que tiene orden k .

Clases reducibles. Un elemento f del $\text{MCG}(S)$ se dice *irreducible* si admite un *sistema de reducción*. Es decir, un conjunto $\{c_1, \dots, c_n\}$ de clases de isotopía de curvas cerradas simples y esenciales en S tales que $i(c_i, c_j) = 0$ y $\{f(c_i)\} = \{c_i\}$.

Un ejemplo simple puede ser un Dehn twist T_a sobre una clase de curva a : cualquier conjunto $\{c_i\}$ que satisfaga $i(c_i, c_j) = i(c_i, a) = 0$ es un sistema de reducción. Notar que, en ese caso, la mapping class es reducible pero no periódica. Existen también ejemplos de clases que son periódicas pero no reducibles.

El dibujo de la izquierda muestra una mapping class que pertenece a ambas categorías. Otra construcción de elemento reducible que podemos hacer es la siguiente. En $S = S_2$ elegimos una curva γ que separe S en dos subsuperficies S' y S'' . Si elegimos φ' y φ'' homeomorfismos en S' y S'' que fijen γ , inducimos un elemento reducible en S , que incluso podríamos componer con un homeomorfismo σ de S que intercambie los lados de γ .



El *sistema de reducción canónico* para una clase reducible f es la intersección de todos los sistemas de reducción maximales (respecto de la inclusión). Podemos ver que el sistema de reducción canónico de T_a es a . En primer lugar, sabemos que $i(a, b) > 0$ implica $T_a(b) \neq b$ y, por lo tanto, cualquier sistema de reducción de T_a está compuesto de clases disjuntas de a . Se sigue que cualquier sistema de reducción maximal contiene a a . Para ver que no hay más clases que a en la intersección de los maximales, sea b un elemento de algún sistema de reducción. Se puede encontrar una c que cumpla $i(a, c) = 0$ e $i(b, c) > 0$. En ese caso, c es parte de algún sistema de reducción maximal, y este no puede contener a b . Concluimos que b no está en la intersección de los maximales.

³Ver el capítulo 7 de [1].

Clases Pseudo Anosov. Un elemento $f \in \text{MCG}(S)$ se llama *pseudo-Anosov* si existe un par de foliaciones con medida (\mathcal{F}^u, μ_u) y (\mathcal{F}^s, μ_s) en S (con singularidades) que son transversales⁴, un número $\lambda > 1$, y un representante φ de f tales que

$$\varphi \cdot (\mathcal{F}^s, \mu_s) = (\mathcal{F}^s, \lambda^{-1}\mu_s) \text{ y } \varphi \cdot (\mathcal{F}^u, \mu_u) = (\mathcal{F}^u, \lambda\mu_u).$$

Las foliaciones (\mathcal{F}^s, μ_s) y (\mathcal{F}^u, μ_u) se llaman *foliación estable* y *inestable* respectivamente. El mapa φ también se llama *pseudo-Anosov*.

Podemos ver que φ contrae las hojas de la foliación estable y expande las de la inestable. En efecto, dado un arco α de la foliación estable, por definición de la acción de $\text{Homeo}^+(S)$ en el conjunto de foliaciones con medida en S , tenemos que

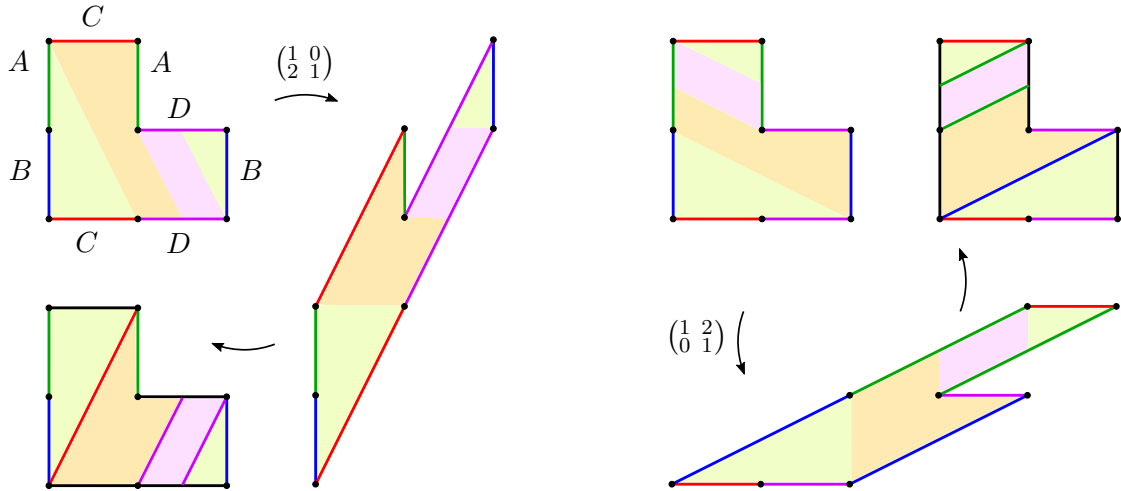
$$\mu_u(\varphi^{-1}(\alpha)) = (\varphi \cdot \mu_u)(\alpha) = \lambda\mu_u(\alpha) \Rightarrow \mu_u(\alpha) = \lambda\mu_u(\varphi(\alpha)).$$

Por lo tanto, la medida de $\varphi(\alpha)$ en relación a la de α verifica $\mu_u(\varphi(\alpha)) = \lambda^{-1}\mu_u(\alpha)$. Análogamente, si β es un arco en la foliación inestable, se tiene $\mu_s(\varphi(\beta)) = \lambda\mu_s(\beta)$.

Para el caso de superficies con borde, se dice que un homeomorfismo es pseudo-Anosov si la restricción a la superficie pinchada obtenida al sacar el borde lo es.

Un ejemplo pseudo-Anosov en el toro T^2 es la clase de un Anosov lineal del toro. Es decir, el homeomorfismo inducido por una matriz $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ con valores propios reales λ y λ^{-1} distintos de uno. En ese caso, cada dirección propia genera una foliación por rectas paralelas en \mathbb{R}^2 que, al proyectar al cociente $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, dan un par de foliaciones transversales con la propiedad de contracción y expansión. Más aún, las hojas de ambas foliaciones son densas en T^2 porque las pendientes de las rectas son irracionales.

También podemos construir un ejemplo en S_2 con matrices de la siguiente manera. Consideramos el polígono con forma de “L” formado por tres cuadrados de lado uno, con los lados identificados como se indica a la izquierda del dibujo. La superficie obtenida al hacer dichas identificaciones es el bitoro.

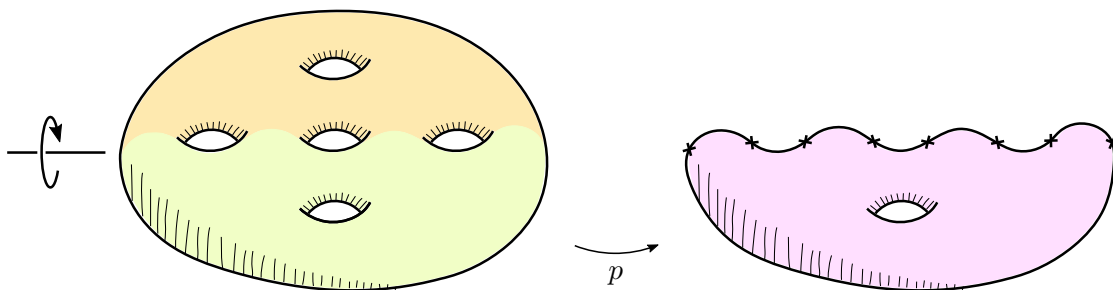


⁴Ver apéndice para más información sobre foliaciones con medida.

Las transformaciones lineales de \mathbb{R}^2 asociadas a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bajan al cociente de este polígono, y su producto da la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, que tiene valores propios $\lambda^\pm = 2 \pm \sqrt{3}$.

Otra forma de construir homeomorfismos pseudo-Anosov en superficies de género $g \geq 2$ es levantando un Anosov del toro a través de un cubrimiento ramificado. Siempre podemos construir un cubrimiento ramificado de grado dos y $2g - 2$ puntos de ramificación, como se ve en el dibujo más abajo.

Como el conjunto de puntos periódicos de un Anosov φ del toro es denso⁵, a menos de tomar una potencia de φ , podemos suponer que φ fija $2g - 2$ puntos. Modificando el cubrimiento ramificado por isotopía, podemos suponer que los puntos de ramificación son fijos del Anosov. Obtenemos así un Anosov φ en el toro pinchado. Resulta que⁶, a menos de tomar una potencia de φ , se puede suponer que φ se levanta a un homeomorfismo $\widehat{\varphi} : S_g \rightarrow S_g$. En este caso, las foliaciones estable e inestable para $\widehat{\varphi}$ son las preimágenes por el cubrimiento p de las foliaciones de φ .



Otro ejemplo pseudo-Anosov es el $\sigma_0 \sigma_1^{-1}$ de la sección del grupo de trenzas.⁷

Un último ejemplo que daremos es la *construcción de Penner*. Sea $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ un conjunto de curvas cerradas simples disjuntas, y sea $B = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ otro tal conjunto. Supongamos que toda curva cerrada simple en S tiene índice de intersección geométrico positivo con algún elemento de $A \cup B$. El resultado de Penner es que cualquier producto de potencias positivas de los twists T_{α_i} y potencias negativas de los T_{β_i} , donde cada α_i y β_i aparece al menos una vez, es pseudo-Anosov.

Ahora sí, el enunciado de Nielsen-Thurston es el siguiente.

TEOREMA 5.8 (CLASIFICACIÓN DE NIELSEN-THURSTON). Sean $g, n \geq 0$. Toda clase $f \in \text{MCG}(S_{g,n})$ es o periódica, o reducible, o pseudo-Anosov. Además, las clases pseudo-Anosov no son ni periódicas ni reducibles.

Notar que, cuando f es reducible, uno puede cortar la superficie en un sistema de reducción y aplicar el teorema anterior a cada una de las componentes. Repitiendo este proceso, uno *reduce* f a finitas partes pseudo-Anosov y finitas partes periódicas en subsuperficies de S .

⁵Ver capítulo 3 de la referencia [9]

⁶Referir a [1].

⁷Ver capítulo 15 de [1].

Apéndice A

FIBRADOS, ISOTOPÍAS Y FOLIACIONES

1. FIBRADOS

Un *fibrado* $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ consiste de tres espacios topológicos E , B y F , y de un mapa $p : E \rightarrow B$ continuo y sobreyectivo que satisface la propiedad de *trivialización local*. Esto último significa que, para todo $x \in B$, existe un abierto $U \subset B$ de x y un homeomorfismo $\Psi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ de forma que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi} & U \times F \\ \downarrow p & \swarrow p_1 & \\ U & & \end{array}$$

siendo p_1 la proyección en la primera coordenada. Llamamos *espacio total* a E , *espacio base* a B , y *fibra* a F . Podemos observar que, como Ψ da un homeomorfismo entre $p^{-1}(x)$ y $p_1^{-1}(x)$, se cumple $p^{-1}(x) \simeq p_1^{-1}(x) \simeq F$, para todo $x \in B$.

2. FIBRADOS DE VECTORES Y ENTORNOS TUBULARES

Sin entrar en los detalles, nos interesa dar una descripción de fibrados de vectores y entornos tubulares¹. Para esto, pensamos en un fibrado con fibra $F = \mathbb{R}^m$. Al homeomorfismo $\Psi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^m$ se le llama *carta*. Un *atlas* Φ es un conjunto de cartas tal que cada vez que (φ, U) y (ψ, V) estén en Φ y $x \in U \cap V$, el homeomorfismo

$$\psi_x \varphi_x^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

es lineal. Acá φ_x denota el mapa $p^{-1}(x) \xrightarrow{\Psi} \{x\} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. También se pide que el mapa $x \mapsto \psi_x \varphi_x^{-1}$ de $U \times V$ en $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ sea continuo. Llamamos *fibrado de vectores* a $\xi = (p, E, B, \Phi)$, donde Φ es un atlas maximal.

Si ξ_0 y ξ_1 son dos fibrados de vectores, un *mapa de fibrado* entre ellos es un mapa $F : E_0 \rightarrow E_1$ que levanta un mapa $f : B_0 \rightarrow B_1$. Por lo tanto, manda fibras en fibras. Cuando cada mapa en las fibras es lineal, decimos que F es un *morfismo de fibrados* (de vectores).

Si M es una variedad C^{r+1} , el fibrado tangente $p : TM \rightarrow M$ es un primer ejemplo de fibrado de vectores: para cada carta $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, definimos $p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^m$ mandando

$$v \in T_x M \mapsto (x, D\varphi_x v) \in U \times \mathbb{R}^m.$$

¹Los detalles están en el capítulo 4 de la referencia [5]

Supongamos ahora que $M \subset V$ es una subvariedad C^{r+1} , y que V tiene una métrica riemanniana C^r . Entonces podemos definir el *fibrado normal* NM en cada fibra como

$$N_x M = \{v \in T_x V : \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in T_x M\}.$$

Un *entorno tubular (normal)* de M es un encaje $f : NM \rightarrow V$ tal que

- $f|_M = \text{id}$, donde M es identificada con la sección cero de NM .
- $f(NM)$ es un entorno abierto de M en V .

Usualmente se refiere al abierto $f(NM)$ como un entorno tubular de M . Notar que si M tiene borde, entonces $f(NM)$ puede ser un entorno abierto de M solo si $\partial M \subset \partial V$.

TEOREMA A.1. Sea $M \subset V$ una subvariedad con $\partial M = \partial V = \emptyset$. Entonces M tiene un entorno tubular en V .

Es útil poder “deslizar” un entorno tubular de una subvariedad en otro, llevando fibras linealmente en fibras. Si K y L son subvariedades, una *isotopía* de K en L es una homotopía de encajes $F_t : K \rightarrow L$. El *track* de F es el encaje $\widehat{F} : K \times I \rightarrow L \times I$

$$(x, t) \mapsto (F_t(x), t)$$

Si $A \subset K$ es tal que $F_t(x) = F_0(x)$ para todo $(x, t) \in A \times I$, entonces F es una isotopía *relativa* a A . Ahora, sean $f_i : NM \rightarrow V$ entornos tubulares de $M \subset V$. Una *isotopía de entornos tubulares* de f_0 a f_1 es una isotopía $F_t : NM \rightarrow V$ relativa a M (la sección cero de NM) tal que

- $F_0 = f_0$.
- $F_1(NM) = f_1(NM)$.
- $f_1^{-1}F_1 : NM \rightarrow NM$ es un isomorfismo de fibrados de vectores.
- $\widehat{F}(NM \times I)$ es abierto en $V \times I$.

TEOREMA A.2. Sea $M \subset V$ una subvariedad con $\partial M = \partial V = \emptyset$. Entonces cualquier par de entornos tubulares de M en V son isotópicos.

3. EXTENSIÓN DE ISOTOPIÁS

Llamamos *isotopía ambiente* a una isotopía de difeomorfismos $F_t : V \rightarrow V$ tal que $F_0 = \text{id}$. Hay una conexión importante entre estas isotopías y campos vectoriales en $V \times I$. Sea $\widehat{F} : V \times I \rightarrow V \times I$ el track de F , cada punto de $V \times I$ pertenece a un único arco $\widehat{F}(\{x\} \times I)$. Los vectores tangentes de estos arcos forman un campo vectorial X_F en $V \times I$ de la forma

$$X_F(y, t) = (H(y, t), 1) \in T_y V \times \mathbb{R} = T_{(y,t)}(V \times I),$$

para cierto mapa $H : V \times I \rightarrow TV$. La isotopía F es el flujo de X_F aplicado a $V \times \{0\}$ y proyectado en V .

La parte horizontal H de X_F es un *campo de vectores temporal* en V . Con esto nos referimos a un mapa $G : V \times I \rightarrow TV$ tal que $G_t(x) \in T_x V$, que también le pedimos $G(\partial V \times I) \subset T(\partial V)$.

Resulta que no todo campo vectorial temporal $G : V \times I \rightarrow TV$ viene de una isotopía y, como estos son fáciles de construir, es útil tener un criterio que garantice que generan

isotopías. Con “generar” nos referimos a que exista $F : V \times I \rightarrow V$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = G(F(x, t), t).$$

TEOREMA A.3. Un campo vectorial temporal de soporte compacto genera una isotopía. En particular, todo campo vectorial temporal en una variedad compacta genera una isotopía.

TEOREMA A.4 (EXTENSIÓN DE ISOTOPÍAS 1). Sea $M \subset V$ una subvariedad compacta y $F : M \times I \rightarrow V$ una isotopía de M . Si $F(M \times I) \subset V - \partial V$ o $F(M \times I) \subset \partial V$, entonces F se extiende a una isotopía ambiente de V de soporte compacto.

TEOREMA A.5 (EXTENSIÓN DE ISOTOPÍAS 2). Sea $U \subset V$ un abierto y $A \subset U$ un compacto. Sea $F : U \times I \rightarrow V$ una isotopía de U tal que $\widehat{F}(U \times I) \subset V \times I$ es abierto. Entonces existe una isotopía ambiente de V con soporte compacto que coincide con F en un entorno de $A \times I$.

4. LA SUCESIÓN EXACTA DE BIRMAN

A los efectos de la prueba del TEOREMA 5.3, lo que nos interesa estudiar es la relación entre los grupos de homotopía π_0 y π_1 de los espacios E , F y B de un fibrado con base conexa por caminos.

Para empezar, notar que $p : E \rightarrow B$ induce un morfismo $p_* : \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$. Por otro lado, identificando $F = p^{-1}(b_0)$, tenemos que la inclusión $i : F \rightarrow E$ induce un mapa $i_* : \pi_0(F, e_0) \rightarrow \pi_0(E, e_0)$. También tenemos un mapa $\partial : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \pi_0(F, e_0)$ que a cada clase $[\alpha]$ en el $\pi_1(B, b_0)$ le asocia la componente conexa de $\tilde{\alpha}(1)$ en F , siendo $\tilde{\alpha} : I \rightarrow E$ un levantado de α que empieza en e_0 .

Supongamos que F y E son grupos topológicos de forma que la identificación en cada fibra $p^{-1}(x) \simeq F$ dada por Ψ es un isomorfismo. En este caso, los π_0 son grupos, y los mapas i_* y ∂ son morfismos. Demostraremos que la siguiente sucesión es exacta²

$$\pi_1(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E, e_0) \rightarrow 1.$$

Veamos que $\text{im}(p_*) \subset \ker(\partial)$. Si $[\alpha]$ está en la imagen de p_* , entonces α es homotópico a un loop que se levanta cerrado; supongamos que α es ese representante. Es decir, existe $\tilde{\alpha} : I \rightarrow E$ empezando y terminando en e_0 . Por definición, el mapa ∂ manda $[\alpha]$ en la componente trivial $[e_0]$ de F . Recíprocamente, si $[\alpha] \in \ker(\partial)$, entonces α se levanta a un camino $\tilde{\alpha} : I \rightarrow E$ empezando en e_0 y terminando en un f que está en la componente de e_0 en F . Concatenando $\tilde{\alpha}$ con un camino en F de f a e_0 obtenemos un loop en E que se proyecta a un loop homotópico a α . Esto prueba la otra inclusión $\text{im}(p_*) \supset \ker(\partial)$.

Seguimos con $\text{im}(\partial) \subset \ker(i_*)$. Si $[f] = \partial([\alpha])$, a menos de cambiar el representante de $[f]$, existe $\tilde{\alpha} : I \rightarrow E$ empezando en e_0 y terminando en f . Pero entonces, las componentes conexas de e_0 y de f en E son la misma, lo que prueba $i_*([f]) = [e_0]$. Para ver que $\text{im}(\partial) \supset \ker(i_*)$, sea $[f] \in \ker(i_*)$. Como f y e_0 están en la misma componente conexa de E , existe $\tilde{\alpha} : I \rightarrow E$ empezando en e_0 y terminando en f . Entonces $[f]$ es la imagen de la clase de $\alpha(t) = p(\tilde{\alpha}(t))$ por ∂ .

²Referencia: Teorema 4.41 de [3]

La sobreyectividad de i_* viene de que B es conexa por caminos. En efecto, existe un camino $\alpha : I \rightarrow B$ de b_0 a $p(e)$ para todo $[e] \in \pi_0(E, e_0)$. Dicho camino se levanta a un $\tilde{\alpha} : I \rightarrow E$ que empieza en e , y que necesariamente termina en un f de $F = p^{-1}(b_0)$. Entonces el mapa i_* manda $[f]$ en $[e]$.

TEOREMA A.6. Sea $\text{Homeo}^+(S, x)$ el subgrupo de $\text{Homeo}^+(S)$ conformado por los homeomorfismos que fijan x . Entonces la sucesión

$$\text{Homeo}^+(S, x) \rightarrow \text{Homeo}^+(S) \xrightarrow{p} S$$

es un fibrado, siendo $p : \text{Homeo}^+(S) \rightarrow S$ la evaluación en x , $\phi \mapsto \phi(x)$.

DEMOSTRACIÓN. Hay que probar que todo $y \in S$ tiene un entorno U tal que $p^{-1}(U) = \{\phi \in \text{Homeo}^+(S) : \phi(x) \in U\}$ es homeomorfo a $U \times \text{Homeo}^+(S, x)$ por un Ψ tal que $p_1\Psi = p$.

Empezamos por fijar un entorno U de x homeomorfo a un disco. Dado $u \in U$ podemos elegir $\varphi_u \in \text{Homeo}^+(U)$ tal que $\varphi_u(x) = u$, y de forma que φ_u varíe continuamente como función de u . Consideramos $\Psi : U \times \text{Homeo}^+(S, x) \rightarrow p^{-1}(U)$ dado por

$$(u, \psi) \mapsto \varphi_u\psi.$$

De la definición de $p^{-1}(U)$, es claro que $\varphi_u\psi$ está en él. Además, es una cuenta chequear que el mapa $p^{-1}(U) \rightarrow U \times \text{Homeo}^+(S, x)$ definido a continuación es el inverso de Ψ :

$$\psi \mapsto (\psi(x), \varphi_{\psi(x)}^{-1}\psi).$$

Veamos que Ψ es continuo. Sea $\mathcal{V}(K, W)$ un entorno abierto de $\varphi_u\psi$ en la topología compactoabierto, siendo K y W respectivamente un compacto y un abierto de S . Sea X un abierto de S de clausura compacta tal que $(\varphi_u\psi)(K) \subset X \subset W$. Entonces $Y = \varphi_u^{-1}(X)$ es un abierto de clausura compacta contenido en $\varphi_u^{-1}(W)$, y que además contiene a $\psi(K) = \varphi_u^{-1}((\varphi_u\psi)(K))$. En particular, ψ está en el abierto $\mathcal{V}(K, Y)$. Como $\mathcal{V}(\bar{Y}, W)$ es un entorno abierto de φ_u , y como el mapa $v \mapsto \varphi_v$ varía continuamente, existe $V \subset U$ entorno de u tal que φ_v está en $\mathcal{V}(\bar{Y}, W)$ para todo $v \in V$. Se sigue que $V \times \mathcal{V}(K, Y)$ es un abierto de (u, ψ) tal que todo (v, ϕ) en él cumple

$$\phi(K) \subset Y \subset \bar{Y} \Rightarrow \varphi_v(\phi(K)) \subset W \Rightarrow (\varphi_v\phi) \in \mathcal{V}(K, W),$$

y esto prueba la continuidad de Ψ en el punto (u, ψ) .

Toca ver también que Ψ^{-1} es continuo. El mapa es continuo en la primera coordenada, y la continuidad en la segunda es parecida a la continuidad de Ψ .

Tenemos entonces la existencia de $U \subset S$ para el punto $x \in S$. Luego, para cualquier otro punto $y \in S$, podemos simplemente elegir un homeomorfismo ξ de S que lleve x a y , y obtenemos que $p^{-1}(\xi(U))$ es homeomorfo a $p^{-1}(U) \simeq U \times \text{Homeo}^+(S, x)$ vía $\psi \mapsto \xi\psi$. \square

Ahora probamos el teorema de la sucesión exacta de Birman.

DEMOSTRACIÓN. (TEOREMA 5.3) Asociado al fibrado del teorema anterior, tenemos la sucesión exacta de grupos de homotopía

$$\pi_1(\text{Homeo}^+(S)) \xrightarrow{p_*} \pi_1(S) \xrightarrow{\partial} \pi_0(\text{Homeo}^+(S, x)) \xrightarrow{i_*} \pi_0(\text{Homeo}^+(S)) \rightarrow 1.$$

El punto base de S es x , y el de $\text{Homeo}(S)$ y $\text{Homeo}^+(S, x)$ es la identidad.

Es un teorema³ que si $\chi(S) < 0$, entonces la componente conexa de la identidad en $\text{Homeo}^+(S)$ es simplemente conexa. Obtenemos entonces que el $\pi_1(\text{Homeo}^+(S))$ es trivial. La sucesión queda

$$1 \rightarrow \pi_1(S) \xrightarrow{\partial} \pi_0(\text{Homeo}^+(S, x)) \xrightarrow{i_*} \pi_0(\text{Homeo}^+(S)) \rightarrow 1.$$

Además, recordar que por definición tenemos $\pi_0(\text{Homeo}^+(S)) = \text{MCG}(S_{g,n})$ y que $\pi_0(\text{Homeo}^+(S, x)) \simeq \text{MCG}^*(S_{g,n+1})$. Entonces la sucesión es

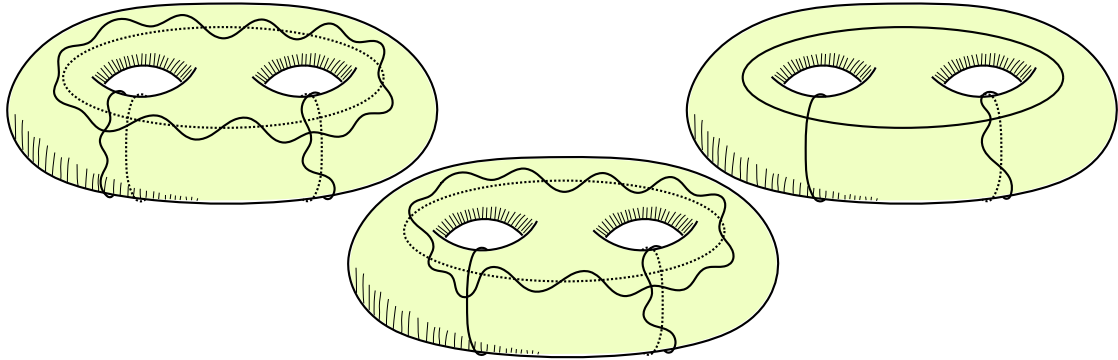
$$1 \rightarrow \pi_1(S_{g,n}) \rightarrow \text{MCG}^*(S_{g,n+1}) \rightarrow \text{MCG}(S_{g,n}) \rightarrow 1.$$

Por último, veamos que las flechas son las de *Push* y *Forget*. Dijimos que el mapa $\pi_1(S_{g,n}) \rightarrow \text{MCG}^*(S_{g,n+1})$ se obtiene levantando un representante $\alpha : I \rightarrow S$ a una curva del espacio total $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \text{Homeo}^+(S)$, y asociando $[\alpha]$ con $\varphi_\alpha = \tilde{\alpha}(1)$. La propia $\tilde{\alpha}$ es una homotopía $H_t = \tilde{\alpha}(t)$ entre $H_0 = \text{id}$ y $H_1 = \varphi$ tal que $H_t(x) = p(H_t) = \alpha(t)$. Por lo tanto, $\varphi = \mathcal{P}ush(\alpha)$. Por otro lado, la flecha $\text{MCG}^*(S_{g,n+1}) \rightarrow \text{MCG}(S_{g,n})$ es la inducida por la inclusión de $\text{Homeo}^+(S, x)$ en $\text{Homeo}^+(S)$, que es *Forget*. \square

5. EL MÉTODO DE ALEXANDER

Para llenar los detalles de la prueba del método de Alexander, damos una prueba del lema que se usó.

DEMOSTRACIÓN. (LEMA 2.8) La idea es la siguiente. Empezamos por extender la isotopía de γ'_1 a γ_1 a una isotopía $H_t : S \rightarrow S$. Por comodidad, llamaremos γ'_i a $H_1(\gamma'_i)$ para todo i . Notar que, como H_1 es un homeomorfismo, la nueva colección $\gamma'_1, \dots, \gamma'_n$ sigue cumpliendo las propiedades, y que $\gamma'_1 = \gamma_1$. El siguiente paso será construir una nueva isotopía H_t de toda la superficie que lleve γ'_2 a γ_2 sin mover γ_1 . En este punto, habremos logrado llevar $\gamma'_1 \cup \gamma'_2$ en $\gamma_1 \cup \gamma_2$. Luego, procedemos de la misma forma con γ'_3 , con γ'_4 , etc. El dibujo de abajo ilustra este procedimiento, donde las γ_i 's son las curvas punteadas, y las γ'_i 's son las otras.

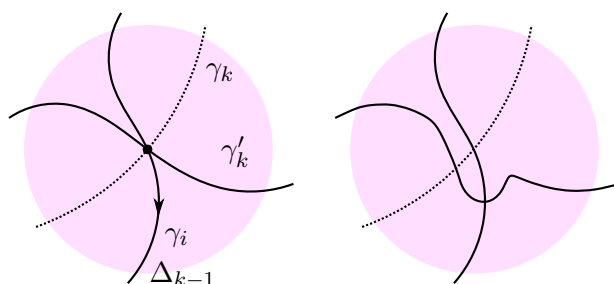


Así que supongamos que existe una isotopía H_t de S que lleva γ'_i a γ_i para todo $1 \leq i \leq k-1$, y construyamos una que lleve $\gamma'_k := H_1(\gamma'_k)$ a γ_k sin mover el conjunto

³Referir a [10]

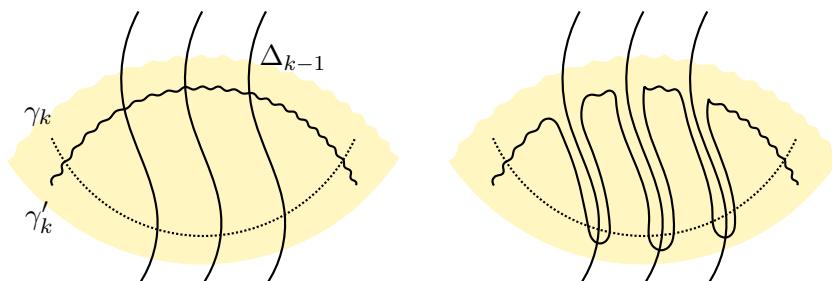
$\Delta_{k-1} = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_{k-1}$. A partir de ahora haremos varias isotopías, y siempre las haremos dejando Δ_{k-1} invariante. Lo primero que buscaremos es una que deje a γ_k y γ'_k disjuntas.

Por la hipótesis en las tripletas $\gamma'_i, \gamma'_j, \gamma'_k$, y por el hecho de que Δ_{k-1} coincide con $\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_{k-1}$, tenemos que γ'_k es disjunta de los vértices de Δ_{k-1} . En cada punto p de la intersección $\gamma_k \cap \gamma'_k \cap \Delta_{k-1}$ veremos cómo hacer una isotopía a lo largo de la arista que deshaga dicha intersección. La hipótesis de que γ_k esté en posición minimal con cada curva de Δ_{k-1} nos da que la intersección anterior es finita. Así que podemos tomar un disco D centrado en p que lo aisle de las otras intersecciones y de las aristas de Δ_{k-1} que no están involucradas. También podemos elegir D de forma que la curva de Δ_{k-1} involucrada cortada con D sea un único arco. Esto último también lo pedimos para γ_k y γ'_k . Hacemos una isotopía F_t que mueva p a lo largo de γ_i hasta un punto distinto, y que tenga soporte compacto dentro del disco.



El siguiente paso es hacer una isotopía cuyo soporte sea disjunto de un entorno de Δ_{k-1} , y que perturbe γ'_k para que atravesase transversalmente a γ_k . Si γ_k y γ'_k no son disjuntas, entonces forman un bígono D . Afirmamos que si Δ_{k-1} y D se cortan, entonces la intersección es una colección de arcos disjuntos que conectan γ_k con γ'_k . Para ver esto, notar en primer lugar que ninguna arista de Δ_{k-1} pasa por los vértices del bígono, dado que desarmamos ese tipo de intersecciones. Además, las aristas de Δ_{k-1} están en posición minimal con γ_k y con γ'_k , por lo que no puede haber arcos conectando γ_k (o γ'_k) consigo misma (serían bígono). Por último, no puede haber dos curvas γ_i y γ_j de Δ_{k-1} que se corten en el interior del bígono porque esto implicaría que γ_i, γ_j y γ_k violen la condición en las tripletas. En otras palabras, esto último significa que no hay vértices en D .

Ahora podemos empujar γ'_k a lo largo de los arcos de Δ_{k-1} , como en el dibujo. Si repetimos esto en cada bígono, llegamos a que los bígono formados entre γ'_k y γ_k son disjuntos de Δ_{k-1} , y los desarmamos sin mover dicho conjunto.

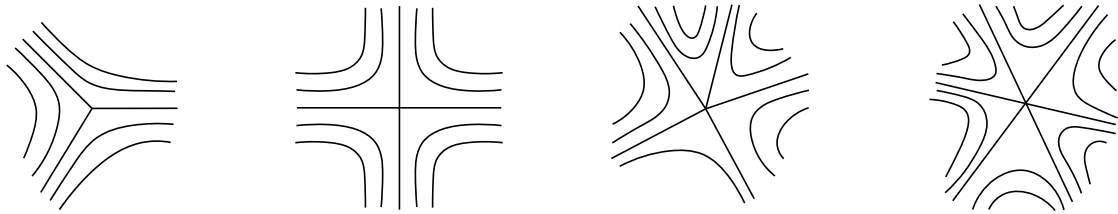


Finalmente, obtenemos γ'_k disjunta de γ_k . Entonces γ_k y γ'_k son borde de un anillo (PROPOSICIÓN 1.5) o un disco, dependiendo de si γ_k y γ'_k son curvas cerradas simples o arcos simples. La intersección de Δ_{k-1} con esta región, si no es vacía, es una colección de arcos disjuntos conectando γ_k con γ'_k (mismo argumento que antes). Hacemos una isotopía que lleve γ'_k a γ_k sin mover Δ_{k-1} y terminamos. □

6. FOLIACIONES CON MEDIDA

Una *foliación singular* \mathcal{F} en una superficie S es una descomposición de S en una unión disjunta de subconjuntos de S , llamados *hojas* de \mathcal{F} , y un conjunto de puntos de S , llamados *puntos singulares*, tales que:

- Para todo punto no singular $p \in S$ hay una carta suave de un entorno de p a \mathbb{R}^2 que manda hojas a segmentos horizontales. Los cambios de carta entre dos de estas cartas llevan rectas horizontales en rectas horizontales, es decir, son mapas suaves de la forma $(x, y) \mapsto (f(x, y), g(y))$.
- Para todo punto singular $p \in S$ hay una carta suave de un entorno de p a \mathbb{R}^2 que manda hojas a conjuntos como el de la figura.



Decimos que dos foliaciones son *transversales* si sus hojas son transversales afuera de las singularidades; en particular, deben tener el mismo conjunto de singularidades.

Dada una foliación \mathcal{F} , nos interesa dar una medida definida en los arcos transversales a la foliación. Un arco se dice *transversal* a \mathcal{F} si no pasa por los puntos singulares y es localmente una sección de la foliación en todos los puntos de su interior. Una *isotopía que preserva hojas* desde un arco α hasta uno β es un mapa $H : I \times I \rightarrow S$ tal que

- $H(I \times \{0\}) = \alpha$ y $H(I \times \{1\}) = \beta$.
- $H(I \times \{t\})$ es transversal a \mathcal{F} , para todo $t \in I$.
- $H(\{s\} \times I)$ está contenido en una sola hoja, para todo $s \in I$.

Una *medida transversal* μ para \mathcal{F} es una función que asigna un número positivo a cada arco transversal a \mathcal{F} , y que es invariante bajo isotopías que preservan hojas. Una *foliación con medida* (\mathcal{F}, μ) es una foliación equipada con una medida transversal.

La acción de los homeomorfismos. un homeomorfismo $\varphi \in \text{Homeo}(S)$ actúa en el conjunto de foliaciones con medida mediante

$$\varphi \cdot (\mathcal{F}, \mu) = (\varphi(\mathcal{F}), (\varphi \cdot \mu)) \text{ donde } (\varphi \cdot \mu)(\alpha) = \mu(\varphi^{-1}(\alpha)).$$

Bibliografía

- [1] Farb, Benson and Margalit, Dan. A Primer on Mapping Class Groups, Princeton: Princeton University Press, 2011.
- [2] Przytycki, P., & Sisto, A. (2015). A note on acylindrical hyperbolicity of mapping class groups. arXiv preprint arXiv:1502.02176.
- [3] Hatcher, A. (2005). Algebraic topology.
- [4] Buser, P. (2010). Geometry and spectra of compact Riemann surfaces. Springer Science & Business Media.
- [5] Hirsch, M. W. (2012). Differential topology (Vol. 33). Springer Science & Business Media.
- [6] Massart, D. (2022). A short introduction to translation surfaces, Veech surfaces, and Teichmüller dynamics. In Surveys in Geometry I (pp. 343-388). Springer, Cham.
- [7] Bowditch, B. (2014). Uniform hyperbolicity of the curve graphs. Pacific journal of mathematics, 269(2), 269-280.
- [8] Wilton, H. (2021). Mapping class groups.
- [9] Wen, L. (2016). Differentiable dynamical systems (Vol. 173). American Mathematical Soc.
- [10] Hamstrom, M. E. (1966). Homotopy groups of the space of homeomorphisms on a 2-manifold. Illinois Journal of Mathematics, 10(4), 563-573.