TRABAJO MONOGRÁFICO

Difeomorfismos establemente ergódicos en variedades de dimensión 3.

Por: Natalia Inés McAlister Caffarel

Orientadora: Dra. María Alejandra Rodríguez-Hertz

Licenciatura en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Uruguay

Julio de 2021

Resumen

En este trabajo se estudian los conceptos básicos de la teoría de Pesin, así como los resultados necesarios para demostrar el siguiente:

Teorema. *Genéricamente en* $\mathrm{Diff}^1_m(M^3)$*, si existe una foliación* W f*-invariante, expansora o contractora y minimal, entonces* f *es establemente ergódica.*

Este teorema fue publicado en 2020 por G. Núñez y J. Rodríguez-Hertz junto con la conjetura de que genéricamente si un difeomorfismo tiene descomposición dominada, entonces hay una foliación minimal contractora o expansora. Si esta conjetura fuera cierta el teorema prueba, para variedades de dimensión 3, una conjetura planteada en 2012: Genéricamente, en $\mathrm{Diff}^1_m(M)$ descomposición dominada implica ergodicidad estable.

Índice

1. Introducción **5**

2. Preliminares **7**

3. Resultado principal **12**

1. Introducción

Supongamos que queremos contar cuantos peces hay en una laguna. El método de captura y recaptura consiste en capturar cierta cantidad de peces, digamos mil, etiquetarlos y devolverlos a su hábitat. Dejamos pasar un tiempo y volvemos a capturar mil peces. De esos mil peces algunos estaran etiquetados. Si sabemos que los peces se mezclan bien en toda la laguna la cantidad de etiquetados en esta segunda captura nos dará una estimación de la población total. Si por ejemplo los etiquetados son 10, tenemos el 1 % de la población total etiquetada y recordando que incialmente etiquetamos mil, la poblacion total seria de 100.000 peces.

El concepto de ergodicidad (Ver Definición 2.0.17) surge de la necesidad de establecer que significa "mezclarse bien", y es la idea de que un punto eventualmente recorre la totalidad del espacio.

La rotación de ángulo $\theta \in [0, 2\pi]$ en $\mathbb{S}^1$ nos da un ejemplo de difeomorfismo ergódico si θ es un número irracional. Si en cambio θ fuera racional, la rotación no es un difeomorfismo ergódico. Se tiene entonces que en un C^1-entorno podemos tener tanto mapas ergódicos como no ergódicos.

Ejemplos como el anterior motivan la definición de difeomorfismos establemente ergódicos: mapas con un C^1-entorno $\mathcal{U} \in \mathrm{Diff}^1_m(M)$ tal que todos los elementos de $\mathcal{U} \cap C^2(M)$ son ergódicos.

En 1967 Anosov y Sinai probaron que los difeomorfismos de Anosov son establemente ergódicos ([AS67]) y este fue el único ejemplo conocido de difeomorfismos establemente ergódicos hasta 1994. En ese año, Grayson, Pugh y Shub encontraron un ejemplo no hiperbólico ([GPS94]) y se empezó a buscar condiciones que aseguren la estabilidad ergódica.

En 1995, Pugh y Shub plantearon que "un poquito de hiperbolicidad contribuye en gran medida a garantizar estabilidad ergódica", y conjeturaron que los difeomorfismos establemente ergódicos son C^r-densos en el espacio de los parcialmente hiperbólicos ([PS96]).

Esta conjetura fue probada para $r = \infty$ cuando el subespacio central tiene dimension 1 por F. Rodriguez-Hertz, J. Rodriguez-Hertz y R. Ures en 2008 ([HHU08]). En 2016, Avila, Crovisier y Wilkinson demostraron la conjetura para $r = 1$ en [ACW16].

En 2004, A. Tahzibi en [Tah04] introduce un ejemplo de un difeomorfismo establemente ergódico que no es parcialmente hiperbólico.

Según Pugh y Shub ''un poquito de hiperbolicidad'' alcanza para tener estabilidad ergódica, es natural entonces preguntarse que tan poca hiperbolicidad se necesita. El ejemplo de Tahzibi dejó en evidencia que la condición de hiperbolicidad parcial no alcanza para garantizar estabilidad ergódica. Sin embargo, este ejemplo tiene descomposición dominada (ver Definicion 2.0.5).

En este contexto, en 2012 J. Rodriguez-Hertz conjetura que genéricamente en $\mathrm{Diff}^1_m(M)$ tener descomposición dominada implica ser establemente ergódico en [Her12]. De hecho, Arbieto, Matheus y Teixeira probaron que todos los difeomorfismos establemente ergódicos tienen descomposición dominada.

En este trabajo monográfico se estudia el siguiente resultado publicado en 2020 por G. Nuñez y J. Rodriguez-Hertz:

Teorema. *Genéricamente en* $\mathrm{Diff}^1_m(M^3)$*, si existe una foliación* W f*-invariante, expansora o contractora y minimal, entonces* f *es establemente ergódica.*

Este resultado es parte de un artículo titulado *Minimality and stable Bernoulliness* ([NH20]). Además, en este artículo las autoras conjeturan que genéricamente si un difeomorfismo que preserva volumen tiene descomposición dominada, entonces hay una foliación minimal contractora o expansora. Si esta conjetura es cierta, con el teorema se obtiene que es cierta la conjetura postulada previamente para dimensión 3: Genéricamente, si un difeomorfismo tiene descomposición dominada, entonces es establemente ergódico.

2. Preliminares

Sea M una variedad Riemanniana y μ una medida suave.

A continuación se definen algunos conceptos y se exponen resultados que serán de utilidad más adelante.

Definición 2.0.1 (Exponentes de Lyapunov). Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo C^1. Dado $v \in T_xM$ se define el exponente de Lyapunov de v como

$$\lambda(x, v) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} log||Df^n(x)v||$$

Se define además $E_\lambda(x)$ como el subespacio de T_xM formado por todos los vectores $v \in T_xM$ tales que su exponente de Lyapunov es λ.

Proposición 2.0.2. *Los exponentes de Lyapunov cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\lambda(x, \alpha v) = \lambda(x, v)$
2. $\lambda(x, u + v) \leq max\{\lambda(x, u), \lambda(x, v)\}$
3. *Si* $\lambda(x, u) \neq \lambda(x, v)$, *entonces* $\lambda(x, u + v) = max\{\lambda(x, u), \lambda(x, v)\}$

Definición 2.0.3 (Punto regular). Dado un difeomorfismo $f : M \to M$, decimos que un punto $x \in M$ es regular si posee finitos exponentes de Lyapunov $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_m$ tales que $T_xM = E_1(x) \bigoplus E_2(x) \bigoplus ...E_m(x)$, donde E_j es el subespacio de los vectores de exponente de Lyapunov λ_j, $\forall j = 1, ..., m$. Observamos que si x es un punto regular, $E_j(x)$ y $\lambda_j(x)$ son unicos.

Teorema 2.0.4 (Oseledets). *Sea M una variedad compacta y $f : M \to M$ un difeomorfismo C^1. Entonces existe un conjunto $\mathcal{R}$ invariante de medida total y para cada $\epsilon > 0$ existe una función $C_\epsilon : \mathcal{R} \to (1, +\infty)$ medible Borel tal que $\forall x \in \mathcal{R}$, $v \in T_xM$ y $n \in \mathbb{Z}$ se tiene:*

1. $T_xM = \bigoplus_\lambda E_\lambda(x)$ *(Descomposición de Oseledets)*
2. $\frac{1}{C_\epsilon(x)} e^{(\lambda-\epsilon)n}||v|| \leq ||Df^n(x)v|| \leq C_\epsilon(x)e^{(\lambda+\epsilon)n}||v||$, $\forall v \in E_\lambda(x)$.
3. $C_\epsilon(f(x)) \leq e^\epsilon C_\epsilon(x)$.
4. $\angle(E_\lambda(x), E_\gamma(x)) \geq \frac{1}{C_\epsilon(x)}, \forall \lambda \neq \gamma$.

Definición 2.0.5 (Descomposición dominada). Decimos que la descomposición $T_xM = E_1(x) \bigoplus E_2(x) \bigoplus ...E_m(x)$ es dominada si para todo $i < j$, los vectores unitarios $v_i \in E_i(x)$ y $v_j \in E_j(x)$ cumplen que $|Dfv_i| < |Dfv_j|$.

Definición 2.0.6 (Hiperbolicidad). Decimos que un mapa $f : M \to M$ es hiperbólico si tiene descomposición dominada y $\exists k < n$ tal que para todo $i < k$ $|Dfv_i| < 1$ si $v_i \in E_i(x)$ es unitario y para todo $i \geq k$ $|Dfv_i| > 1$ si $v_i \in E_i(x)$ es unitario.

Definición 2.0.7 (Hiperbolicidad parcial). Decimos que $f : M \to M$ es parcialmente hiperbólico si tiene descomposición dominada y existen $k \neq l \leq n$ tal que para todo $i \leq k$, $|Dfv_i| < 1$ si $v_i \in E_i(x)$ es unitario y para todo $i \geq l$ $|Dfv_i| > 1$ si $v_i \in E_i(x)$ es unitario. Le llamamos subespacio central a $E_{k+1}(x) \bigoplus ... \bigoplus E_{l-1}(x)$.

Definición 2.0.8 (Hiperbolicidad no uniforme). Se define $Nuh(f) = \{x \in M \text{ t.q. } \lambda(x, v) \neq 0, \forall v \neq 0 \in T_xM \ \}$.
Si $Nuh(f) \circeq M$ decimos que f es no uniformemente hiperbólica.

Definición 2.0.9. Sean $f : M \to M$ un difeomorfismo, $x \in M$ y $\epsilon > 0$. Se definen las variedades estable local, inestable local, estable e inestable de la siguiente manera:

- <u>Variedad estable local:</u>
  $W^s_\epsilon(x) = \{y \in M / d(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon, \forall n \geq 0\}$
- <u>Variedad inestable local:</u>
  $W^u_\epsilon(x) = \{y \in M / d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \epsilon, \forall n \geq 0\}$
- <u>Variedad estable:</u>
  $W^s(x) = \{y \in M / \lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\}$
- <u>Variedad inestable:</u>
  $W^u(x) = \{y \in M / \lim_{n\to\infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\}$

Definición 2.0.10. (Variedades estable e inestable de Pesin) Sean $f : M \to M$ un difeomorfismo, $x \in M$ y $\epsilon > 0$. Se definen

- <u>Variedad estable local de Pesin:</u>
  $\widetilde{W^s_\epsilon}(x) = \{y \in M / \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon, \forall n \geq 0\}$

- Variedad inestable local de Pesin:
$\widetilde{W^u_\epsilon}(x) = \{y \in M / \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < \epsilon, \forall n \geq 0\}$
- Variedad estable de Pesin:
$\widetilde{W^s}(x) = \{y \in M / \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log d(f^{n}(x), f^{n}(y)) < 0\}$
- Variedad inestable de Pesin:
$\widetilde{W^u}(x) = \{y \in M / \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < 0\}$

Teorema 2.0.11 (De la variedad estable de Pesin). *Si Λ es un conjunto hiperbólico entonces:*

1. *$\widetilde{W^u_\epsilon}(x)$ y $\widetilde{W^s_\epsilon}(x)$ son discos de dimensión s y u respectivamente.*
2. *$T_x\widetilde{W^u_\epsilon}(x) = E^u_x$, $T_x\widetilde{W^s_\epsilon}(x) = E^s_x$*
3. *Los mapas $x \to \widetilde{W^u_\epsilon}(x)$ y $x \to \widetilde{W^s_\epsilon}(x)$ son continuos.*

Definición 2.0.12 (Conjunto hiperbólico). Sea M una variedad compacta, $f : M \to M$ un difeomorfismo, sea $\Lambda = \{x \in M : x \text{ es regular}\}$. Decimos que Λ es hiperbólico para f sii:

1. $f(\Lambda) = \Lambda$
2. $T_\Lambda M = E^s_\Lambda \bigoplus E^u_\Lambda$. Le llamaremos subespacio estable a E^s_Λ y subespacio inestable a E^u_Λ.
3. $Df(x)E^s_x = E^s_{f(x)}$ y $Df(x)E^u_x = E^u_{f(x)}$
4. Existe $c > 0$, $\Lambda > 0$ tales que:
$||Df^n(x)v^s|| \leq ce^{-\lambda n}||v^s||, \forall v^s \in E^s_x, \forall n \geq 0$
$||Df^{-n}(x)v^u|| \leq ce^{-\lambda n}||v^u||, \forall v^u \in E^u_x, \forall n \geq 0$

Definición 2.0.13 (Punto periódico). Dada $f \in \text{Diff}(M)$ y $p \in M$, decimos que p es un punto periódico si $\exists\, n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(p) = p$. Denotamos el conjunto de los puntos periódicos de f como $Per(f)$.

Definición 2.0.14 (Punto periódico hiperbólico). Un punto periódico $p \in M$ se dice hiperbólico si su órbita es un conjunto hiperbólico y denotamos $Per_H(f) = \{p \in M \ / \text{ p es periódico e hiperbólico para f}\}$

Definición 2.0.15 (Clase homoclínica ergódica). Dado $p \in Per_H(f)$ se define la clase homoclínica ergódica estable asociada a p como

$$Ehc^+(p) := \{x \in \mathcal{R} : W^s(x) \pitchfork W^u(o(p)) \neq \emptyset\}$$

Análogamente, se define la clase homoclínica ergódica inestable asociada a p como

$$Ehc^-(p) := \{x \in \mathcal{R} : W^u(x) \pitchfork W^s(o(p)) \neq \emptyset\}$$

Definimos además la clase homoclínica ergódica asociada a p como

$$Ehc = Ehc^+ \cap Ehc^-$$

Observación 2.0.16. *$Ehc^+(p)$ es f-invariante y s-saturado.*
Es decir, $f(Ehc^+(p)) \subset Ehc^+(p)$ y si $x \in Ehc^+(p)$, entonces $W^s(x) \subset Ehc^+(p)$.

Definición 2.0.17 (Ergodicidad). Sea (M, $\mathcal{A}$, μ) un espacio de probabilidad y $f : M \to M$ una función continua que preserva la medida μ. Decimos que el sistema es ergódico si $\forall A$ medible tal que $f^{-1}(A) \mathrel{\mathring{=}} A$, se tiene que $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$.

Definición 2.0.18 (Ergodicidad estable). Decimos que $f : M \to M \in \mathrm{Diff}^1_m(M)$ es establemente ergódica si $\exists\ \mathcal{U}(f) \subset \mathrm{Diff}^1_m(M)$ tal que $\forall g \in \mathcal{U}(f) \cap \mathrm{Diff}^2_m(M)$, g es ergódica.

Observación 2.0.19. *f puede ser establemente ergódica y no ser ergodica. Sin embargo, en un conjunto residual se cumple que los difeomorfismos establemente ergódicos son ergódicos.*

Teorema 2.0.20 ([AS67]). *Si $f \in \mathrm{Diff}^1_m(M)$ es hiperbólica, entonces es establemente ergódica.*

Teorema 2.0.21 (Criterio de ergodicidad ([HHTU11])). *Sean $f \in \mathrm{Diff}^{1+\alpha}_m(M)$, m medida suave y $p \in Per_H(f)$. Entonces, si $m(Ehc^+(p)) > 0$, $m(Ehc^-(p)) > 0$ se tiene*

1. *$Ehc^+(p) \mathrel{\mathring{=}} Ehc^-(p) \mathrel{\mathring{=}} Ehc(p)$.*
2. *$f|_{Ehc(p)}$ es ergódica*
3. *$f|_{Ehc(p)}$ es no uniformemente hiperbólico*

Teorema 2.0.22 ([Mañ82], [Boc02], [Her12], [ACW16])**.** *Genéricamente, en* $\mathrm{Diff}^1_m(M)$ *o bien todos los exponentes de Lyapunov son 0 ctp, o bien*

1. $Nuh(f) \triangleq M$
2. f *es ergódica*
3. f *tiene descomposición de Oseledets dominada* $TM = E^- \oplus E^+$
4. *Existe un punto periódico hiperbólico* q *de índice inestable* $u(q) = dim(E^+)$ *tal que* $Ehc(q) \triangleq M$*.*

Lema 2.0.23 ([AB12])**.** *Para una* $f \in \mathrm{Diff}^1_m(M)$ *genérica, si* q *es el punto periódico hiperbólico del Teorema 2.0.22, para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* C^1*-entorno* $\mathcal{U}(f)$ *de* f *tal que para todo* C^2*-difeomorfismo* g *en* $\mathcal{U}(f)$ *se tiene que* $m(Ehc_g(q_g)) > 1 - \epsilon$*, donde* q_g *es la continuación analítica de* q*.*

Teorema 2.0.24 ([HHU08], [ACW17])**.** C^1*-genéricamente, si* f *es un difeomorfismo parcialmente hiperbólico que preserva volumen, entonces* f *es establemente ergódico.*

Teorema 2.0.25 ([DPU99])**.** *Genéricamente,* f *es parcialmente hiperbólica o existe un punto periódico hiperbólico* p *con índice inestable* $u(p) = 2$ *y valores propios complejos.*

Observación 2.0.26. *El contrarrecíproco del teorema anterior indica que, genéricamente, si* f *cuenta con un punto periódico hiperbólico* p *con índice inestable 2 y valores propios complejos, entonces* f *no es parcialmente hiperbólica.*

3. Resultado principal

Proposición 3.0.1. *Sean* $f \in \mathrm{Diff}^1_m(M)$ *y* W *una foliación* f*-invariante expansiva y minimal tal que*

1. *Existe un subfibrado* F *de* TM Df*-invariante tal que* $TM = F \oplus_< TW$ *es una descomposición dominada.*

2. *Existe un punto periódico hiperbólico* p_f *de índice inestable* $u(p_f) = dim(TW)$ *y un* C^1*-entorno* $\mathcal{U}(f) \subset \mathrm{Diff}^1_m(M)$ *tal que* $\forall g \in \mathcal{U}(f) \cap \mathrm{Diff}^2_m(M)$*, se tiene que si* p_g *es la continuación analítica de* p_f*, entonces* $m(Ehc^-(p_g)) > 0$*.*

Entonces f *es establemente ergódica.*

Proposición 3.0.2. *Si* f *preserva volumen y su descomposición dominada es de la forma* $TM = E \oplus_< F$*, con* $dim(E) = 1$*, entonces* E *es contractor.*

Demostración. Consideramos una base de T_pM formada por un vector unitario $v_E \in E$ y una base de F. En esta base, la matriz jacobiana de f esta formada por dos bloques:

$$J_f = \begin{pmatrix} f'(v_E) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Df|F & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Como f preserva volumen, tenemos que el determinante jabobiano de f debe ser 1. Es decir,

$$1 = det(J_f) = f'(v_E)det(J_{f|F})$$

Si E no fuera contractor, $|f'(v_E)| \geq 1$ y de la igualdad anterior se deduce que $det(J_{f|F}) \leq 1$.

Sin embargo, como la descomposición de Oseledets es dominada, se tiene que $|Dfv_E| \leq |Dfv_F|$ para todo $v_E \in E, v_F \in F$ vectores unitarios. Esto es una contradicción, por lo que E debe ser contractor. $\square$

Teorema 3.0.3. *Genéricamente en* $\mathrm{Diff}^1_m(M^3)$*, si existe una foliación* W f*-invariante, expansora o contractora y minimal, entonces* f *es establemente ergódica.*

Demostración. Sea $\mathcal{R} \in \mathrm{Diff}^1_m(M)$ un conjunto residual donde vale el Teorema 2.0.22 y sea $f \in \mathcal{R}$ un difeomorfismo tal que existe una foliación f-invariante, expansora y minimal. Probaremos el resultado en este caso, si W es contractora la demostración es análoga. En este caso f tiene al menos un exponente de Lyapunov no nulo, por lo tanto, por el Teorema 2.0.22 se tiene que la descomposición de Oseledets $TM = E^- \oplus E^+$ es dominada.

A continuación probamos el resultado para todas los posibles comportamientos de la descomposición de TM.

- $dim(E^+) = 2$ y la descomposición de Oseledets más fina es de la forma $TM = E^- \oplus_< E^+$.
  Veremos en este caso que $TW = E^+$ y por lo tanto f es hiperbólica. Por la forma de la descomposición más fina tenemos que f no puede ser parcialmente hiperbólica. Luego, del Teorema 2.0.25 se deduce que debe existir un punto periódico hiperbólico con valores propios complejos. Entonces la foliación W invariante, minimal y expansora, no puede ser de dimensión 1. El único caso posible es $dim(W) = 2$.

  En este caso estamos en las hipótesis de la Proposición 3.0.2, por lo que E debe ser contractor. Como además f es hiperbólica, f es establemente ergódica.

- $dim(E^+) = 2$ y la descomposición de Oseledets es de la forma $TM = E^- \oplus_< TW \oplus_< E_1^+$.
  De la Proposición 3.0.2 se obtiene que f es hiperbólica, y por lo tanto es establemente ergódica (se deduce del Teorema 2.0.24).

- $dim(E^+) = 2$ y la descomposición de Oseledets es de la forma $TM = E^- \oplus_< E_2^+ \oplus_< TW$.
  Por el Teorema 2.0.22 se tiene que existe un punto periódico hiperbólico q con $Ehc(q) \doteq M$. Como f preserva volumen y tanto E^- como TW son de dimensión 1, f es parcialmente hiperbólica. Además, como f es genérica, del Teorema 2.0.24 se deduce que f es establemente ergódica.

- $\underline{dim(E^+) = 1}$

  El Lema 2.0.23 implica que estamos en las hipótesis de la Proposición 3.0.1, luego f es establemente ergódica.

$\square$

Referencias

[AB12] A. Avila and J. Bochi. Nonuniform hyperbolicity, global dominated splittings and generic properties of volume-preserving diffeomorphisms. *Transactions of the American Mathematical Society*, 364(6):2883--2907, jun 2012.

[ACW16] A. Avila, S. Crovisier, and A. Wilkinson. Diffeomorphisms with positive metric entropy. *Publications mathématiques de l'IHÉS*, 124(1):319--347, oct 2016.

[ACW17] A. Avila, S. Crovisier, and A. Wilkinson. C^1 density of stable ergodicity. *ArXiv e-prints*, September 2017.

[AS67] D. V. Anosov and Y. G. Sinai. Some smooth ergodic systems. *Russian Mathematical Surveys*, 22(5):103--167, oct 1967.

[Boc02] J. Bochi. Genericity of zero Lyapunov exponents. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 22(6):1667--1696, 2002.

[DPU99] L. J. Díaz, E. R. Pujals, and R. Ures. Partial hyperbolicity and robust transitivity. *Acta Math.*, 183(1):1--43, 1999.

[GPS94] M. Grayson, C. Pugh, and M. Shub. Stably ergodic diffeomorphisms. *The Annals of Mathematics*, 140(2):295, sep 1994.

[Her12] M.A. Rodriguez Hertz. Genericity of nonuniform hyperbolicity in dimension 3. *Journal of Modern Dynamics*, 6(1):121--138, may 2012.

[HHTU11] F. Rodriguez Hertz, M. A. Rodriguez Hertz, A. Tahzibi, and R. Ures. New criteria for ergodicity and nonuniform hyperbolicity. *Duke Mathematical Journal*, 160(3):599--629, dec 2011.

[HHU08] F. Rodriguez Hertz, M.A. Rodriguez Hertz, and R. Ures. Accessibility and stable ergodicity for partially hyperbolic diffeomorphisms with 1D-center bundle. *Inventiones Mathematicae*, 172(2):353--381, 2008.

[Mañ82] R. Mañé. An ergodic closing lemma. *The Annals of Mathematics*, 116(3):503, nov 1982.

[NH20] Gabriel Núñez and Jana Rodriguez Hertz. Minimality and stable bernoulliness in dimension 3. *Discrete Continuous Dynamical Systems - A*, 40(3):1879?1887, 2020.

[PS96] C. Pugh and M. Shub. Stable ergodicity and partial hyperbolicity. In *International Conference on Dynamical Systems (Montevideo, 1995)*, volume 362 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 182--187. Longman, Harlow, 1996.

[Tah04] A. Tahzibi. Stably ergodic diffeomorphisms which are not partially hyperbolic. *Israel Journal of Mathematics*, 142(1):315--344, dec 2004.