Universidad de la República
Facultad de ciencias

Trabajo monográfico

Soluciones Globales de Viscosidad de la Ecuación de Hamilton-Jacobi en Variedades No Compactas

Año 2021

Estudiante:
Agustín Castro
Tutor:
Prof. Ezequiel Maderna
Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas aquellas personas que colaboraron de alguna manera con el desarrollo de esta tésis, principalmente:

A mi familia y amigos por su apoyo permantente a lo largo del camino recorrido en la licenciatura. En particular a mis padres, a mis hermanos Bruno y Manuel, y a mis amigos Santiago Otero, Rodrigo Vázquez, Genaro Sloth, Manuel Calvete, Federico Tuja, Franco García y Guillermo Ahlers.

A mi tutor Ezequiel Maderna, por haberme presentado la temática para este trabajo, e introducirme con esta propuesta a un mundo de ideas completamente nuevas para mi.

Quiero agradecer también al Prof. Albert Fathi, por la calidad y claridad de sus trabajos de investigación que hicieron posible esta tésis.

Por último pero no menos importante, quiero agradecer a todas aquellas personas que me enriquecieron con sus puntos de vista y me ayudadaron a construir y reforzar mis conocimientos, ya sea a nivel académico habiendo tenido el placer de compartir tardes y noches de estudio, o a nivel personal. Destaco entre ellos a Lucas Cándido, Santiago Montouliu, Santiago Radi, Josefina Gonzalez, Sofía Duarte, Lucía Azzolini, Manuel Urquiola, Álvaro Ríos, Ignacio Hounie, Juan Elenter, Fátima Álvez, Guillermo Cabrera, Sofía Salmini, Gastón de Boni, Manuel Hernández, Romina Giaccio, Lucía Urquiola, Camila Reséndiz y Federico Sica.

En una lista asi, es más que probable que me esté olvidando de personas que tengan más que merecida una mención. A todos ellos, les ofrezco mis sinceras disculpas.

Prefacio

Este trabajo está basado en el curso dictado por el Prof. Albert Fathi (Georgia Institute of Technology, Atlanta) en el marco del programa de doctorado de la Universidad de Roma Tor Vergata.

Muchos detalles que no fueron expuestos en el curso se completaron siguiendo los siguientes textos: [1] [2] [5]

Índice

1. Introducción

La ecuación de Hamilton-Jacobi nació en la mecánica clásica, en el estudio de la evolución de sistemas hamiltonianos, con el propósito de obtener cambios de coordenadas adecuados en el espacio de fases, de modo que las nuevas coordenadas sean magnitudes conservadas del sistema.

El método de las características [4] permite construir soluciones locales, sin embargo no siempre es posible obtener soluciones globales a la ecuación de Hamilton-Jacobi, como ocurre por ejemplo al buscar una función $u : S^1 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que $|d_x u|^2 = 1$.

Esto motiva a buscar soluciones en algún sentido más débil. Una forma en que uno podría intentar solventar esto, es buscar funciones u que verifiquen la ecuación en casi todo punto (ctp), sin embargo esta noción es muy amplia y agrega demasiadas soluciones, como puede verse nuevamente en el ejemplo $u : S^1 \to \mathbb{R}$ tal que $|d_x u| = 1$ (ver figura 1).

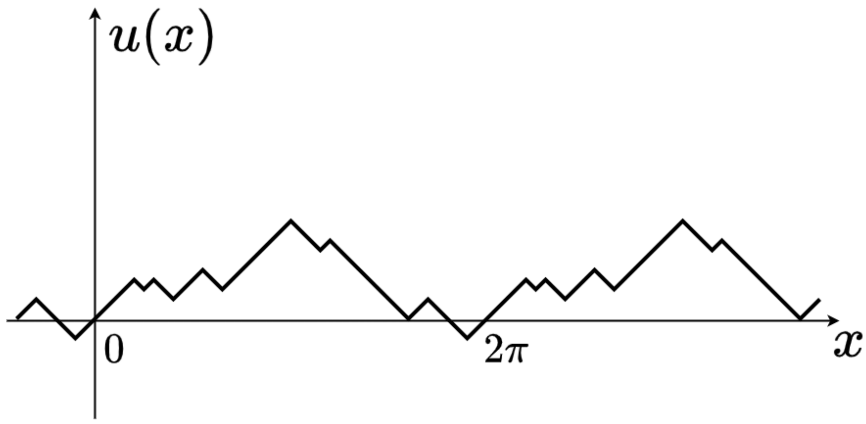

Figura 1: Solución ctp de $|d_x u| = 1$, identificando $S^1 \approx \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

En 1983, Pierre-Louis Lions y Michael Grain Crandall introducen la noción de solución de viscosidad para una ecuación en derivadas parciales [6]. Esta noción está inspirada en propiedades de las funciones candidatas a soluciones que se obtienen en el paso al límite del método de la viscosidad evanescente. Más precisamente, para una ecuación de la forma $H(x, d_x u) = c$ se considera la ecuación dependiendo de un parámetro $\epsilon > 0$ de la forma $\epsilon \Delta u + H(x, d_x u) = c$. En un contexto en el cual esta ecuación tiene una única solución u_ϵ para cada $\epsilon > 0$, resulta interesante estudiar los posibles límites cuando $\epsilon \to 0$. Estos límites fueron utilizados como soluciones débiles en muchos contextos durante más de un siglo. Como veremos más adelante, la noción de solución de viscosidad introducida por Lions y Crandall, surge al tomar algunas propiedades especiales de estas funciones límites como definición.

Dicha noción de solución reveló ser fundamental, pues permitió extenderse a sistemas de ecuaciones de mayor orden, y conseguir teoremas de existencia y unicidad de soluciones de esta clase en una amplia familia de ecuaciones en derivadas parciales [7][9]. Otra propiedad de esta familia de soluciones que es de mucha importancia es la noción de estabilidad bajo condiciones muy generales, es decir que los límites uniformes en compactos de soluciones son también soluciones.

En esta tésis, veremos como se caracterizan estas soluciones de viscosidad para la ecuación de evolución de Hamilton-Jacobi, tomando la evolución de Lax-Oleinik de una condición inicial semicontinua inferiormente. También se caracterizarán los puntos de diferenciabilidad de las soluciones de viscosidad en términos de curvas calibrantes que pasan por el punto, y como caso particular se estudiarán algunas propiedades topológicas de las singularidades de la función distancia a un conjunto cerrado.

2. Preliminares

En este capítulo se intentará introducir la formulación Lagrangiana a partir de sus principios variacionales, la formulación Hamiltoniana, y definir la transformada de Legendre que transforma una formulación en la otra. Al final del capítulo, se dará una motivación del interés la ecuación de Hamilton-Jacobi y su aplicación para obtener magnitudes conservadas de la dinámica.

En todo lo que sigue, (M, g) será una variedad riemanniana de dimensión n, con M de clase C^∞, sin borde, conexa y no necesariamente compacta. Denotaremos TM a su fibrado tangente, y T^*M a su fibrado cotangente.

Denotamos (x, v) a los puntos del fibrado tangente TM, con $x \in M$ y $v \in T_xM$.

Un elemento del fibrado cotangente T^*M lo denotamos como (x, p), con $x \in M$ y $p : T_xM \to \mathbb{R}$ lineal.

Denotamos $\pi : TM \to M$ $((x, v) \mapsto x)$ y $\pi^* : T^*M \to M$ $((x, p) \mapsto x)$ a las proyecciones canónicas.

Para cada $x \in M$, la métrica Riemanniana g induce una norma en T_xM y en T_x^*M, las cuales denotaremos (a ambas) con $|| \cdot ||_x$.

Cada vez que M sea un producto de variedades riemannianas, consideraremos la métrica en M dada por la métrica producto.

Definicion 2.1 (longitud de una curva)**.** Si $\gamma : [a, b] \to M$ es C^1 a trozos (o absolutamente continua), su **longitud** se define como

$$l_g(\gamma) = \int_a^b ||\dot{\gamma}(s)||_{\gamma(s)} ds$$

A su vez, esta longitud define una distancia d en M (distancia riemanniana) dada por

$$d(x, y) = \inf_{\gamma} \{l_g(\gamma) : \quad \gamma(a) = x, \gamma(b) = y, \ \ \gamma : [a, b] \to M \text{ de clase } C^1 \text{ a trozos}\}$$

El teorema de Hopf-Rinow nos garantiza que la distancia d en M es completa (toda sucesión de Cauchy es convergente) si y sólo si el flujo geodésico es completo (está definido para todo tiempo), y a su vez, si y sólo si los conjuntos cerrados y acotados para d son compactos. Observar que por ejemplo si M es compacta, entonces todas las métricas son completas (pues todo cerrado en un compacto es compacto).

Asumiremos siempre que (M, g) es completa para una métrica g que quedará fija.

Definiremos a continuación algunas familias de curvas que serán de utilidad

$$\mathcal{C}_{[a,b]}(x, y) = \{\gamma : [a, b] \to M : \gamma(a) = x, \gamma(b) = y, \gamma \text{ de clase } C^1 \text{ a trozos}\}$$

$$\mathcal{C}_{[a,b]}(\cdot, y) = \bigcup_{x \in M} \mathcal{C}_{[a,b]}(x, y), \quad \mathcal{C}_{[a,b]}(x, \cdot) = \bigcup_{y \in M} \mathcal{C}_{[a,b]}(x, y)$$

Análogamente, también definiremos

$$\mathcal{C}_{[0,\infty)} = \{\gamma : [0, \infty) \to M : \ \gamma \text{ de clase } C^1 \text{ a trozos}\}$$

2.1. Formulación lagrangiana y principio de mínima acción

Definicion 2.2. Un **lagrangiano** es una función continua $L : TM \to \mathbb{R}$.

En una amplia familia de sistemas, se suele agregar dependencia del lagrangiano en una variable real t (variable temporal), pero aqui asumiremos que los lagrangianos no presentan dependencia explítica en el tiempo (a estos se los llama autónomos).

Por lo general a lo largo de este documento, trabajaremos con una familia de lagrangianos conocida como lagrangianos de Tonelli.

Definicion 2.3. Un lagrangiano $L : TM \to \mathbb{R}$ es un **lagrangiano de Tonelli** si es de clase C^2 y cumple las propiedades de

1. Supelinealidad:

$$C(K) = \sup_{(x,v) \in TM} K||v||_x - L(x, v) < +\infty \quad \forall K \geq 0$$

   en otras palabras, para todo $K \geq 0$, existe una constante $C(K) \in \mathbb{R}$ tal que $L(x, v) \geq K.||v||_x - C(K) \ \forall (x, v) \in TM$

2. Acotación en las fibras:

$$A(R) = \sup_{(x,v) \in TM} \{L(x, v); ||v||_x \leq R\} < +\infty \quad \forall R \geq 0$$

3. C^2 estrictamente convexo: $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v)$ es definido positivo $\forall (x, v) \in TM$

Definicion 2.4. Si $\gamma : [a, b] \to M$ es una curva C^1 a trozos, se define la **acción** de $L : TM \to \mathbb{R}$ sobre la curva γ como

$$\mathbb{L}(\gamma) = \int_a^b L\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big) dt$$

Este funcional es de gran interés ya que define una dinámica en TM. Más precisamente la dinámica lagrangiana que define es aquella cuyas órbitas son velocidades de curvas extremales de la acción del lagrangiano. Veremos ahora esto último con más detalle

Definicion 2.5. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una curva de clase C^1, una **variación con exremos fijos** de γ es una función $\Gamma : [a,b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ de clase C^1 de la curva γ tal que

$$\begin{cases} \Gamma(a,s) = \gamma(a) & \forall\, s \in (-\epsilon, \epsilon) \\ \Gamma(b,s) = \gamma(b) & \forall\, s \in (-\epsilon, \epsilon) \\ \Gamma(t,0) = \gamma(t) & \forall\, t \in [a,b] \end{cases}$$

Definicion 2.6. Una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ de clase C^1 es **extremal** para $L : TM \to \mathbb{R}$ si para toda variación $\Gamma : [a,b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ de la curva γ se tiene que

$$\left.\frac{\partial \mathbb{L}(\Gamma_s)}{\partial s}\right|_{s=0} = 0$$

donde denotamos $\Gamma_s : [a,b] \to M$ a la curva tal que $\Gamma_s(t) = \Gamma(t,s)$.

Las curvas extremales se pueden caracterizar como soluciones a un sistema de ecuaciones diferenciales, conocidas como ecuaciones de Euler-Lagrange.

Resulta evidente que la restricción de una curva extremal es también una curva extremal. Por esta razón, para estudiar localmente las curvas extremales, podemos suponer que están contenidas en un entorno coordenado.

Teorema 2.1. ***(Ecuaciones de Euler-Lagrange)*** *Sea U un entorno coordenado en M y $\gamma : [a,b] \to U$ una curva extremal para el lagrangiano L, entonces se verifica la siguiente ecuación en las coordenadas inducidas en TU*

$$\frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big) = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)$$

donde esto es una igualdad entre operadores lineales en $T_{\gamma(t)}M$ para cada $t \in [a,b]$.

Observemos que si $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}$ es no singular (por ejemplo, cuando L es de Tonelli), entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange darán lugar entonces a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden en TM. pues haciendo regla de la cadena y despejando se puede escribir el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \left[\left.\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}\right|_{(x,v)}\right]^{-1} \left(\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{(x,v)} - \left.\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}\right|_{(x,v)} . v\right) \end{cases}$$

Demostración. Como γ extremal, entonces sea Γ una variación C^2 de γ con extremos fijos, entonces

$$\begin{aligned} 0 = \left.\frac{\partial \mathbb{L}(\Gamma_s)}{\partial s}\right|_{s=0} &= \frac{\partial}{\partial s}\int_a^b L\big(\Gamma_s(t), \frac{\partial}{\partial t}\Gamma_s(t)\big)dt\Big|_{s=0} = \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} L\big(\Gamma_s(t), \frac{\partial}{\partial t}\Gamma_s(t)\big)\Big|_{s=0} dt = \\ = \int_a^b \left[\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{\left(\Gamma_s(t), \frac{\partial}{\partial t}\Gamma_s(t)\right)} \frac{\partial \Gamma(t,s)}{\partial s} + \left.\frac{\partial L}{\partial v}\right|_{\left(\Gamma_s(t), \frac{\partial}{\partial t}\Gamma_s(t)\right)} \frac{\partial^2 \Gamma(t,s)}{\partial s \partial t} \right]\Bigg|_{s=0} dt &= \\ = \int_a^b \left[\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{\left(\gamma(t), \dot\gamma(t)\right)} \frac{\partial \Gamma(t,s)}{\partial s} + \left.\frac{\partial L}{\partial v}\right|_{\left(\gamma(t), \dot\gamma(t)\right)} \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Gamma(t,s)}{\partial s} \right]\Bigg|_{s=0} dt \end{aligned} \tag{1}$$

Ahora, integraremos por partes en el segundo término de la ecuación anterior, obteniendo que:

$$\begin{aligned} \int_a^b \left.\frac{\partial L}{\partial v}\right|_{\left(\gamma(t), \dot\gamma(t)\right)} \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Gamma(t,s)}{\partial s}\Bigg|_{s=0} dt &= \\ = \left[\left.\frac{\partial L}{\partial v}\right|_{\left(\gamma(t), \dot\gamma(t)\right)} \frac{\partial \Gamma(t,s)}{\partial s}\right]\Bigg|_{t=a}^{t=b}\Bigg|_{s=0} - \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial t}\left.\frac{\partial L}{\partial v}\right|_{\left(\gamma(t), \dot\gamma(t)\right)}\right] \frac{\partial \Gamma(t,s)}{\partial s}\Bigg|_{s=0} dt \end{aligned} \tag{2}$$

Observemos que como $\Gamma(a,s) = \gamma(a)$ y $\Gamma(b,s) = \gamma(b)$ para todo s, entonces $\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a,s) = \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(b,s) = 0$, por lo que el término $\left[\left.\frac{\partial L}{\partial v}\right|_{\left(\gamma(t), \dot\gamma(t)\right)} \frac{\partial \Gamma(t,s)}{\partial s}\right]\Big|_{t=a}^{t=b}\Big|_{s=0} = 0$. Entonces la ecuación (2) puede escribirse como

$$\int_a^b \left.\frac{\partial L}{\partial v}\right|_{\left(\gamma(t), \dot\gamma(t)\right)} \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Gamma(t,s)}{\partial s}\Bigg|_{s=0} dt = -\int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial t}\left.\frac{\partial L}{\partial v}\right|_{\left(\gamma(t), \dot\gamma(t)\right)}\right] \frac{\partial \Gamma(t,s)}{\partial s}\Bigg|_{s=0} dt \tag{3}$$

Sustituyendo esto en el segundo término de la ecuación (1), obtenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{\left(\gamma(t), \dot\gamma(t)\right)} \frac{\partial \Gamma_s(t)}{\partial s} - \left[\frac{\partial}{\partial t}\left.\frac{\partial L}{\partial v}\right|_{\left(\gamma(t), \dot\gamma(t)\right)}\right] \frac{\partial \Gamma_s(t)}{\partial s}\Bigg|_{s=0} dt \\ &= \int_a^b \left[\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{\left(\gamma(t), \dot\gamma(t)\right)} - \frac{\partial}{\partial t}\left.\frac{\partial L}{\partial v}\right|_{\left(\gamma(t), \dot\gamma(t)\right)}\right] \frac{\partial \Gamma_s(t)}{\partial s}\Bigg|_{s=0} dt \end{aligned} \tag{4}$$

Si definimos $A_t : T_{\gamma(t)}M \to \mathbb{R}$ una familia de operadores lineales parametrizada en $t \in [a,b]$, dada por

$$A_t(v) = \left[\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{\left(\gamma(t), \dot\gamma(t)\right)} - \frac{\partial}{\partial t}\left.\frac{\partial L}{\partial v}\right|_{\left(\gamma(t), \dot\gamma(t)\right)}\right](v) \quad \forall t \in [a,b],\ \forall v \in T_{\gamma(t)}M$$

entonces, podemos escribir la ecuación (4) como

$$\int_a^b A_t\Big(\frac{\partial\Gamma(t,s)}{\partial s}\big|_{s=0}\Big)dt = 0$$

Como la igualdad anterior se cumple sin importar como elijamos la variación Γ, entonces se tiene que A_t es el operador nulo para todo t.

Para ver esto, supongamos $A_{t_1} \neq 0$ para algún $t_1 \in (a,b)$. Entonces existe $v \in \mathbb{R}^n$ donde $A_{t_1}(v) > 0$. Por lo tanto existe $\epsilon > 0$ tal que $A_t(v) > 0$ para todo $t \in [t_1-\epsilon, t_1+\epsilon] \subset (a,b)$. Entonces tomo un 'chichón' suave $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\phi(t) = 0$ si $t \notin (t_1-\epsilon, t_1+\epsilon)$, y que $\phi(t) > 0$ si $t \in (t_1-\epsilon, t_1+\epsilon)$.

Considero entonces la variación $\Gamma(t,s) = \gamma(t) + s\phi(t)v$, la cual verifica entonces que $\frac{\partial\Gamma(t,s)}{\partial s} = \phi(t)v$. Para esta $\Gamma(t,s)$, tendríamos que $A_t\big(\frac{\partial\Gamma(t,s)}{\partial s}\big|_{s=0}\big) \geq 0$ para todo $t \in [a,b]$, y además $A_{t_1}\big(\frac{\partial\Gamma(t_1,s)}{\partial s}\big|_{s=0}\big) > 0$, por lo que $\int_a^b A_t\big(\frac{\partial\Gamma_s(t)}{\partial s}\big|_{s=0}\big)dt > 0$, lo cual hemos visto que no es posible. Por lo tanto A_t debe ser el operador nulo para todo t.

Entonces hemos probado que

$$0 = A_t = \frac{\partial L}{\partial x}\bigg|_{\left(\gamma(t),\dot\gamma(t)\right)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\bigg|_{\left(\gamma(t),\dot\gamma(t)\right)} \qquad \forall t \in [a,b]$$

$\square$

Se puede probar existencia y unicidad de soluciones a estas ecuaciones dada una condición inicial $\big(\gamma(0),\dot\gamma(0)\big) = (x,v) \in TM$ para el caso en que L es de Tonelli. La prueba de esto requiere del estudio de otra dinámica que es conjugada a la dinámica de Lagrange mediante un difeomorfismo (transformada de Legendre). Esta dinámica conjugada ocurre en el fibrado cotangente T^*M y se conoce como dinámica hamiltoniana. Luego veremos como se define esta transformada de Legendre, y como es la forma de las ecuaciones de Hamilton, las cuales serán un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que depende de las derivadas primeras de una función $H : T^*M \to \mathbb{R}$ la cual tiene la misma regularidad que el lagrangiano, por lo que si el lagrangiano es C^2, la función H será C^2 también, y por lo tanto se obtiene la unicidad de las soluciones aplicando el teorema de Picard. Como el difeomorfismo dado por la transformada de Legendre da una biyección entre las órbitas de ambos sistemas, obtendremos entonces también existencia y unicidad para las órbitas lagrangianas en TM cuando L es de Tonelli.

Se puede ver que en general, las curvas que se obtienen en M como soluciones a las ecuaciones de Euler-Lagrange (i.e curvas extremales) tienen la misma regularidad que el lagrangiano. [3]

Un caso particular de curva extremal, es el de una curva minimal, que se define a continuación

Definicion 2.7. Una curva $\gamma : [a,b] \to M$ es **minimal** (o minimizante) si para toda curva $\delta : [a,b] \to M$ tal que $\gamma(a) = \delta(a)$ y $\gamma(b) = \delta(b)$ se tiene que

$$\mathbb{L}(\gamma) \leq \mathbb{L}(\delta)$$

2.2. Transformada de Legendre

Definiremos a continuación la transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \to T^*M$, el cual (cuando L sea un lagrangiano de Tonelli) será un difeomorfismo.

Definicion 2.8. Sea $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano de clase C^1. Definimos la **transformada de Legendre** $\mathcal{L} : TM \to T^*M$ dada por

$$\mathcal{L}(x,v) = \left(x, \ \frac{\partial L}{\partial v}\bigg|_{(x,v)} \right) \quad \forall\, (x,v) \in TM$$

Proposición 2.2. *Si $L : TM \to \mathbb{R}$ es un Lagragiano de Tonelli, entonces $\mathcal{L}$ es un difeomorfismo.*

Demostración. Observemos que como L es C^2 estrictamente convexo, entonces la restricción a las fibras $L\Big|_{T_xM}$ es una función estrictamente convexa para cada $x \in M$.

Por lo tanto, si $\frac{\partial L}{\partial v}\big|_{(x,v)} = \frac{\partial L}{\partial v}\big|_{(x,w)}$, entonces L restricta al segmento que une v con w deberá comportarse de forma afín (por convexidad), pero como es estrictamente convexa tendremos entonces que dicho segmento deberá ser solo un punto, es decir que $v = w$. De aqui tenemos la inyectividad de $\mathcal{L}$.

Por la misma propiedad (C^2 estrictamente convexo), también deducimos que $\mathcal{L}$ debe ser un difeomorfismo local. Para ver esto, observar que como $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}$ es definido positivo (y en particular no degenerado), entonces el diferencial de la transformada de Legendre que se expresa en coordenadas como

$$D\mathcal{L} = \begin{pmatrix} Id_{n\times n} & 0_{n\times n} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v} & \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} \end{pmatrix}$$

es invertible. Por lo tanto, $\mathcal{L} : TM \to T^*M$ es un difeomorfismo local.

Para ver que es difeomorfismo, queda ver la sobreyectividad de $\mathcal{L}$. Esto surgirá a continuación a partir de la superlinealidad de L.

Sea $(x,p) \in T^*M$, entonces como L es superlineal y p es lineal, entonces el mapa $v \mapsto L(x,v) - p(v)$ es superlineal. Entonces existe $v^* \in T_xM$ donde se minimiza el mapa $v \mapsto L(x,v) - p(v)$. Por lo tanto

$$0 = \frac{\partial\big(L(x,v) - p(v)\big)}{\partial v}\bigg|_{v=v^*} = \frac{\partial L}{\partial v}\bigg|_{(x,v^*)} - p$$

y entonces

$$p = \frac{\partial L}{\partial v}\bigg|_{(x,v^*)}$$

obteniendo que

$$(x,p) = \mathcal{L}(x,v^*)$$

por lo que $\mathcal{L}$ es sobreyectiva, y concluímos entonces que es un difeomorfismo.

$\square$

En este ensayo llamaremos **hamiltoniano** a cualquier función continua $H : T^*M \to \mathbb{R}$.

El origen del término surge del hamiltoniano mecánico de una partícula en el espacio sometida a un potencial $V : M \to \mathbb{R}$ de clase C^2. En este caso, el hamiltoniano correspondiente se expresa como

$$H_V(x,p) = \frac{1}{2}||p||_x^2 + V(x)$$

En general todo sistema lagrangiano tiene asociado un hamiltoniano, y la correspondencia viene dada por la transformada de Fenchel.

Definicion 2.9. Si $L : TM \to \mathbb{R}$ es un lagrangiano superlineal, entonces definimos su **hamiltoniano asociado** como

$$H(x,p) = \sup_{v \in T_xM} p(v) - L(x,v) \quad \forall (x,p) \in T_x^*M$$

A esta operación que a cada lagrangiano L le asocia un hamiltoniano H, se le llama **transformada de Fenchel**, o **conjugación convexa**.

Es inmediato de esta definición que si $(x,p) \in T^*M$ y $v \in T_xM$, entonces

$$p(v) \leq L(x,v) + H(x,p)$$

Esta desigualdad se la conoce como **desigualdad de Fenchel**.

Una propiedad que será de utilidad es que la transformada de Fenchel preserva la regularidad, es decir que si $L : TM \to \mathbb{R}$ es de clase C^r, entonces el hamiltoniano asociado $H : T^*M \to \mathbb{R}$ también es de clase C^r.

Observar que en la prueba de la proposición 2,2, vimos que si L es de Tonelli, entonces existe un que v que realiza el supremo de la definición anterior y cumple que $p = \frac{\partial L}{\partial v}\big|_{(x,v)}$, es decir que

$$H\left(x,\ \frac{\partial L}{\partial v}\bigg|_{(x,v)}\right) = \frac{\partial L}{\partial v}\bigg|_{(x,v)}.v - L(x,v) \tag{5}$$

Las siguientes proposiciones intentarán mostrar que la transformada de Legendre manda lagrangianos de Tonelli en hamiltonianos de Tonelli (que definiremos luego).

Lema 2.3. *Si $L : TM \to \mathbb{R}$ es de Tonelli, y H es su transformada de Fenchel, entonces para todo $R \geq 0$ se tiene que*

$$A^*(R) = \sup_{(x,p)\in T^*M} \{H(x,p) : ||p||_x \leq R\} < \infty$$

Demostración. Sea $R \geq 0$, y $(x,p) \in TM$ tal que $||p||_x \leq R$. Entonces

$$\begin{aligned} H(x,p) = \sup_{v\in T_xM} p(v) - L(x,v) \leq \sup_{v\in T_xM} ||p||_x.||v||_x - L(x,v) \leq \\ \leq \sup_{(x,v)\in TM} R.||v||_x - L(x,v) \end{aligned}$$

Usando la superlinealidad de L, tenemos que

$$C(R) = \sup_{(x,v)\in TM} R.||v||_x - L(x,v) < \infty$$

Por lo tanto

$$H(x,p) \leq C(R) < \infty \quad \forall\ (x,p) \in TM,\ \ ||p||_x \leq R$$

□

Lema 2.4. *Si $L : TM \to \mathbb{R}$ es de Tonelli, y $H : T^*M \to \mathbb{R}$ es su transformada de Fenchel, entonces*

$$C^*(K) = \sup_{(x,p)\in T^*M} K||p||_x - H(x,p) < \infty \quad \forall K \geq 0$$

es decir que si L es de Tonelli, entonces H es superlineal.

Demostración. Sea $(x,p) \in T^*M$, entonces por la desigualdad de Fenchel tenemos

$$L(x,v) \geq p(v) - H(x,p) \quad \forall v \in T_xM$$

Sea $v_p \in T_xM$ tal que $||v_p||_x = 1$ y $p(v_p) = ||p||_x$. Entonces si $K \geq 0$, tenemos que $||K.v_p||_x = K$ y $p(K.v_p) = K.||p||_x$, por lo que sustituyendo $v = Kv_p$ en la ecuación anterior obtenemos

$$L(x,\ Kv_p) \geq p(Kv_p) - H(x,p) = K.||p||_x - H(x,p)$$

Usando la acotación uniforme $A(R)$ del lagrangiano en las fibras, tenemos que (como $||K.v_p||_x = K$)

$$L(x,\ Kv_p) \leq A(K)$$

Por lo tanto

$$A(K) \geq K.||p||_x - H(x,p)$$

Como $(x,p) \in T^*M$ era arbitrario, tenemos entonces que el hamiltoniano H es superlineal. □

Como tenemos que H es superlineal cuando L es de Tonelli, esto nos permite definir la transformada de Fenchel de H.

Definicion 2.10. Si $H : T^*M \to \mathbb{R}$ es superlineal, definimos su transformada de Fenchel como la función $L : TM \to \mathbb{R}$ tal que

$$L(x,v) = \sup_{p \in T_x^*M} p(v) - H(x,p) \quad \forall (x,v) \in TM$$

Lema 2.5. *Si $L : TM \to \mathbb{R}$ es un lagrangiano de Tonelli, y $H : T^*M \to \mathbb{R}$ es su transformada de Fenchel, entonces la transformada de Fenchel de H es L.*

Demostración. Por la desigualdad de Fenchel sabemos que

$$L(x,v) \geq p(v) - H(x,p) \tag{6}$$

Por lo tanto, si $(x,v) \in TM$, entonces

$$L(x,v) \geq \sup_{p \in T_x^*M} p(v) - H(x,p)$$

Pero vimos en la proposición 2,2 que cuando L es de Tonelli, se tiene que en $p = \frac{\partial L}{\partial v}\big|_{(x,v)}$ vale

$$H\left(x,\ \frac{\partial L}{\partial v}\bigg|_{(x,v)}\right) = \frac{\partial L}{\partial v}\bigg|_{(x,v)}.v - L(x,v)$$

Entonces, la desigualdad de la ecuación 6 es igualdad en $p = \frac{\partial L}{\partial v}\big|_{(x,v)}$, por lo que

$$L(x,v) = \sup_{p \in T_x^* M} p(v) - H(x,p)$$

□

A continuación veremos la forma del mapa inverso de Legendre. Recordamos que si L es de clase C^r, entonces su hamiltoniano asociado tiene la misma regularidad que L, por lo que cuando L es de Tonelli, entonces H es C^2.

Lema 2.6. *Sea L lagrangiano de Tonelli, y H su transformada de Fenchel. Entonces*

$$\frac{\partial H}{\partial p}\left(x,\ \frac{\partial L}{\partial v}\bigg|_{(x,v)}\right) = v$$

donde estamos identificando $T_x^{**}M \approx T_xM$ mediante el isomorfismo natural dado por la evaluación.

Demostración. Volvemos a usar la ecuación (5):

$$H\left(x,\ \frac{\partial L}{\partial v}\bigg|_{(x,v)}\right) = \frac{\partial L}{\partial v}\bigg|_{(x,v)} .v - L(x,v)$$

Derivamos respecto de v, y obtenemos:

$$\frac{\partial H}{\partial p}\left(x,\ \frac{\partial L}{\partial v}\bigg|_{(x,v)}\right) . \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}\bigg|_{(x,v)}(\cdot) = \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}\bigg|_{(x,v)}(v,\cdot) + \frac{\partial L}{\partial v}\bigg|_{(x,v)}(\cdot) - \frac{\partial L}{\partial v}\bigg|_{(x,v)}(\cdot) = \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}\bigg|_{(x,v)}(v,\cdot) \tag{7}$$

Identificando en el lado izquierdo que $\frac{\partial H}{\partial p} \in T_x^{**}M \approx T_xM$ a partir del isomorfismo evaluación, podemos reescribir el lado izquierdo de la igualdad como:

$$\frac{\partial H}{\partial p}\left(x,\ \frac{\partial L}{\partial v}\bigg|_{(x,v)}\right) . \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}\bigg|_{(x,v)}(\cdot) = \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}\bigg|_{(x,v)}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\left(x,\ \frac{\partial L}{\partial v}\bigg|_{(x,v)}\right),\ \cdot\ \right) \tag{8}$$

Por lo tanto, sustituyendo la ecuación (8) en (7) obtenemos:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}\bigg|_{(x,v)}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\left(x,\ \frac{\partial L}{\partial v}\bigg|_{(x,v)}\right),\ \cdot\ \right) = \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}\bigg|_{(x,v)}(v,\cdot)$$

Como $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}$ es no degenerado (pues L de Tonelli), tenemos entonces que:

$$\frac{\partial H}{\partial p}\left(x,\ \frac{\partial L}{\partial v}\bigg|_{(x,v)}\right) = v \quad \forall v \in T_xM \tag{9}$$

□

Hemos probado entonces que el mapa $(x,v) \mapsto (x, \frac{\partial L}{\partial v})\big|_{(x,v)}$ es inverso del mapa $(x,p) \mapsto (x, \frac{\partial H}{\partial p}\big|_{(x,p)})$.

Recordemos que además, cuando L es de Tonelli, entonces como el mapa de Legendre preserva la regularidad, entonces tendremos H de clase C^2. Esto nos permite derivar la ecuación (9) con respecto a v, obteniendo

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\left(x,\ \frac{\partial L}{\partial v}\bigg|_{(x,v)}\right)\cdot \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}\bigg|_{(x,v)} = Id_{n\times n}$$

Entonces

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\left(x,\ \frac{\partial L}{\partial v}\bigg|_{(x,v)}\right) = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}\bigg|_{(x,v)}\right]^{-1}$$

En particular, como L es C^2-estrictamente convexo, tendremos entonces que H también es C^2 estrictamente convexo. Juntando este resultado con los lemas 2,3 y 2,4, hemos probado el siguiente teorema:

Teorema 2.7. *Sea L lagrangiano de Tonelli y H su transformada de Fenchel. Entonces H es un hamiltoniano de Tonelli, es decir es C^2 y satisface*

1. *Supelinealidad:*

$$C^*(K) = \sup_{(x,p)\in T^*M} K||p||_x - H(x,p) < \infty \quad \forall K \geq 0$$

2. *Acotación en las fibras:*

$$A^*(R) = \sup_{(x,p)\in T^*M} \{H(x,p); ||p||_x \leq R\} < \infty \quad \forall R \geq 0 \tag{10}$$

3. *C^2 estrictamente convexo: $\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(x,p)$ es definido positivo $\forall (x,p) \in T^*M$*

Observación. *Observar que $C^*(K)$ y $A^*(R)$ son funciones no decrecientes en $[0,\infty)$.*

Observación. *Observar que el punto 1 y 2 de la definición de hamiltonianos de Tonelli, dan entonces cotas superiores e inferiores para el hamiltoniano*

$$-C^*(K) + K||p||_x \leq H(x,p) \leq A^*(||p||_x) \quad \forall (x,p) \in T^*M$$

Ejemplo 2.8. *Consideremos el hamiltoniano*

$$H_0(x,p) = \frac{1}{2}||p||_x^2$$

Este hamiltoniano es claramente de Tonelli, y además

- $A_0^*(R) = \sup_{(x,p)\in T^*M} \{H_0(x,p); ||p||_x \leq R\} = \frac{1}{2}R^2$
- $C_0^*(K) = \sup_{(x,p)\in T^*M} K||p||_x - H_0(x,p) = \sup_{(x,p)\in T^*M} K||p||_x - \frac{1}{2}||p||_x^2 = \frac{1}{2}K^2$

Ejemplo 2.9. *Sea $V : M \to \mathbb{R}$ de clase C^2, y consideremos el hamiltoniano $H_V : T^*M \to \mathbb{R}$ dado por*

$$H_V(x,p) = \frac{1}{2}||p||_x^2 + V(x)$$

Entonces H_V es de Tonelli si y sólo si V está acotada.

2.3. Formulación hamiltoniana

Tenemos entonces una cierta dinámica en TM dada por las ecuaciones de Euler-Lagrange, las cuales mediante la transformada de Legendre inducirán una cierta dinámica en T^*M, dada simplemente como $\big(x(t), p(t)\big) = \mathcal{L}\big(x(t), v(t)\big)$.

A continuación estudiaremos la forma de las ecuaciones de la dinámica hamiltoniana inducida en T^*M.

Teorema 2.10. ***(ecuaciones de Hamilton)*** *Sea $L : TM \to \mathbb{R}$ de Tonelli, y $H : T^*M \to \mathbb{R}$ su transformada de Fenchel. Sean $\big(x(t), v(t)\big)$ una órbita que satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange, y $\big(x(t), p(t)\big) = \mathcal{L}\big(x(t), v(t)\big) = \big(x(t), \frac{\partial L}{\partial v}(x(t), v(t))\big)$.*

Entonces

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}\big(x(t), p(t)\big) \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}\big(x(t), p(t)\big) \end{cases}$$

Demostración. Como $\big(x(t), v(t)\big)$ satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange,tenemos entonces que

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \frac{\partial L}{\partial x}\Big|_{(x(t),v(t))} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\Big|_{(x(t),v(t))} \end{cases} \tag{11}$$

Por un lado, ya sabemos por el lema 2,6 que

$$\frac{\partial H}{\partial p}\left(x, \quad \frac{\partial L}{\partial v}\bigg|_{(x,v)}\right) = v$$

Por lo que

$$\dot{x}(t) = v(t) = \frac{\partial H}{\partial p}\left(x(t), \quad \frac{\partial L}{\partial v}\bigg|_{(x(t),v(t))}\right) = \frac{\partial H}{\partial p}\big(x(t), p(t)\big)$$

Es decir que ya tenemos probada la primera de las ecuaciones de Hamilton.

Recordemos la ecuación (5):

$$H\left(x, \frac{\partial L}{\partial v}\bigg|_{(x,v)}\right) = \frac{\partial L}{\partial v}\bigg|_{(x,v)} .v - L(x,v) \tag{12}$$

Tomando derivadas según x, deducimos

$$\frac{\partial H}{\partial x}(\,\cdot\,) + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}(\,\cdot\,) = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}(v,\cdot) - \frac{\partial L}{\partial x}(\,\cdot\,)$$

Identificando $T_x^{**}M \approx T_xM$ en el segundo término del lado izquierdo mediante evaluación, tenemos

$$\frac{\partial H}{\partial x}(\,\cdot\,) + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}\left(\frac{\partial H}{\partial p}, \,\cdot\,\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}(v,\cdot) - \frac{\partial L}{\partial x}(\,\cdot\,)$$

Si sustituímos aqui la primer ecuación de Hamilton $\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x} = v$, obtenemos

$$\frac{\partial H}{\partial x}(\,\cdot\,) + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}(v, \,\cdot\,) = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}(v,\cdot) - \frac{\partial L}{\partial x}(\,\cdot\,)$$

Usando entonces la segunda ecuación del sistema (11) de Euler Lagrange, y que en la transformada de Legendre teníamos $p(t) = \frac{\partial L}{\partial v}\Big|_{\left(x(t),v(t)\right)}$, obtenemos

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} = -\frac{d}{dt}p$$

Por lo que aqui obtuvimos la segunda ecuación de Hamilton.

$\square$

2.4. Ecuación de Hamilton-Jacobi

Si tomamos un sistema de coordenadas $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ en T^*M, las órbitas de Hamilton en T^*M se rigen por las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

Buscamos un mapa $\phi : (q,p) \mapsto (Q,P)$, que preserve la forma de las ecuaciones de Hamilton. En otras palabras, queremos hacer un cambio de variable partiendo de las variables 'viejas' (q, p) con un hamiltoniano asociado $H(q, p)$, a variables 'nuevas' (Q, P) tales que exista una función $K(Q, P)$ (jugando el rol de nuevo hamiltoniano) que mantenga la estructura de las ecuaciones de Hamilton, es decir

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \end{cases}$$

Para lograr esto, planteamos que se cumpla el principio variacional de Lagrange con el lagrangiano asociado al nuevo hamiltoniano.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \big(\sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P) \big) dt = 0$$

Como sabemos que en las coordenadas viejas (q, p) se verifica que

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \big(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p) \big) dt = 0$$

entonces, para lograr el principio de mínima acción en las nuevas coordenadas, buscaremos que los lagrangianos correspondientes a cada sistema de coordenadas difieran una derivada total de una función $u(q, p, Q, P, t)$ (lo que estaría solamente sumando una constante a la acción entre un sistema de coordenadas y otro, por lo que no afectaría al considerar la variación de la acción). Es decir que

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P) + \frac{du}{dt} \tag{13}$$

A esta u se le llama función generatriz, y se clasifican en distintas familias dependiendo en las variables (dentro de q, p, Q y P) para las cuales u tiene dependencia explícita.

Si tenemos que la función generatriz es de la forma $u = u(q, Q, t)$, entonces tenemos que la ecuación (13) queda

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P) + \sum_i \frac{\partial u}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial u}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Identificando los coeficientes que multiplican a los $\dot{q}_i$ y del mismo modo con los $\dot{Q}_i$, tenemos que se debe verificar que

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial u}{\partial q_i} \\ P_i = -\frac{\partial u}{\partial Q_i} \\ H(q, p) = K(Q, P) - \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \tag{14}$$

Sustituyendo entonces la primer ecuación de (14) en la tercera, e imponiendo que la función $K(Q, P) = 0$ (de modo que las nuevas coordenadas (Q, P) sean magnitudes conservadas) se deduce

$$H\left(q,\ \frac{\partial u}{\partial q}\right) + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Esta ecuación se conoce como la **ecuación de evolución de Hamilton-Jacobi**.

Ejemplo 2.11. *Consideremos el caso de un* ***oscilador armónico bidimensional*** *(sistema masa-resorte plano). Si tomamos coordenadas cartesianas ortogonales* (x, y) *en* $\mathbb{R}^2$*, tenemos un hamiltoniano de la forma*

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) \tag{15}$$

Para el método de resolución por Hamilton-Jacobi se busca obtener un cambio de coordenadas $(x, y, p_x, p_y) \mapsto (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ *a partir de una función* $u(x, y, Q_1, Q_2, t)$ *que verifique la ecuación*

$$H\big(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\big) + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{16}$$

de modo que entonces el hamiltoniano para las nuevas coordenadas es nulo (las nuevas coordenadas serán entonces magnitudes conservadas). Usando las ecuaciones (14) *vemos que esta función* u *definirá un cambio de coordenadas tal que*

$$p_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ \ p_y = \frac{\partial u}{\partial y},\ \ P_1 = -\frac{\partial u}{\partial Q_1},\ \ P_2 = -\frac{\partial u}{\partial Q_2} \tag{17}$$

Usando la expresión (15) *del hamiltoniano, la ecuación* (16) *puede escribirse como*

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{18}$$

Buscaremos una solución de la forma

$$u(x, y, Q_1, Q_2, t) = A(x, Q_1, Q_2, t) + B(y, Q_1, Q_2, t) - Q_1 t \tag{19}$$

Sustituyendo en la ecuación (18) *de Hamilton-Jacobi obtenemos*

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)^2 + \frac{k}{2}x^2 + \frac{k}{2}y^2 - Q_1 = 0$$

Por lo tanto, podemos escribir

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \frac{k}{2}x^2 - \frac{Q_1}{2} = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)^2 + \frac{k}{2}y^2 + \frac{Q_1}{2}$$

Observemos que el lado izquierdo de esta ecuación depende de (x, Q_1, Q_2) *mientras que el lado derecho depende de* (y, Q_1, Q_2)*, por lo que (para que se de la igualdad para todo* $x, y \in \mathbb{R}$*) debemos tener que cada lado dependa solo de* (Q_1, Q_2)*. Es decir que existe* $c(Q_1, Q_2)$ *tal que*

$$\begin{cases} \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \frac{k}{2}x^2 - \frac{Q_1}{2} = c(Q_1, Q_2) \\ -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)^2 + \frac{k}{2}y^2 + \frac{Q_1}{2} = c(Q_1, Q_2) \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial x}(x, Q_1, Q_2) = \sqrt{-kmx^2 + mQ_1 + 2mc(Q_1, Q_2)} \\ \frac{\partial B}{\partial y}(y, Q_1, Q_2) = \sqrt{-kmy^2 + mQ_1 - 2mc(Q_1, Q_2)} \end{cases}$$

Integremos la primer ecuación respecto de x *y la segunda ecuación respecto de* y*:*

$$A(x, Q_1, Q_2) = \int_0^x \sqrt{-kmx'^2 + mQ_1 + 2mc(Q_1, Q_2)}.dx'$$

$$B(y, Q_1, Q_2) = \int_0^y \sqrt{-kmy'^2 + mQ_1 - 2mc(Q_1, Q_2)}.dy'$$

Sustituyendo esto en la expresión (19) *para* u

$$u = A + B - Q_1 t =$$

$$= \int_0^x \sqrt{-kmx'^2 + mQ_1 + 2mc(Q_1, Q_2)}.dx' + \int_0^y \sqrt{-kmy'^2 + mQ_1 - 2mc(Q_1, Q_2)}.dy' - Q_1.t$$

Tomemos $c(Q_1, Q_2) = \frac{Q_2}{2}$*, entonces*

$$u = \sqrt{m}\int_0^x \sqrt{-kx'^2 + Q_1 + Q_2}.dx' + \sqrt{m}\int_0^y \sqrt{-ky'^2 + Q_1 - Q_2}.dy' - Q_1.t$$

Por lo tanto usando las ecuaciones (17) *tenemos*

$$p_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{m}\sqrt{-kx^2 + Q_1 + Q_2}$$

$$p_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{m}\sqrt{-ky^2 + Q_1 - Q_2}$$

$$P_1 = -\frac{\partial u}{\partial Q_1} = -\frac{\sqrt{m}}{2}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{-kx'^2 + Q_1 + Q_2}}dx' - \frac{\sqrt{m}}{2}\int_0^y \frac{1}{\sqrt{-ky'^2 + Q_1 - Q_2}}dy' + t$$

$$P_2 = -\frac{\partial u}{\partial Q_2} = -\frac{\sqrt{m}}{2}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{-kx'^2 + Q_1 + Q_2}}dx' + \frac{\sqrt{m}}{2}\int_0^y \frac{1}{\sqrt{-ky'^2 + Q_1 - Q_2}}dy'$$

Estas integrales se pueden resolver haciendo cambios de variable trigonométricos de la forma $sen(\varphi) = \sqrt{\frac{k}{Q_1+Q_2}}.x'$, $sen(\psi) = \sqrt{\frac{k}{Q_1-Q_2}}.y'$, *resultando*

$$\begin{cases} p_x = \sqrt{m}\sqrt{-kx^2 + Q_1 + Q_2} \\ p_y = \sqrt{m}\sqrt{-ky^2 + Q_1 - Q_2} \\ P_1 = t - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\left(Arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{Q_1+Q_2}}.x\right) + Arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{Q_1-Q_2}}.y\right)\right) \\ P_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\left(Arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{Q_1+Q_2}}.x\right) - Arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{Q_1-Q_2}}.y\right)\right) \end{cases} \quad (20)$$

Observemos que las primeras 2 *ecuaciones de* (20) *implican que*

$$\begin{cases} \frac{p_x^2}{m} + kx^2 = Q_1 + Q_2 \\ \frac{p_y^2}{m} + ky^2 = Q_1 - Q_2 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones se tiene que $Q_1 = \frac{p_x^2+p_y^2}{2m} + \frac{k(x^2+y^2)}{2}$ *es la energía mecánica total del sistema (que corresponde en este caso con el hamiltoniano).*

Mientras tanto, si además sumamos y restamos las últimas 2 *ecuaciones de* (20), *tendremos finalmente las siguientes magnitudes conservadas*

$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 = \frac{p_x^2}{m} + kx^2 \\ Q_1 - Q_2 = \frac{p_y^2}{m} + ky^2 \\ P_1 + P_2 = t - \sqrt{\frac{m}{k}}Arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{Q_1+Q_2}}.x\right) \\ P_1 - P_2 = t - \sqrt{\frac{m}{k}}Arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{Q_1-Q_2}}.y\right) \end{cases} \quad (21)$$

Podemos aprovechar estas magnitudes conservadas para obtener la ley horaria en las coordenadas originales. Despejando x *e* y *de las últimas dos expresiones del sistema* (21) *tenemos*

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{Q_1+Q_2}{k}}.sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}.t + Arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{Q_1+Q_2}}.x(0)\right)\right) \\ y = \sqrt{\frac{Q_1-Q_2}{k}}.sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}.t + Arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{Q_1-Q_2}}.y(0)\right)\right) \end{cases}$$

Sustituyendo las expresiones de $Q_1 + Q_2$ *y* $Q_1 - Q_2$ *de las primeras* 2 *ecuaciones del sistema* (21) *obtenemos*

$$\begin{cases} x = \sqrt{x^2(0) + \frac{p_x^2(0)}{km}}.sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}.t + Arcsin\left(\frac{x(0)}{\sqrt{x^2(0)+\frac{p_x^2(0)}{km}}}\right)\right) \\ y = \sqrt{y^2(0) + \frac{p_y^2(0)}{km}}.sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}.t + Arcsin\left(\frac{y(0)}{\sqrt{y^2(0)+\frac{p_y^2(0)}{km}}}\right)\right) \end{cases}$$

3. Soluciones de viscosidad y principio del máximo

El objetivo de este capítulo es introducir la noción de solución de viscosidad, y algunas propiedades elementales de las mismas bajo condiciones muy generales. Entre estos resultados, destaca una primer versión del principio del máximo, el cual garantizará la unicidad de soluciones localmente Lipschitz de viscosidad dada una cierta condición inicial en un compacto y condiciones de borde en la frontera del mismo.

3.1. Ecuaciones de Hamilton-Jacobi

Definicion 3.1. La **ecuación estacionaria de Hamilton Jacobi** asociada a un hamiltoniano $H : T^*M \to \mathbb{R}$ es

$$H(x, d_x u) = c \tag{22}$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante.

Una **solución clásica** de esta ecuación es una función $u : U(\subset M) \to \mathbb{R}$ (donde $U \subset M$ es abierto), tal que $H(x, d_x u) = c$ para todo $x \in U$.

Podemos restringirnos a estudiar la ecuación $H(x, d_x u) = 0$, pues es simplemente remplazar el hamiltoniano H con la función $H_c(x, p) = H(x, p) - c$.

La **ecuación de evolución de Hamilton-Jacobi** asociada a un hamiltoniano $H : T^*M \to \mathbb{R}$ es

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + H\big(x, \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)\big) = 0$$

Una solución clásica a esta ecuación en el abierto $W \subset \mathbb{R} \times M$ es una función C^1 $u : W \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + H\big(x, \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)\big) = 0 \ \forall (t, x) \in W$$

La ecuación de evolución de Hamilton-Jacobi puede reducirse al caso estacionario considerando $\hat{H} : T^*(\mathbb{R} \times M) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\hat{H}\big((t, x), (s, p)\big) = s + H(x, p)$$

donde $(t, x) \in \mathbb{R} \times M$, y $(s, p) \in T^*_{(t,x)}\big(\mathbb{R} \times M\big) \approx \mathbb{R} \times T^*_x M$.

3.2. Soluciones de viscosidad

Por lo general no hay soluciones suaves para estas ecuaciones en derivadas parciales.

Definiremos entonces una noción de soluciones débiles, conocidas como soluciones de viscosidad.

Definicion 3.2. Una **subsolución de viscosidad** es una función $u : V \to \mathbb{R}$ (donde $V \subset M$ es abierto) si para toda $\phi : V \to \mathbb{R}$ de clase C^1 con $\phi \geq u$, entonces en los puntos $x_0 \in V$ donde se alcanza la igualdad $u(x_0) = \phi(x_0)$ vale que $H(x_0, d_{x_0}\phi) \leq c$.

Definicion 3.3. Una **supersolución de viscosidad** es una función $u : V \to \mathbb{R}$ (donde $V \subset M$ es abierto) si para toda $\psi : V \to \mathbb{R}$ de clase C^1 con $\psi \leq u$, entonces en los puntos $x_0 \in V$ donde se alcanza la igualdad $u(x_0) = \psi(x_0)$ vale que $H(x_0, d_{x_0}\psi) \geq c$.

Definicion 3.4. Una **solución de viscosidad** de $H(x, d_x u) = c$ es una función $u : V(\subset M) \to \mathbb{R}$ (con $V \subset M$ abierto) tal que es subsolución de viscosidad y supersolución de viscosidad.

Enumeraremos algunas propiedades de las soluciones de viscosidad:

1. Si u es una solución de viscosidad de Hamilton-Jacobi de clase C^1, entonces es una solución en el sentido clásico.

2. Si u es una subsolución (respectivamente supersolución, solución) de viscosidad a la ecuación de Hamilton-Jacobi $H(x, d_x u) = c$ y es diferenciable en x_0, entonces $H(x_0, d_{x_0} u) \leq c$ (respectivaente $H(x_0, d_{x_0} u) \geq c$, $H(x_0, d_{x_0} u) = c$).

3. (estabilidad) Sea $v_n : M \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente en compactos a una función $v : M \to \mathbb{R}$. Si v_n son subsoluciones (respectivamente, supersoluciones, soluciones) de $H(x, d_x u) = 0$ para todo n, entonces v es subsolución (respectivamente supersolución, solución) de $H(x, d_x u) = 0$.

4. Si u es una función localmente Lipschitz, entonces u es una subsolución de viscosidad de $H(x, d_x u) = c$ si y sólo si $H(x, d_x u) \leq c$ para casi todo punto (observar que como u es lipschitz, entonces es derivable *ctp*).

5. Si $H(x, p)$ es convexa en las fibras (i.e convexa en la variable p), y $u : O \to \mathbb{R}$ es una solución de viscosidad localmente Lipschitz de $H(x, d_x u) = c$ en el conjunto abierto $O \subset M$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $v : O \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ que es subsolución de viscosidad de $H(x, d_x v) = c + \epsilon$ en O, tal que $sup_{x \in O}|v(x) - u(x)| \leq \epsilon$.

A continuación haremos las pruebas de las propiedades enumeradas

1. *Demostración.* Consideremos la función test superior $\phi = u$. Claramente $\phi \geq u$ (pues vale el igual), y ϕ es C^1, y como u es subsolución de viscosidad entonces

$$H(x, d_x u) = H(x, d_x \phi) \leq c \quad \forall x \in V$$

Además considerando la función test inferior $\psi = u$ (que claramente es C^1 y verifica $\psi \leq u$), entonces como u es supersolución de viscosidad deducimos

$$H(x, d_x u) = H(x, d_x \psi) \geq c \quad \forall x \in V$$

Por lo tanto, tenemos que $H(x, d_x u) = c$, es decir que u es una solución fuerte. $\square$

2. *Demostración.* Tomemos $\phi \geq u$ de clase C^1 tal que $\phi(x_0) = u(x_0)$. Entonces la función $\phi - u \geq 0$ alcanzará un mínimo en x_0 (y será diferenciable en x_0 pues es diferencia de dos funciones diferenciables en x_0), entonces

$$0 = d_{x_0}(\phi - u) = d_{x_0}\phi - d_{x_0}u$$

Por lo tanto

$$d_{x_0}\phi = d_{x_0}u \tag{23}$$

Como además u es subsolución de viscosidad, entonces tenemos que

$$H(x_0, d_{x_0}\phi) \leq c$$

Entonces, usando la ecuación (23) tenemos que

$$H(x_0, d_{x_0}u) \leq c$$

$\square$

3. *Demostración.* Sea $\phi \geq v$ de clase C^1, y $x_0 \in M$ tal $\phi(x_0) = v(x_0)$.

Tenemos que $\phi - v$ se minimiza en x_0, y a menos de sumar una cuadrática para obtener $\tilde{\phi}(x) = \phi(x) + ||x - x_0||^2$ (de lo que tendríamos $d_{x_0}\tilde{\phi} = d_{x_0}\phi$), podemos suponer que $\phi - v$ tiene un mínimo estricto en x_0.

Sea $K \subset M$ un compacto tal que $x_0 \in \mathring{K}$. Entonces tenemos que $v_n \underset{n}{\rightrightarrows} v$ en K. En particular como las v_n son continuas, y v es límite uniforme en K de las v_n, tendremos que v es continua en K.

Sea $\epsilon > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon) \subset K$, y veamos entonces que existe n_0 suficientemente grande tal que si $n \geq n_0$ entonces $\phi - v_n$ alcanza un mínimo local en $B(x_0, \epsilon)$.

Como $\partial B(x_0,\epsilon/2)$ es un compacto tal que $(\phi - v)\big|_{\partial B(x_0,\epsilon/2)} > 0$, entonces (por continuidad de $\phi - v$) existe $y_0 \in \partial B(x_0,\epsilon/2)$ donde

$$\phi(y_0) - v(y_0) = \text{mín}\{\phi(y) - v(y) : \ y \in \partial B(x_0,\epsilon/2)\} = m > 0$$

Entonces, como $v_n \underset{n}{\rightrightarrows} v$ en K, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\big|v(y) - v_n(y)\big| < \frac{m}{2} \quad \forall y \in K, \forall n \geq n_0$$

Es decir que

$$\big|\phi(y) - v_n(y) - (\phi(y) - v(y))\big| = \big|v(y) - v_n(y)\big| < \frac{m}{2} \quad \forall y \in K, \forall n \geq n_0$$

En particular, evaluando en x_0 tenemos que

$$\frac{m}{2} > \big|\phi(x_0) - v_n(x_0) - (\phi(x_0) - v(x_0))\big| = \big|\phi(x_0) - v_n(x_0)\big| \quad \forall n \geq n_0$$

Observemos que si $y \in \partial B(x_0,\epsilon/2)$, como $\big|v(y) - v_n(y)\big| < \frac{m}{2}$ obtenemos entonces

$$\phi(y) - v_n(y) = \big(\phi(y) - v(y)\big) + \big(v(y) - v_n(y)\big) \geq m - |v(y) - v_n(y)| > m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2}$$

Entonces si tomamos $n \geq n_0$, como tenemos que $\big|\phi(x_0) - v_n(x_0)\big| < \frac{m}{2}$, y que $\phi(y) - v_n(y) > \frac{m}{2}$ para todo $y \in \partial B(x_0,\epsilon/2)$, entonces existirá $x_0^* \in B(x_0,\epsilon/2)$ mínimo local de $\phi - v_n$.

Entonces podremos obtener una sucesión decreciente $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con $\epsilon_k \to 0$, tal que para cada k tenemos un n_k para el cual $\big(\phi - v_{n_k}\big)\big|_{\overline{B}(x_0,\epsilon_k)}$ alcanza un mínimo en $x_k \in B(x_0,\epsilon_k)$.

Es decir que tenemos $x_k \to x_0$ tal que

$$\phi(x) - v_{n_k}(x) \geq \phi(x_k) - v_{n_k}(x_k) \quad \forall x \in \overline{B}(x_0,\epsilon_k)$$

Si para cada $k \in \mathbb{N}$, tomamos entonces $\hat{\phi}_k : M \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\hat{\phi}_k \geq v_k$ y que su restricción a $\overline{B}(x_0,\epsilon_k)$ tiene la forma

$$\hat{\phi}_k(x) = \phi(x) - \big(\phi(x_k) - v_{n_k}(x_k)\big) \quad \forall \ x \in \overline{B}(x_0,\epsilon_k)$$

Tendremos entonces que $\hat{\phi}_k$ es una función test superior para v_{n_k}, y que en $\hat{\phi}_k(x_k) = v_{n_k}(x_k)$ y que además $d_{x_k}\hat{\phi}_k = d_{x_k}\phi$. Como v_{n_k} es una subsolución de viscosidad entonces

$$H(x_k, d_{x_k}\phi_k) = H(x_k, d_{x_k}\hat{\phi}_k) \leq c$$

Como ϕ es C^1 tendremos que $d_x\phi$ es continuo con x, y como $x_k \to x_0$, si hacemos k tender a infinito en la ecuación anterior deducimos

$$H(x_0, d_{x_0}\phi) \leq c$$

Como ϕ era una función test superior arbitraria para u, tendremos por lo tanto que u es subsolución de viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi. □

4. Para hacer esta prueba, introduciremos el concepto de función dominada por un lagrangiano, que luego veremos en mayor detalle para el caso de la ecuación de evolución de Hamilton-Jacobi. Una función $u : M \to \mathbb{R}$ es dominada por $L + c$ si para toda curva $\gamma : [a, b] \to M$ de clase C^1 a trozos vale que

$$u\big(\gamma(b)\big) - u\big(\gamma(a)\big) \leq \int_a^b L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds + c\big(b - a\big)$$

Necesitamos ver la equivalencia entre funciones dominadas y subsoluciones de viscosidad Lipschitz

Lema 3.1. *Son equivalentes las afirmaciones*

(a) $u : M \to \mathbb{R}$ *es una subsolución de viscosidad localmente Lipschitz de* $H(x, d_x u) = c$.

(b) $u : M \to \mathbb{R}$ *es continua y* $H(x, d_x u) \leq c$ *en casi todo punto.*

(c) u *es dominada por* $L + c$,

Demostración.

- $(a \Rightarrow b)$ Sea u subsolución de viscosidad Lipschitz. Por un lado sabemos que en los puntos x donde u es derivable debe satisfacer la condición $H(x, d_x u) \leq c$, y como u es Lipschitz entonces el teorema de Rademacher nos garantiza que que u derivable ctp, entonces $H(x, d_x u) \leq c$ ctp.

- $(b \Rightarrow c)$ Sea $x_0 \in M$, y $R > 0$ tal que $\overline{B}(x_0, R) \subset M$ está contenido en un entorno totalmente normal de x_0. Un punto $y \in \overline{B}(x_0, R) \subset M$ lo podemos identificar con coordenadas $(\theta, r) \in \partial B(0, 1) \times [0, R] \subset T_{x_0}M \times \mathbb{R}$, donde r es la distancia entre x_0 e y, y θ es la dirección unitaria de la geodésica minizante desde x_0 a y.

  Definamos el conjunto $E = \{y \in \overline{B}(x_0, R) :\ \exists\, d_y u,\ \text{y}\ H(y, d_y u) \leq c\}$. Como $H(x, d_x u) \leq c$ ctp, entonces $m(\overline{B}(x_0, R) \setminus E) = 0$. Entonces

$$0 = m(\overline{B}(x_0, R) \setminus E) = \int_{\partial B(0,1)} \int_0^R \mathbb{1}_{E^c}(r, \theta).r^{n-1} dr d\theta$$

Tenemos que $\int_0^R \mathbb{1}_{E^c}(r,\theta).r^{n-1}dr = 0$ para casi todo $\theta \in \partial B(0,1)$.

Sea entonces $V = \{y \in \partial B(x_0,R) : y \sim (R,\theta), \int_0^R \mathbb{1}_{E^c}(r,\theta).r^{n-1}dr = 0\}$. Tenemos entonces que casi todo $y \in \partial B(x,R)$ está en V. Además, si $y \in V$, entonces tenemos que para casi todo punto z del segmento geodésico $[x_0,y]$, existe $d_z u$ y $H(z,d_z u) \leq c$.

Si y en V, y $\gamma : [a,b] \to M$ es una parametrización del segmento geodésico $[x_0,y]$, entonces la desigualdad de Fenchel nos permitirá deducir que para casi todo $t \in [a,b]$ vale que

$$d_{\gamma(t)}u(\dot\gamma(t)) \leq H\big(\gamma(t), d_{\gamma(t)}u\big) + L\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big) \leq c + L\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)$$

Integrando en $t \in [a,b]$ tenemos

$$u(y) - u(x_0) \leq \int_a^b L\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)dt + c\big(b-a\big)$$

En general si $y \in \partial B(x_0,R)$, tenemos que podemos aproximarlo entonces con puntos de V, y por continuidad de u tendremos que la desigualdad anterior valdrá para todo $y \in \partial B(x_0,R)$.

Luego si $\gamma : [a,b] \to M$ es una curva C^1 a trozos cualquiera, y definamos $x = \gamma(a)$ y $y = \gamma(b)$. En este caso, tomamos una partición $\mathcal{P} = \{t_0 = a, t_1, \ldots, t_N = b\}$ de $[a,b]$, y aproximamos γ como una poligonal $\gamma^{\mathcal{P}} = \gamma_0 * \gamma_1 * \ldots * \gamma_{N-1}$, a partir de crear una concatenación de curvas $\gamma_i : [t_i,t_{i+1}] \to M$ que corresponden a los segmentos geodésicos $[\gamma(t_i),\gamma(t_{i+1})]$ para cada $i \in \{0,\ldots,N-1\}$.

Si la partición es suficientemente fina, tendremos entonces que

$$u\big(\gamma(t_{i+1}) - u\big(\gamma(t_i)\big) \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} L\big(\gamma_i(t),\dot\gamma_i(t)\big)dt + c(t_{i+1}-t_i) \quad \forall i \in \{0,\ldots,N-1\}$$

Sumando las N ecuaciones anteriores, tenemos

$$u(t_N) - u(t_0) \leq \sum_{i=0}^{N} \int_{t_i}^{t_{i+1}} L\big(\gamma_i(t),\dot\gamma_i(t)\big)dt + c.(t_{i+1}-t_i)$$

Entonces

$$u(y) - u(x) = \int_a^b L\big(\gamma^{\mathcal{P}}(t),\dot\gamma^{\mathcal{P}}(t)\big)dt + c.(b-a) \tag{24}$$

Al hacer la partición cada vez más fina, tenemos que

$$\int_a^b L\big(\gamma^{\mathcal{P}}(t), \dot{\gamma}^{\mathcal{P}}(t)\big)dt \underset{|\mathcal{P}|\to 0}{\longrightarrow} \int_a^b L\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)dt$$

Por lo tanto, al hacer $|\mathcal{P}| \to 0$ en la ecuación (24) obtenemos que para toda curva γ de clase C^1 a trozos, vale que

$$u(y) - u(x) = \int_a^b L\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)dt + c.(b-a)$$

- $(c \Rightarrow a)$ Si u es dominada por $L + c$ y $\phi \geq u$ es una función de clase C^1, y sea $x \in M$ tal que $\phi(x) = u(x)$. Si tomamos $v \in T_xM$ arbitrario, y una curva $\gamma : [a, b] \to M$ de clase C^1 a trozos tal que $\gamma(b) = x$ y $\dot{\gamma}(b) = v$, entonces tenemos que

$$\phi\big(\gamma(b)\big) - \phi\big(\gamma(t)\big) = u(x) - \phi\big(\gamma(t)\big) \leq u(x) - u\big(\gamma(t)\big) \quad \forall t \in [a, b]$$

Como además u es dominada por $L + c$, entonces obtenemos que para todo $t \in [a, b]$ vale

$$\phi\big(\gamma(b)\big) - \phi\big(\gamma(t)\big) \leq u(x) - u\big(\gamma(t)\big) \leq \int_t^b L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds + c.(b-t) \quad (25)$$

Dividiendo entre $b - t > 0$, deducimos

$$\frac{1}{b-t}\Big(\phi\big(\gamma(b)\big) - \phi\big(\gamma(t)\big)\Big) \leq \frac{1}{b-t}\int_t^b L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds + c$$

Haciendo $t] \to b$ tenemos

$$d_x\phi\big(\dot{\gamma}(b)\big) \leq L\big(\gamma(b), \dot{\gamma}(b)\big) + c$$

Entonces reordenando y sustituyendo $\gamma(b) = x$ y $\dot{\gamma}(b) = v$, obtenemos

$$d_x\phi\big(v\big) - L\big(x, v\big) \leq c$$

Como $v \in T_xM$ es arbitrario, entonces

$$H\big(x, d_x\phi\big) = \sup_{v \in T_xM} d_x\phi\big(v\big) - L\big(x, v\big) \leq c$$

Entonces u es subsolución de viscosidad.

Además u debe ser localmente Lipschitz, pues si tomamos $R > 0$ y $x, y \in M$ tal que $d(x, y) \leq R$, entonces consideremos $\gamma : [0, d(x, y)] \to \mathbb{R}$

geodésica minimizante tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(d(x,y)) = y$. Entonces como u es dominada por $L + c$

$$
\begin{aligned}
u(y) - u(x) &\leq \int_0^{d(x,y)} L\big(\gamma(s), \dot\gamma(s)\big) ds + c.d(x,y) \leq \\
&\leq \left(\max_{z \in \overline{B}(x,R), ||v||_z = 1} |L(z,v)| + c \right).d(x,y)
\end{aligned}
$$

Invirtiendo el sentido de la curva (i.e considerando $\tilde\gamma(t) = \gamma(-t)$), obtenemos

$$
\begin{aligned}
u(x) - u(y) &\leq \int_0^{d(x,y)} L\big(\gamma(s), -\dot\gamma(s)\big) ds + c.d(x,y) \leq \\
&\leq \left(\max_{z \in \overline{B}(x,R), ||v||_z = 1} |L(z,v)| + c \right).d(x,y)
\end{aligned}
$$

Por lo que tomando $K = \max_{z \in \overline{B}(x,R), ||v||_z = 1} |L(z,v)| + c$, tenemos que

$$
|u(x) - u(y)| \leq K.d(x,y)
$$

Por lo que u es una subsolución de viscosidad localmente Lipschitz. $\square$

5. La prueba de esto consiste en dos partes. En una primera etapa se atacará el problema de forma local en un dominio de clausura compacta contenida en un entorno coordenado, y luego se extenderá a todo O usando particiones de la unidad.

   Para la primer etapa, la idea será convolucionar u con una función C^∞ que aproxime a la una delta de dirac, de modo de obtener una aproximación suave de u.

   Sea $U \subset M$ un dominio abierto de un mapa de coordenadas, y $V \subset U$ un abierto tal que $\overline{V} \subset U$ es compacto. Como trabajaremos en un dominio coordenado U, identificamos los puntos de U como puntos en $\mathbb{R}^n$.

   Como $\overline{V}$ es un compacto en el abierto U, entonces existe $\delta_0 > 0$ tal que $\{x : d(x,V) < 2\delta_0\} \subset U$, donde denotamos $d(x,V) = \inf\{d(x,y) : y \in V\}$. Consideramos una familia de funciones $(\rho_\delta)_{0<\delta<\delta_0}$, $\rho_\delta : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ de clase C^∞, con $\rho_\delta(x) = 0$ para todo x con $||x|| < \delta$, y $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\delta(x)dx = 1$.

   Consideraremos entonces

$$
u_\delta(x) = \rho_\delta * u(x) = \int_{B(0,\delta_0)} \rho_\delta(y) u(x-y) dy
$$

Observemos que esto está bien definido para x en un entorno de $\overline{V}$, pues la distancia de V al borde de U es al menos $2\delta_0$, por lo que $x - y$ está en el dominio de u para todo $y \in B(0, \delta_0)$ y todo x en un cierto entorno de $\overline{V}$. Más aún, la función u_δ es de clase C^∞ en un entorno de $\overline{V}$, y $u_\delta \underset{\delta}{\rightrightarrows} u$ en $\overline{V}$ cuando $\delta \to 0$. La prueba de esto puede encontrarse en [14].

Definiremos entonces el supremo esencial de $H(x, d_x u)$ en el abierto U como

$$\mathbb{H}_U(u) = \text{ínf}\{c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} : H(x, d_x u) \leq c \text{ casi todo punto } x \in U\}$$

Probaremos entonces en la primer etapa el siguiente lema

Lema 3.2. *Sea $u : U \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitz, y $\epsilon > 0$, $H : T^*U \to \mathbb{R}$ un hamiltoniano convexo en las fibras. Sea $V \subset U$ tal que $\overline{V} \subset U$ es compacto, entonces existe $\delta > 0$ tal que*

$$\sup_{x \in V} |u_\delta(x) - u(x)| \leq \epsilon$$

y

$$\mathbb{H}_V(u_\delta) \leq \mathbb{H}_U(u) + \epsilon$$

Demostración. Como $u_\delta \underset{\delta}{\rightrightarrows} u$ en $\overline{V}$, entonces solo hace falta probar que para δ suficientemente chico vale que $\mathbb{H}_V(u_\delta) \leq \mathbb{H}_U + \epsilon$. Por un lado, si $\mathbb{H}_U = \infty$ entonces es obvio, por lo que asumiremos que $\mathbb{H}_U < \infty$.

Por un lado, el cociente incremental de u_δ es

$$\frac{u_\delta(x + th) - u_\delta(x)}{t} = \int_{B(0,\delta_0)} \rho_\delta(y) \frac{u(x + th - y) - u(x - y)}{t} dy$$

Observar que si $||t.h|| < \delta_0 - \delta$, y $||y|| < \delta$, entonces los puntos $x + th - y$ y $x - y$ están contenidos en el conjunto compacto $\overline{N}_{\delta_0}(\overline{V}) = \{z : d(z, \overline{V}) \leq \delta_0\} \subset U$, en el cual u tiene entonces una constante de Lipschitz κ_{lip} para todo ese compacto. Entonces $\frac{|u(x+th-y)-u(x-y)|}{t} \leq \kappa_{lip}.\frac{t.||h||}{t} = \kappa_{lip}.||h||$, y como ρ_δ es integrable (en particular $\kappa_{lip}.||h||.\rho_\delta$ es integrable y acota a al integrando de la ecuación anterior), tendremos entonces que podemos usar teorema de convergencia dominada y obtener que

$$\lim_{t \to 0} \frac{u_\delta(x + th) - u_\delta(x)}{t} = \int_{B(0,\delta_0)} \rho_\delta(y) d_{x-y} u(h)\, dy$$

Es decir que

$$d_x u_\delta = \int_{B(0,\delta_0)} \rho_\delta(y) d_{x-y} u \, dy \tag{26}$$

Como $\overline{N}_{\delta_0}(\overline{V})$ es un compacto en U, y u es localmente Lipschitz, entonces existe $K < \infty$ tal que $||d_z u||\ leqK$ para todo $z \in \overline{N}_{\delta_0}(\overline{V})$ tales que $d_z u$ exista.

Como H es continuo y $\overline{N}_{\delta_0}(\overline{V})$ es compacto, entonces H es uniformemente continuo en $\{(z,p) : z \in \overline{N}_{\delta_0}(\overline{V}), ||p||_z \leq K\}$. En particular, para cada $\epsilon > 0$, existe δ_ϵ tal que si $z, z' \in \overline{N}_{\delta_0}(\overline{V})$ son tales que $||z - z'|| < \delta_\epsilon$ y $||p|| \leq K$, entonces

$$|H(z',p) - H(z,p)| \leq \epsilon$$

Entonces, para cada $x \in V$ y para casi todo y con $||y|| < \delta_\epsilon$ tenemos que

$$H\big(x, d_{x-y}u\big) \leq H(x-y, d_{x-y}u\big) + \epsilon \leq \mathbb{H}_U(u) + \epsilon$$

Como H es convexo en las fibras, entonces el conjunto

$$C = \{p \in T_x^*M : H(x,p) \leq \mathbb{H}_U(u) + \epsilon\}$$

es un convexo cerrado. Como ρ_δ es una medida de probabilidad con soporte contenido en $\overline{B}(0,\delta)$, y para todo $y \in \overline{B}(0,\delta)$ tenemos que $d_{x-y}u \in C$ (con C convexo), entonces el valor medio $\int_{B(0,\delta_0)} \rho_\delta(y) d_{x-y}u\, dy$ también está en C. Es decir que para todo $\delta \leq \delta_\epsilon$ vale que

$$H\bigg(x,\ \int_{B(0,\delta_0)} \rho_\delta(y) d_{x-y}u\, dy\bigg) \leq \mathbb{H}_U(u) + \epsilon$$

Usando la ecuación (26) deducimos que

$$H\big(x,\ d_x u_\delta\big) \leq \mathbb{H}_U(u) + \epsilon \quad \forall \delta < \delta_\epsilon$$

Por lo tanto

$$\mathbb{H}_V(u_\delta) \leq \mathbb{H}_U(u) + \epsilon \quad \forall \delta < \delta_\epsilon$$

□

Ahora en la segunda etapa intentaremos probar el punto (6) enunciado en las propiedades luego de la definición 3,4, a partir del lema anterior, usando particiones de la unidad.

Demostración. Sea $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un cubrimiento localmente finito de M (i.e cada punto $x \in M$ tiene un entorno U que intersecta solo finitos $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$), donde para todo i se tiene que $\overline{V}_i$ es compacto y $\overline{V}_i \subset U_i$, siendo U_i el dominio de un mapa de coordenadas con $\overline{U}_i$ compacto.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, se define $J(i) = \{j \in \mathbb{N} : V_i \cap V_j \neq \emptyset\}$. Observar que $i \in J(j)$ si y sólo si $j \in J(i)$.

Como el cumbrimiento $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es localmente finito, y $\overline{V}_i$ es compacto para todo i, tenemos entonces que $\#J(i) < \infty$. Para ver esto, observemos que para cada $x \in M$ existe un entorno U_x que lo contiene tal que U_x intersecta finitos $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Entonces tenemos que $\overline{V}_i \subset \cup_{x\in\overline{V}_i} U_x$. Como $\overline{V}_i$ es compacto, entonces existen $x_1, \ldots, x_n \in \overline{V}_i$ tal que $\overline{V}_i \subset \cup_{k=1}^n U_{x_k}$. Como cualquier V_j que corte con V_i debe cortar entonces con algún U_{x_k} (para algún $k \in \{1, \ldots, n\}$), tendremos entonces que $J(i) \subset \cup_{k=1}^n \{j : V_j \cap U_{x_k}\}$, que es una unión finita de conjuntos finitos, entonces $J(i)$ es finito.

Tenemos entonces que

$$j(i) = \#J(i) < \infty$$

$$\tilde{j}(i) = \max_{l\in J(i)} j(l) < \infty$$

Definimos entonces $R_i = \sup_{x\in\overline{U}_i} ||d_x u||_x < \infty$, donde este supremo se toma sobre los $x \in \overline{U}_i$ donde u es derivable (que tiene medida total por Rademacher, pues U es localmente Lipschitz). Este supremo es finito pues como u es localmente Lipschitz y la clausura del entorno coordenado $\overline{U}_i$ es compacta, entonces existe una constante Lipschitz para todo $\overline{U}_i$.

Como R_l es finito para todo l, y $J(i)$ es un conjunto finito para todo i, entonces

$$\tilde{R}_i = \max_{l\in J(i)} \left(\sup_{x\in\overline{U}_l} ||d_x u||_x \right) = \max_{l\in J(i)} R_l < \infty$$

Sea ahora una partición de la unidad $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de clase C^∞ y subordinada al cubrimiento $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Como θ_i es C^∞ y de soporte compacto para todo i (pues su soporte está contenido en V_i), entonces

$$K_i = \sup_{x\in M} ||d_x \theta_i||_x < \infty$$

Como $\overline{V}_i$ es compacto, entonces el subconjunto $\{(x,p) \in T^*M : x \in \overline{V}_i, ||p||_x \leq \tilde{R}_i + 1\}$ también es compacto. Entonces por continuidad de H, existe $\eta_i > 0$ tal que para todo $x \in \overline{V}_i$, y para todo $p, p' \in T_x^*M$ tales que

$$||p||_x \leq \tilde{R}_i + 1, \quad ||p'||_x \leq \eta_i, \quad H(x,p) \leq c + \frac{1}{2}\epsilon \tag{27}$$

entonces

$$H(x, p + p') \leq c + \epsilon$$

Podemos entonces elegir $\tilde{\eta}_i > 0$ tal que

$$\tilde{\eta}_i.\tilde{j}(i).K_i < \min_{l\in J(i)} \eta_l$$

Como H y $||\cdot||$ son convexas en las fibras, y $\overline{V}_i$ es un compacto contenido en el entorno coordenado U_i, entonces por el lema 3,2 existe $u_i : V_i \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que para todo $x \in V_i$ vale que

$$\begin{cases} |u(x) - u_i(x)| \leq \text{mín}\left(\epsilon, \tilde{\eta}_i\right) \\ H(x, d_x u_i)) \leq \sup_{z \in V_i} H(z, d_z u) + \frac{\epsilon}{2} \leq c + \frac{\epsilon}{2} \\ ||d_x u_i||_x \leq \sup_{z \in V_i} ||d_z u||_z + 1 = R_i + 1 \end{cases} \tag{28}$$

donde los supremos en las dos últimas desigualdades es en los z donde $d_z u$ exista.

Definamos entonces $v = \sum_{i \in \mathbb{N}} \theta_i u_i$, que es claramente de clase C^∞.

Además, dado $x \in V_{i_0}$, entonces tenemos que

$$\sum_{i \in J(i_0)} \theta_i(x) = 1, \qquad v(x) = \sum_{i \in J(i_0)} \theta_i(x) u_i(x) \tag{29}$$

Entonces por un lado

$$|u(x) - v(x)| \leq \sum_{i \in J(i_0)} \theta_i(x) |u(x) - u_i(x)| \leq \sum_{i \in J(i_0)} \theta_i(x) . \epsilon = \epsilon$$

Ahora acotaremos $H(x, d_x v)$. Observemos que nuevamente si $x \in V_{i_0}$ entonces derivando la primer iguldad de la ecuación (29) obtenemos que

$$\sum_{i \in J(i_0)} d_x \theta_i = 0$$

Al calcular $d_x v$ obtenemos

$$d_x v = \sum_{i \in J(i_0)} \theta_i(x) d_x u_i + \sum_{i \in J(i_0)} u_i(x) d_x \theta_i$$

Llamaremos entonces

$$\begin{cases} p(x) = \sum_{i \in J(i_0)} \theta_i(x) d_x u_i \\ p'(x) = \sum_{i \in J(i_0)} u_i(x) d_x \theta_i \end{cases}$$

Por la convexidad de H, como $p(x)$ es una combinación convexa de $d_x u_i$ tenemos entonces (por las condiciones (28) que cumplen los u_i) que

$$H\big(x, p(x)\big) \leq \max_{i \in J(i_0)} H(x, d_x u_i) \leq c + \frac{\epsilon}{2}$$

De manera similar, como $||\cdot||_x$ es convexa tenemos que

$$||p(x)||_x \leq \max_{i\in J(i_0)} ||d_x u_i||_x \leq \max_{i\in J(i_0)} R_i + 1 \leq \tilde{R}_{i_0} + 1$$

Por otro lado, intentemos acotar $||p'(x)||_x$ usando que $\sum_{i\in J(i_0)} d_x\theta_i = 0$:

$$\begin{aligned} ||p'(x)||_x &= \left|\left| \sum_{i\in J(i_0)} u_i(x) d_x\theta_i \right|\right|_x = \left|\left| \sum_{i\in J(i_0)} u_i(x) d_x\theta_i - \sum_{i\in J(i_0)} u(x) d_x\theta_i \right|\right|_x = \\ &= \left|\left| \sum_{i\in J(i_0)} \big(u_i(x) - u(x)\big) d_x\theta_i \right|\right|_x \leq \sum_{i\in J(i_0)} |u_i(x) - u(x)|.||d_x\theta_i||_x \leq \\ &\leq \sum_{i\in J(i_0)} \tilde{\eta}_i.K_i \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos la primer ecuación de (28) y la definición de K_i.

Usando que habíamos definido $\tilde{\eta}_i$ tal que $K_i\tilde{\eta}_i \leq \frac{\eta_{i_0}}{\tilde{j}(i)} \leq \frac{\eta_{i_0}}{j(i_0)}$ para todo $i \in J(i_0)$, obtenemos

$$||p'(x)||_x \leq \sum_{i\in J(i_0)} \frac{\eta_{i_0}}{j(i_0)} = \sum_{i\in J(i_0)} \frac{\eta_{i_0}}{\#J(i_0)} = \eta_{i_0}$$

Luego, por la definición de η_{i_0} (ecuación (27)) y recordando que $d_x v = p(x) + p'(x)$ tenemos entonces que

$$H(x, d_x v) = H(x, p(x) + p'(x)) \leq c + \epsilon$$

Entonces tenemos que v es una función C^∞, con $|u(x) - v(x)| \leq \epsilon$ para todo x, y $H(x, d_x v) \leq c + \epsilon$.

□

3.3. Hamiltonianos coercivos dan soluciones autónomas Lipschitz

Definicion 3.5. Un hamiltoniano $H : T^*M \to \mathbb{R}$ es **coercivo** sobre todo conjunto compacto, si para todo compacto $K \subset M$ y para todo $c \in \mathbb{R}$, se tiene que el conjunto $\{(x,p) \in T^*M : x \in K, H(x,p) \leq c\}$ es compacto.

Se puede ver que la definición anterior es equivalente a pedir que para todo compacto $K \subset M$ se cumpla que

$$H(x,p) \underset{||p||_x\to\infty}{\rightrightarrows} +\infty \quad en\ K$$

donde denotamos con $\rightrightarrows$ a la convergencia uniforme en K.

Teorema 3.3. *Sea $H : T^*M \to \mathbb{R}$ coerciva sobre compactos, y $c \in \mathbb{R}$. Entonces una subsolución de viscosidad u de la ecuación $H(x, d_x u) = c$ es necesariamente localmente lispchitz, y entonces satisface que $H(x, d_x u) \leq c$ en casi todo punto.*

Demostración. Sea $x_0 \in M$, $\epsilon > 0$ tal que $B(x_0, 4\epsilon)$ es un entorno totalmente normal, y $u : M \to \mathbb{R}$ una subsolución de viscosidad de $H(x, d_x u) = c$. Veremos que u es Lipschitz en $\overline{B}(x_0, \epsilon)$. Definamos

$$l_0 = \sup\{||p||_x : \ (x, p) \in T^*M, d(x, x_0) \leq 3\epsilon, H(x, p) \leq c\}$$

Por la coercividad de H, tenemos que $l_0 < \infty$. Sea $l \geq l_0 + 1$ tal que

$$l.2\epsilon > \sup\{|u(x) - u(y)| : \ x, y \in M, d(x, x_0) \leq 3\epsilon, d(y, x_0) \leq 3\epsilon\}$$

Si fijamos $x \in M$ tal que $d(x, x_0) \leq \epsilon$ y definimos $\phi : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(y) = l.d(y, x) \quad \forall y \in M$$

Sea $y_0 \in \overline{B}(x, 2)$ el punto donde el mapa $y \mapsto u(y) - \phi(y)$ se maximiza para $y \in \overline{B}(x, 2\epsilon)$.

Observemos que $y_0 \notin \partial B(x, 2\epsilon)$, pues si tomamos y tal que $d(x, y) = 2\epsilon$ entonces como $2l\epsilon > |u(y) - u(x)|$ obtenemos que

$$u(y) - \phi(y) = u(y) - l.2\epsilon < u(x) = u(x) - \phi(x)$$

Deducimos que y_0 es un maximo local de $u - \phi$.

Si $y_0 \neq x$, entonces ϕ es derivable en y_0 (pues x e y_0 están en una bola totalmente normal) y $||d_{y_0}\phi||_{y_0} = l$. Por otro lado, como y_0 maximiza $u - \phi$, entonces ϕ es una función test para u en el punto y_0, por lo que $H(y_0, d_{y_0}\phi) \leq c$. Es decir que tenemos

$$\begin{cases} ||d_{y_0}\phi||_{y_0} = l \geq l_0 + 1 > l_0 = \sup\{||p||_x : \ d(x, x_0) \leq 3\epsilon, H(x, p) \leq c\} \\ H(y_0, d_{y_0}\phi) \leq c \\ d(y_0, x_0) \leq d(y_0, x) + d(x, x_0) < 2\epsilon + \epsilon = 3\epsilon \end{cases}$$

Esto es absurdo, por lo tanto se debe cumplir que $y_0 = x$. Es decir que el mapa $y \mapsto u(y) - \phi(y) = u(y) - l.d(x, y)$ con $y \in \overline{B}(x, 2\epsilon)$ se maximiza en $y = x$. Es decir que

$$u(x) = u(x) - l.d(x, x) \geq u(y) - l.d(x, y) \quad \forall y \in \overline{B}(x, 2\epsilon)$$

Entonces

$$u(y) - u(x) \leq l.d(y, x) \quad \forall y \in \overline{B}(x, 2\epsilon) \tag{30}$$

Como x era un punto arbitrario en $\overline{B}(x_0, \epsilon)$, y y es cualquier punto en $\overline{B}(x, 2\epsilon) \supset B(x_0, \epsilon)$, entonces

$$u(y) - u(x) \leq l.d(y, x) \quad \forall x, y \in \overline{B}(x_0, \epsilon) \tag{31}$$

Por lo tanto u es Lipschitz en $\overline{B}(x_0, \epsilon)$ con constante de Lipschitz l.

□

Observar que si trataramos el caso de la ecuación de evolución, el hamiltoniano $\hat{H}\big((t, x), (s, p)\big) = s + H(x, p)$ que lleva el problema de evolución a un problema estacionario nunca es coercivo, ya que podemos hacer $s \to -\infty$ y tendremos que $\hat{H} \to -\infty$.

Entonces, es dificil asumir a priori que las subsoluciones de viscosidad de la ecuación de evolución de Hamilton-Jacobi serán localmente lipschitz.

Corolario 3.3.1. *Si $H(x, p)$ es coercivo y tenemos dos subsoluciones de viscosidad $u_1, u_2 : O \to \mathbb{R}$ de $H(x, d_x u) = c$ en el abierto $O \subset M$, entonces* $\text{mín}(u_1, u_2)$ *también es subsolución de viscosidad.*

Demostración. Definamos la función $u = \text{mín}\{u_1, u_2\}$, y tomemos $x, y \in M$.

Sea $j \in \{1, 2\}$ tal que $u(x) = u_j(x)$. Entonces $u(y) \leq u_j(y)$, por lo que

$$u(y) - u(x) = u(y) - u_j(x) \leq u_j(y) - u_j(x)$$

Por el teorema 3,3 tenemos que u_j es subsolución de viscosidad localmente Lipschitz de $H(x, d_x u) = c$, y entonces por el lema 3,1 deducimos que u_j es dominada por $L + c$. Entonces si $\gamma : [a, b] \to M$ es una curva de clase C^1 a trozos tal que $\gamma(a) = x$ y $\gamma(b) = y$, entonces

$$u(y) - u(x) \leq u_j(y) - u_j(x) \leq \int_a^b L\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(d)\big)dt + c.(b - a)$$

Entonces tenemos que u es dominada por $L + c$. Entonces nuevamente por el lema 3,1 tenemos que u es subsolución de viscosidad. □

Corolario 3.3.2. *Si $H(x, p)$ es coercivo y tenemos dos soluciones de viscosidad $u_1, u_2 : O \to \mathbb{R}$ de $H(x, d_x u) = c$ en el abierto $O \subset M$, entonces* $\text{mín}(u_1, u_2)$ *también es solución de viscosidad.*

Demostración. Por el corolario anterior, tenemos que $\text{mín}(u_1, u_2)$ es subsolución de viscosidad, por lo que solo resta ver que es supersolución.

Si $\psi \leq \text{mín}(u_1, u_2)$ es de clase C^1, y $\psi(x_0) = \text{mín}(u_1, u_2)(x_0)$, entonces existe $i \in \{1, 2\}$ tal que $\psi(x_0) = u_i(x_0)$. Observemos que $\psi \leq \text{mín}(u_1, u_2) \leq u_i$ (con igualdad en x_0), por lo que ψ es una función test para la supersolución u_i entonces

$$H(x_0, d_{x_0}\psi) \geq c$$

por lo que $\text{mín}(u_1, u_2)$ es supersolución de viscosidad, y entonces concluímos que es solución de viscosidad. □

3.4. Unicidad y principio del máximo

Teorema 3.4. ***(unicidad)*** *Sea $H : T^*M \to \mathbb{R}$ un hamiltoniano continuo. Si $u : M \to \mathbb{R}$ es una subsolución de viscosidad de $H(x, d_x u) = c_1$, y $v : M \to \mathbb{R}$ es una supersolución de viscosidad de $H(x, d_x v) = c_2$. Si u o v es localmente Lipschitz en M, y $u - v$ tienen un máximo local, entonces $c_2 \leq c_1$.*

Demostración. Sea x_0 donde $u - v$ tiene su maximo local. Sumandole una constante a u, podemos suponer que $u(x_0) = v(x_0)$.

Entonces tenemos que $u \leq v$ en un entorno de x_0, y se alcanza la igualdad en x_0. Podemos suponer que ese es un entorno coordenado de x_0, y tomando entonces un sistema de coordenadas en ese entorno nos permite tratar entonces a los puntos de ese entorno en M como vectores de $\mathbb{R}^n$.

Como $\overline{B}(x_0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ es compacto y u o v es localmente Lipschitz, entonces sea $K < \infty$ la constante de Lipschitz de u o v en $\overline{B}(x_0, 1) \subset \mathbb{R}^n$.

Para cada $l \geq 1$, definimos

$$m_l = \sup_{x,y \in \overline{B}(x_0,1)} u(x) - v(y) - ||x - x_0||^2 - l.||x - y||^2 \tag{32}$$

Observemos que $m_l \geq u(x_0) - v(x_0) - ||x_0 - x_0||^2 - l.||x_0 - x_0||^2 = 0$.

Por la compacidad de $\overline{B}(x_0, 1)$, existen entonces $x_l, y_l \in \overline{B}(x_0, 1)$ tales que

$$0 \leq m_l = u(x_l) - v(y_l) - ||x_0 - x_l||^2 - l.||x_l - y_l||^2 \tag{33}$$

Nuevamente, por la compactidad de $\overline{B}(x_0, 1)$, tenemos entonces que $A = \sup_{x,y \in \overline{B}(x_0,1)} u(x) - v(y) < \infty$. Entonces

$$0 \leq m_l = u(x_l) - v(y_l) - ||x_0 - x_l||^2 - l.||x_l - y_l||^2 \leq A - l.||x_l - y_l||^2$$

Entonces $||x_l - y_l||^2 \leq \frac{A}{l} \to 0$ cuando $l \to \infty$.

Además, por la compacidad de $\overline{B}(x_0,1)$, podemos extraer una subsucesión convergente $x_{l_i} \to x_\infty$, y entonces como $||x_l - y_l|| \to 0$ con $l \to \infty$, tendremos entonces que $y_{l_i} \to x_\infty$.

Usando la ecuación (33) deducimos entonces que

$$0 \leq m_l = u(x_l) - v(y_l) - ||x_0 - x_l||^2 - l.||x_l - y_l||^2 \leq u(x_l) - v(y_l) - ||x_0 - x_l||^2$$

es decir que

$$0 \leq u(x_l) - v(y_l) - ||x_0 - x_l||^2$$

y pasando al límite en la sucesiones x_{l_i}, y_{l_i} obtenemos

$$0 \leq u(x_\infty) - v(x_\infty) - ||x_0 - x_\infty||^2$$

En particular como $u \leq v$, entonces $||x_0 - x_\infty|| = 0$, es decir que $x_0 = x_\infty$.

Como entonces las sucesiones x_{l_i}, y_{l_i} convergen a x_0, entonces a menos de descartar finitos términos, podemos suponer que la subsucesión l_i la habíamos tomado de modo que $x_{l_i}, y_{l_i} \in B(x_0,1)$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Entonces, por como definimos m_l en la ecuación (32), y usando que los puntos x_{l_i} y y_{l_i} son los que realizan el supremos de esa definición, tenemos que la función

$$x \mapsto u(x) - \big(v(y_{l_i}) + ||x_0 - x||^2 + l_i ||x - y_{l_i}||^2\big)$$

alcanza un máximo local en $x = x_{l_i}$. Observemos que la función $\phi(x) = v(y_{l_i}) + ||x_0 - x||^2 + l_i||x - y_{l_i}||^2$ es de clase C^∞, y es entonces una función test para la subsolución de viscosidad u en el punto x_{l_i}. Usando entonces que u es subsolución de viscosidad de $H(x, d_x u) = c_1$ obtenemos

$$H\big(x_{l_i}, d_{x_{l_i}}\phi\big) \leq c_1 \tag{34}$$

Del mismo modo, el mapa

$$y \mapsto u(x_{l_i}) - v(y) - ||x_0 - x_{l_i}||^2 - l_i||x_{l_i} - y||^2$$

tiene un máximo local en $y = y_{l_i}$, o lo que es lo mismo que

$$y \mapsto v(y) - \big(u(x_{l_i}) - ||x_0 - x_{l_i}||^2 - l_i||x_{l_i} - y||^2\big)$$

tiene un mínimo local en $y = y_{l_i}$. La función $\psi(y) = u(x_{l_i}) - ||x_0 - x_{l_i}||^2 - l_i||x_{l_i} - y||^2$ es de clase C^∞, y es entonces una función test para la supersolución de viscosidad v en el punto y_{l_i}. Usando entonces que v es supersoluciones de $H(x, d_x v) = c_2$, obtenemos

$$H(y_{l_i}, d_{y_{l_i}}\psi) \geq c_2 \tag{35}$$

Usando las expresiones de ϕ y ψ, tenemos que las expresiones de las funciones lineales $d_{x_{l_i}}\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y de $d_{y_{l_i}}\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son

$$\begin{cases} d_{x_{l_i}}\phi(\cdot) = \langle\, x_{l_i} - x_0 + l_i(x_{l_i} - y_{l_i}), \cdot\,\rangle \\ d_{y_{l_i}}\psi(\cdot) = l_i\langle\, x_{l_i} - y_{l_i}, \cdot\,\rangle \end{cases}$$

donde $\langle\, \cdot, \cdot\,\rangle$ es el producto interno usual de $\mathbb{R}^n$.

Si consideramos entonces entonces $d_{x_{l_i}}\phi - d_{y_{l_i}}\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tenemos que

$$\big(d_{x_{l_i}}\phi - d_{y_{l_i}}\big)(\cdot) = \langle\, x_{l_i} - x_0, \cdot\,\rangle$$

por lo que

$$||d_{x_{l_i}}\phi - d_{y_{l_i}}\psi|| = ||x_{l_i} - x_0|| \to 0 \tag{36}$$

Como además u o v tiene constante de Lipschitz K, tenemos que

$$||d_{x_{l_i}}\phi|| \leq K \quad \text{o} \quad ||d_{y_{l_i}}\psi|| \leq K \tag{37}$$

Usando entonces los resultados (36) y (37), podremos construir entonces una subsucesión donde $\operatorname{lím} d_{x_{l'_i}}\phi = \operatorname{lím} d_{y_{l'_i}}\psi = p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Por lo tanto, usando las ecuaciones (34) y (35), y la continuidad del hamiltoniano $H : T^*M \to \mathbb{R}$, tendremos que

$$\begin{cases} c_1 \geq \operatorname{lím} H\big(x_{l'_i}, d_{x_{l'_i}}\phi\big) = H\big(x_0, p\big) \\ c_2 \leq \operatorname{lím} H\big(y_{l'_i}, d_{y_{l'_i}}\psi\big) = H\big(x_0, p\big) \end{cases}$$

lo que implica que $c_2 \leq c_1$.

$\square$

Lema 3.5. *Si $O \subset M$ es un abierto y $u : (a,b) \times O \to \mathbb{R}$ es una subsolución de viscosidad de $\partial_t U + H(x, \partial_x U) = 0$. Si $m \in \mathbb{R}$ y $\rho : (a,b) \to \mathbb{R}$ es C^1 con $\frac{d\rho}{dt} \leq m$, entonces $u(t,x) + \rho(t)$ es subsolución de viscosidad de $\partial_t U + H(x, \partial_x U) = m$.*

Demostración. Sea $\phi(t,x) \geq u(t,x) + \rho(t)$ de clase C^1, y consideremos entonces

$$\hat{\phi}(t,x) = \phi(t,x) - \rho(t) \geq u(t,x)$$

Entonces $\hat{\phi}(t,x)$ es una función test para $u(t,x)$, y además tenemos que

$$\hat{\phi}(t_0,x_0) = u(t_0,x_0) \iff \phi(t_0,x_0) = u(t_0,x_0) + \rho(t_0)$$

Entonces, si (t_0, x_0) es tal que $\phi(t_0, x_0) = u(t_0, x_0) + \rho(t_0)$ tenemos que como u es subsolución de viscosidad de $H(x, \partial_x u) + \partial_t u = 0$ entonces

$$H\big(x_0, \partial_x \hat{\phi}(t_0, x_0)\big) + \partial_t \hat{\phi}(t_0, x_0) \leq 0$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} H\big(x_0, \partial_x \phi(t_0, x_0)\big) + \partial_t \phi(t_0, x_0) &= H\big(x_0, \partial_x \hat{\phi}(t_0, x_0)\big) + \partial_t \big(\hat{\phi}(t, x) + \rho(t)\big)(t_0, x_0) = \\ &= H\big(x_0, \partial_x \hat{\phi}(t_0, x_0)\big) + \partial_t \hat{\phi}(t_0, x_0) + \frac{d\rho}{dt}(t_0) \leq m \end{aligned}$$

por lo que $u(x, t) + \rho(t)$ es subsolución de viscosidad de $\partial_t U + H(x, \partial_x U) = m$

$\square$

El teorema 3,4 de unicidad implica el siguiente principio del máximo para la ecuación de evolución

Teorema 3.6. ***(principio del máximo, versión Lipschitz)*** *Sea $H : T^*M \to \mathbb{R}$ un hamiltoniano continuo en la variedad M. Sean $u, v : [a, b] \times C \to \mathbb{R}$ continuas, donde $C \subset M$ es un subconjunto compacto, con u una subsolución de viscosidad y v una supersolución de viscosidad de la ecuación $\partial_t U + H(x, \partial_x U) = 0$ en $(a, b) \times \mathring{C}$. Si además u o v es localmente Lipschitz, entonces*

$$\max_{[a,b]\times C} u - v = \max_{\{a\}\times C \cup [a,b]\times \partial C} u - v$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$, y definimos $u_{\epsilon,\delta} : [a, b) \times C \to \mathbb{R}$ como

$$u_{\epsilon,\delta}(t, x) = u(t, x) - \epsilon(t - a) - \frac{\delta}{b - t}$$

Observar que $\lim_{t\to b} \; u_{\epsilon,\delta}(t, x) = -\infty$, y que $u_{\epsilon,\delta} \leq u$.

Más aún, la función $t \mapsto \rho(t) = -\epsilon(t - a) - \frac{\delta}{b-t}$ es C^1 con derivada $t \mapsto -\epsilon - \frac{\delta}{(b-t)^2} \leq -\epsilon$, lo cual implica (por el lema 3,5) que $u_{\epsilon,\delta}$ sea subsolución de viscosidad para

$$\partial_t u_{\epsilon,\delta} + H(x, \partial_x u_{\epsilon,\delta}) = -\epsilon$$

Si consideramos el hamiltoniano $\hat{H} : T^*(\mathbb{R} \times M) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\hat{H}\big((t, x), (s, p)\big) = s + H(x, p)$$

entonces $u_{\epsilon,\delta}$ es una subsolución de viscosidad de la ecuación estacionaria

$$\hat{H}\big((t, x), d_{t,x} u_{\epsilon,\delta}\big) = -\epsilon \quad (t, x) \in (a, b) \times \mathring{C}$$

Además, como v era supersolución de viscosidad de la ecuación no autónoma $\partial_t v + H(x, \partial_x v) = 0$, tendremos entonces que v será supersolución de viscosidad de

$$\hat{H}\big((t,x), d_{t,x}v\big) = 0 \quad (t,x) \in (a,b) \times \mathring{C}$$

Si u es localmente lipschitz en $(a,b) \times \mathring{C}$, entonces (como $u_{\epsilon,\delta} - u$ es C^1) tendríamos que $u_{\epsilon,\delta}$ también sería localmente lipschitz.

Por lo tanto, como u o v es localmente Lipschitz, entonces $u_{\epsilon,\delta}$ o v es localmente lipschitz. Esto nos permite usar el teorema 3,4 de unicidad con las funciones $u_{\epsilon,\delta}$ y v para el hamiltoniano $\hat{H}$, pues tenemos $u_{\epsilon,\delta}$ subsolución de viscosidad

$$\hat{H}\big((t,x), d_{t,x}u_{\epsilon,\delta}\big) = -\epsilon\ (= c_1) \quad \text{en } (t,x) \in (a,b) \times \mathring{C}$$

y v supersolución de viscosidad para

$$\hat{H}\big((t,x), d_{t,x}v\big) = 0\ (= c_2) \quad \text{en } (t,x) \in (a,b) \times \mathring{C}$$

Como $c_1 = -\epsilon < 0 = c_2$, entonces (por el contrarecíproco) de ese teorema concluímos que $u_{\epsilon,\delta} - v$ no puede tener un máximo local en $(a,b) \times \mathring{C}$.

Por otra parte, como $u_{\epsilon,\delta}(t,x) = u(t,x) - \epsilon(t-a) - \frac{\delta}{b-t} \to -\infty$ cuando $t \to b$, entonces si consideramos $b' < b$ suficientemente cercano a b, como $[a,b'] \times C$ es compacto, tendremos que $u_{\epsilon,\delta} - v\big|_{[a,b'] \times C}$ debe alcanzar su máximo en un punto de $\{a\} \times C \cup [a,b'] \times \partial C \subset \{a\} \times C \subset [a,b) \times \partial C$ (pues no puede darse en el interior ni en $t = b$).

Como $u_{\epsilon,\delta} \leq u$, entonces

$$u_{\epsilon,\delta} - v \leq \max_{\{a\} \times C \cup [a,b) \times \partial C} u_{\epsilon,\delta} - v \leq \max_{\{a\} \times C \cup [a,b) \times \partial C} u - v$$

en $[a,b) \times C$. Haciendo $\delta, \epsilon \to 0$ obtenemos

$$u - v \leq \max_{\{a\} \times C \cup [a,b) \times \partial C} u - v$$

en $[a,b) \times C$. Además, por continuidad de u y v, tenemos que esta desigualdad vale en todo $[a,b] \times C$, por lo que tomando máximo en $[a,b] \times C$ obtenemos

$$\max_{[a,b] \times C} u - v \leq \max_{\{a\} \times C \cup [a,b) \times \partial C} u - v$$

$\square$

Observación. *Podemos observar que si u o v fueran ambas soluciones de viscosidad de la ecuación de evolución de Hamilton-Jacobi tales que coinciden en $\big(\{a\} \times C\big) \cup \big([a, b) \times \partial C\big)$, con alguna de ellas localmente Lipschitz, entonces el teorema anterior nos dice que*

$$\begin{cases} \max_{[a,b]\times C} \ u - v = \max_{\{a\}\times C \cup [a,b)\times \partial C} \ u - v = 0 \\ \min_{[a,b]\times C} \ u - v = \min_{\{a\}\times C \cup [a,b)\times \partial C} \ u - v = 0 \end{cases}$$

donde la segunda ecuación la obtuvimos cambiando el rol de u con v (pues son soluciones). Por lo tanto este nos garantiza que $u = v$ en $[a, b] \times C$.

Veremos luego que si asumimos que H es coerciva en conjuntos compactos, las subsoluciones de viscosidad de la ecuación de evolución se pueden aproximar con subsoluciones Lipschitz. Esto nos permite retirar la hipótesis de que u o v sea localmente Lipschitz mediante un paso al límite bajo hipótesis de coercividad en el hamiltoniano.

Observación. *Como el teorema* 3,3 *garantiza que las soluciones de viscosidad para la ecuación estacionaria de Hamilton-Jacobi son localmente Lipschitz para hamiltonianos coercivos, obtuvimos entonces un teorema de unicidad de soluciones de viscosidad (bajo condiciones iniciales y restricciones de borde) a la ecuación estacionaria de Hamilton-Jacobi para hamiltonianos coercivos.*

3.5. Hamiltonianos y lagrangianos de Tonelli

Recordamos a continuación la definición de hamiltonianos de Tonelli vista en los preliminares.

Definicion 3.6. Un hamiltoniano $H : T^*M \to \mathbb{R}$ es de **Tonelli** si es C^2 y satisface

1. Supelinealidad:

$$C^*(K) = \sup_{(x,p)\in T^*M} K||p||_x - H(x, p) < \infty \quad \forall K \geq 0$$

2. Acotación uniforme en las fibras:

$$A^*(R) = \sup_{(x,p)\in T^*M} \{H(x, p); ||p||_x \leq R\} < \infty \quad \forall R \geq 0$$

3. C^2 estrictamente convexo: $\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(x, p)$ es definido positivo $\forall (x, p) \in T^*M$

Definicion 3.7. Dado un hamiltoniano $H : T^*M \to \mathbb{R}$ de Tonelli, se define su **lagrangiano** asociado $L : TM \to \mathbb{R}$ como

$$L(x, v) = \sup_p \{p(v) - H(x, p) : p \in T_x^*M\}$$

Observación. *Observar que $L(x, v)$ es finita en todo punto, pues*

- $L(x, v) \geq 0(v) - H(x, 0) = -H(x, 0)$
- $L(x, v) = \sup_p p(v) - H(x, p) \leq \sup_p ||v||_x ||p||_x - H(x, p) = C^*(||v||_x)$

Como vimos en los preliminares, el lagrangiano L asociado a un hamiltoniano H de Tonelli, es también de Tonelli con respecto a la métrica Riemanniana g. Es decir que $L : TM \to \mathbb{R}$ será de clase C^2 y verificará

1. Supelinealidad:
$$C(K) = \sup_{(x,v) \in TM} K||v||_x - L(x, v) < \infty \quad \forall K \geq 0$$
2. Acotación en las fibras:
$$A(R) = \sup_{(x,v) \in TM} \{L(x, v); ||v||_x \leq R\} < \infty \quad \forall R \geq 0$$
3. C^2 estrictamente convexo: $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v)$ es definido positivo $\forall (x, v) \in TM$

Ejemplo 3.7. *Si $H_0(x, p) = \frac{1}{2}||p||_x^2$, veamos cual es su lagrangiano asociado $L_0 : TM \to \mathbb{R}$. Por un lado*

$$\begin{aligned} L_0(x, v) = \sup_p \ p(v) - \frac{1}{2}||p||_x^2 \leq \sup_p \ ||p||_x ||v||_x - \frac{1}{2}||p||_x^2 = \\ = \sup_p \ \frac{1}{2}||v||_x^2 - \frac{1}{2}(||p||_x - ||v||_x)^2 = \\ = \frac{1}{2}||v||_x^2 \end{aligned}$$

Es decir que $L_0(x, v) \leq \frac{1}{2}||v||_x^2$. Por otro lado puede verse que la igualdad se alcanza considerando el operador $p_v(\cdot) = g_x(\,\cdot\,, v) \in T_x^*M$ (y claramente por Cauchy-Schwarz tenemos que $||p_v|| = ||v||$). Es decir que

$$L_0(x, v) \geq p_v(v) - \frac{1}{2}||p_v||_x^2 = ||v||_x^2 - \frac{1}{2}||v||_x^2 = \frac{1}{2}||v||_x^2$$

Por lo tanto, concluímos que

$$L_0(x,v) = \frac{1}{2}||v||_x^2$$

Las funciones $C_0(K)$ y $A_0(R)$ de supelinealidad y acotación uniforme en las fibras son entonces

$$\begin{aligned} C_0(K) = \sup_{(x,v)\in TM} K||v||_x - L_0(x,v) = \sup_{(x,v)\in TM} K||v||_x - \frac{1}{2}||v||_x^2 = \\ = \sup_{(x,v)\in TM} \frac{K^2}{2} - \frac{1}{2}\big(K - ||v||_x\big)^2 = \\ = \frac{K^2}{2} \end{aligned}$$

$$A_0(R) = \sup_{(x,v)\in TM} \{L_0(x,v) : ||v||_x \leq R\} = \sup_{(x,v)\in TM} \{\frac{||v||_x^2}{2} : ||v||_x \leq R\} = \frac{R^2}{2}$$

Ejemplo 3.8. *Si $V : M \to \mathbb{R}$ es una función C^2, y consideramos el hamiltoniano de Tonelli $H_V(x,p) = \frac{1}{2}||p||_x^2 + V(x)$, entonces su lagrangiano asociado es*

$$L_V(x,v) = \sup_p \ p(v) - H_V(x,p) = \big(\sup_p \ p(v) - \frac{1}{2}||p||_x^2\big) - V(x) = \frac{1}{2}||v||_x^2 - V(x)$$

Donde usamos que $L_0(x,v) = \frac{1}{2}||v||_x^2 = \sup_p \ p(v) - \frac{1}{2}||p||_x^2\big)$

4. Semigrupo de Lax-Oleinik

4.1. Mínima acción entre 2 puntos a tiempo fijo

En esta sección se definirá el operador de Lax-Oleinik, para el cual veremos en próximos capítulos que nos permitirá caracterizar las soluciones de viscosidad a partir de su condición inicial al tratar con hamiltonianos de Tonelli.

Recordamos ahora la noción de acción sobre una curva,

Definicion 4.1. Si $\gamma : [a,b] \to M$ es una curva C^1 a trozos, y $L : TM \to \mathbb{R}$ es un lagrangiano, definimos la **acción** de la curva γ como

$$\mathbb{L}(\gamma) = \int_a^b L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds$$

Se recuerda (como se vio más formalmente en los preliminares), que una curva $\gamma : [a, b] \to M$ es extremal si es crítica de la acción. Esta familia de curvas se caracterizó a partir del sistema de ecuaciones de Euler-Lagrange.

Como caso particular, habíamos definido las curvas minimizantes $\gamma : [a, b] \to M$ como aquellas tal que para cualquier otra curva $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}$ con mismos extremos, entonces $\mathbb{L}(\gamma) \leq \mathbb{L}(\delta)$.

Observación. *Si L es de Tonelli, entonces la acción se puede acotar inferiormente usando la superlinealidad de L, pues como*

$$C(0) = \sup_{(\hat{x},\hat{v})\in TM} 0||\hat{v}||_{\hat{x}} - L(\hat{x}, \hat{v}) \geq -L(x, v) \quad \forall (x, v) \in TM$$

Entonces

$$\mathbb{L}(\gamma) = \int_a^b L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds \geq \int_a^b -C(0)ds = -C(0)\big(b - a\big)$$

Observación. *Como estamos considerando lagrangianos autónomos (no dependen del tiempo), tenemos entonces que si una curva $\gamma : [a, b] \to M$ es extremal (resp. minimizante) de la acción, entonces la curva trasladada s en el tiempo $\gamma_s : [a-s, b-s]$ dada por*

$$\gamma_s(t) = \gamma(s + t)$$

también será extremal (resp. minimizante).

El siguiente teorema de existencia de curvas minimizantes se debe a Tonelli, y puede encontrarse en [3]

Teorema 4.1. ***(Tonelli)*** *Si L es un lagrangiano de Tonelli, $a, b \in \mathbb{R}$ y $x, y \in M$, entonces existe una curva $\gamma \in \mathcal{C}_{[a,b]}(x, y)$ minimizante. Más aún, la regularidad de γ coincide con la de L.*

Definicion 4.2. Si $x, y \in M$, y $t > 0$, definimos $h_t(x, y)$ la **mínima acción en tiempo** t entre x e y como

$$h_t(x, y) = \inf_{\gamma} \left\{ \int_0^t L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds : \ \gamma \in \mathcal{C}_{[0,t]}(x, y) \right\} \tag{38}$$

Observación. *Por el teorema de Tonelli, si L es de Tonelli entonces para todo $t > 0$ y para todo $x, y \in M$, existe $\gamma : [0, t] \to M$ tal que*

$$\mathbb{L}(\gamma) = h_t(x, y)$$

y además, la regularidad de γ coincide con la de L.

Observación. *Una curva $\gamma : [a,b] \to M$ es minimizante si y sólo si*

$$h_{b-a}\big(\gamma(a), \gamma(b)\big) = \mathbb{L}(\gamma)$$

Ejemplo 4.2. *Para el lagrangiano $L_0 : TM \to \mathbb{R}$ definido por $L_0(x,v) = \frac{1}{2}||v||_x^2$, si $\gamma : [a,b] \to M$ es una curva que une x con y (es decir, $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$) entonces por Cauchy Schwarz*

$$d(x,y) \leq l_g(\gamma) = \int_a^b ||\dot{\gamma}(s)||_{\gamma(s)} ds \leq \left(\int_a^b ||\dot{\gamma}(s)||^2_{\gamma(s)} ds \right)^{1/2} \left(\int_a^b 1^2 ds \right)^{1/2}$$

donde la primer desigualdad es igualdad si γ realiza la distancia entre x e y, y la segunda desigualdad alcanza la igualdad si $||\dot{\gamma}(s)||_{\gamma(s)}$ es constante (es decir, γ debe estar parametrizada proporcionalmente a su longitud de arco). Despejando entonces obtenemos

$$\frac{d(x,y)}{\sqrt{b-a}} \leq \left(\int_a^b ||\dot{\gamma}(s)||^2_{\gamma(s)} ds \right)^{1/2}$$

por lo que

$$\frac{d(x,y)^2}{b-a} \leq \int_a^b ||\dot{\gamma}(s)||^2_{\gamma(s)} ds = 2. \int_a^b \frac{1}{2} ||\dot{\gamma}(s)||^2_{\gamma(s)} ds = 2\mathbb{L}_0(\gamma)$$

Entonces

$$\mathbb{L}_0(\gamma) \geq \frac{d(x,y)^2}{2(b-a)}$$

donde como dijimos antes, se alcanza esta igualdad si γ realiza la distancia entre x e y y γ se recorre con velocidad constante. Notar que como suponíamos que la métrica g era completa en M, tenemos que siempre existe dicha geodésica entre x e y, y podemos elegir el parámetro temporal para que se recorra con velocidad constante en $[a,b]$, por lo tanto

$$h_t^0(x,y) = \frac{d(x,y)^2}{2t}$$

Ejemplo 4.3. *Sea el lagrangiano $L_V : TM \to \mathbb{R}$ definida por*

$$L_V(x,v) = \frac{1}{2}||v||_x^2 - V(x)$$

donde $V : M \to \mathbb{R}$ es una función C^2 acotada. Consideremos entonces una curva $\gamma : [a,b] \to M$ uniendo los puntos x e y. Como

$$\frac{1}{2}||v||_x^2 - \sup V \leq \frac{1}{2}||v||_x^2 - V(x) \leq \frac{1}{2}||v||_x^2 - \text{ínf}\, V$$

Tenemos entonces integrando sobre la curva γ que

$$\mathbb{L}_0(\gamma) - (b-a).\sup V \leq \mathbb{L}_V(\gamma) \leq \mathbb{L}_0(\gamma) - (b-a).\inf V \tag{39}$$

donde $\mathbb{L}_0$ es la acción del lagrangiano del ejemplo anterior ($L_0 = \frac{1}{2}||v||_x^2$) y $\mathbb{L}_V$ es la acción del lagrangiano L_V.

Tomando ínfimo en la ecuación (39) entre todas las curvas $\gamma : [a,b] \to M$ con extremos en x e y tenemos que

$$\frac{d(x,y)^2}{2(b-a)} - (b-a).\sup V \leq h_{b-a}^V(x,y) \leq \frac{d(x,y)^2}{2(b-a)} - (b-a).\inf V$$

O lo que es lo mismo que

$$\frac{d(x,y)^2}{2t} - t.\sup V \leq h_t^V(x,y) \leq \frac{d(x,y)^2}{2t} - t.\inf V \quad \forall t > 0$$

Proposición 4.4. ***(propiedades de la mínima acción)*** *Si L es de Tonelli, entonces la función $h_t : M \times M \to \mathbb{R}$ cumple las siguientes propiedades*

1. *Para todo $K \geq 0$, $t > 0$, y para todo $x, y \in M$ vale que*

   $$K.d(x,y) - C(K).t \leq h_t(x,y) \leq t.A\left(\frac{d(x,y)}{t}\right)$$

   donde $C(K)$ y $A(R)$ son las funciones de la definición de lagrangiano de Tonelli.

2. *(propiedad de semigrupo): Para todo $t, t' > 0$, y para todo $x, y \in M$, vale que*

   $$h_{t+t'}(x,y) = \inf_{z \in M} h_t(x,z) + h_{t'}(z,y)$$

Demostración. **(1)** Probaremos primero el primer punto (las cotas de la mínima acción). Consideremos una curva $\gamma : [0,t] \to M$, con $\gamma(0) = x$ y $\gamma(t) = y$.

Sabemos por la condición de supelinealidad de Tonelli que

$$L\big(\gamma(s), \dot\gamma(s)\big) \geq K||\dot\gamma(s)||_{\gamma(s)} - C(K) \quad \forall s \in [0,t]$$

Integrando en $[0,t]$ se obtiene

$$\mathbb{L}(\gamma) \geq K.l_g(\gamma) - C(K).t \geq K.d(x,y) - C(K).t$$

Como esto se cumple para cualquier curva $\gamma : [0,t] \to M$ que una x con y, si consideramos en la ecuación el ínfimo entre todas estas curvas tenemos

$$h_t(x,y) \geq K.d(x,y) - C(K).t \tag{40}$$

Luego, para la otra desigualdad, como la variedad M con la métrica g es completa, podemos considerar una curva geodésica $\gamma : [0,t] \to M$ que realiza la distancia entre x e y, y que esté recorrida con velocidad constante. En particular tendremos que

$$d(x,y) = \int_0^t ||\dot{\gamma}(s)||_{\gamma(s)} ds = ||\dot{\gamma}(s)||_{\gamma(s)}.t \quad \forall s \in [0,t]$$

donde usamos que $||\dot{\gamma}(s)||_{\gamma(s)} = cte$. Entonces

$$||\dot{\gamma}(s)||_{\gamma(s)} = \frac{d(x,y)}{t} \quad \forall s \in [0,t]$$

Luego, por la acotación uniforme de loa lagrangianos fe Tonelli en las fibras, tenemos

$$L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big) \leq A\bigg(\frac{d(x,y)}{t}\bigg) \quad \forall s \in [0,t]$$

Integrando en $[0,t]$ obtenemos

$$\mathbb{L}(\gamma) \leq t.A\bigg(\frac{d(x,y)}{t}\bigg)$$

Luego, como $h_t(x,y) \leq \mathbb{L}(\gamma)$, tenemos entonces que

$$h_t(x,y) \leq t.A\bigg(\frac{d(x,y)}{t}\bigg) \tag{41}$$

Concluímos entonces con las ecuaciones (40) y (41) que

$$K.d(x,y) - C(K).t \leq h_t(x,y) \leq t.A\bigg(\frac{d(x,y)}{t}\bigg)$$

(2) Para probar el segundo punto (la propiedad de semigrupo), consideremos $x, y \in M$, y una curva $\gamma : [0, t+t'] \to M$ que realiza la mínima acción entre x e y. Entonces

$$\begin{aligned} h_{t+t'}(x,y) = \int_0^{t+t'} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big) ds = \int_0^t L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big) ds + \int_t^{t+t'} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big) ds \\ \geq h_t\big(x, \gamma(t)\big) + h_{t'}\big(\gamma(t), y\big) \end{aligned}$$

entonces

$$h_{t+t'}(x,y) \geq h_t\big(x, \gamma(t)\big) + h_{t'}\big(\gamma(t), y\big) \geq \inf_z \; h_t(x,z) + h_{t'}(z,y) \tag{42}$$

Luego, sea $z \in M$, y consideremos $\gamma_1 : [0,t] \to M$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(t) = z$. Análogamente consideremos otra curva $\gamma_2 : [0,t'] \to M$ tal que $\gamma(0) = z$ y $\gamma(t') = y$.

Sea $\gamma : [0, t + t'] \to M$ la concatenación, es decir

$$\gamma(s) = \begin{cases} \gamma_1(s) & \text{si } s \in [0, t] \\ \gamma_2(s - t) & \text{si } s \in [t, t + t'] \end{cases}$$

Tenemos entonces en particular que $\gamma : [0, t + t'] \to M$ es una curva C^1 a trozos que une x con y, entonces

$$\begin{aligned} h_{t+t'}(x, y) \leq \int_0^{t+t'} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds = \int_0^{t} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds + \int_t^{t+t'} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds \leq \\ = \int_0^{t} L\big(\gamma_1(s), \dot{\gamma}_1(s)\big)ds + \int_0^{t'} L\big(\gamma_2(s), \dot{\gamma}_2(s)\big)ds = \\ = \mathbb{L}(\gamma_1) + \mathbb{L}(\gamma_2) \end{aligned}$$

Como tenemos entonces

$$h_{t+t'}(x, y) \leq \mathbb{L}(\gamma_1) + \mathbb{L}(\gamma_2)$$

para toda curva γ_1 que une x con z en tiempo t y toda curva γ_2 que une z con y en tiempo t', si consideramos el ínfimo dentro de todas las γ_1 y γ_2 con estos extremos obtenemos

$$h_{t+t'}(x, y) \leq h_t(x, z) + h_{t'}(z, y)$$

Como el punto z era un punto arbitrario en M, tenemos entonces que

$$h_{t+t'}(x, y) \leq \inf_z \ h_t(x, z) + h_{t'}(z, y) \tag{43}$$

Entonces, juntando la desigualdad (42) con (43), deducimos que

$$h_{t+t'}(x, y) = \inf_z \ h_t(x, z) + h_{t'}(z, y)$$

□

4.2. Semigrupo negativo de Lax-Oleinik

Definiremos a continuación el **semigrupo negativo de Lax-Oleinik** T_t^-, $t \geq 0$.

Definicion 4.3. Si $u : M \to [-\infty, +\infty]$ es una función cualquiera y $t > 0$, se define la función $T_t^- u : M \to [-\infty, +\infty]$ como

$$T_t^- u(x) = \inf_\gamma \left\{ u\big(\gamma(0)\big) + \int_0^t L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds : \ \gamma \in \mathcal{C}_{[0,t]}(\cdot, x) \right\}$$

Si $t = 0$, se define

$$T_0^- u = u$$

Proposición 4.5. *Se cumple la siguiente relación entre T_t^- y h_t*

$$T_t^- u(x) = \inf_{y \in M} u(y) + h_t(y,x)$$

Demostración. Recordando que

$$h_t(y,x) = \inf_{\gamma} \left\{ \int_0^t L\big(\gamma(s),\dot{\gamma}(s)\big)ds : \ \gamma \in \mathcal{C}_{[0,t]}(y,x) \right\}$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} T_t^- u(x) &= \inf_y \inf_\gamma \left\{ u(y) + \mathbb{L}(\gamma) : \ \gamma \in \mathcal{C}_{[0,t]}(y,x) \right\} = \\ &= \inf_y \left\{ u(y) + \inf_\gamma \left\{ \mathbb{L}(\gamma) : \ \gamma \in \mathcal{C}_{[0,t]}(y,x) \right\} \right\} \end{aligned}$$

entonces

$$T_t^- u(x) = \inf_{y \in M} u(y) + h_t(y,x)$$

□

Proposición 4.6. *El semigrupo negativo T_t^- de Lax-Oleinik cumple las siguientes propiedades*

1. *Si L de Tonelli, entonces $T_t^- u(x) \leq u(x) + A(0).t$ para todo $x \in M$ y $t \geq 0$*
2. *Si $\exists x \in M$ tal que $u(x) < \infty$, entonces $T_t^- u(y) < \infty \quad \forall\, y \in M, \forall\, t > 0$*
3. *Si $\exists x \in M$ tal que $u(x) = -\infty$, entonces $T_t^- u(y) = -\infty \quad \forall\, y \in M, \forall\, t > 0$*
4. *Si $c \in \mathbb{R}$, entonces $T_t^-(u+c) = T_t^-(u) + c$*
5. *Si $u(x) \leq v(x)\ \forall x \in M$, entonces $T_t^- u(x) \leq T_t^- v(x)\ \forall x \in M$*
6. *$-||u-v||_\infty + T_t^- v \leq T_t^- u \leq T_t^- v + ||u-v||_\infty$, donde $||\cdot||_\infty$ es la distancia uniforme, que se define como $||u-v||_\infty = \sup_{x \in M} |u(x)-v(x)|$*
7. *(propiedad de semigrupo): Si L de Tonelli, entonces $T_{t+t'}^- = T_t^- \circ T_{t'}^-$ para todo $t, t' \geq 0$*

Demostración. **(1)** Recordemos primero una de las propiedades de la función mínima acción h_t probadas en 4,4, indica que:

$$h_t(x,y) \leq t.A\left(\frac{d(x,y)}{t}\right)$$

Entonces

$$T_t^- u(x) = \inf_y u(y)+h_t(y,x) \leq u(x)+h_t(x,x) \leq u(x)+t.A\left(\frac{d(x,x)}{t}\right) = u(x)+t.A(0)$$

(2) Sea x tal que $u(x) < \infty$, y sea $y \in M$. Entonces

$$T_t^- u(y) = \inf_z u(z) + h_t(z,y) \leq u(x) + h_t(x,y) \leq u(x) + t.A\left(\frac{d(x,y)}{t}\right) < \infty$$

(3) Sea x tal que $u(x) = -\infty$, y $y \in M$, entonces

$$T_t^- u(y) = \inf_z u(z) + h_t(z,y) \leq u(x) + h_t(x,y) \leq u(x) + t.A\left(\frac{d(x,y)}{t}\right) = -\infty$$

(4)

$$T_t^- \big(u+c\big)(x) = \inf_{y\in M} \big(u+c\big)(y) + h_t(y,x) = c + \inf_{y\in M} u(y) + h_t(y,x) = c + T_t^- u(x)$$

(5) Si $u \leq v$, entonces

$$T_t^- u(x) = \inf_{y\in M} u(y) + h_t(y,x) \leq \inf_{y\in M} v(y) + h_t(y,x) = T_t^- v(x)$$

(6) Como $-||u-v||_\infty + v \leq u \leq v + ||u-v||_\infty$, entonces usando las propiedades (4) y (5) tenemos

$$-||u-v||_\infty + T_t^- v \leq T_t^- u \leq T_t^- v + ||u-v||_\infty$$

(7) Como h_t verifica la propiedad de semigrupo $h_{t+t'}(x,y) = \inf_z h_t(x,z) + h_{t'}(z,y)$, entonces

$$\begin{aligned} T_{t+t'}^- u(y) = \inf_x u(x) + h_{t+t'}(x,y) = \inf_x \big(u(x) + \inf_z h_t(x,z) + h_{t'}(z,y)\big) &= \\ = \inf_x \inf_z \big(u(x) + h_t(x,z) + h_{t'}(z,y)\big) &= \\ = \inf_z \inf_x u(x) + h_t(x,z) + h_{t'}(z,y) &= \\ = \inf_z \; T_t^- u(z) + h_{t'}(z,y) &= \\ = T_{t'}\big(T_t^- u\big)(y) & \end{aligned}$$

□

4.3. Evolución dominada

Definicion 4.4. Si $u : M \to [-\infty, +\infty]$, su **evolución de Lax-Oleinik** es la función $\hat{u} : [0, \infty) \times M \to [-\infty, +\infty]$ definida por

$$\hat{u}(t, x) = T_t^- u(x)$$

Definicion 4.5. Una función $U : [0, \infty) \times M \to [-\infty, +\infty]$ es de **evolución dominada** por el lagrangiano $L : TM \to \mathbb{R}$ si para toda curva $\gamma : [a, b] \to M$ de clase C^1 a trozos, con $0 \leq a < b$, vale que

$$U(b, \gamma(b)) \leq U(a, \gamma(a)) + \int_a^b L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big) ds$$

Equivalentemente, basta considerar solo la $\gamma : [a, b] \to M$ que minimiza la acción entre $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$, obteniéndo que U es dominada por L si y sólo si

$$U\big(b, \gamma(b)\big) \leq U\big(a, \gamma(a)\big) + h_{b-a}\big(\gamma(a), \gamma(b)\big)$$

Es decir, que

$$U\big(t + s, x\big) \leq U\big(t, y\big) + h_s\big(y, x\big) \quad \forall\, x, y \in M, t \geq 0, s > 0 \tag{44}$$

Lema 4.7. *Si $u : M \to [-\infty, +\infty]$, entonces su evolución de Lax-Oleinik $\hat{u} : [0, \infty) \times M \to [-\infty, +\infty]$ es de evolución dominada por L.*

Demostración. Por la propiedad de semigrupo tenemos que si $s > 0$, y $x, y \in M$, entonces

$$T_{t+s}^- u(x) = T_s^- \big(T_t^- u\big)(x) = \inf_z \; T_t^- u(z) + h_s(z, x) \leq T_y^- u(y) + h_s(y, x)$$

Recordando que $\hat{u}(t, x) = T_t^- u(x)$, tenemos que la ecuación anterior se puede escribir como

$$\hat{u}(t + s, x) \leq \hat{u}(t, y) + h_s(y, x) \quad \forall\, x, y \in M, t \geq 0, s > 0$$

lo cual corresponde con la ecuación (44) de la definición de evolución dominada. Es decir que $\hat{u}$ es de evolución dominada por L.

$\square$

4.4. Lax-Oleinik y viscosidad

Teorema 4.8. *Sea* $U : [0,\infty) \times M \to [-\infty, +\infty]$ *de evolución dominada por* L*. Si* $\exists \tau \in (0,\infty]$ *tal que* U *es finita en* $(0,\tau) \times M$*, entonces* U *es una subsolución de viscosidad de*

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t,x) + H\left(x, \frac{\partial U}{\partial x}(t,x)\right) = 0$$

en $(0,\tau) \times M$.

Demostración. Sea $\phi \geq U$ en $(0,\tau) \times M$, tal que ϕ es C^1 y $\phi(t_0,x_0) = U(t_0,x_0)$ para algún $(t_0,x_0) \in (0,\tau) \times M$.

Sea $v \in T_{x_0}M$, y sea $\gamma : [0,t_0] \to M$ una curva de clase C^1 tal que $\big(\gamma(t_0), \dot\gamma(t_0)\big) = (x_0, v)$.

Si $0 \leq t \leq t_0 < \tau$, entonces como U es finita en $(0,\tau)\times M$ y es de evolución dominada por L tenemos que

$$U\big(t_0,\gamma(t_0)\big) - U\big(t,\gamma(t)\big) \leq \int_t^{t_0} L\big(\gamma(s),\dot\gamma(s)\big)ds \quad \forall t \in [0,t_0]$$

Como $\phi \geq U$, y en $\big(t_0,x_0) = (t_0,\gamma(t_0)\big)$ se alcanza la igualdad, entonces

$$\phi\big(t_0,\gamma(t_0)\big) - \phi\big(t,\gamma(t)\big) \leq \int_t^{t_0} L\big(\gamma(s),\dot\gamma(s)\big)ds \quad \forall t \in [0,t_0]$$

Dividiendo ambos lados entre $t_0 - t > 0$ y tomando el límite cuando $t \to t_0$ se tiene

$$\frac{d}{dt}\Big(\phi(t,\gamma(t))\Big)\Big|_{t=t_0} \leq L\big(\gamma(t_0),\dot\gamma(t_0)\big)$$

Usando regla de la cadena y luego sustituyendo $\gamma(t_0) = x_0$ y $\dot\gamma(t_0) = v$, tenemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t_0,x_0) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t_0,x_0).(v) \leq L(x_0,v) \tag{45}$$

Como el $v \in T_{x_0}M$ era arbitrario, tenemos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(t_0,x_0).(v) - L(x_0,v) \leq -\frac{\partial \phi}{\partial t}(t_0,x_0) \quad \forall\ v \in T_{x_0}M$$

Entonces, por definición de la transformada de Fenchel tenemos que

$$H\left(x_0, \frac{\partial \phi}{\partial x}(t_0,x_0)\right) = \sup_{v\in T_{x_0}M} \frac{\partial \phi}{\partial x}(t_0,x_0)(v) - L(x_0,v) \leq -\frac{\partial \phi}{\partial t}(t_0,x_0)$$

y entonces

$$H\left(x_0, \frac{\partial \phi}{\partial x}(t_0, x_0)\right) + \frac{\partial \phi}{\partial t}(t_0, x_0) \leq 0$$

Por lo que U es subsolución de viscosidad de la ecuación de evolución de Hamilton-Jacobi. $\square$

Teorema 4.9. *Sea $u : M \to [-\infty, +\infty]$ y $\hat{u}$ su evolución de Lax-Oleinik. Si existe $\tau \in (0, \infty]$ tal que $\hat{u}$ es finita en $(0, \tau) \times M$, y para todo $(t, x) \in (0, \tau) \times M$ tenemos que el ínfimo de la definición de Lax-Oleinik se alcanza en un punto $y \in M$*

$$\hat{u}(t, x) = \inf_{z \in M} u(z) + h_t(z, x) = u(y) + h_t(y, x)$$

Entonces, $\hat{u}$ es una solución de viscosidad de

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t, x) + H\left(x, \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}(t, x)\right) = 0$$

en $(0, \tau) \times M$.

Demostración. Por el lema 4,7 tenemos que $\hat{u} : [0, \infty) \times M \to \mathbb{R}$ es de evolución dominada por L.

Como $\hat{u}$ de evolución dominada y es finita en $(0, \tau) \times M$, tenemos entonces por el teorema 4,8 que $\hat{u}$ es subsolución de viscosidad en $(0, \tau) \times M$.

Queda ver entonces que $\hat{u}$ es una supersolución de viscosidad.

Para eso, tomemos $\psi : (0, \tau) \times M \to \mathbb{R}$ de clase C^1, con $\psi \leq \hat{u}$, y supongamos $\hat{u}(t_0, x_0) = \psi(t_0, x_0)$ para algún $(t_0, x_0) \in (0, \tau) \times M$.

Sabemos por hipótesis que existe $y \in M$ que realiza el ínfimo de la definición de Lax-Oleinik, es decir

$$\hat{u}(t_0, x_0) = u(y) + h_{t_0}(y, x_0) \tag{46}$$

Además, por el teorema de Tonelli sabemos que existe una curva $\gamma : [0, t_0] \to M$, con $\gamma(0) = y$, $\gamma(t_0) = x_0$, y que su acción es mínima, es decir

$$\mathbb{L}(\gamma) = \int_0^{t_0} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big) ds = h_{t_0}(y, x_0) \tag{47}$$

Con las ecuaciones (46) y (47) tenemos que

$$\hat{u}(t_0, x_0) = u(y) + \int_0^{t_0} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big) ds \tag{48}$$

Observar que $u(\gamma(0)) < \infty$, pues tenemos que

$$\hat{u}(t_0, x_0) < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^{t_0} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds < \infty$$

Como $\hat{u}\big(0, \gamma(0)\big) = u\big(\gamma(0)\big)$, tenemos que la igualdad (48) se puede escribir como

$$\hat{u}\big(t_0, x_0\big) = \hat{u}\big(0, \gamma(0)\big) + \int_0^{t_0} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds \tag{49}$$

Como además $\hat{u}$ es de evolución dominada por L, entonces si tomamos $t \in (0, t_0)$ tendremos que

$$\begin{cases} \hat{u}\big(t_0, x_0\big) \leq \hat{u}\big(t, \gamma(t)\big) + \int_t^{t_0} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds \\ \hat{u}\big(t, \gamma(t)\big) \leq \hat{u}\big(0, \gamma(0)\big) + \int_0^{t} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds \end{cases} \tag{50}$$

Por lo tanto, juntando estas dos desigualdades tenemos que

$$\begin{aligned} \hat{u}(t_0, x_0) \leq \hat{u}\big(t, \gamma(t)\big) + \int_t^{t_0} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds \leq \\ \leq \hat{u}\big(0, \gamma(0)\big) + \int_0^{t} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds + \int_t^{t_0} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds = \\ = \hat{u}\big(0, \gamma(0)\big) + \int_0^{t_0} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds \end{aligned}$$

Pero por la ecuación (49) tenemos que los extremos de esta cadena de desiguadades son iguales. Por lo tanto, las dos desigualdades (50) son en realidad igualdades. En particular

$$\hat{u}\big(t_0, x_0\big) = \hat{u}\big(t, \gamma(t)\big) + \int_t^{t_0} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds \quad \forall\, t \in [0, t_0]$$

Como $\psi \leq \hat{u}$, y se alcanza la igualdad en $\big(t_0, \gamma(t_0)\big)$, tenemos para todo $t \in [0, t_0]$ que

$$\begin{aligned} \psi(t_0, x_0) = \hat{u}\big(t_0, x_0\big) = \hat{u}\big(t, \gamma(t)\big) + \int_t^{t_0} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds \geq \\ \geq \psi\big(t, \gamma(t)\big) + \int_t^{t_0} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds \end{aligned}$$

Entonces

$$\psi(t_0, x_0) - \psi\big(t, \gamma(t)\big) \geq \int_t^{t_0} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds \quad \forall\, t \in [0, t_0]$$

Dividiendo entre $t_0 - t > 0$ y haciendo el límite con $t \to t_0$ obtenemos

$$\frac{d}{dt}\Big(\psi\big(t,\gamma(t)\big)\Big)\Big|_{t=t_0} \geq L\big(\gamma(t_0),\dot\gamma(t_0)\big)$$

Usando regla de la cadena y sustituyendo $\gamma(t_0) = x_0$, obtenemos

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(t_0,x_0) + \frac{\partial\psi}{\partial x}(t_0,x_0)\big(\dot\gamma(t_0)\big) \geq L(x_0,\dot\gamma(t_0)) \tag{51}$$

Luego, por la definición de transformada de Fenchel sabemos que

$$L\big(x_0,\dot\gamma(t_0)\big) = \sup_{p\in T^*_{x_0}M} p\big(\dot\gamma(t_0)\big) - H(x_0,p) \geq \frac{\partial\psi}{\partial x}(t_0,x_0)\big(\dot\gamma(t_0)\big) - H\Big(x_0,\frac{\partial\psi}{\partial x}(t_0,x_0)\Big)$$

Juantando esta desigualdad con la desigualdad (51) tenemos que

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(t_0,x_0) + \frac{\partial\psi}{\partial x}(t_0,x_0)\big(\dot\gamma(t_0)\big) \geq \frac{\partial\psi}{\partial x}(t_0,x_0)\big(\dot\gamma(t_0)\big) - H\Big(x_0,\frac{\partial\psi}{\partial x}(t_0,x_0)\Big)$$

Entonces, cancelando los $\frac{\partial\psi}{\partial x}(t_0,x_0)\big(\dot\gamma(t_0)\big)$ tenemos que

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(t_0,x_0) + H\Big(x_0,\frac{\partial\psi}{\partial x}(t_0,x_0)\Big) \geq 0$$

por lo tanto $\hat u$ es supersolución de viscosidad de la ecuación de evolución de Hamilton-Jacobi. Como ya habíamos mencionado que $\hat u$ es subsolución de viscosidad, tenemos entonces que $\hat u$ es solución de viscosidad de Hamilton-Jacobi.

□

5. Teoremas de aproximación de subsoluciones de viscosidad

En esta sección se tratará de aproximar subsoluciones de viscosidad arbitrarias con otras subsoluciones de viscosidad de mayor regularidad. En un primer paso, se aproximarán con subsoluciones de viscosidad lipschitz, y obtener entonces mediante un paso al límite una nueva versión del principio del máximo. En una segunda etapa, se aproximarán las subsoluciones de viscosidad con otras subsoluciones de clase C^∞.

5.1. Aproximación por subsoluciones Lipschitz: sup-convolución

Sea $u : V \to \mathbb{R}$ una función continua, donde $V \subset \mathbb{R} \times M$ es abierto.

Sea $K \subset V$ compacto. Tomemos entonces un abierto O_1 de clausura compacta, tal que $K \subset O_1 \subset \overline{O}_1 \subset V$.

Nuevamente, por compacidad de K, podemos encontrar un abierto O_2 de clausura compacta, tal que $K \subset O_2 \subset \overline{O}_2 \subset O_1$. Entonces sea $\delta > 0$ tal que

$$[t-\delta, t+\delta] \times \{x\} \subset O_1 \quad \forall (t,x) \in \overline{O}_2$$

Por continuidad de u, tenemos que

$$m = \sup_{\overline{O}_1} |u| < \infty$$

Como $[t-\delta, t+\delta] \times \{x\} \subset O_1$ para todo $(t,x) \in \overline{O}_2$, y u está definida en O_1, podemos definir para cada $\epsilon > 0$ a la función $u_\epsilon : O_2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$u_\epsilon(t,x) = \max_{s \in [-\delta,\delta]} u(t+s,x) - \frac{s^2}{\epsilon}$$

Observación. *Observemos que u_ϵ es continua pues u es continua en V y $[-\delta,\delta]$ es compacto (estamos tomando máximo de una función continua en un compacto).*

Proposición 5.1. *La función u_ϵ tiene las siguientes propiedades*

1. $u_\epsilon \geq u \quad \forall\, \epsilon > 0$
2. *Si $0 < \epsilon < \epsilon'$, entonces $u_\epsilon < u_{\epsilon'}$*
3. *Si $(t,x) \in O_2$ y $s_\epsilon \in [-\delta,\delta]$ es tal que $u_\epsilon(t,x) = u(t+s_\epsilon,x) - \frac{s_\epsilon^2}{\epsilon}$, entonces tenemos que $|s_\epsilon| \leq \sqrt{2\epsilon m}$*
4. *$u_\epsilon \rightrightarrows u$ en O_2 cuando $\epsilon \to 0$*
5. *Si $(t,x), (t',x) \in O_2$, con $|t-t'| < \delta - \sqrt{2\epsilon m}$, entonces*
$$|u_\epsilon(t',x) - u_\epsilon(t,x)| \leq \frac{2\sqrt{2\epsilon m} + |t-t'|}{\epsilon}.|t-t'|$$
En particular (como $|t-t'| < \delta - \sqrt{2\epsilon m}$) tendremos que
$$|u_\epsilon(t',x) - u_\epsilon(t,x)| \leq \frac{\sqrt{2\epsilon m} + \delta}{\epsilon}.|t-t'|$$
Más aún, para todo x, el mapa $t \mapsto u_\epsilon(t,x)$ es Lipschitz en compactos conexos de $O_2 \cap \mathbb{R} \times \{x\}$, donde la constante de Lipschitz es $2\sqrt{2m/\epsilon}$.

Demostración. **(1)**

$$u_\epsilon(t,x) = \max_{s\in[-\delta,\delta]} u(t+s,x) - \frac{s^2}{\epsilon} \geq u(t+0,x) - \frac{0^2}{\epsilon} = u(t,x)$$

(2) Si $\epsilon' > \epsilon > 0$, entonces $-\frac{1}{\epsilon'} > -\frac{1}{\epsilon}$, por lo que

$$u_\epsilon(t,x) = \max_{s\in[-\delta,\delta]} u(t+s,x) - \frac{s^2}{\epsilon} \leq \max_{s\in[-\delta,\delta]} u(t+s,x) - \frac{s^2}{\epsilon'} = u_{\epsilon'}(t,x)$$

(3) Si s_ϵ es tal que $u_\epsilon(t,x) = u(t+s_\epsilon,x) - \frac{s_\epsilon^2}{\epsilon}$, entonces por el punto (1) tenemos que

$$u_\epsilon(t,x) = u(t+s_\epsilon,x) - \frac{s_\epsilon^2}{\epsilon} \geq u(t,x)$$

Entonces

$$\frac{s_\epsilon^2}{\epsilon} \leq u(t+s_\epsilon,x) - u(t,x) \leq 2\sup_{O_1}|u| = 2m$$

Entonces $s_\epsilon \leq \sqrt{2m\epsilon}$

(4) Sea $(t,x) \in O_2$, y s_ϵ tal que

$$u_\epsilon(t,x) = u(t+s_\epsilon,x) - \frac{s_\epsilon^2}{\epsilon}$$

Restando aqui $u(t,x)$ y usando el punto (1) tenemos que

$$0 \leq u_\epsilon(t,x) - u(t,x) = u(t+s_\epsilon,x) - u(t,x) \ - \ \frac{s_\epsilon^2}{\epsilon} \leq u(t+s_\epsilon,x) - u(t,x)$$

Entonces

$$|u_\epsilon(t,x) - u(t,x)| \leq |u(t+s_\epsilon,x) - u(t,x)|$$

Y sabemos por el punto (3) que $|s_\epsilon| \leq \sqrt{2m\epsilon}$, por lo que la ecuación anterior implica que

$$|u_\epsilon(t,x) - u(t,x)| \leq \sup_{|s|\leq\sqrt{2m\epsilon}} |u(t+s,x) - u(t,x)|$$

Luego, tomando supremo en $(t,x) \in O_2$, tenemos que

$$\sup_{(t,x)\in O_2} |u_\epsilon(t,x) - u(t,x)| \leq \sup_{(t,x)\in\overline{O}_2, |s|\leq\sqrt{2m\epsilon}} |u(t+s,x) - u(t,x)| \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} 0$$

donde usamos que por compacidad de $\overline{O}_2$ y continuidad de u, el lado derecho tiende a 0 cuando $\epsilon \to 0$. Entonces $u_\epsilon \rightrightarrows u$ en O_2 cuando $\epsilon \to 0$.

(5) Sean $(t,x),(t',x) \in O_2$ tales que $|t-t'| < \delta - \sqrt{2m\epsilon}$. Tomemos s_ϵ tal que $u_\epsilon(t,x) = u(t+s_\epsilon,x) - \frac{s_\epsilon^2}{\epsilon}$.

Sabemos por el punto (3) que $|s_\epsilon| \leq \sqrt{2m\epsilon}$. Entonces

$$|s_\epsilon + t - t'| \leq |s_\epsilon| + |t-t'| \leq \sqrt{2m\epsilon} + \delta - \sqrt{2m\epsilon} = \delta$$

Entonces, por definición de u_ϵ tenemos que

$$u_\epsilon(t',x) \geq u\big(t' + (s_\epsilon + t - t'), x\big) - \frac{(s_\epsilon + t - t')^2}{\epsilon} = u(t+s_\epsilon,x) - \frac{(s_\epsilon + t - t')^2}{\epsilon}$$

y entonces

$$-u_\epsilon(t',x) \leq -u(t+s_\epsilon,x) + \frac{(s_\epsilon + t - t')^2}{\epsilon}$$

Sumando a esta desigualdad con la igualdad $u_\epsilon(t,x) = u(t+s_\epsilon,x) - \frac{s_\epsilon^2}{\epsilon}$, tenemos que se cancela el $u(t+s_\epsilon,x)$ del lado derecho, y como $|s_\epsilon| \leq \sqrt{2m\epsilon}$ obtenemos que

$$\begin{aligned} u_\epsilon(t,x) - u_\epsilon(t',x) &\leq \frac{(s_\epsilon + t - t')^2}{\epsilon} - \frac{s_\epsilon^2}{\epsilon} = \\ &= \frac{s_\epsilon^2 + (t-t')^2 + 2s_\epsilon(t-t') - s_\epsilon^2}{\epsilon} = \\ &= \frac{(2s_\epsilon + t - t')(t-t')}{\epsilon} \leq \\ &\leq \frac{2|s_\epsilon| + |t-t'|}{\epsilon}.|t-t'| \leq \\ &\leq \frac{2\sqrt{2m\epsilon} + |t-t'|}{\epsilon}.|t-t'| \end{aligned}$$

Cambiando el rol de t con t' y haciendo el mismo razonamiento tenemos que

$$u_\epsilon(t',x) - u_\epsilon(t,x) \leq \frac{2\sqrt{2m\epsilon} + |t-t'|}{\epsilon}.|t-t'|$$

Por lo tanto

$$|u_\epsilon(t',x) - u_\epsilon(t,x)| \leq \frac{2\sqrt{2m\epsilon} + |t-t'|}{\epsilon}.|t-t'| \tag{52}$$

Que probar que si $[t,t'] \times \{x\} \subset O_2$ entonces

$$|u_\epsilon(t',x) - u_\epsilon(t,x)| \leq 2\sqrt{\frac{2m}{\epsilon}}.|t-t'|$$

Para eso, tomemos $\eta < \delta - \sqrt{2\epsilon m}$, y tomamos una partición $t = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t'$, donde $|t_{i+1} - t_i| \leq \eta$. Podemos entonces aplicar la ecuación (52) entre los instantes t_i y t_{i+1}, es decir

$$\begin{aligned} |u_\epsilon(t_{i+1}, x) - u_\epsilon(t_i, x)| &\leq \frac{2\sqrt{2m\epsilon} + |t_{i+1} - t_i|}{\epsilon}.|t_{i+1} - t_i| \leq \\ &\leq \frac{2\sqrt{2m\epsilon} + \eta}{\epsilon}.|t_{i+1} - t_i| \end{aligned}$$

Sumando las desigualdades anteriores y usando desigualdad triangular tenemos que

$$|u_\epsilon(t', x) - u_\epsilon(t, x)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |u_\epsilon(t_{i+1}, x) - u_\epsilon(t_i, x)| \leq \frac{2\sqrt{2m\epsilon} + \eta}{\epsilon} \sum_{i=0}^{n-1} |t_{i+1} - t_i|$$

entonces

$$|u_\epsilon(t', x) - u_\epsilon(t, x)| \leq \frac{2\sqrt{2m\epsilon} + \eta}{\epsilon} |t' - t|$$

Haciendo $\eta \to 0$, tenemos que

$$|u_\epsilon(t', x) - u_\epsilon(t, x)| \leq \frac{2\sqrt{2m\epsilon}}{\epsilon} |t' - t| = 2\sqrt{\frac{2m}{\epsilon}}.|t' - t|$$

Por lo que el mapa $t \mapsto u_\epsilon(t, x)$ es Lipschitz de constante $2\sqrt{\frac{2m}{\epsilon}}$.

□

Proposición 5.2. ***(aproximación con subsoluciones lipschitz)***

Sea $H : T^*M \to \mathbb{R}$ un hamiltoniano continuo. Si $u : V \to \mathbb{R}$ es una función continua, con $V \subset \mathbb{R} \times M$, que además es subsolución de viscosidad en V de la ecuación de evolución de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + H\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)\right) = 0$$

Entonces para todo compacto $K \subset V$, existe entonces una secuencia de funciones continuas $u_n : K \to \mathbb{R}$, tal que $u_n \rightrightarrows u$ en K, y existe $C < \infty$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que las u_n son subsoluciones de viscosidad en $\mathring{K} \subset K$ de las ecuaciones

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(t, x) + H\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x}(t, x)\right) = 0 \tag{53}$$

y

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}(t, x)\right| + H\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x}(t, x)\right) = C\sqrt{n} \tag{54}$$

En particular, si H es coerciva en compactos de M, entonces las u_n son localmente lipschitz en $\mathring{K}$.

Demostración. Nuevamente, partiendo del compacto $K \subset V$, consideramos un abierto $O_1 \supset K$ de clausura compacta en V. Luego consideramos un abierto O_2 tal que $K \subset O_2 \subset \overline{O_2} \subset O_1$, y tomamos $\delta > 0$ tal que

$$[t-\delta, t+\delta] \times \{x\} \subset O_1 \quad \forall\,(t,x) \in \overline{O}_2$$

Por continuidad de u y compacidad de $\overline{O}_1$, podemos definir

$$m = \sup_{\overline{O}_1} |u| < \infty$$

Para los $n \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{1}{n} < \delta$, consideremos las funciones $u_{1/n} : O_2 \to \mathbb{R}$ definidas como

$$u_{1/n}(t,x) = \max_{s\in[-\delta,\delta]} u(t+s,x) - ns^2 \tag{55}$$

Por el punto (4) de la proposición 5,1 anterior, sabemos que

$$u_{1/n} \underset{n}{\rightrightarrows} u \quad \text{en } O_2$$

Veamos ahora que los u_n son subsoluciones de viscosidad de las ecuaciones (53) y (54) en O_2.

Sea $\varphi : V \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $u_{1/n} \leq \varphi$, donde se alcanza la igualdad en un $(t_0, x_0) \in O_2$ (es decir, $u_{1/n}(t_0,x_0) = \varphi(t_0,x_0)$).

Por el punto (5) de la proposición 5,1, tenemos que el mapa $t \mapsto u_{1/n}(t,x)$ es localmente Lipschitz, con constante de Lipschitz $2\sqrt{2mn}$.

Entonces, si tomamos $t \neq t_0$ tal que $(t, x_0) \in O_2$, tendremos que como $\varphi(t_0,x_0) = u_{1/n}(t_0,x_0)$ y $\varphi(t,x_0) = u_{1/n}(t,x_0)$, entonces

$$\varphi(t_0,x_0) - \varphi(t,x_0) \leq u_{1/n}(t_0,x_0) - u_{1/n}(t,x_0) \leq 2\sqrt{2mn}|t_0 - t|$$

y dividiendo entre $|t_0 - t|$ obtenemos

$$\frac{\varphi(t_0,x_0) - \varphi(t,x_0)}{|t_0 - t|} \leq 2\sqrt{2mn} \tag{56}$$

y multiplicando por -1 de ambos lados

$$-2\sqrt{2mn} \leq \frac{\varphi(t,x_0) - \varphi(t_0,x_0)}{|t - t_0|} \tag{57}$$

Haciendo en la ecuación (56) el límite con $t \to t_0^-$ (es decir, $t \to t_0$ y $t_0 - t > 0$), tenemos

$$\lim_{t \to t_0^-} \frac{\varphi(t_0, x_0) - \varphi(t, x_0)}{t_0 - t} = \partial_t \varphi(t_0, x_0) \leq 2\sqrt{2mn} \tag{58}$$

Del mismo modo, haciendo en la ecuación (57) el límite con $t \to t_0^+$ (es decir, $t \to t_0$ y $t - t_0 > 0$) tenemos

$$-2\sqrt{2mn} \leq \lim_{t \to t_0^+} \frac{\varphi(t, x_0) - \varphi(t_0, x_0)}{t - t_0} = \partial_t \varphi(t_0, x_0) \tag{59}$$

Entonces, de las ecuaciones (58) y (59), tenemos que

$$|\partial_t \varphi(t_0, x_0)| \leq 2\sqrt{2mn} \tag{60}$$

Sea $s_n \in [-\delta, \delta]$ tal que

$$u(t_0 + s_n, x_0) - n s_n^2 = u_{1/n}(t_0, x_0) = \varphi(t_0, x_0) \tag{61}$$

Como $(t_0, x_0) \in O_2$, existe entonces $\eta > 0$ y un entorno $W \subset M$ tal que $x_0 \in W$, en el cual $(t_0 + s, y) \in O_2$ para todo $|s| < \eta$ y para todo $y \in W$.

Tenemos entonces por como definimos $u_{1/n}$ (en la ecuación (55)) que

$$u(t_0 + s + s_n, y) - n s_n^2 \leq u_{1/n}(t_0 + s, y) \leq \varphi(t_0 + s, y) \quad \forall |s| < \eta, y \in W$$

Restandole a esta desigualdad la ecuación (61), obtenemos

$$u(t_0 + s + s_n, y) - u(t_0 + s_n, x_0) \leq \varphi(t_0 + s, y) - \varphi(t_0, x_0) \quad \forall |s| < \eta, y \in W$$

Es decir que

$$u(t_0 + s + s_n, y) \leq \varphi(t_0 + s, y) - \varphi(t_0, x_0) + u(t_0 + s_n, x_0) = \hat{\varphi}(s, y) \quad \forall |s| < \eta, y \in W$$

Observemos que la función del lado derecho es C^1 en las variables (s, y), y en $(s, y) = (0, x_0)$ tenemos que esta desigualdad se hace igualdad. Por lo tanto, como además u es solución de viscosidad de

$$\partial_t u(t, x) + H\big(x, \partial_x u(t, x)\big) = 0$$

tendremos entonces que

$$\frac{\partial}{\partial s} \hat{\varphi}(s, y)\bigg|_{(0, x_0)} + H\big(x_0, \frac{\partial}{\partial y} \hat{\varphi}\bigg|_{(0, x_0)}\big) \leq 0$$

es decir que

$$\partial_t\varphi(t_0,x_0) + H\big(x_0,\partial_x\varphi(t_0,x_0)\big) \leq 0 \tag{62}$$

Por lo tanto, tenemos que $u_{1/n}$ es subsolución de viscosidad de

$$\partial_t u_{1/n}(t,x) + H\big(x,\partial_x u_{1/n}(t,x)\big) = 0$$

Observar que si sumamos 2 veces la ecuación (60) con la desigualdad (62) tenemos

$$\partial_t\varphi(t_0,x_0) + 2|\partial_t\varphi(t_0,x_0)| + H\big(x_0,\partial_x\varphi(t_0,x_0)\big) \leq 0 + 4\sqrt{2mn}$$

Entonces como $|\partial_t\varphi(t_0,x_0)| \geq \partial_t\varphi(t_0,x_0) + 2|\partial_t\varphi(t_0,x_0)|$, deducimos que

$$|\partial_t\varphi(t_0,x_0)| + H\big(x_0,\partial_x\varphi(t_0,x_0)\big) \leq 4\sqrt{2mn}$$

Es decir que entonces $u_{1/n}$ además es subsolución de viscosidad de

$$|\partial_t u_{1/n}(t,x)| + H\big(x,\partial_x u_{1/n}(t,x)\big) = 4\sqrt{2mn}$$

□

5.2. Principio del máximo en hamiltonianos coercivos

Esta proposición de aproximación por subsoluciones Lipschitz nos permitirá eliminar la hipótesis de Lipschitz que teníamos en el primer versión del principio del máximo (teorema 3,6), a costa de imponer coercividad de H en compactos.

Teorema 5.3. ***(Principio del máximo, versión coerciva)*** *Sea $H : T^*M \to \mathbb{R}$ un hamiltoniano continuo y coercivo en compactos de M.*

Sean $u, v : [a,b]\times C \to \mathbb{R}$ funciones continuas, con $C \subset M$ compacto. Si u es subsolución de viscosidad y v es supersolución de viscosidad de

$$\partial_t U + H\big(x,\partial_x U\big) = 0$$

en $[a,b]\times \mathring{C}$, entonces el máximo de $u - v\Big|_{[a,b]\times C}$ se alcanza en $[a,b]\times\partial C \cup \{a\}\times C$.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$ tal que $a+\epsilon < b-\epsilon$, y un compacto $K \subset \mathring{C}$, consideremos un abierto V tal que

$$[a+\epsilon, b-\epsilon]\times K \subset V \subset [a,b]\times C$$

Entonces por la proposición 5,2 de aproximación con subsoluciones Lipschitz, existe entonces una sucesión de subsoluciones de viscosidad $u_n : V \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitz, tal que $u_n \rightrightarrows u$ en V.

Como las u_n son localmente Lipschitz, podemos aplicar la versión del principio del máximo vista en el teorema 3,6 con las funciones u_n y v. Deducimos entonces que

$$\max_{[a+\epsilon,b-\epsilon]\times K} u_n - v = \max_{[a+\epsilon,b-\epsilon]\times\partial K\cup\{a+\epsilon\}\times K} u_n - v \tag{63}$$

Como las $u_n \rightrightarrows u$ en V, en particular tenemos que $u_n - v \rightrightarrows u - v$ en $V \supset [a+\epsilon, b-\epsilon] \times K$. Entonces haciendo $n \to \infty$ en la ecuación (63) obtenemos

$$\max_{[a+\epsilon,b-\epsilon]\times K} u - v = \max_{[a+\epsilon,b-\epsilon]\times\partial K\cup\{a+\epsilon\}\times K} u - v$$

Tomando entonces una sucesión de compactos $K_n \subset C$ dados por

$$K_n = \{x \in C : d(x, \partial C) \geq 1/n\}$$

tenemos entonces que

$$\max_{[a+\epsilon,b-\epsilon]\times K_n} u - v = \max_{[a+\epsilon,b-\epsilon]\times\partial K_n\cup\{a+\epsilon\}\times K_n} u - v$$

Observar que si $x \in \partial K_n$, como x se aproxima arbitrariamente con puntos de K_n^c entonces $d(x, \partial C) \leq 1/n$, sin embargo como $x \in K_n$ tenemos que $d(x, \partial C) \leq 1/n$, entonces deducimos que $d(x, \partial C) = 1/n$. Por continuidad uniforme de $u - v$, tenemos haciendo $n \to \infty$ que

$$\max_{[a+\epsilon,b-\epsilon]\times C} u - v = \max_{[a+\epsilon,b-\epsilon]\times\partial C\cup\{a+\epsilon\}\times C} u - v$$

Luego, tomando $\epsilon \to 0$ conseguimos nuevamente por continuidad uniforme que

$$\max_{[a,b]\times C} u - v = \max_{[a,b]\times\partial C\cup\{a\}\times C} u - v$$

$\square$

5.3. Aproximación con subsoluciones suaves

Corolario 5.3.1. ***(aproximación con subsoluciones suaves)*** *Sea $H : T^*M \to \mathbb{R}$ es un hamiltoniano continuo, coercivo en compactos de M, y convexo en las fibras. Si $V \subset \mathbb{R} \times M$ es un abierto y $u : V \to \mathbb{R}$ es una subsolución de viscosidad de la ecuación de evolución de Hamilton-Jacobi*

$$\partial_t u(t,x) + H\big(x, \partial_x u(t,x)\big) = 0$$

Entonces para todo $V' \subset V$ de clausura compacta en V, y para todo $\epsilon > 0$, existe $v : V' \to \mathbb{R}$ subsolución de clase C^∞ de la misma ecuación, tal que $||u - v||_{V',\infty} < \epsilon$ (donde $|| \cdot ||_{V',\infty}$ es la distancia uniforme en V')

Demostración. Por la proposición 5,2 de aproximación con subsoluciones Lipschitz, sabemos que existe una subsolución de viscosidad $u_1 : V' \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitz de la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\partial_t u(t,x) + H\big(x, \partial_x u(t,x)\big) = 0$$

tal que $||u - u_1||_{V',\infty} < \frac{\epsilon}{3}$

Luego, tendremos que la función $u_2 : V' \to \mathbb{R}$ definida como

$$u_2(t,x) = u_1(t,x) - \delta t$$

es una subsolución de viscosidad localmente Lipschitz de la ecuación

$$\partial_t u + H\big(x, \partial_x u\big) = -\epsilon$$

Como V' es compacto (en particular, la variable t estará acotada), tendremos que podemos elegir el $\delta > 0$ adecuadamente para que $||u_2 - u_1||_{V',\infty} < \frac{\epsilon}{3}$

Consideremos el hamiltoniano $\hat{H} : T^*(\mathbb{R} \times M) \to \mathbb{R}$ definido como

$$\hat{H}\big((t,x),(s,p)\big) = s + H(x,p)$$

La función u_2 es entonces una subsolución de viscosidad localmente Lipschitz de

$$\hat{H}\big((t,x), Du(t,x)\big) = -\epsilon$$

Como $\hat{H}\big((t,x), Du(t,x)\big)$ es convexa en (s,p) (pues es la suma de una función lineal en s con H que es convexa en p), entonces usando el punto (6) de las propiedades enumeradas luego de la definición 3,4 de solución de viscosidad, tenemos que u_2 se puede aproximar uniformemente en V' con una subsolución de viscosidad $u_3 : V' \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ de la ecuación

$$\hat{H}\big((t,x), Du(t,x)\big) = 0$$

tal que $||u_3 - u_2||_{V',\infty} < \frac{\epsilon}{3}$

Es claro entonces que $||u - u_3||_{V',\infty} \leq ||u - u_1||_{V',\infty} + ||u_1 - u_2||_{V',\infty} + ||u_2 - u_3||_{V',\infty} < \epsilon$. Tomando $v = u_3$, tenemos el resultado que queríamos probar.

$\square$

6. Construcción local de soluciones de viscosidad

En esta sección se intentará construir soluciones de viscosidad en conjuntos compactos a partir de condiciones iniciales y de borde, a partir de una extensión de las condiciones iniciales muy similar al operador de Lax-Oleinik ya definido.

6.1. Dominación restringida

De ahora en adelante asumiremos el hamiltoniano $H : T^*M \to \mathbb{R}$ de Tonelli y que $L : TM \to \mathbb{R}$ es su lagrangiano asociado.

Definicion 6.1. Si $\gamma : [a, b] \to M$ es una curva C^1 a trozos, definimos su gráfico como

$$Graph(\gamma) = \{\big(t, \gamma(t)\big) \in \mathbb{R} \times M : t \in [a, b]\big)\}$$

Definicion 6.2. (evolución dominada restringida) Si $S \subset \mathbb{R} \times M$, decimos que una función $U : S \to [-\infty, +\infty]$ es de evolución dominada en S por el lagrangiano $L : TM \to \mathbb{R}$, si para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y para toda curva $\gamma : [a, b] \to M$ de clase C^1 a trozos tal que $Graph(\gamma) \subset S$, vale que

$$U\big(b, \gamma(b)\big) \leq U\big(a, \gamma(a)\big) + \int_a^b L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big) ds$$

Se dice que U es **fuertemente dominada** en S si para todos los $(t, x), (t', x') \in S$ con $t < t'$, se tiene que

$$U\big(t', x'\big) \leq U(t, x) + h_{t'-t}(x, x')$$

Claramente si U es fuertemente dominada en S, entonces es dominada en S, pues

$$h_{t'-t}(x, x') = \inf_{\gamma}\{\mathbb{L}(\gamma) : \gamma \in \mathcal{C}_{[0,t'-t]}(x, x')\} \leq$$
$$\leq \inf_{\gamma}\{\mathbb{L}(\gamma) : \gamma \in \mathcal{C}_{[0,t'-t]}(x, x'), Graph(\gamma) \subset S\}$$

Observación. *Observar que si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, y S es de la forma $S = I \times M$, entonces una función $U : I \times M \to [-\infty, +\infty]$ es de evolución dominada por L en S si y sólo si es fuertemente dominada por L en S.*

Proposición 6.1. ***(dominación fuerte local)*** *Sea $O \subset \mathbb{R} \times M$ un abierto, y $U : O \to \mathbb{R}$ es una función de valuación finita (i.e $-\infty < U(t, x) < \infty$ para todo $(t, x) \in M$) y dominada por L en O.*

Entonces U es localmente acotada en O. Más aún, para todo $(t_0, x_0) \in O$, existe un abierto $V \subset O$ que contiene a (t_0, x_0) tal que $U\Big|_V$ es fuertemente dominada por L en V.

Demostración. Sea $(t_0, x_0) \in O$, y sean $\delta, r > 0$ y consideramos entonces $[t_0 - 2\delta, t_0 + 2\delta] \times \overline{B}(x_0, 3r) \subset O$.

Si $x \in \overline{B}(x_0, 2r)$ y $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, entonces la geodésica minimizante $\gamma_{x_0,x} : [t_0 - 2\delta, t]] \to M$ que une x_0 con x estará contenida en $\overline{B}(x_0, 2r)$ y cumplirá que

$$||\dot{\gamma}_{x_0,x}(s)||_{\gamma_{x_0,x}(s)} = \frac{d(x_0, x)}{t - (t_0 - 2\delta)}$$

Como $d(x_0, x) \leq 2r$ y $t - (t_0 - 2\delta) \geq \delta$, entonces

$$||\dot{\gamma}_{x_0,x}(s)||_{\gamma_{x_0,x}(s)} = \frac{d(x_0, x)}{t - (t_0 - 2\delta)} \leq \frac{2r}{\delta}$$

Entonces, como suponemos que L es de Tonelli, podemos tomar $A(R) = \sup\{L(x, v) : ||v||_x \leq R, x \in M\}$, y entonces la acción en la curva $\gamma_{x_0,x}$ se puede acotar como

$$\mathbb{L}\big(\gamma_{x_0,x}\big) = \int_{t_0-2\delta}^{t} L\big(\gamma_{x_0,x}(s), \dot{\gamma}_{x_0,x}(s)\big)ds \leq \big(t - (t_0 - 2\delta)\big)A\big(\frac{2r}{\delta}\big)$$

Como $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, entonces $t - (t_0 - 2\delta) \leq 3\delta$, por lo que

$$\mathbb{L}\big(\gamma_{x_0,x}\big) \leq 3\delta A\big(\frac{2r}{\delta}\big)$$

Como U es de evolución dominada por L en $O \supset [t_0 - 2\delta, t_0 + 2\delta] \times \overline{B}(x_0, 3r)$, tenemos que

$$U(t, x) \leq U(t_0 - 2\delta, x_0) + \mathbb{L}(\gamma_{x_0,x}) \leq U(t_0 - 2\delta, x_0) + 3\delta A\big(\frac{2r}{\delta}\big)$$

Esto implica que U es localmente acotada por encima.

Para ver que U es localmente acotada por debajo, basta con invertir el sentido de la geodésica $\gamma_{x_0,x}$ (es decir, considerar $\gamma_{x,x_0} : [t, t_0 + 2\delta] \to M$ de longitud mínima que une x con x_0). Claramente la curva γ_{x,x_0} estará contenida en $\overline{B}(x_0, 2r)$, y entonces se satisface que

$$\mathbb{L}(\gamma_{x,x_0}) \leq \big(t_0 + 2\delta - t\big)A\left(\frac{d(x, x_0)}{t_0 + 2\delta - t}\right) \leq 3\delta A\big(\frac{2r}{\delta}\big)$$

Entonces, como U es dominada por L en S, tendremos que

$$U(t_0 - 2\delta, x_0) \leq U(t,x) + 3\delta A(\frac{2r}{\delta})$$

lo que nos da una cota inferior para $U(t,x)$ para todo $(t,x) \in [t_0-\delta, t_0+\delta]\times\overline{B}(x_0, 2r)$, es decir que U es localmente acotada inferiormente.

Por lo tanto U es localmente acotada.

Ahora, resta ver la dominación fuerte local de U.

Sea $K = 2\sup\{|U(t,x)| : (t,x) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}(x_0, 2r)\} < \infty$.

Consideremos $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \delta$, y sean $(t,x),(t',x') \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times \overline{B}(x_0, r)$ con $t < t'$.

Distingamos 2 casos:

- Si $K \leq h_{t'-t}(x,x')$: entonces, por como definimos K tenemos que

  $$U(t',x') - U(t,x) \leq K \leq h_{t'-t}(x,x')$$

- Si $K \geq h_{t'-t}(x,x')$: consideremos una curva $\gamma : [t,t'] \to M$ minimizante de la acción entre los puntos x y x'. Es decir que $\gamma(t) = x$, $\gamma(t') = x'$ y $\mathbb{L}(\gamma) = h_{t'-t}(x,x') \leq K$.

  Por lo superlinealidad de L, sabemos mediante la proposición 4,4 que para todo $\tilde{K} \geq 0$ vale que

  $$K \geq h_{t'-t}(x,x') = \mathbb{L}(\gamma) \geq \hat{K} l_g(\gamma) - C(\hat{K})(t'-t)$$

  Por lo tanto, despejando $l_g(\gamma)$ usando los extremos de la cadena de desigualdades, obtenemos

  $$l_g(\gamma) \leq \frac{K}{\tilde{K}} + \frac{C(\tilde{K})}{\tilde{K}}(t'-t) \leq \frac{K}{\tilde{K}} + \frac{C(\tilde{K})}{\tilde{K}},2\epsilon$$

  Eligiendo $\tilde{K}$ tal que $\frac{K}{\tilde{K}} < \frac{r}{2}$, y $\epsilon < \delta$ tal que $\frac{C(\tilde{K})}{\tilde{K}},2\epsilon < \frac{r}{2}$, tenemos entonces que

  $$l_g(\gamma) < r$$

  Por lo tanto $Graph(\gamma) \subset [t_0-\delta, t_0+\delta]\times\overline{B}(x_0, 2r) \subset O$. Como U es de evolución dominada en O, tendremos que

  $$U(t',x') - U(t,x) \leq \mathbb{L}(\gamma) = h_{t'-t}(x,x')$$

Por lo tanto, concluímos que U es fuertemente dominada por L en $[t_0-\epsilon, t_0+\epsilon] \times \overline{B}(x_0, r)$

$\square$

Veremos ahora que es lo mismo ser de evolución dominada que ser subsolución de viscosidad.

6.2. Subsoluciones de viscosidad y dominación

Proposición 6.2. *Sea H un hamiltoniano de Tonelli en la variedad Riemanniana completa (M, g). Sea $O \subset \mathbb{R} \times M$ un abierto y $U : O \to \mathbb{R}$ es una función continua.*

Entonces U es subsolución de viscosidad de

$$\partial_t U + H(x, \partial_x U) = 0$$

en O si y sólo si es de evolución dominada por L en O.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que U es subsolución de viscosidad de

$$\partial_t U + H(x, \partial_x U) = 0$$

Entonces tomemos una curva $\gamma : [a, b] \to M$ de clase C^1 a trozos, con $Graph(\gamma) \subset O$.

Como $Graph(\gamma) \subset O$ es compacto, entonces existe un entorno V de $Graph(\gamma)$ tal que $\overline{V} \subset O$ es compacto. Por el corolario 5,3,1, podemos construír una sucesión de funciones $U_n : V \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ tales que $||U - U_n||_{V,\infty} \to 0$ y las U_n son subsoluciones de

$$\partial_t U_n + H(x, \partial_x U_n) = 0$$

Por la desigualdad de Fenchel

$$p(v) \leq L(x, v) + H(x, p) \quad \forall x \in M, v \in T_x M, p \in T_x^* M$$

tendremos entonces que

$$\partial_x U_n(t, x)(v) \leq L(x, v) + H\big(x, \partial_x U_n(t, x)\big), \quad \forall (t, x) \in V, \forall v \in T_x M, \forall n \in \mathbb{N} \quad (64)$$

Como U_n es subsolución de Hamilton-Jacobi en V, tenemos que

$$\partial_t U_n(t, x) + H\big(x, \partial_x U_n(t, x)\big) \leq 0 \quad \forall (t, x) \in V, \forall n \in \mathbb{N} \quad (65)$$

Sumando las desigualdades (64) y (65), obtenemos

$$\partial_t U_n(t, x) + \partial_x U_n(t, x)(v) \leq L(x, v) \quad \forall (t, x) \in V, \forall v \in T_x M, \forall n \in \mathbb{N}$$

Evaluando sobre la curva γ (es decir, $x = \gamma(t)$, $v = \dot{\gamma}(t)$) obtenemos

$$\partial_t U_n\big(t, \gamma(t)\big) + \partial_x U_n\big(t, \gamma(t)\big)(\dot{\gamma}(t)) \leq L\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big) \quad \forall t \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}$$

Podemos identificar que el lado izquierdo corresponde con $\frac{d}{dt} U_n\big(t, \gamma(t)\big)$, por lo que

$$\frac{d}{dt} U_n\big(t, \gamma(t)\big) \leq L\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big) \quad \forall t \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}$$

Integrando de ambos lados en $[a, b]$ respecto al tiempo t, obtenemos

$$U_n\big(b, \gamma(b)\big) - U_n\big(a, \gamma(a)\big) \leq \mathbb{L}(\gamma)$$

Como $||U - U_n||_{V,\infty} \to 0$ cuando $n \to \infty$, tenemos entonces que al tomar límite en n que

$$U\big(b, \gamma(b)\big) - U\big(a, \gamma(a)\big) \leq \mathbb{L}(\gamma)$$

Es decir que U es dominada por L en O.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que U es dominada por L en O.

Sea $\phi : O \to \mathbb{R}$ de clase C^1, tal que $\phi \geq U$, y sea $(t, x) \in O$ tal que $\phi(t, x) = U(t, x)$.

Sea $v \in T_x M$, y $\gamma : [t - \epsilon, t] \to M$ tal que $\gamma(t) = x, \dot{\gamma}(t) = v$ y $Graph(\gamma) \subset O$.

Como $\phi \geq U$ y se alcanza la igualdad en (t, x), tenemos entonces que

$$\phi\big(t, \gamma(t)\big) - \phi\big(t - \epsilon, \gamma(t - \epsilon)\big) \leq U\big(t, \gamma(t)\big) - U\big(t - \epsilon, \gamma(t - \epsilon)\big) \leq \int_{t-\epsilon}^{t} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big) ds$$

Dividiendo entre ϵ y haciendo el límite con $\epsilon \to 0$, se obtiene

$$\left.\frac{d}{dt} \phi\big(t, \gamma(t)\big)\right|_{t=0} \leq L\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)$$

Escribiendo el lado derecho usando regla de la cadena y sustituyendo $\gamma(t) = x$ y $\dot{\gamma}(t) = v$ se obtiene

$$\partial_t \phi(t, x) + \partial_x \phi(t, x)(v) \leq L(x, v) \tag{66}$$

Entonces

$$\partial_t \phi(t, x) + \partial_x \phi(t, x)(v) - L(x, v) \leq 0$$

Tomando el supremo en $v \in T_x M$, se obtiene

$$\partial_t \phi(t, x) + H\big(x, \partial_x \phi(t, x)\big) \leq 0$$

Por lo tanto U es subsolución de viscosidad de la ecuación de evolución de Hamilton-Jacobi. $\square$

6.3. Construcción local con condiciones iniciales y de borde

Antes de comenzar con la construcción local, recordaremos algunos resultados previos

Lema 6.3. ***(lema de Fleming)*** *La función* $(t, x, y) \mapsto h_t(x, y)$ *es continua en* $(0, \infty) \times M \times M$.

Más aún, esta función es localmente Lipschitz.

La prueba de este lema se puede encontrar en [3].

Si $C \subset M$ es compacto y $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, definimos el compacto $K = K(a, b, C)$ dado por

$$K = [a, b] \times \partial C \cup \{a\} \times C$$

La siguiente proposición nos permite construír subsoluciones de viscosidad a partir de sus condiciones de borde.

Proposición 6.4. *Si* $U : K \to \mathbb{R}$ *es una función continua, consideramos su extensión* $\hat{U} : [a, b] \times C \to \mathbb{R}$ *definida como*

$$\hat{U}(t, x) = \begin{cases} U(t, x) & \text{si } (t, x) \in K \\ \inf\{U(t', x') + h_{t-t'}(x', x) : \; t' < t, (t', x') \in K\} & \text{si } (t, x) \in (a, b] \times \mathring{C} \end{cases}$$

Entonces la función $\hat{U}$ *es continua en* $(a, b] \times \mathring{C}$ *y fuertemente dominada por* L *en* $(a, b] \times \mathring{C}$.

Para probarlo, precisaremos probar primero el siguiente lema

Lema 6.5. *Para todo* $(t_0, x_0) \in (a, b] \times \mathring{C}$*, existe un entorno* $V \subset (a, b] \times \mathring{C}$ *de* (t_0, x_0) *y* $\epsilon > 0$ *tal que la extensión* $\hat{U} : [a, b] \times C \to \mathbb{R}$ *definida como en la proposición, verifica que*

$$\hat{U}(t, x) = \inf\{U(t', x') + h_{t-t'}(x', x) : t' \leq t - \epsilon, (t', x') \in K\} \quad \forall (t, x) \in V$$

En particular, para cada $(t_0, x_0) \in (a, b] \times \mathring{C}$*, existe* $(t', x') \in K$ *con* $t' < t$ *tal que*

$$\hat{U}(t_0, x_0) = U(t', x') + h_{t_0 - t'}(x', x_0)$$

Demostración. Por como definimos $\hat{U}$, tenemos que para todo $(t, x) \in (a, b] \times \mathring{C}$ se cumple (considerando $(t', x') = (a, x) \in K$) que

$$\hat{U}(t, x) \leq U(a, x) + h_{t-a}(x, x) \leq \sup_K U + (b - a)|A(0)| < \infty$$

donde $A(0) = \sup_{x \in M} L(x, 0)$. Sea $\kappa = \sup_K U + (b - a)|A(0)| < \infty$. Entonces

$$\hat{U}(t, x) = \inf_{(t', x') \in K}\{U(t', x') + h_{t-t'}(x', x) : t' < t, \; U(t', x') + h_{t-t'}(x, x') \leq \kappa\}$$

Sea $(t_0, x_0) \in (a, b] \times \mathring{C}$, $r > 0$ y $\delta > 0$ tales que $\overline{B}(x_0, 2r) \subset \mathring{C}$ y $t_0 - \delta > a$.

Si $(t, x) \in [t_0 - \delta, b] \times \overline{B}(x_0, r)$, entonces (descomponiendo $K = \{a\} \times C \cup [a, b] \times \partial C$) hay dos posibilidades

- Si $\hat{U}(t, x) = \text{ínf}\{U(a, x') + h_{t-a}(x', x) : x' \in C\}$

  En este caso (como $t \geq t_0 - \delta > a$), tenemos que $t - a \geq t_0 - \delta - a > 0$. Entonces considerando $\epsilon \in (0, t_0 - \delta - a)$, tenemos que $t - a \geq \epsilon$ (o equivalentemente, $t - \epsilon \geq a$) por lo que la afirmación del lema es cierta.

- Si

  $$\hat{U}(t, x) = \text{ínf}\{U(t', x') + h_{t-t'}(x', x) : t' < t, x' \in \partial C,\ U(t', x') + h_{t-t'}(x, x') \leq \kappa\}$$

  Definamos $m = \text{ínf}_{(t',x') \in K} U(t', x')$. Tomemos entonces $t' < t$, $x' \in \partial C$ tales que $U(t', x') + h_{t-t'}(x', x) \leq \kappa$. Entonces

  $$m + h_{t-t'}(x', x) \leq U(t', x') + h_{t-t'}(x', x) \leq \kappa$$

  Por lo tanto
  $$h_{t-t'}(x', x) \leq \kappa - m$$
  Por la proposición 4,4, para todo $\tilde{K} \geq 0$ se cumple

  $$\tilde{K}.d(x', x) - C(\tilde{K}).(t - t') \leq h_{t-t'}(x', x) \leq \kappa - m$$

  Como $x \in \overline{B}(x_0, r) \subset \overline{B}(x_0, 2r) \subset \mathring{C}$ y $x' \in \partial C$, entonces $d(x', x) \geq r$. Entonces

  $$\tilde{K}r - C(\tilde{K}).(t - t') \leq \kappa - m$$

  Deducimos entonces que para todo $\tilde{K} \geq 0$ vale que

  $$\tilde{K}.r - \kappa + m \leq C(\tilde{K}).(t - t')$$

  Observar que como definimos $\kappa = \sup_K U + (b - a)|A(0)|$ y $m = \text{ínf}_K U$, tenemos que $m - \kappa \leq 0$. Entonces podemos tomar $\tilde{K} \geq 0$ tal que $\tilde{K}.r - \kappa + m = 1$, entonces
  $$1 \leq C(\tilde{K}).(t - t')$$
  por lo que
  $$\frac{1}{C(\tilde{K})} \leq t - t'$$
  Tomando $\epsilon < \frac{1}{C(\tilde{K})}$, obtenemos entonces la afirmación del lema.

□

Ahora procederemos a probar la proposición 6,4.

Demostración. Que $\hat{U}$ es fuertemente dominada por L en $(a,b]\times\mathring{C}$ surge directamente de la defunición de $\hat{U}$ y de la propiedad de semigrupo de $h_t(x,y)$. Es decir, si $(t_1,x_1),(t_2,x_2)\in(a,b]\times\mathring{C}$ con $t_1<t_2$, y tomamos $(t',x')\in K$ tal que $t'<t_1<t_2$, entonces por la propiedad de semigrupo tenemos

$$h_{t_2-t'}(x',x_2)\leq h_{t_1-t'}(x',x_1)+h_{t_2-t_1}(x_1,x_2)$$

Entonces sumando $U(t',x')$ tenemos

$$U(t',x')+h_{t_2-t'}(x',x_2)\leq U(t',x')+h_{t_1-t'}(x',x_1)+h_{t_2-t_1}(x_1,x_2)$$

Entonces tomando ínfimo en los $(t',x')\in K$ con $t'<t_1$

$$\inf_{t'<t_1,(t',x')\in K} U(t',x')+h_{t_2-t'}(x',x_2)\leq \hat{U}(t_1,x_1)+h_{t_2-t_1}(x_1,x_2)$$

Observar que el lado izquierdo es mayor o igual que $\hat{U}(t_2,x_2)$ (pues se está tomando un ínfimo en un conjunto más chico). Entonces

$$\hat{U}(t_2,x_2)\leq \hat{U}(t_1,x_1)+h_{t_2-t_1}(x_1,x_2)$$

Entonces $\hat{U}$ es fuertemente dominada por L en $(a,b]\times\mathring{C}$.

La continuidad de $\hat{U}$ en $(a,b]\times\mathring{C}$ es consecuencia de la continuidad del mapa $(t,x,y)\mapsto h_t(x,y)$ en $\mathbb{R}\times M\times M$ y del lema anterior, pues $\hat{U}$ se puede escribir como tomar el mínimo de una suma de funciones continuas.

$\square$

Proposición 6.6. *Sea $C\subset M$ un compacto, y $V:[a,b]\times C\to\mathbb{R}$ una función continua fuertemente dominada por L en $[a,b]\times C$.*

Consideramos $K=\{a\}\times C\cup[a,b]\times\partial C$, y la restricción $U=V\Big|_K:K\to\mathbb{R}$. Sea función $\hat{U}:[a,b]\times C\to\mathbb{R}$ definida como antes, es decir

$$\hat{U}(t,x)=\begin{cases}U(t,x) & si\ (t,x)\in K\\ \inf\{U(t',x')+h_{t-t'}(x',x):\ t'<t,(t',x')\in K\} & si\ (t,x)\in(a,b]\times\mathring{C}\end{cases}$$

Entonces $\hat{U}\geq V$ y $\hat{U}$ es continua en $[a,b]\times C$.

Demostración. Es claro que como $\hat{U}\Big|_K = U = V\Big|_K$, basta ver que $\hat{U} \geq V$ en $(a,b] \times \mathring{C}$.

Si tomamos $(t,x) \in (a,b] \times \mathring{C}$, y $(t',x') \in K$ con $t' < t$, entonces como V es fuertemente dominada por L tenemos que

$$V(t,x) \leq V(t',x') + h_{t-t'}(x',x) = U(t',x') + h_{t-t'}(x,x')$$

Tomando ínfimo en todos los $(t',x') \in K$ con $t' < t$ obtenemos que

$$V(t,x) \leq \hat{U}(t,x)$$

Resta ver la continuidad de $\hat{U}$ en $[a,b] \times C$. Ya sabemos que $\hat{U}$ es continua en $(a,b] \times \mathring{C}$ por la proposición 6,4. Por lo tanto, solo queda probar la continuidad de $\hat{U}$ en $K = [a,b] \times \partial C \cup \{a\} \times C$.

En primer lugar, consideremos un punto $(a,x) \in \{a\} \times C$. Como $\hat{U}\Big|_K = U$ y U es continua, basta ver que si tomamos una sucesión $(t_n,x_n) \to (a,x)$ con $t_n > a$, entonces $\hat{U}(t_n,x_n) \to U(a,x)$.

Para ver eso, observemos que por la definición de $\hat{U}$ y como $V \leq \hat{U}$ tenemos que

$$V(t_n,x_n) \leq \hat{U}(t_n,x_n) \leq U(a,x_n) + h_{t_n-a}(x_n,x_n) \leq U(a,x_n) + A(0).(t_n - a)$$

Como V es continua, tenemos que tenemos que el lado izquierdo de esta cadena de desigualdades converge a $V(a,x) = U(a,x)$, y claramente (por continuidad de U) el lado derecho de la cadena de esta desigualdad converge a $U(a,x)$. Entonces

$$\hat{U}(t_n,x_n) \xrightarrow{n} U(a,x) = \hat{U}(a,x)$$

Ahora, resta ver la continuidad de $\hat{U}$ en los puntos $(t,x) \in [a,b] \times \partial C$. Consideremos $(t_n,x_n) \to (t,x) \in [a,b] \times \partial C$, y entonces por continuidad de $U = \hat{U}\Big|_K$, podemos suponer que $x_n \in \mathring{C}$.

Sea $t' \in [a,t)$, y como $t_n \to t$, sabemos que a partir de un $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande se cumplirá que $t_n > t'$.

Entonces, a partir de este n_0 tendremos que

$$V(t_n,x_n) \leq \hat{U}(t_n,x_n) \leq U(t',x) + h_{t_n-t'}(x_n,x)$$

Por continuidad de V, que $V(t_n, x_n) \to V(t,x) = U(t,x)$, y por continuidad del mapa $(t,x,y) \mapsto h_t(x,y)$ tenemos que $h_{t_n - t'}(x_n, x) \to h_{t-t'}(x,x)$. Entonces al pasar al límite en esta cadena de desigualdades obtenemos

$$U(t,x) \leq \liminf_n \hat{U}(t_n, x_n) \leq \limsup_n \hat{U}(t_n, x_n) \leq U(t', x) + h_{t-t'}(x,x)$$

Luego, por la proposición 4,4 tenemos la cota $h_{t-t'}(x,x) \leq (t-t').A(0)$, entonces

$$U(t,x) \leq \liminf_n \hat{U}(t_n, x_n) \leq \limsup_n \hat{U}(t_n, x_n) \leq U(t', x) + (t-t').A(0)$$

Haciendo $t' \to t$, obtenemos

$$U(t,x) \leq \liminf_n \hat{U}(t_n, x_n) \leq \limsup_n \hat{U}(t_n, x_n) \leq U(t,x)$$

Por lo tanto, concluímos que $\hat{U}$ es continua en $[a,b] \times C$.

$\square$

Proposición 6.7. *Sea $V : [a,b] \times C \to \mathbb{R}$ continua y fuertemente dominada por L en $[a,b] \times C$. Sea $K = [a,b] \times \partial C \cup \{a\} \times C$, y la función $U : K \to \mathbb{R}$, dada por $U = V\Big|_K$.*

Entonces $\hat{U}$ es fuertemente dominada por L en $[a,b] \times C$ y es solución de viscosidad de la ecuación de Hamilton Jacobi

$$\partial_t U + H\big(x, \partial_x U\big) = 0$$

en $(a,b) \times \mathring{C}$.

Demostración. Sabemos (por la proposición 6,4) que $\hat{U}$ es fuertemente dominada en $(a,b] \times \mathring{C}$ y (por la proposición 6,6) es continua en $[a,b] \times C$. Por continuidad de $h_t(x,y)$, tenemos entonces que $\hat{U}$ es fuertemente dominada en $[a,b] \times C$.

Entonces, por la proposición 6,2 tenemos que $\hat{U}$ es subsolución de viscosidad de la ecuación de evolución de Hamilton-Jacobi.

Resta ver que $\hat{U}$ es entonces supersolución.

Tomemos $\psi : (a,b) \times \mathring{C} \to \mathbb{R}$ de clase C^1, con $\psi \leq \hat{U}$ en $(a,b) \times \mathring{C}$, y sea $(t_0, x_0) \in (a,b) \times \mathring{C}$ donde se alcanza la igualdad $\hat{U}(t_0, x_0) = \psi(t_0, x_0)$.

Por el lema 6,5, tenemos que el ínfimo de la definición de $\hat{U}(t_0, x_0)$ se alcanza en un $(t', x') \in K$ con $t' < t$. Es decir, existe $(t', x') \in K$ con $t' < t$ tal que

$$\hat{U}(t_0, x_0) = U(t', x') + h_{t_0 - t'}(x', x_0) \tag{67}$$

Por el teorema de Tonelli, existe una curva $\gamma : [t', t_0] \to M$ con $\gamma(t_0) = x_0$, $\gamma(t') = x'$ tal que

$$\mathbb{L}(\gamma) = h_{t_0-t'}(x', x_0)$$

Sustituyendo esto en la ecuación (67), tenemos que

$$\hat{U}(t_0, x_0) = U(t', x') + \int_{t'}^{t_0} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds \tag{68}$$

Como $\hat{U}$ es fuertemente dominada por L en $[a, b] \times C$, entonces para todo $t \in (t', t_0)$ tenemos que

$$\begin{cases} \hat{U}\big(t_0, x_0\big) \leq \hat{U}\big(t, \gamma(t)\big) + \int_t^{t_0} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds \\ \hat{U}\big(t, \gamma(t)\big) \leq U\big(t', x'\big) + \int_{t'}^{t} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds \end{cases}$$

Sumando estas dos desigualdades, se puede ver que por la ecuación (68) se obtiene una igualdad. Por lo tanto, cada una de estas desigualdades es de hecho una igualdad.

Es decir que

$$\hat{U}\big(t_0, x_0\big) = \hat{U}\big(t, \gamma(t)\big) + \int_t^{t_0} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds \quad \forall t \in (t', t_0)$$

Recordemos que $\psi \leq \hat{U}$, y se alcanza la igualdad en $\big(t_0, \gamma(t_0)\big) = (t_0, x_0)$, por lo que

$$\psi\big(t_0, x_0\big) \geq \psi\big(t, \gamma(t)\big) + \int_t^{t_0} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds \quad \forall t \in (t', t_0)$$

Entonces

$$\psi\big(t_0, x_0\big) - \psi\big(t, \gamma(t)\big) \geq \int_t^{t_0} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds \quad \forall t \in (t', t_0)$$

Dividiendo entre $t_0 - t > 0$, y haciendo el límite con $t \to t_0$ obtenemos

$$\frac{d}{dt}\psi\big(t, \gamma(t)\big)\bigg|_{t=t_0} \geq L\big(\gamma(t_0), \dot{\gamma}(t_0)\big)$$

Usando regla de la cadena y sustituyendo $x_0 = \gamma(t_0)$, obtenemos

$$\partial_t\psi(t_0, x_0) + \partial_x\psi(t_0, x_0)\big(\dot{\gamma}(t_0)\big) \geq L\big(x_0, \dot{\gamma}(t_0)\big) \tag{69}$$

Luego por la desigualdad de Fenchel tenemos que

$$L\big(x_0, \dot{\gamma}(t_0)\big) \geq \partial_x\psi(t_0, x_0)\big(\dot{\gamma}(t_0)\big) - H\big(x_0, \partial_x\psi(t_0, x_0)\big) \tag{70}$$

Por lo tanto, de las desigualdes (69) y (70) deducimos que

$$\partial_t\psi(t_0, x_0) \geq -H\big(x_0, \partial_x\psi(t_0, x_0)\big) \tag{71}$$

Entonces, $\partial_t\psi(t_0, x_0) + H\big(x_0, \partial_x\psi(t_0, x_0)\big) \geq 0$, lo que implica que $\hat{U}$ es supersolución de viscosidad.

$\square$

7. Soluciones globales de viscosidad

En esta sección, caracterizarán las soluciones globales de viscosidad a partir de la evolución de Lax-Oleinik de su condición inicial. Se verá que dicha condición inicial puede remplazarse por su regularización inferior, de modo de poder restringir al estudio de las soluciones de viscosidad con condiciones semicontinuas inferiormente. También se verá en el transcurso la existencia de curvas calibrantes definidas en $[0, t]$ que culminen en un punto arbitrario $x \in M$ para cualquier $t > 0$. Finalmente también se estudiará el método de las energías, que nos permitirá acotar la magnitud de la velocidad de las curvas minimizantes en términos de la distancia entre los extremos y de su acción.

7.1. Existencia de curvas calibrantes

Corolario 7.0.1. ***(existe calibrante local)*** *Sea $O \subset \mathbb{R} \times M$ es un abierto, y $V : O \to \mathbb{R}$ una solución de viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi*

$$\partial_t V + H(x, \partial_x V) = 0$$

en O. Entonces para todo $(t, x) \in O$, existe una curva minimizante $\gamma : [t-\epsilon, t] \to M$, con $\gamma(t) = x$ y $Graph(\gamma) \subset O$, tal que

$$V(t, x) = V\big(t - \epsilon, \gamma(t - \epsilon)\big) + \int_{t-\epsilon}^{t} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big) ds$$

Demostración. Como V es subsolución de viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi, tendremos entonces por la proposición 6,2 que V es de evolución dominada por L.

Entonces por la proposición 6,1 tenemos que V es localmente fuertemente dominada por L.

Sea entonces $(t, x) \in O$, y entonces podemos tomar $\delta > 0$ y $r > 0$ tales que V es fuertemente dominada en $[t - \delta, t + \delta] \times \overline{B}(x, r) \subset O$.

Sea $K = [t - \delta, t + \delta] \times \partial\overline{B}(x, r) \cup \{t - \delta\} \times \overline{B}(x, r)$, y llamemos $U = V\Big|_K$.

Consideramos la extensión $\hat{U} : [t - \delta, t + \delta] \times \overline{B}(x, r) \to \mathbb{R}$ definida (al igual que antes) por

$$\hat{U}(t, x) = \inf\{U(t, x) + h_{t-t'}(x', x) : t' < t, (t', x') \in K\}$$

Por la proposición 6,6 sabemos que $\hat{U}$ es continua, y además por la proposición 6,7 tenemos que $\hat{U}$ es solución de viscosidad a la ecuación de evolución de Hamilton-Jacobi en $(t_0-\delta, t_0+\delta) \times \mathring{B}(x,r)$.

Como $V\Big|_K = U = \hat{U}\Big|_K$ y tanto V como $\hat{U}$ son soluciones de viscosidad, tenemos por el principio del máximo visto en el teorema 5,3, que $V = \hat{U}$ en $[t-\delta, t+\delta] \times \overline{B}(x,r)$.

Por el lema 6,5, sabemos que el ínfimo de la definición de $\hat{U}$ se alcanza. Es decir que existe $(t', x') \in K$ con $t' < t$ tal que $V(t,x) = V(t',x') + h_{t-t'}(x', x)$.

Tomando entonces $\epsilon > 0$ tal que $t - \epsilon = t'$, y eligiendo una curva minimizante $\gamma : [t-\epsilon, t] \to M$ tal que $\gamma(t-\epsilon) = x'$, $\gamma(t) = x$ y $Graph(\gamma) \subset [t-\delta, t+\delta] \times \overline{B}(x,r) \subset O$, obtenemos que

$$V\big(t,x\big) = V\big(t-\epsilon, \gamma(t-\epsilon)\big) + \int_{t-\epsilon}^{t} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds$$

$\square$

Proposición 7.1. ***(existe calibrante desde tiempo 0)*** *Si* $V : [0,\infty) \times M \to \mathbb{R}$ *es una solución de viscosidad continua de*

$$\partial_t V(t,x) + H\big(x, \partial_x V(t,x)\big) = 0 \qquad \text{en } (0,\infty) \times M$$

Entonces para todo $(t,x) \in (0,\infty) \times M$*, existe una curva* $\gamma : [0,t] \to M$ *minimizante con* $\gamma(t) = x$ *y que*

$$V(t,x) = V\big(0, \gamma(0)\big) + \int_0^t L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds$$

Demostración. Sea $(t,x) \in (0,\infty) \times M$.

Por el colorario 7,0,1, sabemos que existe $\gamma : [t-\epsilon, t] \to M$, con $\gamma(t) = x$, tal que

$$V\big(t,x\big) = V\big(t-\epsilon, \gamma(t-\epsilon)\big) + \int_{t-\epsilon}^{t} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds \tag{72}$$

La curva minimizante $\gamma : [t-\epsilon, t] \to M$ se puede extender a una curva $\gamma : (-\infty, +\infty) \to M$ extremal de clase C^2 mediante el flujo de Euler-Lagrange.

Veamos que para esta curva γ extremal se cumple que

$$V\big(t,x\big) = V\big(0, \gamma(0)\big) + \int_0^t L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds$$

Para esto, definamos el conjunto

$$S = \{a \in [0,t] : V\big(t,x\big) = V\big(a,\gamma(a)\big) + \int_a^t L\big(\gamma(s),\dot\gamma(s)\big)ds\}$$

Claramente por la ecuación (72) tenemos que $t-\epsilon \in S$, por lo que $S \neq \emptyset$. Sea entonces $a_0 = \text{ínf}\, S \geq 0$.

Observar que por continuidad de V, tenemos que si $a_0 = \text{ínf}\, S$, entonces

$$V\big(t,x\big) = V\big(a_0,\gamma(a_0)\big) + \int_{a_0}^t L\big(\gamma(s),\dot\gamma(s)\big)ds$$

Es decir que $a_0 \in S$.

Si $a_0 = 0$, entonces quedó probada la proposición.

Supongamos entonces (por absurdo) que $a_0 > 0$.

Aplicando el corolario 7,0,1 en el punto $\big(a_0,\gamma(a_0)\big)$, podemos construir una curva $\tilde\gamma : [a_0-\tilde\epsilon, a_0] \to M$ con $\tilde\gamma(a_0) = \gamma(a_0)$ y

$$V\big(a_0,\gamma(a_0)\big) = V\big(a_0-\tilde\epsilon,\tilde\gamma(a_0,-\tilde\epsilon\big) + \int_{a_0-\tilde\epsilon}^{a_0} L\big(\tilde\gamma(s),\dot{\tilde\gamma}(s)\big)ds$$

Consideremos la concatenación de $\tilde\gamma$ con $\gamma\Big|_{[a_0,t]}$, es decir, sea $\delta : [a_0-\tilde\epsilon,t] \to M$ definida por

$$\delta(s) = \begin{cases} \tilde\gamma(s) & \text{si } s \in [a_0-\tilde\epsilon,a_0] \\ \gamma(s) & \text{si } s \in [a_0,t] \end{cases}$$

Como tenemos las igualdades

$$\begin{cases} V\big(t,x\big) = V\big(a_0,\gamma(a_0)\big) + \int_{a_0}^t L\big(\gamma(s),\dot\gamma(s)\big)ds \\ V\big(a_0,\gamma(a_0)\big) = V\big(a_0-\tilde\epsilon,\tilde\gamma(a_0,-\tilde\epsilon\big) + \int_{a_0-\tilde\epsilon}^{a_0} L\big(\tilde\gamma(s),\dot{\tilde\gamma}(s)\big)ds \end{cases}$$

que sumándolas implican que

$$V(t,x) = V\big(a_0-\tilde\epsilon,\delta(a_0,-\tilde\epsilon)\big) + \int_{a_0-\tilde\epsilon}^t L\big(\delta(s),\dot\delta(s)\big)ds \tag{73}$$

Como V es dominada en $[0,\infty)\times M$, tenemos entonces que δ es de mínima acción, y por lo tanto extremal. Es decir que en particular δ es de clase C^2, lo que implica que

$$\begin{cases} \gamma(a_0) = \tilde\gamma(a_0) \\ \dot\gamma(a_0) = \dot{\tilde\gamma}(a_0) \end{cases}$$

Entonces por la unicidad de soluciones de curvas extremales dado un punto y una velocidad inicial, tenemos entonces que

$$\tilde{\gamma} = \gamma\Big|_{[a_0-\tilde{\epsilon},a_0]}$$

Entonces $\delta = \gamma\Big|_{[a_0-\tilde{\epsilon},t]}$, por lo que la igualdad (73) se escribe como

$$V(t,x) = V\big(a_0 - \tilde{\epsilon}, \gamma(a_0, -\tilde{\epsilon}\big) + \int_{a_0-\tilde{\epsilon}}^{t} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds$$

Entonces $a_0 > \inf S$, lo cual es absurdo por definición de a_0.

$\square$

7.2. Las soluciones globales son evoluciones de Lax-Oleinik

Teorema 7.2. ***(Fórmula de Lax-Oleinik)*** *Si $V : [0,\infty) \times M \to \mathbb{R}$ es una solución de viscosidad continua de*

$$\partial_t V(t,x) + H\big(x, \partial_x V(t,x)\big) = 0 \qquad \text{en } (0,\infty) \times M$$

Sea $v : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$v(x) = V(0,x)$$

Entonces $V = \hat{v}$ en $[0,\infty) \times M$, donde recordemos que $\hat{v}$ se denota a la evolución de Lax-Oleinik de v, es decir

$$V(t,x) = \inf_{y \in M} v(y) + h_t(y,x)$$

Demostración. Sea $(t,x) \in (0,\infty) \times M$. Como V es una solución (y en particular, es subsolución) de viscosidad continua en $(0,\infty)$, tenemos (por la proposición 6,2) que V es fuertemente dominada por L, por lo que

$$V(t,x) \leq \inf_{y \in M} V(0,y) + h_t(y,x) = \inf_{y \in M} v(y) + h_t(t,x) = \hat{v}(t,x)$$

Ahora resta ver que $V \geq \hat{v}$.

Para eso, observemos que por la proposición 7,1, sabemos que para cualquier $(t,x) \in (0,\infty) \times M$, podemos encontrar una curva $\gamma : [0,t] \to M$ minimizante con $\gamma(t) = x$ tal que

$$V\big(t,x\big) = V\big(0, \gamma(0)\big) + \int_0^t L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds \tag{74}$$

Pero por otra parte

$$V\big(0,\gamma(0)\big) + \int_0^t L\big(\gamma(s),\dot\gamma(s)\big)ds = v\big(\gamma(0)\big) + \int_0^t L\big(\gamma(s),\dot\gamma(s)\big)ds \geq$$
$$\geq \inf_{y\in M} v(y) + h_t(y,x) = \hat v(t,x)$$

Por lo tanto, sustituyendo en la ecuación 74 tenemos

$$V(t,x) \geq \hat v(t,x)$$

Entonces

$$V(t,x) = \hat v(t,x)$$

□

El siguiente corolario es inmediato de la fórmula de Lax-Oleinik.

Corolario 7.2.1. *Si $V_1, V_2 : [0,\infty)\times M \to \mathbb{R}$ son soluciones de viscosidad continuas de*

$$\partial_t V + H\big(x, \partial_x V(t,x)\big) = 0 \qquad \text{en } (0,\infty)\times M$$

Si $V_1\Big|_{t=0} = V_2\Big|_{t=0}$, entonces $V_1 = V_2$ en $[0,\infty)\times M$.

7.3. Finitud del semigrupo de Lax-Oleinik

Lema 7.3. *Sea $u : M \to [-\infty,+\infty]$. Entonces*

1. *Si u es identicamente $+\infty$ en M, entonces su evolución de Lax-Oleinik $\hat u$ también lo es.*
2. *Si u no es idénticamente $+\infty$ en M, entonces su evolución de Lax-Oleinik $\hat u(t,x) < +\infty$ para todo $t > 0$, $x \in M$.*

Demostración.

1. El primer punto sigue de que $h_t(y,x) < +\infty$ y que

$$\hat u(t,x) = \inf_{y\in M} u(y) + h_t(y,x) = \inf_{y\in M} +\infty + h_t(y,x) = +\infty$$

2. Para el segundo punto, tomemos $x_0 \in M$ tal que $u(x_0) < +\infty$, y entonces

$$\hat u(t,x) \leq u(x_0) + h_t(x_0,x) < +\infty$$

□

Debido a este lema, supondremos de aqui en adelante que la función $u : M \to [-\infty, +\infty]$ no es idénticamente $+\infty$.

Observación. *Si $u : M \to [-\infty, +\infty]$, entonces por el lema anterior sabemos que $\hat{u}(t,x) < +\infty$ para todo $t > 0$, $x \in M$. Entonces que $\hat{u}(t,x)$ sea finita, es equivalente a probar que $\hat{u}(t,x) > -\infty$.*

Lema 7.4. *Si $\hat{u}(t_0, x_0)$ es finito para algún $(t_0, x_0) \in (0, \infty) \times M$, entonces $\hat{u}$ es finita en $(0, t_0) \times M$.*

Demostración. Observar que por la propiedad de semigrupo de T_t^-, teníamos que $T_{t+s}^- u(x) = T_s^-\big(T_t^- u\big)(x)$ para todo $x \in M$ y para todo $t, s \geq 0$. Esto implica que

$$T_{t+s}^- u(x) \leq T_t^- u(y) + h_s(y, x) \quad \forall x, y \in M, t \geq 0, s > 0$$

Equivalentemente, esto se escribe como

$$\hat{u}(t+s, x) \leq \hat{u}(t, y) + h_s(y, x) \quad \forall x, y \in M, t \geq 0, s > 0$$

Es decir que $\hat{u}$ es fuertemente dominada por L en $[0, \infty) \times M$.

Sea $(t, y) \in (0, t_0) \times M$. Como $\hat{u}$ es fuertemente dominada en $[0, \infty) \times M$, tenemos que

$$\hat{u}(t_0, x_0) \leq \hat{u}(t, y) + h_{t_0 - t}(y, x_0)$$

Como $h_{t_0-t}(y, x_0)$ es finito, tenemos entonces que

$$-\infty < \hat{u}(t, y)$$

Entonces, por la observación anterior, tenemos que $\hat{u}(t, y)$ es finito.

□

Proposición 7.5. *Si $\theta : M \to \mathbb{R}$ es una función Lipschitz, entonces $\hat{\theta}$ es finita en todo $[0, \infty) \times M$.*

Más aún, $\hat{\theta} : [0, \infty) \times M \to \mathbb{R}$ está acotada por debajo por una función globalmente Lipschitz en $[0, \infty) \times M$.

Demostración. Sea K constante de Lipschitz de θ. Entonces

$$\theta(y) \geq \theta(x) - K.d(x, y) \tag{75}$$

Usando la superlinealidad de L, tenemos por la proposición 4,4 que

$$h_t(y,x) \geq K.d(y,x) - C(K).t \tag{76}$$

Sumando entonces las desigualdades (75) y (76) obtenemos

$$\theta(y) + h_t(y,x) \geq \theta(x) - C(K).t$$

Entonces

$$\hat{\theta}(t,x) = \inf_{y \in M} \theta(y) + h_t(y,x) \geq \theta(x) - C(K).t$$

Entonces $\hat{\theta}$ está acotada inferiormente por la función $(t,x) \mapsto \theta(x) - C(K).t$ en todo $[0,\infty) \times M$, lo que implica en particular que $\hat{\theta}$ es finita.

□

Corolario 7.5.1. *Si $u :\to \mathbb{R}$ está acotada por debajo por una función Lipschitz, entonces $\hat{u}$ es finita en todo $[0,\infty) \times M$ y además $\hat{u}$ está acotada por debajo con una función globalmente Lipschitz.*

Demostración. Tenemos que $u \geq \theta$, siendo $\theta : M \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz. Entonces sabemos que

$$\hat{u}(t,x) \geq \hat{\theta}(t,x) \geq \theta(x) - C(K).t$$

siendo K la constante de Lipschitz de θ. Entonces $\hat{u}$ acotada inferiormente por la función Lipschitz $(t,x) \mapsto \theta(x) - C(K).t$, lo que implica en particular que $\hat{u}$ es finita.

□

Ejemplo 7.6. *Para el lagrangiano $L_0 : TM \to \mathbb{R}$ definido por $L_0(x,v) = \frac{1}{2}||v||_x^2$, sabemos que $h_t^0(y,x) = \frac{d(y,x)^2}{2t}$.*

Entonces, si $u : M \to \mathbb{R}$, tenemos que su evolución de Lax-Oleinik es

$$\hat{u}(t,x) = T_t^- u(x) = \inf_{y \in M} u(y) + \frac{d(y,x)^2}{2t}$$

Dado $x_0 \in M$ y $\alpha > 0$, consideremos la función $u_\alpha : M \to \mathbb{R}$ definida por

$$u_\alpha(x) = -\alpha.d(x_0,x)^2$$

Entonces su evolución de Lax-Oleinik es

$$\hat{u}_\alpha(t,x) = \inf_{y \in M} -\alpha.d(x_0,y)^2 + \frac{d(y,x)^2}{2t}$$

Entonces, por desigualdad triangular tenemos la siguiente cota superior

$$\hat{u}_\alpha(t,x) = \inf_{y\in M} -\alpha.d(x_0,y)^2 + \frac{d(y,x)^2}{2t} \leq$$

$$\leq \inf_{y\in M} -\alpha.d(x_0,y)^2 + \frac{\big(d(y,x_0)+d(x_0,x)\big)^2}{2t} =$$

$$= \inf_{y\in M} d(x_0,y)^2.\big(\frac{1}{2t}-\alpha\big) + d(y,x_0).\frac{d(x_0,x)}{t} + \frac{d(x_0,x)^2}{2t}$$

También tenemos esta cota inferior para su evolución de Lax-Oleinik

$$\hat{u}_\alpha(t,x) = \inf_{y\in M} -\alpha.d(x_0,y)^2 + \frac{d(y,x)^2}{2t} \geq$$

$$\geq \inf_{y\in M} -\alpha\big(d(x_0,x)+d(y,x)\big)^2 + \frac{d(y,x)^2}{2t} =$$

$$\inf_{y\in M} d(y,x)^2\big(\frac{1}{2t}-\alpha\big) - 2\alpha d(y,x).d(x_0,x) - \alpha d(x_0,x)^2$$

Es decir que

$$\begin{cases} \hat{u}_\alpha(t,x) \leq \inf_{y\in M} d(x_0,y)^2.\big(\frac{1}{2t}-\alpha\big) + d(y,x_0).\frac{d(x_0,x)}{t} + \frac{d(x_0,x)^2}{2t} \\ \hat{u}_\alpha(t,x) \geq \inf_{y\in M} d(y,x)^2\big(\frac{1}{2t}-\alpha\big) - 2\alpha d(y,x).d(x_0,x) - \alpha d(x_0,x)^2 \end{cases}$$

Supongamos que M es una variedad no compacta. Entonces distingamos 2 casos

- *Si $\frac{1}{2t}-\alpha < 0$, entonces la cota superior para $\hat{u}_\alpha$ nos dice que $\hat{u}_\alpha(t,x) = -\infty$, pues podemos tomar $d(x_0,y)$ tan grande como queramos.*
- *Si $\frac{1}{2t}-\alpha > 0$, entonces la cota inferior para $\hat{u}_\alpha(t,x)$ implica entonces que $\hat{u}_\alpha(t,x)$ es finita.*

Ejemplo 7.7. *Consideremos nuevamente el Laagrangiano $L_0 : TM \to \mathbb{R}$ definido por $L_0(x,v) = \frac{1}{2}||v||_x^2$,*

Si $C \subset M$ es un conjunto no vació, y definimos la función distancia al conjunto C como $d_C : M \to [0,\infty)$ tal que

$$d_C(x) = \inf_{c\in C} d(c,x)$$

Definimos la función característica modificada de C como $\xi_C : M \to \{0,\infty\}$ tal que

$$\xi_C(x) = \begin{cases} 0 & si\ x\in C \\ +\infty & si\ x\notin C \end{cases}$$

Como $C \neq \emptyset$, tenemos entonces que ξ_C no es idénticamente $+\infty$. Observemos que

$$\hat{\xi}_C(t,x) = \inf_{y\in M} \xi_C(y) + \frac{d(y,x)^2}{2t} = \inf_{y\in C} \frac{d(y,x)^2}{2t} = \frac{d_C(x)^2}{2t}$$

7.4. Evoluciones de Lax-Oleinik son soluciones

Nos interesa ver que en condiciones muy generales, la evolución de Lax-Oleinik $\hat{u}$ de una función u, es solución de viscosidad continuas a la ecuación de evolución de Hamilton-Jacobi. Para eso, precisaremos primer el siguiente teorema que nos permite restringir el ínfimo de la definición de $\hat{u}$ a conjuntos compactos.

Teorema 7.8. *Sea $u : M \to [-\infty, +\infty]$ una función tal que $\hat{u}(t_0, x_0)$ es finito para cierto $t_0 > 0$ y $x_0 \in M$.*

Entonces para todo compacto $K \subset (0, t_0) \times M$, existe un compacto $\tilde{K} \subset M$ tal que

$$\hat{u}(t, x) = \inf_{y \in \tilde{K}} u(y) + h_t(y, x) \quad \forall (t, x) \in K$$

Este teorema nos permitirá probar el siguiente corolario

Corolario 7.8.1. *Sea $u : M \to [-\infty, +\infty]$ una función tal que $\hat{u}(t_0, x_0)$ es finita en algún $t_0 > 0$ y $x_0 \in M$.*

Entonces $\hat{u}$ es una solución de viscosidad continua de

$$\partial_t U + H\big(x, \partial_x U\big) = 0$$

en $(0, t_0) \times M$

Probemos este corolario:

Demostración. Sea $(t', x') \in (0, t_0) \times M$, y un compacto $K \subset (0, t_0) \times M$ tal que $(t', x') \in \mathring{K}$.

Por el teorema 7,8, sabemos que existe un compacto $\tilde{K} \subset M$ tal que

$$\hat{u}(t, x) = \inf_{y \in \tilde{K}} u(y) + h_t(y, x) \quad \forall (t, x) \in K$$

Sea $\tilde{K}_f = \{y \in \tilde{K} : |u(y)| < \infty\}$. Como por el lema 7,4 tenemos que $\hat{u}$ es finita en K, deducimos que

$$\hat{u}(t, x) = \inf_{y \in \tilde{K}_f} u(y) + h_t(y, x) \quad \forall (t, x) \in K \tag{77}$$

Como el mapa $(t, x, y) \mapsto h_t(y, x)$ es continuo en $(0, t_0) \times M \times M$ y tanto $K \subset (0, t_0) \times M$ y $\tilde{K} \subset M$ son compactos, tenemos que la familia de funciones $(t, x) \mapsto h_t(y, x)$ con $y \in \tilde{K}$ es equicontinua en K.

Por lo tanto, la familia de funciones $(t,x) \mapsto u(y)+h_t(y,x)$ con $y \in \tilde{K}$ es una familia de funciones equicontinua en K.

Como $\hat{u}$ es finita en K, concluímos de la ecuación (77) que la función $\hat{u}$ es continua en el entorno K del punto (t', x'). Como $(t', x') \in (0, t_0) \times M$ es arbitrario, tenemos que $\hat{u}$ es continua en todo $(0, t_0) \times M$.

Veamos ahora que $\hat{u}$ es una solución de viscosidad de la ecuación de Hamilton Jacobi

$$\partial_t U + H\big(x, \partial_x U\big) = 0$$

en $(0, t_0) \times M$.

Por un lado, sabemos que $\hat{u}$ es de evolución dominada (lema 4,7), y como además $\hat{u}$ es finita en $(0, t_0) \times M$, esto implica por el teorema 4,8 que $\hat{u}$ es subsolución de viscosidad en $(0, t_0) \times M$.

Tenemos que ver entonces que $\hat{u}$ es supersolución de viscosidad en $(0, t_0) \times M$.

Veamos primero el caso en que u es finita y continua.

Consideremos $\psi \leq \hat{u}$, y sea $(t,x) \in (0, t_0) \times M$ tal que $\psi(t,x) = \hat{u}(t,x)$.

Podemos entonces por el teorema 7,8 encontrar un compacto $\tilde{K} \subset M$ tal que

$$\hat{u}(t,x) = \inf_{y \in \tilde{K}} u(y) + h_t(y,x)$$

Como $t > 0$, tenemos que el mapa $y \mapsto u(y) + h_t(y,x)$ es continuo. Pero $\tilde{K}$ es compacto, por lo que el ínfimo de la ecuación anterior es en realidad un mínimo. Es decir que existe $y_x \in \tilde{K} \subset M$ tal que

$$\hat{u}(t,x) = u(y_x) + h_t(y_x, x) \tag{78}$$

Por el teorema de Tonelli, existe una curva $\gamma : [0,t] \to M$ con $\gamma(0) = y_x$, $\gamma(t) = x$ tal que

$$\mathbb{L}(\gamma) = h_t(y_x, x)$$

Sustituyendo esto en la ecuación (78), tenemos que

$$\hat{u}(t,x) = u(y_x) + \int_0^t L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big) ds \tag{79}$$

Como $\hat{u}$ es dominada por L, entonces para todo $t' \in (0,t)$ tenemos que

$$\begin{cases} \hat{u}\big(t,x\big) \leq \hat{u}\big(t', \gamma(t')\big) + \int_{t'}^t L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big) ds \\ \hat{t}\big(t', \gamma(t')\big) \leq \hat{u}\big(0, y_x\big) + \int_0^{t'} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big) ds \end{cases}$$

Recordando que $\hat{u}(0, y_x) = u(y_x)$ y sumando estas dos desigualdades, se puede ver que por la ecuación (79) se obtiene una igualdad. Por lo tanto, cada una de estas desigualdades es de hecho una igualdad.

Es decir que

$$\hat{u}\big(t, x\big) = \hat{u}\big(t', \gamma(t')\big) + \int_{t'}^{t} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big) ds \quad \forall t' \in (0, t)$$

Recordemos que $\psi \leq \hat{U}$, y se alcanza la igualdad en $\big(t, \gamma(t)\big) = (t, x)$, por lo que

$$\psi\big(t, x\big) \geq \psi\big(t', \gamma(t')\big) + \int_{t'}^{t} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big) ds \quad \forall t' \in (0, t)$$

Entonces

$$\psi\big(t, x\big) - \psi\big(t', \gamma(t')\big) \geq \int_{t'}^{t} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big) ds \quad \forall t' \in (0, t)$$

Dividiendo entre $t - t' > 0$, y haciendo el límite con $t' \to t$ obtenemos

$$\partial_t \psi(t, x) + \partial_x \psi(t, x)\big(\dot{\gamma}(t)\big) \geq L\big(x, \dot{\gamma}(t)\big) \tag{80}$$

Luego por la desigualdad de Fenchel tenemos que

$$L\big(x, \dot{\gamma}(t)\big) \geq \partial_x \psi(t, x)\big(\dot{\gamma}(t)\big) - H\big(x, \partial_x \psi(t, x)\big) \tag{81}$$

Por lo tanto, de las desigualdes (80) y (81) deducimos que

$$\partial_t \psi(t, x) \geq -H\big(x, \partial_x \psi(t, x)\big)$$

Entonces, $\partial_t \psi(t, x) + H\big(x, \partial_x \psi(t, x)\big) \geq 0$, lo que implica que $\hat{u}$ es supersolución de viscosidad.

Veamos ahora en general cuando u no es neceariamente finita y continua.

Sea $\epsilon \in (0, t_0)$, y definamos $u_\epsilon : M \to \mathbb{R}$ como

$$u_\epsilon(x) = \hat{u}(\epsilon, x) = T_\epsilon^- u(x)$$

Sabemos que u_ϵ es continua (fue lo primero que probamos en este corolario). Ahora, notemos que por la propiedad de semigrupo de T_t^- tenemos que

$$\hat{u}_\epsilon(t, x) = T_t^- u_\epsilon(x) = T_t^- \big(T_\epsilon^- u\big)(x) = T_{t+\epsilon}^- u(x) = \hat{u}(t + \epsilon, x)$$

Entonces $\hat{u}_\epsilon(t_0 - \epsilon, x_0) = \hat{u}(t_0, x_0)$ es finita. Como u_ϵ es continua, podemos aplicar el caso que ya probamos, y deducimos que $\hat{u}_\epsilon(t, x) = \hat{u}(t + \epsilon, x)$ es una solución de viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi en $(0, t_0 - \epsilon) \times M$.

Como el hamiltoniano H no depende del tiempo, concluímos que $\hat{u}$ es una solución de viscosidad de la ecuación de evolución de Hamilton-Jacobi en $(\epsilon, t_0) \times M$.

Luego, como $\epsilon \in (0, t_0)$ es arbitrario, tenemos que $\hat{u}$ es solución de viscosidad en todo $(0, t_0) \times M$. □

Para probar el teorema 7,8 precisaremos de un lema previo que controle la acción de las curvas minimizantes y sus velocidades.

Lema 7.9. *Sea $\gamma : [a, b] \to M$ una curva minimizante. Entonces*

$$h_{b-a}\big(\gamma(a), \gamma(b)\big) = \mathbb{L}(\gamma) \leq (b-a).A\left(\frac{d\big(\gamma(a), \gamma(b)\big)}{b-a}\right)$$

Además, para todo $K \geq 0$ vale que

$$h_{b-a}\big(\gamma(a), \gamma(b)\big) \geq K.l_g(\gamma) - C(K)(b-a) \geq K.d\big(\gamma(a, \gamma(b)\big) - C(K)(b-a)$$

y si $K > 0$ entonces tenemos que

$$\frac{d\big(\gamma(a), \gamma(b)\big)}{b-a} \leq \frac{l_g(\gamma)}{b-a} \leq \frac{A\big(\frac{d(\gamma(a), \gamma(b))}{b-a}\big) + C(K)}{K}$$

Demostración. Recordemos que en la proposición 4,4 habíamos probado que

$$h_t(x, y) \leq t.A\left(\frac{d(x, y)}{t}\right) \qquad \forall t > 0, x, y \in M$$

Como $\gamma : [a, b] \to M$ es minimizante, entonces

$$h_{b-a}\big(\gamma(a), \gamma(b)\big) = \mathbb{L}(\gamma) \leq (b-a)A\left(\frac{d\big(\gamma(a), \gamma(b)\big)}{b-a}\right)$$

lo que prueba la primer desigualdad de este Lemma.

Ahora sea $K \geq 0$. Tenemos también de la proposición 4,4 que

$$L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big) \geq K||\dot{\gamma}(s)||_{\gamma(s)} - C(K)$$

que surgía de la superlinealidad de L.

Integrando esta desigualdad y recordando que γ es minimizante obtenemos

$$h_{b-a}\big(\gamma(a), \gamma(b)\big) \geq K.l_g(\gamma) - C(K)(b-a) \geq K.d\big(\gamma(a), \gamma(b)\big) - C(K)(b-a)$$

Por lo que obtuvimos la segunda desigualdad de este lema.

Si en esta cadena de desigualdades sumamos $C(K)(b-a)$,y dividimos entre K (suponiendo $K>0$), obtenemos

$$\frac{h_{b-a}\big(\gamma(a),\gamma(b)\big)+C(K)(b-a)}{K} \geq l_g(\gamma) \geq d\big(\gamma(a),\gamma(b)\big)$$

Combinando esta desigualdad con $h_{b-a}\big(\gamma(a),\gamma(b)\big) \leq (b-a)A\big(\frac{d(\gamma(a),\gamma(b))}{b-a}\big)$ y dividiendo entre $b-a>0$ obtenemos

$$\frac{A\big(\frac{d(\gamma(a),\gamma(b))}{b-a}\big)+C(K)}{K} \geq \frac{l_g(\gamma)}{b-a} \geq \frac{d\big(\gamma(a),\gamma(b)\big)}{b-a}$$

que corresponde con la tercera desigualdad del lema. □

Lema 7.10. *Para todo $K \geq 0$ y para todo $(x,v) \in TM$, tenemos que*

$$||\partial_v L(x,v)||_x \leq A\big(||v||_x+1\big)+C(0)$$

y

$$||\partial_v L(x,v)||_x||v||_x \geq K||v||_x - C(K) - A(0)$$

Además, si definimos $D:[0,\infty)\to[0,\infty)$ como

$$D(R)=\text{ínf}\{||\partial_v L(x,v)||_x : v\in T_xM, ||v||_x \geq R\}$$

tenemos que $D(0)=0$, D es no decreciente, y $\text{lím}_{R\to\infty} D(R)=\infty$.

Más aún, por definición de D tenemos que

$$||\partial_v L(x,v)||_x \geq D\big(||v||_x\big) \quad \forall (x,v)\in TM$$

Demostración. Por la convexidad de $L(x,v)$ en las fibras, tenemos que

$$L\big(x,v+u\big)-L(x,v) \geq \partial_v L(x,v)(u) \tag{82}$$

Tomando el supremo en todos los u con $||u||_x \leq 1$ obtenemos

$$||\partial_v(x,v)||_x \leq \max_{||u||_x\leq 1} L(x,v+u)-L(x,v)$$

Pero usando las desigualdades

$$\begin{cases} L(x,v+u) \leq A\big(||v+u||_x\big) \leq A\big(||v||_x+1\big) \quad \forall (x,v)\in TM, u\in T_xM, ||u||_x\leq 1 \\ C(0) \geq -L(x,v) \quad \forall (x,v)\in TM \end{cases}$$

obtenemos entonces que

$$||\partial_v L(x,v)||_x \le A\big(||v||_x + 1\big) + C(0)$$

que corresponde con la primer desigualdad de este lema. Por otro lado, tomando $u = -v$ en la ecuación (82), tenemos que

$$L\big(x,0\big) - L(x,v) \ge -\partial_v L(x,v)(v)$$

o lo que es lo mismo que

$$\partial_v L(x,v)(v) \ge L(x,v) - L\big(x,0\big)$$

Y combinandola con las desigualdades

$$\begin{cases} L(x,v) \ge K.||v||_x - C(K) & \forall (x,v) \in TM \\ A(0) \ge L(x,0) \quad \forall x \in M \end{cases}$$

obtenemos

$$||\partial_v L(x,v)||_x ||v||_x \ge \partial_v L(x,v)(v) \ge L(x,v) - L\big(x,0\big) \ge K||v||_x - C(K) - A(0)$$

Es decir que obtuvimos

$$||\partial_v L(x,v)||_x ||v||_x \ge K||v||_x - C(K) - A(0)$$

que corresponde con la segunda desigualdad de este lema.

Luego, definiendo $D : [0,\infty) \to [0,\infty)$ como

$$D(R) = \inf\{||\partial_v L(x,v)||_x : v \in T_x M, ||v||_x \ge R\}$$

tenemos claramente que $D(R) \ge 0$y además es no decreciente.

Observemos que como L es superlineal en v para todo $x \in M$, tenemos entonces que en cada fibra, la función $v \mapsto L(x,v)$ debe tener un mínimo v_x en $T_x M$, y claramente en ese punto tendremos que $\partial_v L(x,v_x) = 0$. Entonces $D(0) = 0$.

Veamos que $\lim_{R\to\infty} D(R) = \infty$.

Para eso, primero observemos que como D es no decreciente, entonces el límite $\lim_{R\to\infty} D(R)$ existe en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Además, dado $K \ge 0$, y dado $v \in T_x M$ con $||v||_x \ge R$, tenemos de la segunda desigualdad de este lema que

$$||\partial_v L(x,v)||_x \ge K - \frac{C(K) + A(0)}{||v||_x} \ge K - \frac{|C(K) + A(0)|}{R} \underset{R\to\infty}{\to} K$$

Entonces $\lim_{R\to\infty} D(R) \ge K$. Como $K \ge 0$ es arbitrario, tenemos entonces que

$$\lim_{R\to\infty} D(R) = +\infty$$

$\square$

7.5. Energía

Observemos que como consideramos Hamiltonianos autónomos, entonces las ecuaciones de Hamilton $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ y $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$ implican que

$$\frac{d}{dt} H\big(q(t), p(t)\big) = \dot{q}\frac{\partial H}{\partial q} + \dot{p}\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}\dot{p} - \dot{p}\dot{q} = 0$$

Es decir que el Hamiltoniano se preserva a lo largo de las órbitas.

A continuación, definiremos la energía de un lagrangiano, que será una función $E : TM \to \mathbb{R}$ que toma el mismo valor funcional que el hamiltoniano a lo largo de las órbitas.

Por lo tanto, la conservación del hamiltoniano (cuando el lagrangiano no depende del tiempo, como es el caso que estamos estudiando), implicará claramente la conservación de la energía.

Definicion 7.1. La **Energía** de un lagrangiano $L : TM \to \mathbb{R}$, se define como la función $E : TM \to \mathbb{R}$ tal que

$$E(x, v) = H\big(x, \partial_v L(x, v)\big) = \sup_{u \in T_x M} \partial_v L(x, v)(u) - L(x, u) = \partial_v L(x, v)(v) - L(x, v)$$

Definicion 7.2. Sea $\gamma : [a, b] \to M$ una curva extremal de L.

Como la energía $E\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)$ no depende del $s \in [a, b]$, podemos definir entonces la **energía de la curva** γ como $E(\gamma) = E\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)$ considerando cualquier $s \in [a, b]$.

Lema 7.11. *Se cumple que*

$$A\big(2||v||_x\big) + 2C(0) \geq E(x, v) \geq ||\partial_v L(x, v)||_x - A(1)$$

En particular, tendremos por el lema (7.10) *que*

$$E(x, v) \geq D\big(||v||_x\big) - A(1)$$

donde D es la función no decreciente definida en el lema 7,10*.*

Demostración. Por la convexidad de L tenemos que

$$L(x, v + u) - L(x, v) \geq \partial_v L(x, v)(u) \quad \forall x \in M, u, v \in T_x M$$

Tomando $u = v$ tenemos que

$$L(x, 2v) - L(x, v) \geq \partial_v L(x, v)(v)$$

Restando $L(x, v)$ obtenemos

$$L(x, 2v) - 2L(x, v) \geq \partial_v L(x, v)(v) - L(x, v) = E(x, v)$$

Como $L(x, v) \geq -C(0)$ y $L(x, 2v) \leq A\big(2||v||_x\big)$, obtenemos que

$$E(x, v) \leq A\big(2||v||_x\big) + 2C(0)$$

donde obtuvimos entonces una de las desigualdades del lema.

Resta probar que $E(x, v) \geq ||\partial_v L(x, v)||_x - A(1)$.

Para esto, como $E(x, v) = \sup_{u \in T_x M} \partial_v L(x, v)(u) - L(x, u)$, tenemos que

$$E(x, v) \geq \sup_{||u||_x \leq 1} \partial_v L(x, v)(u) - L(x, u)$$

Usando que $L(x, u) \leq A\big(||u||_x\big) \leq A(1)$ pues $||u||_x \leq 1$, tenemos que

$$E(x, v) \geq ||\partial_v L(x, v)||_x - A(1)$$

donde quedó probada entonces la otra desigualdad del lema.

□

Ahora acotaremos las velocidades de las curvas extremales usando la conservación de la energía.

Proposición 7.12. *Existe una función $\eta : [0, \infty) \to [0, \infty)$ no decreciente, tal que para cualquier curva extremal $\gamma : [a, b] \to M$, se cumple que*

$$\sup_{t \in [a,b]} ||\dot{\gamma}(t)||_{\gamma(t)} \leq \eta\left(\inf_{t \in [a,b]} ||\dot{\gamma}(t)||_{\gamma(t)}\right)$$

En particular, por teorema de valor medio para integrales y como η es no decreciente, tendremos entonces que

$$\sup_{t \in [a,b]} ||\dot{\gamma}(t)||_{\gamma(t)} \leq \eta\left(\frac{l_g(\gamma)}{b - a}\right)$$

Demostración. Consideremos la función no decreciente D del lema 7,10, definida como
$$D(R) = \text{ínf}\{||\partial_v L(x,v)||_x : v \in T_xM, ||v||_x \geq R\}$$
Teníamos que $D(0) = 0$, y $\text{lím}_{R\to\infty} D(R) = \infty$.

Definamos entonces la función $\zeta : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que
$$\zeta(\rho) = \sup\{R \geq 0 : D(R) \leq \rho\}$$
Claramente la función ζ es finita en todos lados, pues $\text{lím}_{R\to\infty} D(R) = \infty$.

Observemos que como $\zeta\big(D(R)\big) = \sup\{R' : D(R') \leq D(R)\}$, entonces
$$\zeta\big(D(R)\big) \geq R$$
Consideremos una curva $\gamma : [a,b] \to M$ extremal, y sean $s_{\text{mín}}, s_{\text{máx}} \in [a,b]$ tales que
$$||\dot\gamma(s_{\text{mín}})||_{\gamma(s_{\text{mín}})} = \underset{t\in[a,b]}{\text{ínf}} ||\dot\gamma(t)||_{\gamma(t)}$$
$$||\dot\gamma(s_{\text{máx}})||_{\gamma(s_{\text{máx}})} = \sup_{t\in[a,b]} ||\dot\gamma(t)||_{\gamma(t)}$$
De la cadena de desigualdades
$$A\big(2||v||_x\big) + 2C(0) \geq E(x,v) \geq D\big(||v||_x\big) - A(1)$$
obtenida en el lema 7,11, deducimos que
$$A\big(2||\dot\gamma(s_{\text{mín}})||_{\gamma(s_{\text{mín}})}\big) + 2C(0) \geq E\big(\gamma(s_{\text{mín}}), \dot\gamma(s_{\text{mín}})\big)$$
y
$$E\big(\gamma(s_{\text{máx}}), \dot\gamma(s_{\text{máx}})\big) \geq D\big(||\dot\gamma(s_{\text{máx}})||_{\gamma(s_{\text{máx}})} - A(1)$$
Por la conservación de la energía, tenemos que $E\big(\gamma(s_{\text{mín}}), \dot\gamma(s_{\text{mín}})\big) = E\big(\gamma(s_{\text{máx}}), \dot\gamma(s_{\text{máx}})\big)$, lo cual implica que
$$A\big(2||\dot\gamma(s_{\text{mín}})||_{\gamma(s_{\text{mín}})}\big) + 2C(0) \geq D\big(||\dot\gamma(s_{\text{máx}})||_{\gamma(s_{\text{máx}})}\big) - A(1)$$
es decir que
$$A\big(2||\dot\gamma(s_{\text{mín}})||_{\gamma(s_{\text{mín}})}\big) + 2C(0) + A(1) \geq D\big(||\dot\gamma(s_{\text{máx}})||_{\gamma(s_{\text{máx}})}\big)$$
Como ζ es no decreciente y $\zeta\big(D(R)\big) \geq R$, si aplicamos ζ de cada lado tenemos que
$$\zeta\Bigg(A\big(2||\dot\gamma(s_{\text{mín}})||_{\gamma(s_{\text{mín}})}\big) + 2C(0) + A(1)\Bigg) \geq ||\dot\gamma(s_{\text{máx}})||_{\gamma(s_{\text{máx}})}$$

Definiendo la función $\eta : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dada por

$$\eta(R) = \zeta\big(A(2R) + 2C(0) + A(1)\big)$$

tenemos entonces que

$$||\dot\gamma(s_{\text{máx}})||_{\gamma(s_{\text{máx}})} \leq \eta\big(||\dot\gamma(s_{\text{mín}})||_{\gamma(s_{\text{mín}})}\big)$$

que (por como tomamos $s_{\text{mín}}$ y $s_{\text{máx}}$) es exactamente la primer desigualdad de este lema.

Luego, para la segunda desigualdad, basta observar que

$$l_g(\gamma) = \int_a^b ||\dot\gamma(s)||_{\gamma(s)} ds \geq ||\dot\gamma(s_{\text{mín}})||_{\gamma(s_{\text{mín}})}.(b-a)$$

Entonces

$$||\dot\gamma(s_{\text{mín}})||_{\gamma(s_{\text{mín}})} \leq \frac{l_g(\gamma)}{(b-a)}$$

y como η es no decreciente, entonces al aplicar η tenemos

$$\eta\big(||\dot\gamma(s_{\text{mín}})||_{\gamma(s_{\text{mín}})}\big) \leq \eta\left(\frac{l_g(\gamma)}{(b-a)}\right)$$

Usando entonces la primer desigualdad de este lema (la cual ya probamos), tenemos que

$$||\dot\gamma(s_{\text{máx}})||_{\gamma(s_{\text{máx}})} \leq \eta\left(\frac{l_g(\gamma)}{(b-a)}\right)$$

que corresponde con la segunda desigualdad de este lema. □

Corolario 7.12.1. *Si $L : TM \to \mathbb{R}$ es un lagrangiano de Tonelli, podemos encontrar funciones no decrecientes $\overline{\eta}, \tilde\eta : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tales que para cualquier curva minimizante $\gamma : [a, b] \to M$ vale que*

$$\sup_{t\in[a,b]} ||\dot\gamma(r)||_{\gamma(t)} \leq \overline{\eta}\left(\frac{h_{b-a}\big(\gamma(a), \gamma(b)\big)}{b-a}\right)$$

y

$$\sup_{t\in[a,b]} ||\dot\gamma(r)||_{\gamma(t)} \leq \tilde\eta\left(\frac{d\big(\gamma(a), \gamma(b)\big)}{b-a}\right)$$

Demostración. Por el lema 7,9 tenemos que para cualquier $K \geq 0$ vale que

$$h_{b-a}\big(\gamma(a),\gamma(b)\big) \geq K.l_g(\gamma) - C(K)(b-a)$$

Usando $K = 1$ y reordenando, tenemos que

$$l_g(\gamma) \leq h_{b-a}\big(\gamma(a),\gamma(b)\big) + C(1)(b-a)$$

Recordando que $l_g(\gamma) \geq \text{ínf}_{t\in[a,b]} ||\dot{\gamma}(t)||_{\gamma(t)}.(b-a)$, tenemos que

$$\inf_{t\in[a,b]} ||\dot{\gamma}(t)||_{\gamma(t)} \leq \frac{h_{b-a}\big(\gamma(a),\gamma(b)\big)}{b-a} + C(1)$$

Entonces, aplicando de ambos lados la función no decreciente η de la proposición 7,12 tenemos que

$$\sup_{t\in[a,b]} ||\dot{\gamma}(t)||_{\gamma(t)} \leq \eta\left(\inf_{t\in[a,b]} ||\dot{\gamma}(t)||_{\gamma(t)}\right) \leq \eta\left(\frac{h_{b-a}\big(\gamma(a),\gamma(b)\big)}{b-a} + C(1)\right)$$

Entonces, definiendo $\overline{\eta}(s) = \eta\big(s + C(1)\big)$ queda probada la primer desigualdad.

Para la segunda desigualdad, recordemos que además en el lema 7,9 habíamos probado también que

$$\frac{h_{b-a}\big(\gamma(a),\gamma(b)\big)}{b-a} \leq A\left(\frac{d\big(\gamma(a),\gamma(b)\big)}{b-a}\right)$$

Entonces aplicando la función $\overline{\eta}$ obtenemos

$$\sup_{t\in[a,b]} ||\dot{\gamma}(t)||_{\gamma(t)} \leq \overline{\eta}\left(\frac{h_{b-a}\big(\gamma(a),\gamma(b)\big)}{b-a}\right) \leq \overline{\eta}\left(A\left(\frac{d\big(\gamma(a),\gamma(b)\big)}{b-a}\right)\right)$$

Entonces, definiendo la función $\tilde{\eta} = \overline{\eta} \circ A$, obtenemos la segunda desigualdad, y es claramente finita y además no decreciente (por ser composición de no decrecientes).

□

7.6. Prueba de la caracterización de soluciones

Ahora estamos en condiciones de probar el teorema 7,8, que volveremos a enunciar a continuación

Teorema 7.13. *Sea $u : M \to [-\infty, +\infty]$ una función tal que $\hat{u}(t_0, x_0)$ es finito para cierto $t_0 > 0$ y $x_0 \in M$.*

Entonces para todo compacto $K \subset (0, t_0) \times M$, existe un compacto $\tilde{K} \subset M$ tal que

$$\hat{u}(t, x) = \inf_{y \in \tilde{K}} u(y) + h_t(y, x) \quad \forall (t, x) \in K$$

Demostración. Observar que dado un compacto $K \subset (0, t_0) \times M$, existe un compacto de la forma $[a, b] \times \overline{B}(x_0, R)$ tal que

$$K \subset [a, b] \times \overline{B}(x_0, R) \subset (0, t_0) \times M$$

Entonces, basta probar el teorema para el compacto $[a, b] \times \overline{B}(x_0, R)$, pues si existe $\tilde{K} \subset M$ tal que

$$\hat{u}(t, x) = \inf_{y \in \tilde{K}} u(y) + h_t(y, x) \quad \forall (t, x) \in [a, b] \times \overline{B}(x_0, R)$$

entonces, como $K \subset [a, b] \times \overline{B}(x_0, R)$ tendremos que

$$\hat{u}(t, x) = \inf_{y \in \tilde{K}} u(y) + h_t(y, x) \quad \forall (t, x) \in K$$

Es decir que podemos suponer sin perdida de generalidad que K es de la forma $[a, b] \times \overline{B}(x_0, R) \subset (0, t_0) \times M$.

Sea $\delta > 0$ tal que $[a - \delta, b + \delta] \subset (0, t_0)$.

Como $\hat{u}$ es fuertemente dominada por L (por el lema 4,7), tenemos que

$$\hat{u}(t_0, x_0) \leq \hat{u}(t, x) + h_{t_0 - t}(x, x_0) \quad \forall (t, x) \in [a - \delta, b + \delta] \times \overline{B}(x_0, R + 1) \subset (0, t_0) \times M$$

Entonces por la continuidad del mapa $(t, x) \mapsto h_{t_0 - t}(x, x_0)$ y como $\hat{u}(t_0, x_0)$ es finito, tendremos que $\hat{u}(t, x)$ estará acotado inferiormente en el compacto $[a - \delta, b + \delta] \times \overline{B}(x_0, R + 1)$.

Como $\hat{u}(t_0, x_0)$ es finito, tendremos que u no es idénticamente $+\infty$ (lema 7,3). Entonces, existe y_0 tal que $u(y_0) < \infty$, y claramente por definición de $\hat{u}$ tenemos que

$$\hat{u}(t, x) \leq u(y_0) + h_t(y_0, x)$$

Ahora, por la continuidad del mapa $(t, x) \mapsto h_t(y_0, x)$ y como $u(y_0)$ es finito, tendremos que $\hat{u}(t, x)$ estará acotada superiormente en el compacto $[a - \delta, b + \delta] \times \overline{B}(x_0, R + 1)$.

Entonces, como $\hat{u}$ está acotada tanto superiormente como inferiormente en $[a-\delta, b+\delta] \times \overline{B}(x_0, R+1)$, podemos definir $\alpha \in [0, \infty)$ tal que

$$\alpha = \sup\{|\hat{u}(t,x)| : (t,x) \in [a-\delta, b+\delta] \times \overline{B}(x_0, R+1)\} \tag{83}$$

En particular, esta cota implica que podamos restringir el ínfimo de la definición de $\hat{u}$ a un conjunto más chico

$$\hat{u}(t,x) = \inf\{u(y) + h_t(y,x) : u(y) + h_t(y,x) \le \alpha + 1\} \quad \forall (t,x) \in K = [a,b] \times \overline{B}(x_0, R)$$

Entonces, para terminar esta prueba, basta encontrar un compacto $\tilde{K} \subset M$ tal que cumpla que si

$$\begin{cases} (t,x) \in [a,b] \times \overline{B}(x_0, R) \\ u(y) + h_t(y,x) \le \alpha + 1 \end{cases}$$

entonces $y \in \tilde{K}$.

Para ver eso, observemos que en ese caso, podremos escribir entonces $\hat{u}$ como

$$\hat{u}(t,x) = \inf\{u(y) + h_t(y,x) : y \in \tilde{K}\} \quad \forall (t,x) \in K = [a,b] \times \overline{B}(x_0, R)$$

Supongamos entonces que tenemos $(t,x) \in [a,b] \times \overline{B}(x_0, R)$, y $y \in M$ tal que

$$u(y) + h_t(y,x) \le \alpha + 1 \tag{84}$$

Sea $\gamma : [0,t] \to M$ una curva minimizante que une y con x, es decir que $\gamma(0) = y$, $\gamma(t) = x$, y

$$\int_0^t L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big) ds = h_t(y,x)$$

Entonces, juntando esto con la ecuación (84), tenemos que

$$u(y) + \int_0^t L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big) ds = u(y) + h_t(y,x) \le \alpha + 1$$

Como

$$\big(t, \gamma(t)\big) = (t,x) \in [a,b] \times \overline{B}(x_0, R) \subset (a-\delta, b+\delta) \times \mathring{B}(x_0, R+1)$$

y además

$$\big(0, \gamma(0)\big) = (0,y) \notin [a-\delta, b+\delta] \times \overline{B}(x_0, R+1)$$

pues δ era tal que $[a-\delta, b+\delta] \subset (0, t_0)$, tendremos que existirá un $t' \in (0,t)$ tal que

$$\big(t', \gamma(t')\big) \in \partial\big([a-\delta, b+\delta] \times \overline{B}(x_0, R+1)\big) \tag{85}$$

Afirmación: Existe $\epsilon > 0$ tal que $t - t' \geq \epsilon$ para todo $(t,x) \in [a,b] \times \overline{B}(x_0, R)$ y todo $y \in \{\tilde{y} : u(\tilde{y}) + h_t(\tilde{y}, x) \leq \alpha + 1\}$. Es decir, hay una diferencia uniforme entre t y t', independiente de (t,x) y de y.

Para probar esta afirmación, observemos que dado $(t,x) \in [a,b] \times \overline{B}(x_0, R)$ y $y \in \{\tilde{y} : u(\tilde{y}) + h_t(\tilde{y}, x) \leq \alpha + 1\}$, podremos distinguir 2 casos para el t' de la ecuación (85) a partir de descomponer el borde como

$$\partial\big([a-\delta, b+\delta] \times \overline{B}(x_0, R+1)\big) = \{a-\delta, b+\delta\} \times \overline{B}(x_0, R+1) \cup (a-\delta.b+\delta) \times \partial\overline{B}(x_0, R+1)$$

Estos casos son

- Si $t' \in \{a-\delta, b+\delta\}$, claramente entonces $t' = a - \delta$ (pues $t' < t \leq b$). En este caso
$$t - t' = t - (a - \delta) = \delta + (t - a) \geq \delta$$
Entonces tomando cualquier $\epsilon < \delta$ tenemos la afirmación.
- Si $t' \in (a - \delta, b + \delta)$, entonces $\gamma(t') \in \partial\overline{B}(x_0, R+1)$. En este caso, como $d\big(\gamma(t'), x_0\big) = R+1$, y $\gamma(t) = x \in \overline{B}(x_0, R)$, tendremos entonces por desigualdad triangular que
$$R + 1 = d\big(x_0, \gamma(t')\big) \leq d\big(x_0, \gamma(t)\big) + d\big(\gamma(t), \gamma(t')\big) \leq R + d\big(\gamma(t), \gamma(t')\big)$$
entonces
$$1 \leq d\big(\gamma(t), \gamma(t')\big) \tag{86}$$
Además, por como definimos α en la ecuación (83), tenemos que
$$|\hat{u}\big(t', \gamma(t')\big)| \leq \alpha = \sup\{|\hat{u}(t,x)| : (t,x) \in [a-\delta, b+\delta] \times \overline{B}(x_0, R+1)\}$$
Como $\hat{u}$ es dominada por L y $\gamma(0) = y$, entonces
$$\hat{u}\big(t', \gamma(t')\big) \leq u(y) + \int_0^{t'} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds$$
Sumando $\int_{t'}^{t} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds$ de ambos lados, y recordando que γ es minimizante de la acción entre x e y, y que y era tal que $u(y) + h_t(y,x) \leq \alpha + 1$, obtenemos
$$\hat{u}\big(t', \gamma(t')\big) + \int_{t'}^{t} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds \leq u(y) + \int_0^{t} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds \leq \alpha + 1$$
Como $|\hat{u}\big(t', \gamma(t')\big)| \leq \alpha$, tenemos entonces que la ecuación implica que
$$\int_{t'}^{t} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds \leq \alpha + 1 - \hat{u}\big(t', \gamma(t')\big) \leq 2\alpha + 1 \tag{87}$$

Por la superlinealidad de L, tenemos que para todo $\kappa \geq 0$ vale que

$$-C(\kappa) + \kappa||v||_x \leq L(x,v)$$

y si integramos esta desigualdad entre t' y t y usamos la desigualdad (87) obtenemos

$$-C(\kappa)(t-t') + \kappa d\big(\gamma(t),\gamma(t')\big) \leq \int_{t'}^{t} L\big(\gamma(s),\dot\gamma(s)\big)ds \leq 2\alpha+1$$

Recordando que por la ecuación (86) teníamos que $1 \leq d\big(\gamma(t),\gamma(t')\big)$, deducimos entonces que

$$-C(\kappa)(t-t') + \kappa \leq -C(\kappa)(t-t') + \kappa d\big(\gamma(t),\gamma(t')\big) \leq 2\alpha+1$$

entonces

$$-C(\kappa)(t-t') + \kappa \leq 2\alpha+1 \tag{88}$$

y despejando $t-t'$ obtenemos

$$\frac{\kappa-1-2\alpha}{C(\kappa)} \leq t-t'$$

Tomando $\kappa = 2+2\alpha$, esto implica que

$$\frac{1}{C(2+2\alpha)} \leq t-t'$$

Entonces, tomando $\epsilon < \frac{1}{C(2+2\alpha)}$, tendremos la afirmación que queríamos.

Es decir que para contemplar ambos casos basta tomar entonces $\epsilon < \text{mín}\{\delta, \frac{1}{C(2+2\alpha)}\}$, que claramente no depende del $(t,x) \in [a,b] \times \overline{B}(x_0,R)$ ni del $y \in \{\tilde y : u(\tilde y) + h_t(\tilde y, x) \leq \alpha+1\}$.

Luego, como $\gamma\Big|_{[t',t]}$ es minimizante de la acción (por ser restricción de minimizante), podemos entonces usar el corolario (7.12.1) para acotar su velocidad como

$$\sup_{t\in[t',t]} ||\dot\gamma(r)||_{\gamma(t)} \leq \tilde\eta\left(\frac{d\big(\gamma(t'),\gamma(t)\big)}{t-t'}\right) \tag{89}$$

donde $\tilde\eta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ era una función no decreciente.

Entonces usando la afirmación recién probada ($t-t' > \epsilon$), y que además como $\gamma(t),\gamma(t') \in \overline{B}(x_0,R+1)$, entonces

$$\begin{cases} d\big(\gamma(t),\gamma(t')\big) \leq diam\big(\overline{B}(x_0,R+1)\big) = 2R+2 \\ t-t' \geq \epsilon \geq 0 \end{cases}$$

y juntando estas dos desigualdades con la desigualdad (89) tenemos que

$$\sup_{r\in[t',t]} ||\dot{\gamma}(r)||_{\gamma(r)} \leq \tilde{\eta}\left(\frac{d\big(\gamma(t'),\gamma(t)\big)}{t-t'}\right) \leq \tilde{\eta}\left(\frac{2R+2}{\epsilon}\right) \tag{90}$$

Luego, como $\gamma : [0,t] \to M$ es minimizante, entonces por la proposición 7,12 tenemos que existe una función $\eta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ no decreciente tal que

$$\sup_{r\in[0,t]} ||\dot{\gamma}(r)||_{\gamma(r)} \leq \eta\left(\inf_{r\in[0,t]} ||\dot{\gamma}(r)||_{\gamma(r)}\right)$$

Juntando esta desigualdad con (90) y el no decrecimiento de η tenemos que

$$\sup_{r\in[0,t]} ||\dot{\gamma}(r)||_{\gamma(r)} \leq \eta\left(\inf_{r\in[0,t]} ||\dot{\gamma}(r)||_{\gamma(r)}\right) \leq \eta\left(\sup_{r\in[t',t]} ||\dot{\gamma}(r)||_{\gamma(r)}\right) \leq \eta\left(\tilde{\eta}\left(\frac{2R+2}{\epsilon}\right)\right)$$

Definiendo entonces

$$\beta = \eta\left(\tilde{\eta}\left(\frac{2R+2}{\epsilon}\right)\right) \in \mathbb{R}$$

se cumple que la longitud de la curva $\gamma : [0,t] \to M$ está acotada como

$$l_g(\gamma) \leq \beta t$$

Recordando que $t \in [a,b] \subset (0,t_0)$, entonces

$$l_g(\gamma) \leq \beta t \leq \beta b$$

Luego como $\gamma(0) = y$ y $\gamma(t) = x$, entonces tenemos que

$$d(x,y) \leq \beta b$$

Observar que el valor βb no depende del $(t,x) \in [a,b] \times \overline{B}(x_0,R)$ ni del $y \in \{\tilde{y} : u(\tilde{y}) + h_t(\tilde{y},x) \leq \alpha + 1\}$.

Entonces observar que $y \in \overline{B}(x,\beta b) \subset \overline{B}(x_0, R+\beta b)$, por lo que considerando el compacto $\tilde{K} = \overline{B}(x_0,R+\beta b) \subset M$, tenemos que

$$\hat{u}(t,x) = \inf\{u(y) + h_t(y,x) : u(y) + h_t(y,x) \leq \alpha + 1\} = \inf\{u(y) + h_t(y,x) : y \in \tilde{K}\}$$

para todo $(t,x) \in K = [a,b] \times \overline{B}(x_0,R)$, lo que concluye la prueba. $\square$

Recordemos que este teorema (teorema 7,8) tenía como consecuencia al corolario 7,8,1, el cual nos dice entonces que $\hat{u}$ es una solución de viscosidad continua a la ecuación de evolución de Hamilton Jacobi en $(0,t_0) \times M$ (donde la única hipótesis era que $\hat{u}(t_0,x_0)$ era finito en algún $t_0 > 0$ y $x_0 \in M$).

Recordemos que estabamos considerando las evoluciones de Lax-Oleinik $\hat{u} : [0,\infty) \times M \to [-\infty,+\infty]$ para funciones arbitrarias $u : M \to [-\infty,+\infty]$.

A continuación restringiremos a la familia de funciones u a la cuales estudiaremos su evolución de Lax-Oleinik, a modo de conseguir una mejor relación entre u y $\hat{u}$.

7.7. Condiciones iniciales semicontinuas inferiormente

Definicion 7.3. (semicontinuidad inferior) Una función $u : M \to [-\infty, +\infty]$ es semicontinua inferiormente si

$$u(x) = \liminf_{y \to x} u(y) \quad \forall x \in M$$

Equivalentemente, $u : M \to [-\infty, +\infty]$ es semicontinua inferiormente si para todo $x \in M$ y $r < u(x)$, existe un entorno V de x tal que

$$u(y) \geq r \quad \forall y \in V$$

Definicion 7.4. (regularización semicontinua inferiormente) Si $u : M \to [-\infty, +\infty]$, definimos su regularización semicontinua inferiormente como $u_- : M \to [-\infty, +\infty]$ tal que

$$u_-(x) = \liminf_{y \to x} u(y)$$

La función u_- es la mayor función semicontinua inferiormente tal que $u_- \leq u$.

Proposición 7.14. *Para toda función $u : M \to [-\infty, +\infty]$, tenemos que $\hat{u} = \hat{u}_-$ en $(0, \infty) \times M$. Es decir que en tiempos positivos, la evolución de Lax-Oleinik de u coincide con la de u_-.*

Demostración. Como $u_- \leq u$, tenemos que $\hat{u}_- \leq \hat{u}$.

Para ver la otra desigualdad, basta probar que

$$u_-(y) + h_t(y, x) \geq \inf_{z \in M} u(z) + h_t(z, x) = \hat{u}(t, x) \quad \forall (t, x, y) \in (0, \infty) \times M \times M$$

Dado $(t, x, y) \in (0, \infty) \times M \times M$, sabemos que por definición de $u_-(y)$, existe una sucesión $y_n \to y$ tal que $u(y_n) \to u_-(y)$.

Luego, como $h_t(\cdot, x)$ es continua, tenemos que

$$u_-(y) + h_t(y, x) = \lim_{n \to \infty} u(y_n) + h_t(y_n, x) \geq \inf_{z \in M} u(z) + h_t(z, x)$$

□

Proposición 7.15. *Si $u : M \to [-\infty, +\infty]$ se semicontinua inferiormente tal que $\hat{u}(t_0, x_0)$ es finita en algún $(t_0, x_0) \in (0, \infty) \times M$, entonces para todo $(t, x) \in (0, t_0) \times M$ existe $y \in M$ tal que*

$$\hat{u}(t, x) = \inf_{z \in M} u(z) + h_t(z, x) = u(y) + h_t(y, x)$$

Es decir que el ínfimo de la evolución de Lax-Oleinik se alcanza en $(0, t_0) \times M$

Demostración. Sea $(t,x) \in (0,t_0)\times M$. Por el teorema 7,8, sabemos que si consideramos el compacto $K = \{(t,x)\}$, existe un compacto $\tilde{K} \subset M$ tal que

$$\hat{u}(t,x) = \inf_{y\in\tilde{K}} u(y) + h_t(y,x)$$

Entonces, tomemos una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \tilde{K}$ tal que $u(y_n) + h_t(y_n,x) \to \hat{u}(t,x)$.

Como $\tilde{K}$ es compacto, existe una subsucesión convergente de y_n, por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $y_n \to y \in \tilde{K}$.

Como $\hat{u}(t,x) = \lim_n u(y_n) + h_t(y_n,x)$, podemos usar entonces la semicontinuidad inferior de u y deducimos que $\hat{u}(t,x) \geq u(y) + h_t(y,x)$.

La otra desigualdad $\hat{u}(t,x) \leq u(y) + h_t(y,x)$ es inmediata de la definición de $\hat{u}(t,x)$. □

Observación. *Sea* $U : [0,\infty)\times M \to [-\infty,+\infty]$. *Denotemos* $U^* = U\Big|_{(0,\infty)\times M}$*, es decir la restricción de* U *a los* $t > 0$.

Si $x \in M$*, podemos definir los siguientes límites inferiores*

- $\liminf_{(t,y)\to(0,x)} U(t,y)$
- $\liminf_{(t,y)\to(0,x)} U^*(t,y)$
- $\liminf_{y\to x} U(0,y)$

Es claro que

$$\liminf_{(t,y)\to(0,x)} U(t,y) \leq \min\left\{ \liminf_{(t,y)\to(0,x)} U^*(t,y), \quad \liminf_{y\to x} U(0,y) \right\}$$

Además, si $(t_i,y_i) \to (0,x)$ *con* $t_i \geq 0$ *y* $y_i \in M$*, entonces o tendremos infinitos* $i \in \mathbb{N}$ *con* $t_i = 0$ *o tendremos infinitos* $i \in \mathbb{N}$ *con* $t_i > 0$ *(o ambos casos a la vez). En cualquier caso, puedo encontrar alguna subsucesión con* $t_{i_k} = 0$ *para todo* k *o una subsucesión* $t_{i_k} > 0$ *para todo* k*, por lo que tendremos entonces que*

$$\liminf_{(t,y)\to(0,x)} U(t,y) = \min\left\{ \liminf_{(t,y)\to(0,x)} U^*(t,y), \quad \liminf_{y\to x} U(0,y) \right\}$$

Teorema 7.16. *Si* $u : M \to [-\infty,+\infty]$ *es semicontinua inferiormente, y su evolución de Lax-Oleinik* $\hat{u}$ *es finita en un* $(t_0,x_0) \in (0,\infty)\times M$*, entonces se satisface que*

1. *Para todo $x \in M$ vale que*

$$\liminf_{(t,y)\to(0,x)} \hat{u}(t,y) = \liminf_{(t,y)\to(0,x)} \hat{u}^*(t,y) = u(x) \tag{91}$$

lo cual implica que $\hat{u}$ es semicontinua inferiormente en $[0,t_0) \times M$, ya que vimos que es continua en $(0,t_0) \times M$ debido al corolario 7,8,1.

2. *Para todo $x \in M$, tenemos que*

$$\limsup_{(t,y)\to(0,x)} \hat{u}(t,y) = \limsup_{y\to x} u(y) \tag{92}$$

lo cual implica que si u es continua en M, entonces $\hat{u}$ es continua en $[0,t_0)\times M$.

3. *Para todo $x \in M$, existe los límites $\lim_{t\to 0} \hat{u}(t,x)$ y $\lim_{t\to 0} \hat{u}^*(t,x)$, y además*

$$\lim_{t\to 0} \hat{u}(t,x) = \lim_{t\to 0} \hat{u}^*(t,x) = u(x) \tag{93}$$

Demostración. Por un lado, recordemos que en la proposición 4,4 habíamos visto que $h_t(x,y) \leq t.A\left(\frac{d(x,y)}{t}\right)$, lo cual implica que

$$\hat{u}(t,y) \leq u(y) + h_t(y,y) \leq u(y) + t.A(0) \tag{94}$$

Esto implica que

$$\limsup_{(t,y)\to(0,x)} \hat{u}(t,y) \leq \limsup_{(t,y)\to(0,x)} u(y) + t.A(0) = \limsup_{y\to x} u(y)$$

Además es claro que

$$\limsup_{(t,y)\to(0,x)} \hat{u}(t,y) \geq \limsup_{y\to x} \hat{u}(0,y) = \limsup_{y\to x} u(y)$$

Por lo tanto, estas desigualdades implican que

$$\limsup_{(t,y)\to(0,x)} \hat{u}(t,y) = \limsup_{y\to x} u(y)$$

que coinciden con la igualdad (92).

Por otro lado, la ecuación (94) también implica que

$$\liminf_{(t,y)\to(0,x)} \hat{u}^*(t,y) \leq \liminf_{(t,y)\to(0,x)} u(y) + t.A(0) = \liminf_{y\to x} u(y)$$

Recordando la observación previa

$$\liminf_{(t,y)\to(0,x)} \hat{u}(t,y) = \min\left\{ \liminf_{(t,y)\to(0.x)} \hat{u}^*(t,y), \quad \liminf_{y\to x} u(y) \right\}$$

como vimos que $\liminf_{(t,y)\to(0,x)} \hat{u}^*(t,y) \leq \liminf_{y\to x} u(y)$, deducimos entonces que

$$\liminf_{(t,y)\to(0,x)} \hat{u}(t,y) = \liminf_{(t,y)\to(0,x)} \hat{u}^*(t,y)$$

Para terminar la prueba de la igualdad (91), basta probar entonces que

$$l = \liminf_{(t,y)\to(0,x)} \hat{u}^*(t,y) \geq u(x)$$

Si $l = +\infty$, terminó la prueba de la igualdad (91). Supongamos entonces que $l = \liminf_{(t,y)\to(0,x)} \hat{u}^*(t,y) < \infty$.

En este caso, podemos tomar una sucesión $(t_i y_i) \to (0,x)$ con $t_i > 0$ tal que

$$\lim_{i\to\infty} \hat{u}(t_i, y_i) = l$$

Luego, por definición de $\hat{u}$ tenemos que $\hat{u}(t_i, y_i) = \inf_{z\in M} u(z) + h_{t_i}(z, y_i)$, es decir que para cada i existe $z_i \in M$ tal que

$$0 \leq u(z_i) + h_{t_i}(z_i, y_i) - \hat{u}(t_i, y_i) \leq \frac{1}{i} \to 0$$

Y como $\hat{u}(t_i, y_i) \to l$, tenemos entonces que

$$\hat{u}(t_i, z_i) \leq u(z_i) + h_{t_i}(z_i, y_i) \leq \hat{u}(t_i, z_i) + \frac{1}{i} \to l$$

Pero como recordando de la proposición 4,4 que

$$h_{t_i}(z, y_i) \geq 0.d(z, y_i) - C(0).t_i = -C(0).t_i \to 0$$

tenemos entonces que si la sucesión z_i acumula en el punto $x \in M$, tendremos (por la semicontinuidad inferior de u) que

$$l = \lim_{i\to\infty} u(z_i) + h_{t_i}(z_i, y_i) \geq \liminf_{i\to\infty} u(z_i) \geq u(x)$$

Veremos entonces que justamente la sucesión z_i debe acumular en el punto x.

Supongamos (por absurdo) que x no es de acumulación de la sucesión z_i, entonces a menos de omitir finitos índices i, podemos suponer que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$d(x, z_i) > \epsilon \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Es decir que tenemos

$$\begin{cases} y_i \to x \\ d(x, z_i) > \epsilon > 0 \\ \hat{u}(t_i, y_i) \leq u(z_i) + h_{t_i}(z_i, y_i) \\ \lim_{i\to\infty} \hat{u}(t_i, y_i) = \lim_{i\to\infty} u(z_i) + h_{t_i}(z_i, y_i) = l < \infty \end{cases}$$

Como $y_i \to x$, entonces a menos de omitir finitos índices podemos suponer que

$$d(x, y_i) < \epsilon \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Además para todo $i \in \mathbb{N}$, podemos encontrar una curva $\gamma_i : [0, t_i] \to M$ minimiånte la acción entre $\gamma_i(0) = z_i$ y $\gamma_i(t_i) = y_i$.

Como tenemos que

$$d(x, y_i) < \epsilon < d(x, z_i)$$

entonces existe $t_i' \in (0, t_i)$ tal que

$$d\big(x, \gamma(t_i')\big) = \epsilon \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Como $\gamma_i : [0, t_i] \to M$ es minimizante entre z_i y y_i, entonces

$$h_{t_i}(z_i, y_i) = h_{t_i'}\big(z_i, \gamma_i(t_i')\big) + h_{t_i - t_i'}\big(\gamma_i(t_i'), y_i\big) \tag{95}$$

Y ya sea por la propia definición de $\hat{u}$ o usando que $\hat{u}$ es de evolución dominada por L, deducimos

$$u(z_i) + h_{t_i'}\big(z_i, \gamma_i(t_i')\big) \geq \hat{u}\big(t_i', \gamma_i(t_i')\big)$$

Por lo tanto, juntando esta desigualdad con la igualdad (95) tenemos

$$u(z_i)+h_{t_i}(z_i, y_i) = u(z_i)+h_{t_i'}\big(z_i, \gamma_i(t_i')\big)+h_{t_i-t_i'}\big(\gamma_i(t_i'), y_i\big) \geq \hat{u}\big(t_i', \gamma_i(t_i')\big)+h_{t_i-t_i'}\big(\gamma_i(t_i'), y_i\big) \tag{96}$$

Además, como $\hat{u}$ es de evolución dominada por L, tenemos que

$$\hat{u}\big(t_i', \gamma_i(t_i')\big) \geq \hat{u}(t_0, x_0) - h_{t_0 - t_i'}\big(\gamma_i(t_i'), x_0\big)$$

Como $\gamma_i(t_i') \in \overline{B}(x, \epsilon)$ para todo i, y $0 \leq t_i' \leq t_i \to 0$, tenemos entonces por la continuidad del mapa $(s, q) \mapsto h_{t_0 - s}\big(q, x_0\big)$ que la desigualdad anterior implica que

$$\kappa = \inf_i \hat{u}\big(t_i', \gamma_i(t_i')\big) > -\infty$$

Por lo tanto, de la desigualdad $u(z_i) + h_{t_i}(z_i, y_i) \geq \hat{u}\big(t_i', \gamma_i(t_i')\big) + h_{t_i - t_i'}\big(\gamma_i(t_i'), y_i\big)$ obtenida en la ecuación (96), deducimos que

$$u(z_i) + h_{t_i}(z_i, y_i) \geq \kappa + h_{t_i - t_i'}\big(\gamma_i(t_i'), y_i\big)$$

Tomando límite en i, tenemos entonces que

$$+\infty > l = \lim_i u(z_i) + h_{t_i}(z, y_i) \geq \kappa + \limsup_{i\to\infty} h_{t_i - t_i'}\big(\gamma_i(t_i'), y_i\big)$$

Por lo tanto

$$\limsup_{i\to\infty} h_{t_i - t_i'}\big(\gamma_i(t_i'), y_i\big) < \infty \tag{97}$$

Por otro lado, si $K > 0$, deducimos entonces por la superlinealidad de L y que $d\big(x, \gamma_i(t_i')\big) = \epsilon$ que

$$h_{t_i - t_i'}\big(\gamma_i(t_i'), y_i\big) \geq K.d\big(\gamma_i(t_i'), y_i\big) - C(K)(t_i - t_i') \geq K\big(\epsilon - d(x, y_i)\big) - C(K)(t_i - t_i')$$

Como $y_i \to x$ y $0 < t_i' < t_i \to 0$, obtenemos

$$\limsup_{i\to\infty} h_{t_i - t_i'}\big(\gamma_i(t_i'), y_i\big) \geq K.\epsilon$$

Como ϵ y $K > 0$ son arbitrarios, tenemos entonces que

$$\limsup_{i\to\infty} h_{t_i - t_i'}\big(\gamma_i(t_i'), y_i\big) = \infty$$

Pero por otro lado, en la ecuación (97) habíamos visto que $\limsup_{i\to\infty} h_{t_i - t_i'}\big(\gamma_i(t_i'), y_i\big) < \infty$, por lo que llegamos a un absurdo y concluímos que x debe ser entonces punto de acumulación de la sucesión z_i, y

$$l = \lim_{i\to\infty} u(z_i) + h_{t_i}(z_i, y_i) \geq \liminf_{i\to\infty} u(z_i) \geq u(x)$$

Entonces quedó probada la ecuación (91).

Resta probar la ecuación (93), dada por

$$\lim_{t\to 0} \hat{u}(t, x) = \lim_{t\to 0} \hat{u}^*(t, x) = u(x)$$

Para eso, observemos que por la igualdad $\liminf_{(t,y)\to(0,x)} \hat{u}(t, y) = \liminf_{(t,y)\to(0,x)} \hat{u}^*(t, y) = u(x)$ de la ecuacíon (91), tenemos que

$$u(x) = \liminf_{(t,y)\to(0,x)} \hat{u}(t, y) \leq \liminf_{t\to 0} \hat{u}(t, x) \leq \liminf_{t\to 0} \hat{u}^*(t, x) \tag{98}$$

Más aún, como vimos en la ecuación (94), sabemos que

$$\hat{u}(t, x) \leq u(x) + A(0).t$$

entonces

$$\limsup_{t\to 0} \hat{u}^*(t, x) \leq \limsup_{t\to 0} \hat{u}(t, x) \leq u(x) \tag{99}$$

Las desigualdades (98) y (99) implican que

$$u(x) \leq \liminf_{t\to 0} \hat{u}(t,x) \leq \liminf_{t\to 0} \hat{u}^*(t,x) \leq \limsup_{t\to 0} \hat{u}^*(t,x) \leq \limsup_{t\to 0} \hat{u}(t,x) \leq u(x)$$

Por lo tanto, en la cadena de desigualdades anterior son todas igualdades. Entonces deducimos que

$$\lim_{t\to 0} \hat{u}(t,x) = \lim_{t\to 0} \hat{u}^*(t,x) = u(x)$$

□

Veremos ahora que una solución de viscosidad a la ecuación de Hamiltton-Jacobi en un abierto $(0,t_0)\times M$, corresponde siempre con la evolución de Lax-Oleinik de una (única) función $u : M \to \mathbb{R}$ semicontinua inferiormente.

7.8. Soluciones globales de viscosidad son evoluciones de semicontinuas inferiores

Teorema 7.17. ***(soluciones continuas son evoluciones de semicontinuas)*** *Sea $t_0 \in (0,\infty]$ y $U : (0,t_0)\times M \to \mathbb{R}$ una solución de viscosidad continua a la ecuación de evolución de Hamilton-Jacobi*

$$\partial_t U + H\big(x, \partial_x U\big) = 0$$

en $(0,t_0)\times M$.

Entonces existe una única función semicontinua inferiormente $u : M \to [-\infty,+\infty]$ tal que $U\Big|_{(0,t_0)\times M} = \hat{u}\Big|_{(0,t_0)\times M}$.

Además, dicha u cumplirá que

$$u(x) = \liminf_{(t,y)\to(0,x)} U(t,y) = \lim_{t\to 0} U(t,x)$$

Demostración. Es claro que si existiera dicho u tal que $U\Big|_{(0,t_0)\times M} = \hat{u}\Big|_{(0,t_0)\times M}$, por el teorema 7,16 tenemos que el candidato a u es

$$u(x) = \liminf_{(t,y)\to(0,x)} U(t,y) = \lim_{t\to 0} U(t,x)$$

De aqui tenemos entonces la unicidad.

Resta ver entonces la existencia. Definamos $u : M \to [-\infty, +\infty]$ tal que

$$u(x) = \liminf_{(t,y)\to(0,x)} U(t,y)$$

Esta función u es semicontinua inferiormente, pues si $y_n \to x$ tal que $\lim_n u(y_n) = \liminf_{y\to x} u(y)$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $(t_n, z_n) \in (0,t_0)\times M$ tal que $d\big((0,y_n),\ (t_n,z_n)\big) \leq \frac{1}{n}$ y que

$$|U(t_n,z_n) - \liminf_{z\to y_n} u(z)| = |U(t_n,z_n) - u(y_n)| \leq \frac{1}{n}$$

Lo cual implica que

$$U(t_n,z_n) \leq u(y_n) + \frac{1}{n}$$

Entonces, como $(t_n,z_n) \to (0,x)$, tenemos que

$$u(x) = \liminf_{(t,y)\to(0,x)} U(t,y) \leq \liminf_n U(t_n,z_n) \leq \liminf_n u(y_n) + \frac{1}{n} = \liminf_{y\to x} u(y)$$

Es decir que $u(x) \leq \liminf_{y\to x} u(y)$, y la otra desigualdad es clara, pues tomo la sucesión constante $y_n = x$ y tenemos que $u(x) = \lim_n u(y_n) \geq \liminf_{y\to x} u(y)$. Por lo que concluímos que u es semicontinua inferiormente.

Veamos ahora que $U\Big|_{(0,t_0)\times M} = \hat{u}\Big|_{(0,t_0)\times M}$.

Para eso, primero veamos que $U\Big|_{(0,t_0)\times M} \leq \hat{u}\Big|_{(0,t_0)\times M}$.

Tomemos $(t,x) \in (0,t_0)\times M$. Por como definimos u, para cada $y \in M$, podemos hacer una sucesión $(t_i,y_i) \in (0,t_0)\times M$ tal que $(t_i,y_i) \to (0,y)$ y además

$$U(t_i,y_i) \to u(y) \quad \text{cuando } i \to \infty$$

Como U es subsolución en $(0,t_0)\times M$, sabemos que U es de evolución dominada por L en $(0,t_0)\times M$. Usando que $t_i \to 0 < t$ para i suficientemente grande, entonces

$$U(t,x) \leq U(t_i,y_i) + h_{t-t_i}(t_i,x)$$

Si dejamos $i \to \infty$, deducimos que

$$U(t,x) \leq u(y) + h_t(y,x)$$

Como $y \in M$ es arbitrario, concluímos que

$$U(t,x) \leq \inf_{y\in M} u(y) + h_t(y,x) = \hat{u}(t,x) \quad \forall (t,x) \in (0,t_0)\times M \tag{100}$$

Por lo que $U \leq \hat{u}$ en $(0, t_0) \times M$. Ahora probemos que $\hat{u} \leq U$ en $(0, t_0) \times M$.

Tomemos $(t, x) \in (0, t_0) \times M$. Como $U : (0, t_0) \times M \to \mathbb{R}$ es solución de viscosidad, tenemos entonces por el corolario 7,0,1 que existe una curva $\gamma : [t - \epsilon, t] \to M$ minimizante de la acción con $\gamma(t) = x$ y $\epsilon > 0$, tal que

$$U\big(t, x\big) = U\big(t - \epsilon, \gamma(t - \epsilon)\big) + \int_{t-\epsilon}^{t} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big) ds \tag{101}$$

Esta curva $\gamma : [t - \epsilon, t] \to M$ puede extenderse por el flujo de Euler-Lagrange a una curva C^2 extremal $\gamma : (-\infty, +\infty) \to M$. Sea

$$S = \{a \in [0, t] : U\big(t, x\big) = U\big(a, \gamma(a)\big) + \int_{a}^{t} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big) ds\}$$

Por la ecuación (101), tenemos que $t - \epsilon \in S$, por lo que $S \neq \emptyset$, y podemos considerar $a_0 = \text{ínf}\, S \geq 0$. Veamos que $a_0 = \text{ínf}\, S = 0$.

Asumamos por absurdo que $a_0 > 0$, y entonces por continuidad de la función $a \mapsto U\big(a, \gamma(a)\big) + \int_a^t L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big) ds$ tenemos que $a_0 \in S$.

Usando de nuevo el corolario 7,0,1 en el punto $\big(a_0, \gamma(a_0)\big)$, encontramos una curva $\tilde{\gamma} : [a_0 - \tilde{\epsilon}, a_0] \to M$ minimizante tal que $\tilde{\gamma}(a_0) = \gamma(a_0)$, $0 < \tilde{\epsilon} < a_0$, y

$$U\big(a_0, \gamma(a_0)\big) = U\big(a_0 - \tilde{\epsilon}, \tilde{\gamma}(a_0 - \tilde{\epsilon})\big) + \int_{a_0 - \tilde{\epsilon}}^{a_0} L\big(\tilde{\gamma}(s), \dot{\tilde{\gamma}}(s)\big) ds$$

Definamos $\delta : [a_0 - \tilde{\epsilon}, t] \to M$ como la concatenación de ambas curvas, es decir

$$\delta(s) = \begin{cases} \tilde{\gamma}(s) & \forall s \in [a_0 - \tilde{\epsilon}, a_0] \\ \gamma(s) & \forall s \in [a_0, t] \end{cases} \tag{102}$$

Pero las igualdades

$$\begin{cases} U\big(a_0, \gamma(a_0)\big) = U\big(a_0 - \tilde{\epsilon}, \tilde{\gamma}(a_0 - \tilde{\epsilon})\big) + \int_{a_0 - \tilde{\epsilon}}^{a_0} L\big(\tilde{\gamma}(s), \dot{\tilde{\gamma}}(s)\big) ds \\ U\big(t, x\big) = U\big(a_0, \gamma(a_0)\big) + \int_{a_0}^{t} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big) ds \end{cases}$$

implican que

$$U(t, x) = U\big(a_0 - \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta}(a_0 - \tilde{\epsilon})\big) + \int_{a_0 - \tilde{\epsilon}}^{t} L\big(\delta(s), \dot{\delta}(s)\big) ds$$

Como U es fuertemente dominada por L en $(0, t_0) \times M$, tenemos entonces que δ debe ser minimizante, y en particular es extremal. Entonces δ es de clase C^2, por lo que las curvas γ y $\tilde{\gamma}$ cumplen que $\gamma(a_0) = \tilde{\gamma}(a_0)$ y $\dot{\gamma}(a_0) = \dot{\tilde{\gamma}}(a_0)$, entonces por la unicidad de las curvas extremales dado un punto y una velocidad, tenemos que $\delta = \gamma\Big|_{[a_0-\tilde{\epsilon},t]}$. Por lo tanto, la ecuación anterior se escribe como

$$U(t,x) = U\big(a_0 - \tilde{\epsilon}, \tilde{\gamma}(a_0 - \tilde{\epsilon})\big) + \int_{a_0-\tilde{\epsilon}}^{t} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds$$

contradiciendo que $a_0 = \text{ínf}\, S > 0$. Entonces $a_0 = \text{ínf}\, S = 0$.

Entonces (por como estaba definido S) existe sucesión $s_i \in (0,t)$ con $s_i \to 0$ tal que

$$U\big(t,x\big) = U\big(s_i, \gamma(s_i)\big) + \int_{s_i}^{t} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds \tag{103}$$

Como $\big(s_i, \gamma(s_i)\big) \to \big(0, \gamma(0)\big)$ cuando $i \to \infty$, tenemos entonces por la definición de u que

$$\liminf_{i\to\infty} U\big(s_i, \gamma(s_i)\big) \geq u\big(\gamma(0)\big)$$

Entonces, tomando $i \to \infty$ en la ecuación (103) obtenemos

$$U\big(t,x\big) = \liminf_{i\to\infty} U\big(s_i, \gamma(s_i)\big) + \int_{s_i}^{t} L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big)ds \geq u\big(\gamma(0)\big) + h_t\big(\gamma(0), x\big) \geq \hat{u}(t,x)$$

Por lo que concluímos que $U \geq \hat{u}$ en $(0,t_0) \times M$.

Entonces, con lo que habíamos probado en la ecuación (100), tenemos que $U = \hat{u}$ en $(0,t_0) \times M$.

□

8. Singularidades de las soluciones de viscosidad

En esta sección se caracterizarán los puntos de diferenciabilidad de las soluciones de viscosidad en términos de las curvas calibrantes que pasan por el mismo. Se definirá un conjunto particular dentro del conjunto de puntos de diferenciabilidad, denominado conjunto de Aubry de la solución, el cual será de interés para el teorema global de homotopía que se enuncia más adelante en esta sección y que nos da información sobre la topología del conjunto de singularidades. El teorema local de homotopía nos afirmará la contractibilidad local del conjunto de singularidades de las soluciones de viscosidad. Estos teoremas serán probados únicamente para casos particulares en $\mathbb{R}^n$ y el lagrangiano $L_0(x,v) = \frac{1}{2}||v||_x^2$ (cuyo flujo lagrangiano no es otro que el flujo geodésico en $\mathbb{R}^n$).

8.1. Teorema de diferenciabilidad

Definicion 8.1. (singularidad) Si $U : [0, \infty) \times M \to [-\infty, +\infty]$, definimos

$$Sing^*(U) = \{(t, x) \in (0, \infty) \times M : U \text{ no es diferenciable en } (t, x)\}$$

Conviene recordar que si $U(t, x)$ es una solución de viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi, y en un instante t_0 la función $x \mapsto U(t_0, x)$ es finita en algún $x \in M$, entonces $U(t, x) < \infty$ para todo $t > t_0$ (ver lema 7,3). Por lo tanto, nos interesarán solamente funciones que toman eventualmente el valor $+\infty$ en $t = 0$ pero no para todo $x \in M$, en consecuencia la función $U(t, x)$ es finita para todo $t > 0$. Como veremos en los ejemplos, resulta interesante considerar soluciones que en $t = 0$ valen 0 en un cerrado $C \subset M$, y $+\infty$ fuera de C.

Enunciemos el siguiente resultado local

Teorema 8.1. ***($Sing^*(U)$ es localmente conexo por caminos)*** *Si $U : [0, \infty) \times M \to [-\infty, +\infty]$ es tal que en el conjunto $(0, \infty) \times M$ es una solución de viscosidad continua a la ecuación de evolución de Hamilton-Jacobi*

$$\partial_t U + H(x, \partial_x U) = 0$$

entonces $Sing^*(U)$ es localmente conexo por caminos.

Observemos que basta probarlo para el caso en que U es la evolución de Lax-Oleinik de una función $u : M \to \mathbb{R}$ continua, pues por el teorema 7,2 sabemos que $U = \hat{u}$, siendo $u(x) = U(0, x)$ para todo $x \in M$.

En este ensayo no veremos la prueba de este resultado. Sin embargo, si probaremos un caso particular para las singularidades de la función distancia a un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$, que compartirá sus singularidades con ciertas subsoluciones al considerar el lagrangiano $L_0(x, v) = \frac{1}{2}||v||_x^2$. En el resultado que probaremos, veremos la contractibilidad local de las singularidades, que es una condición más fuerte que solamente la conexión local por caminos.

Definicion 8.2. (curva calibrada) Sea $U : [0, \infty) \times M \to [-\infty, +\infty]$ una solución de viscosidad continua a la ecuación de evolución de Hamilton-Jacobi

$$\partial_t U + H(x, \partial_x U) = 0$$

en $(0, \infty) \times M$.

Una curva calibrada (o calibrante) para U que termina en (t, x) (con $t > 0$), es una curva $\gamma : [a, t] \to M$ de clase C^1 a trozos con $0 \leq a < t$ y $\gamma(t) = x$, tal que

$$U\big(t, x\big) = U\big(t, \gamma(t)\big) = U\big(a, \gamma(a)\big) + \int_a^t L\big(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)\big) ds$$

Observación. *Como* $U : [0,\infty) \times M \to [-\infty,+\infty]$ *es solución de viscosidad, entonces (por la proposición* 6,2*) tenemos que* U *es fuertemente dominada por* L *.*

Esto implica que las curvas calibrantes son minimizantes, por lo que en particular son C^2*.*

Observación. *Por la proposición* 7,1*, tenemos que todo punto* $(t,x) \in (0,\infty) \times M$ *tiene una curva* $\gamma : [0,t] \to M$ *calibrada por* U *que termina en* (t,x)*. De hecho, por la manera en que hicimos la prueba de esa proposición, tenemos que toda curva* $\gamma : [a,t] \to M$ *calibrada que termina en* x*, puede extenderse a una curva calibrada* $\gamma : [0,t] \to M$*.*

Veamor la relación entre diferenciabilidad de U y sus curvas calibrantes.

Teorema 8.2. ***(teorema de diferenciabilidad)*** *Si* $U : [0,\infty)\times M \to [-\infty,+\infty]$ *es una solución de viscosidad continua a la ecuación de evolución de Hamilton-Jacobi*

$$\partial_t U + H(x, \partial_x U) = 0$$

en $(0,\infty) \times M$*. Tenemos entonces que*

1. *Si* U *es diferenciable en* (t,x) *con* $t > 0$ *y* $\gamma : [a,t] \to M$ *es una curva calibrada que termina en* (t,x)*, entonces*

$$\partial_x U(t,x) = \partial_v L\big(x, \dot\gamma(t)\big)$$

$$\partial_t U(t,x) = -H\Big(x, \partial_v L\big(x, \dot\gamma(t)\big)\Big)$$

2. U *es diferenciable en* (t,x) *con* $t > 0$ *si y sólo si existe una única curva calibrada que termina en* (t,x)*.*

3. *Si* $\gamma : [a,t] \to M$ *es una curva calibrada, entonces* U *es diferenciable en* $\big(s,\gamma(s)\big)$ *para todo* $s \in (a,t)$*.*

Demostración.

1. Comencemos probando el primer punto. Supongamos que U es diferenciable en (t,x) con $t > 0$, y tomemos $\gamma : [a,t] \to M$ una curva calibrada que termina en (t,x).

   Como U diferenciable en (t,x) y U es solución de viscosidad a la ecuación de evolución de Hamilton-Jacobi, entonces

$$\partial_t U(t,x) + H\big(x, \partial_x U(t,x)\big) = 0$$

pues las soluciones de viscosidad deben satisfacer la ecuación de Hamilton-Jacobi en los puntos de diferenciabilidad (ver segundo punto de las propiedades de soluciones de viscosidad, enuncadas después de la definición 3,4).

Por definición de curva calibrada, tenemos que

$$U\big(t,x\big) = U\big(t,\gamma(t)\big) = U\big(a,\gamma(a)\big) + \int_a^t L\big(\gamma(\sigma),\dot{\gamma}(\sigma)\big)d\sigma \tag{104}$$

Como U es fuertemente dominada por L (por la proposición 6,2), entonces para todo $s \in (a,t)$ tenemos que

$$\begin{cases} U\big(t,\gamma(t)\big) \leq U\big(s,\gamma(s)\big) + \int_s^t L\big(\gamma(\sigma),\dot{\gamma}(\sigma)\big)d\sigma \\ U\big(s,\gamma(s)\big) \leq U\big(a,\gamma(a)\big) + \int_a^s L\big(\gamma(\sigma),\dot{\gamma}(\sigma)\big)d\sigma \end{cases}$$

Sumando estas dos desigualdades, se obtiene la igualdad (104), por lo tanto cada una de estas desigualdades debe ser una igualdad. En particular

$$U\big(t,\gamma(t)\big) - U\big(s,\gamma(s)\big) = \int_s^t L\big(\gamma(\sigma),\dot{\gamma}(\sigma)\big)d\sigma \quad \forall s \in (a,t)$$

Dividiendo esta igualdad entre $t-s>0$ y haciendo el límite cuando $s \to t$, obtenemos

$$\frac{d}{dt}U\big(t,\gamma(t)\big) = L\big(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)\big)$$

Usando regla de la cadena tenemos

$$\partial_t U\big(t,x\big) + \partial_x U\big(t,x\big)(\dot{\gamma}(t)) = L\big(x,\dot{\gamma}(t)\big)$$

Combinando esta igualdad con $\partial_t U(t,x) + H\big(x,\partial_x U(t,x)\big) = 0$, obtenemos

$$\partial_x U\big(t,x\big)(\dot{\gamma}(t)) = L\big(x,\dot{\gamma}(t)\big) + H\big(x,\partial_x U(t,x)\big)$$

Es decir que $\partial_x U\big(t,x\big)$ alcanza la igualdad de la desigualdad de Fenchel, y por lo que vimos esto implica que

$$\partial_x U\big(t,x\big) = \partial_v L\big(x,\dot{\gamma}(t)\big)$$

Sustituyendo esto en la igualdad $\partial_t U(t,x) + H\big(x,\partial_x U(t,x)\big) = 0$, deducimos que

$$\partial_t U(t,x) + H\big(x,\partial_v L\big(x,\dot{\gamma}(t)\big)\big) = 0$$

terminando de probar entonces el primer punto del teorema.

2. Ahora probemos el segundo punto. Supongamos que U es diferenciable en (t,x) con $t>0$.

   Sabemos por la proposición 7,1 que existen curvas calibrantes $\gamma:[0,t]\to M$ tales que $\gamma(t)=x$, por lo que solo resta ver la unicidad.

   Supongamos que $\gamma_1:[0,t]\to M$ y $\gamma_2:[0,t]\to M$ son 2 curvas calibradas que terminan en (t,x) (observar que podemos suponer que las curvas están definidas en $[0,t]$, pues en otro caso sabemos que las podríamos extender a $[0,t]$ por el flujo lagrangiano y seguiríamos obteniéndo una curva calibrada).

   Como $\gamma_1(t)=\gamma_2(t)=x$, tenemos entonces por el primer punto de este teorema que
   $$\partial_x U\big(t,x\big)=\partial_v L\big(x,\dot\gamma_1(t)\big)=\partial_v L\big(x,\dot\gamma_2(t)\big)$$
   Como la transformada de Legendre es inyectiva debido a que L es C^2 estrictamente convexa (por ser de Tonelli), entonces $\dot\gamma_1(t)=\dot\gamma_2(t)$.

   Es decir que las 2 curvas minimizantes γ_1 y γ_2 comparten la condición $\gamma_1(t)=\gamma_2(t)=x$ y $\dot\gamma_1(t)=\dot\gamma_2(t)$, por lo que entonces ambas curvas coinciden en $[0,t]$.

   El recíproco de este punto no lo probaremos, pero se puede encontrar en [1]

3. Veamos ahora el tercer punto. Dada una curva $\gamma:[a.t]\to M$ calibrada, podemos extenderla a una curva calibrada $\gamma:[0,t]\to M$ a través del flujo lagrangiano.

   Para probar que U es diferenciable en $\big(s,\gamma(s)\big)$ para todo $s\in(0,t)$, por el segundo punto tenemos que basta probar que $\gamma\Big|_{[0,s]}$ es la única curva calibrada que termina en $\big(s,\gamma(s)\big)$.

   Por el mismo argumento que usamos para la primer parte (U es fuertemente dominada por L y calibra en $[0,t]$, entonces calibra también en subintervalos de $[0,t]$), tenemos que
   $$U\big(t,\gamma(t)\big)=U\big(s,\gamma(s)\big)+\int_s^t L\big(\gamma(\sigma),\dot\gamma(\sigma)\big)d\sigma\quad \forall s\in(0,t) \tag{105}$$
   Si $\gamma_1:[0,s]\to M$ es una curva calibrada que termina en $\gamma(s)$, entonces
   $$U\big(s,\gamma(s)\big)=U\big(0,\gamma_1(0)\big)+\int_0^s L\big(\gamma_1(\sigma),\dot\gamma_1(\sigma)\big)d\sigma \tag{106}$$
   Como $\gamma_1(s)=\gamma(s)$, entonces la concatenación $\delta:[0,t]\to M$ dada por
   $$\delta(\sigma)=\begin{cases}\gamma_1(\sigma) & \text{si } \sigma\in(0,s]\\ \gamma(\sigma) & \text{si } \sigma\in[s,t]\end{cases}$$

es de clase C^1 a trozos. Por las igualdades (105) y (106) tenemos que

$$U\big(t,\delta(t)\big) = U\big(0,\delta(0)\big) + \int_0^t L\big(\delta(\sigma),\dot{\delta}(\sigma)\big)d\sigma$$

Por lo tanto $\delta : [0,t] \to M$ es una curva calibrante, y entonces es minimizante. Esto implica que δ es C^2, por lo tanto las curvas $\gamma : [0,t] \to M$ y $\gamma_1 : [0,s] \to M$ tienen misma velocidad en tiempo s, es decir que se verifica que $\dot{\gamma}(s) = \dot{\gamma}_1(s)$ y $\gamma(s) = \gamma_1(s)$. Entonces por la unicidad de curvas extremales dado un punto y velocidad, tenemos que $\gamma_1 = \gamma\Big|_{[0,s]}$, por lo que solo existe una curva calibrante que termina en $\gamma(s)$ para cada $s \in (0,t)$.

□

8.2. Conjunto de Aubry

Definicion 8.3. (conjunto de Aubry) Si $U : [0,\infty) \times M \to [-\infty,+\infty]$ es una solución de viscosidad continua a la ecuación de evolución de Hamilton-Jacobi

$$\partial_t U(t,x) + H\big(x,\partial_x U(t,x)\big) = 0$$

en $(0,\infty) \times M$, definimos su conjunto de Aubry $\mathcal{A}(U)$ como los puntos $(t,x) \in (0,\infty) \times M$ para los que exista una curva $\gamma : (0,\infty) \to M$ tal que $\gamma(t) = x$, y para todo $s, s' \in (0,\infty)$ con $s < s'$, vale que

$$U\big(s',\gamma(s')\big) = U\big(s,\gamma(s)\big) + \int_s^{s'} L\big(\gamma(\sigma),\dot{\gamma}(\sigma)\big)d\sigma$$

Dicho de otro modo

$$\mathcal{A}(U) = \cup_\gamma \{Graph(\gamma) : \;\; \gamma : (0,\infty) \to M, \;\; \gamma\Big|_{[s,s']} \text{ calibrada } \forall\, [s,s'] \subset (0,\infty)\}$$

Por el tercer punto del teorema de diferenciabilidad 8,2, tenemos que

$$\mathcal{A}(U) \cap Sing^*(U) = \emptyset$$

8.3. Enunciado del teorema global de homotopía y contractibilidad local de las singularidades

Hagamos un breve repaso sobre homotopías.

Definicion 8.4. (homotopía de mapas continuos) Dos funciones continuas $f, g : X \to Y$ entre dos espacios topológicos, son homotópicas si existe un mapa continuo (con la topología producto) $H : X \times [0,1] \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$.

Este mapa $H : X \times [0,1] \to Y$ se dice que es una homotopía entre f y g.

Definicion 8.5. (homotópicamente nula) Una función continua $f : X \to Y$ se dice que es homotópicamente nula si es homotópica a una función constante de X a Y.

Definicion 8.6. (equivalencia de homotopía) Una función continua $f : X \to Y$ es una equivalencia de homotopía si existe una función continua $g : Y \to X$ tal que $g \circ f : X \to X$ y $f \circ g : Y \to Y$ son homotópicas a las funciones identidades $id_X : X \to X$ y $id_Y : Y \to Y$ respectivamente.

Definicion 8.7. (localmente contractible) Un espacio topológico X es localmente contractible si para todo $x \in X$, y para todo entorno V de x, podemos encontrar un entorno $U \subset V$ de x tal que la inclusión $i : U \hookrightarrow V$ es homotópicamente nula (como mapa de U en V).

Proposición 8.3. *Si X es un espacio topológico localmente contractible, entonces es localmente conexo por caminos.*

Demostración. Sea $x \in X$, y V un abierto arbitrario conteniendo a x. Como X es localmente contractible, existirá un entorno $U \subset V$ de x, tal que la inclusión $i : U \hookrightarrow V$ es homotópicamente nula.

Por lo tanto, existirá una homotopía $H : U \times [0,1] \to V$ y un $y_0 \in V$ tal que $H(y,0) = y$ y $H(y,1) = y_0$ para todo $y \in U$. Consideremos entonces el conjunto

$$C = \cup_{t\in[0,1]} H(U,t)$$

Claramente $U = H(U,0) \subset C$, entonces C es un entorno de x. Además si $z_1, z_2 \in C$, entonces $z_1 = H(y_1,t_1)$ y $z_2 = H(y_2,t_2)$ para algún $y_1, y_2 \in U$ y $t_1, t_2 \in [0,1]$. Entonces consideramos la curva $\gamma : [0,\ 2 - t_1 - t_2] \to V$ tal que

$$\gamma(t) = \begin{cases} H(y_1,\ t_1 + t) & \forall t \in [0,\ 1 - t_1] \\ H(y_2,\ 2 - t_1 - t) & \forall t \in (1 - t_1,\ 2 - t_1 - t_2] \end{cases}$$

Es inmediato verificar que γ es continua (pues $\gamma(1-t_1) = H(y_1,1) = H(y_2,1) = y_0$), $\gamma(0) = H(y_1,t_1) = z_1$, y $\gamma(2 - t_1 - t_2) = H(y_2,t_2) = z_2$, y claramente la imágen de γ está contenida en C. Por lo tanto, $C \subset V$ es un entorno conexo por caminos de x. $\square$

Enunciaremos ahora una versión más general del teorema 8,1.

Teorema 8.4. *Si* $U : (0, \infty) \times M \to \mathbb{R}$ *es una solución de viscosidad continua a la ecuación de evolución de Hamilton-Jacobi*

$$\partial_t U + H\big(x, \partial_x U\big) = 0$$

en $(0, \infty) \times M$*, entonces* $Sing^*(U)$ *es localmente contractible.*

Recordemos que por el teorema 7,17, tendremos que como $U : (0, \infty) \times M \to \mathbb{R}$ es una solución de viscosidad continua, entonces existirá una única $u : M \to (-\infty, +\infty]$ semicontinua inferiormente tal que $U = \hat{u}\Big|_{(0,t_0)\times M}$, por lo que basta probar este resultado para las evoluciones de Lax-Oleinik.

Como mencionamos antes, no veremos la prueba de este resultado general, sino que estudiaremos el caso particular de la función distancia a un conjunto cerrado euclídeo.

Existe la siguiente versión del teorema anterior para solución definidas en tiempo finito.

Teorema 8.5. ***(teorema local de homotopía)*** *Si* $u : M \to [-\infty, +\infty]$ *es tal que su evolución de Lax-Oleinik* $\hat{u}$ *es finita en* $(0, T) \times M$ *para algún* $T > 0$*, entonces el conjunto*

$$Sing_T^*(\hat{u}) = \{(t, x) \in (0, T) \times M : \ \hat{u} \text{ no es diferenciable en } (t, x)\}$$

es localmente contractible.

Para resultados globales de la topología de $Sing^*(U)$, se necesita agregar restricciones a U.

Teorema 8.6. ***(teorema global de homotopía)*** *Si* $u : M \to [-\infty, \infty]$ *es la suma de una función globalmente Lipschitz con una función acotada, entonces su evolución de Lax-Oleinik* $\hat{u}$ *es finita en todo* $(0, \infty) \times M$*.*

Más aún, la inclusión $Sing^*(\hat{u}) \subset \big((0, \infty) \times M\big) \setminus \mathcal{A}(\hat{u})$ *es una equivalencia de homotopía.*

8.4. Distancia a un cerrado

Consideremos una variedad conexa (M, g), y el lagrangiano $L_0 : TM \to \mathbb{R}$ dado por

$$L_0(x, v) = \frac{1}{2}||v||_x^2$$

Vimos en el ejemplo 4,2 que la función de mínima acción correspondiente a este lagrangiano es

$$h_t^0(x,y) = \frac{d(x,y)^2}{2t} \qquad \forall x,y \in M \tag{107}$$

Si $C \subset M$ es no vacío, definimos su función característica modificada como

$$\xi_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{si } x \notin C \end{cases}$$

Como vimos en el ejemplo (7.7), al tener $C \neq \emptyset$ tendremos que ξ_C no es idénticamente $+\infty$, y entonces su evolución de Lax-Oleinik queda

$$\hat{\xi}_C(t,x) = \inf_{y \in M} \xi_C(y) + \frac{d(x,y)^2}{2t} = \inf_{y \in C} \frac{d(y,x)^2}{2t} = \frac{d_C(x)^2}{2t} \tag{108}$$

donde $d_C : M \to \mathbb{R}$ se define como $d_C(x) = \inf_{y \in C} d(x,y)$.

Supondremos ahora que C es cerrado, es decir que

$$C = \{x \in M : d_C(x) = 0\}$$

En particular, podemos ver que

$$Sing^*(\hat{\xi}_C) = (0,\infty) \times Sing(d_C^2)$$

donde $Sing(d_C^2) = \{x \in M : \ d_C^2 \text{ no es diferenciable en } x\}$ y $Sing^*(\hat{\xi}_C)$ son las singularidades de $\hat{\xi}_C$ como en la definición 8,1.

La función d_C^2 es diferenciable en todos los puntos de $C = \{x \in M : d_C(x) = 0\}$, pues si tomamos $c \in C$ y un entorno coordenado de c, localmente la distancia a c es comparable con la métrica, por lo que para todo x suficientemente cerca de c valdrá que $0 \leq d_C(x)^2 \leq d(x,c)^2 \leq M||x-c||^2$ para algún $M \in \mathbb{R}$ suficientemente grande.

Entonces tenemos que las singularidades de d_C^2 están contenidas en $M \setminus C$, por lo que si definimos el conjunto $Sing^*(d_C) = Sing(d_C) \setminus C$, entonces

$$Sing(d_C^2) = Sing^*(d_C)$$

Si aplicamos entonces el teorema 8,4 a $\hat{\xi}_C$, deducimos que

$$Sing^*(\hat{\xi}_C) = (0,\infty) \times Sing^*(d_C) \quad \text{es localmente contractible}$$

Es decir que tendremos el siguiente teorema

Teorema 8.7. *Si $C \subset M$ es cerrado, entonces $Sing^*(d_C)$ es localmente contractible.*

Observación. *Es claro que $Sing^*(d_C)$ son las singularidades de una función Lipschitz, por lo que en particular tiene medida 0 (debido al teorema de Rademacher). Por lo que en realidad sabemos que $Sing^*(d_C)$ es localmente contractible y de medida nula.*

Observación. ***(curva característica hacia el pasado para $\hat{\xi}_C$)*** *Una curva $\gamma : [0,t] \to M$ es característica hacia el pasado para $\hat{\xi}_C$ con final en (t,x) si y sólo si $\gamma(t) = x$, su acción es exactamente igual a*

$$\mathbb{L}(\gamma) = h_t^0\big(\gamma(0), x\big) = \frac{d^2(x, \gamma(0))}{2t}$$

y

$$\hat{\xi}_C(t,x) = \hat{\xi}_C\big(0, \gamma(0)\big) + h_t^0\big(\gamma(0), x\big) \tag{109}$$

Como $\hat{\xi}_C(t,x) = \frac{d_C^2(x)}{2t}$ es finito para $t > 0$, tendremos entonces que $\hat{\xi}_C\big(0,\gamma(0)\big) = \xi_C\big(\gamma(0)\big)$ debe ser finito (y por como definimos ξ_C, tendremos entonces que esto es equivalente a que $\gamma(0) \in C$).

Por lo tanto $\hat{\xi}_C\big(0,\gamma(0)\big) = \xi_C\big(\gamma(0)\big) = 0$, y entonces usando las ecuaciones (107) *y* (108)*, vemos que la ecuación* (109) *queda*

$$\frac{d_C^2(x)}{2t} = \frac{d^2\big(\gamma(0), x\big)}{2t}$$

O lo que es equivalente a que

$$d_C(x) = d\big(\gamma(0), x\big)$$

Definicion 8.8. (Proyección a un cerrado) Si $x \in M$ y $C \subset M$ es cerrado, definimos las proyecciones de x sobre C como

$$Proj_C(x) = \{c \in C : \ \ d_C(x) = d(c,x)\}$$

Se puede ver que $Proj_C(x) \neq \emptyset$, pues considerando el compacto

$$K = C \cap \overline{B}(x, d_C(x) + 1)$$

podemos considerar una sucesión en $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ tal que

$$d(y_n, x) \to d_C(x)$$

Luego, como K es compacto, podemos extraer una subsucesión convergente $(y_{n_k})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $y_{n_k} \to y^* \in K$, y entonces por continuidad de la función d_C, tendremos que

$$d(y^*, x) = \lim_k d(y_{n_k}, x) = d_C(x)$$

Entonces $y^* \in Proj_C(x)$.

Observación. *Por la observación anterior, tenemos que si $C \subset M$ es cerrado, entonces las curvas γ caractarísticas hacia el pasado para $\hat{\xi}_C$ terminando en (t, x), son aquellas que*

$$\begin{cases} \gamma(t) = x \\ \gamma(0) \in C \\ \mathbb{L}_0(\gamma) = h_t^0\big(\gamma(0), x\big) = \frac{d(\gamma(0),x)^2}{2t} \\ d_C(x) = d\big(\gamma(0), x\big) \end{cases}$$

Es decir que las curvas características hacia el pasado $\gamma : [0, t] \to M$ son geodésicas minimizantes con $\gamma(t) = x$ y $\gamma(0) \in Proj_C(x)$.

El teorema 8,2 de diferenciabilidad implica entonces el siguiente teorema

Teorema 8.8. *Si $C \subset M$ cerrado en M, entonces*

1. *La función distancia d_C es diferenciable en $x \notin C$ si y sólo si $\#Proj_C(x) = 1$ y hay una única geodésica desde x al único punto en $Proj_C(x)$.*
2. *Si $\gamma : [a, b] \to M$ es geodésica minimizante, con $\gamma(b) \notin C$, y $\gamma(a) \in Proj_C\big(\gamma(b)\big)$, entonces d_C es diferenciable en $\{\gamma(s) : s \in (a, b)\}$*

Demostración. **1.** Por el segundo punto del teorema 8,2, y recordando que por la proposición 7,1 sabemos que las curvas calibradas $\gamma : [a, t] \to M$ se pueden extender a curvas calibradas $\gamma : [0, t] \to M$, tenemos que

$$\begin{aligned} d_C \text{ es diferenciable en } x \in M \setminus C \iff & \frac{d_C^2}{2t} \text{ es diferenciable en } x \in M \setminus C \\ \iff & \hat{\xi}_C \text{ es diferenciable en } (t, x) \in (0, \infty) \times M \setminus C \\ \iff & \exists!\, \gamma : [0, t] \to M \text{ calibrada con } \gamma(t) = x \\ \iff & \exists!\, \gamma : [0, t] \to M \text{ geodésica minimizante} \\ & \text{con } \gamma(t) = x, \gamma(0) \in Proj_C(x) \end{aligned}$$

donde en el último punto hemos usado la observación anterior, la cual caracteriza a las curvas características hacia el pasado para la función $\hat{\xi}_C$.

Claramente como entre todo par de puntos en M existen geodésicas minimizantes (pues (M, g) es completa), entonces el hecho de que solo exista una geodésica minimizante desde $Proj_C(x)$ hacia x implica que $Proj_C(x)$ debe estar conformado por un solo punto, y además solo puede existir una única geodésica minimizante entre ese punto y x.

2. Sea $x \notin C$ y $\gamma : [a, b] \to M$ una geodésica minimizante entre $\gamma(a) \in Proj_C(x)$ y $\gamma(b) = x$. Entonces trasladándola en el tiempo podemos considerar

$$\tilde{\gamma} : [0, b - a] \to M$$

$$s \mapsto \gamma(s+a)$$

Claramente $d\big(\tilde{\gamma}(0),\tilde{\gamma}(b-a)\big) = d\big(\gamma(a),\gamma(b)\big) = l_g\big(\gamma\big) = l_g\big(\tilde{\gamma}\big)$, es decir que $\tilde{\gamma}$ también es geodésica minimizante con $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(a) \in Proj_C(x)$ y $\tilde{\gamma}(b-a) = \gamma(b) = x$.

Entonces por la observación previa, tenemos que $\tilde{\gamma}$ es una curva curva calibrada para $\hat{\xi}_C$ y el lagrangiano $L_0(x,v) = \frac{||v||_x^2}{2}$, terminando en $\big(b-a,x\big) \in (0,\infty)\times M$.

Entonces por el punto 3 del teorema 8,2 de diferenciabilidad, tenemos que $\hat{\xi}_C$ es diferenciable en los puntos de $\{\big(s,\tilde{\gamma}(s)\big) : s \in (0,b-a)\}$.

Recordando que $Sing^*(\hat{\xi}_C) = (0,\infty)\times Sing^*(d_C)$, deducimos que d_C es diferenciable en los puntos $\{\tilde{\gamma}(s) \in M : s \in (0,b-a)\}$.

Usando que $\{\tilde{\gamma}(s) \in M : s \in (0,b-a)\} = \{\gamma(s) \in M : s \in (a,b)\}$, tenemos entonces que d_C es diferenciable en los puntos de $\{\gamma(s) \in M : s \in (a,b)\}$

$\square$

Cuando $\#Proj_C(x) = 1$, denotaremos $c_x \in C$ a la única proyección de x sobre C.

Estudiaremos a continuación el conjunto de Aubry (definido en la sección 8,2) para la función $\hat{\xi}_C$.

Si para una curva $\gamma : [0,\infty) \to M$ definimos su gráfico positivo como

$$Graph_+(\gamma) = \{\big(t,\gamma(t)\big) : t > 0\}$$

tenemos entonces que el conjunto de Aubry $\mathcal{A}(\hat{\xi}_C) \subset (0,\infty)\times M$ se puede escribir como

$$\mathcal{A}(\hat{\xi}_C) = \cup_\gamma\{Graph_+(\gamma) : \gamma\big|_{[0,s]} \text{ es característica hacia el pasado } \forall s > 0\}$$

Observar que $\gamma\Big|_{[0,s]}$ es característica hacia el pasado para todo $s > 0$ si y solo si para todo $s > 0$ se tiene que $\gamma\Big|_{[0,s]}$ es una geodésica minimizante con $\gamma(0) \in C$ y

$$\frac{d_C^2\big(\gamma(s)\big)}{2s} = \frac{d^2\big(\gamma(0),\gamma(s)\big)}{2s}$$

Esta última condición es equivalente a que

$$d_C\big(\gamma(s)\big) = d\big(\gamma(0),\gamma(s)\big) \quad \forall s > 0 \tag{110}$$

Observemos que en particular, si hacemos $s \to 0$ en la ecuación (110), tenemos que

$$d_C\big(\gamma(0)\big) = d\big(\gamma(0), \gamma(0)\big) = 0$$

entonces $\gamma(0) \in C$.

Además, usando que $\gamma\Big|_{[0,s]}$ es geodésica minimizante para todo $s > 0$, tenemos que la ecuación (110) implica que

$$d_C\big(\gamma(s)\big) = d\big(\gamma(0), \gamma(s)\big) = l_g(\gamma\big|_{[0,s]}) \quad \forall s > 0$$

y recíprocamente la ecuación anterior también implica que $\gamma\Big|_{[0,s]}$ realice la distancia entre sus extremos.

Por lo tanto podemos escribir el conjunto de Aubry como

$$\mathcal{A}(\hat{\xi}_C) = \cup_\gamma \{Graph_+(\gamma) : d_C\big(\gamma(s)\big) = d\big(\gamma(0), \gamma(s)\big) = l_g(\gamma\big|_{[0,s]}) \ \forall s \in (0, \infty)\}$$

Tomemos una geodésica minimizante $\gamma : [0, \infty) \to M$ tal que

$$d_C\big(\gamma(s)\big) = d\big(\gamma(0), \gamma(s)\big) \quad \forall s > 0 \tag{111}$$

Dado $t > 0$, podemos considerar la curva $\gamma_t : [0, \infty) \to M$ definida por

$$\gamma_t(s) = \gamma(ts)$$

Claramente γ_t es una geodésica minimizante que verifica la ecuación (111).

Entonces $\cup_{t>0} Graph_+(\gamma_t) \subset \mathcal{A}(\hat{\xi}_C)$, o lo que es lo mismo que

$$\{\big(t, \gamma(ts)\big) : t, s > 0\} \subset \mathcal{A}(\hat{\xi}_C)$$

Pero como $\{\big(t, \gamma(ts)\big) : t, s > 0\} = (0, \infty) \times \gamma\big((0, \infty)\big)$, entonces tenemos que

$$(0, \infty) \times \gamma\big((0, \infty)\big) \subset \mathcal{A}(\hat{\xi}_C)$$

Entonces, al unir en todas las curvas γ que son geodésicas minimizantes y que verifican la ecuación (111) se obtiene que el conjunto de Aubry $\mathcal{A}(\hat{\xi}_C)$ se puede escribir como

$$(0, \infty) \times \cup_\gamma \{\gamma\big((0, \infty)\big) : \ \gamma \in \mathcal{C}_{[0,\infty)} \text{ minimizante}, d_C\big(\gamma(s)\big) = d\big(\gamma(0), \gamma(s)\big) \ \forall s > 0\}$$

donde recordamos del inicio que

$$\mathcal{C}_{[0,\infty)} = \{\gamma : [0, \infty) \to M : \ \gamma \text{ de clase } C^1 \text{ a trozos}\}$$

Definimos entonces el conjunto de Aubry proyectado $\mathcal{A}(C) \subset M$ como

$$\mathcal{A}(C) = \cup_\gamma \{\gamma\big((0,\infty)\big) : \gamma \in \mathcal{C}_{[0,\infty)} \text{ minimizante}, \gamma(0) \in Proj_C\big(\gamma(s)\big)\}$$

para poder escribir

$$(0,\infty) \times \mathcal{A}(C) = \mathcal{A}(\hat{\xi}_C)$$

Considerando geodésicas constantes en C, deducimos que $C \subset \mathcal{A}(C)$.

Definimos

$$\mathcal{A}^*(C) = \mathcal{A}(C) \setminus C \subset M \setminus C$$

Además, cualquier geodésica constante $\gamma : [0,\infty) \to M$ que satisface la ecuación (111) debe tomar valores en C (debido a evaluar en $s = 0$), por lo tanto

$$\mathcal{A}^*(C) = \cup_\gamma \{\gamma\big((0,\infty)\big) : \gamma \in \mathcal{C}_{[0,\infty)} \text{ minimizante no cte}, d_C\big(\gamma(s)\big) = d\big(\gamma(0), \gamma(s)\big)\ \forall s > 0\}$$

Notemos que para una geodésica no constante, la norma de su velocidad $||\dot{\gamma}(s)||_{\gamma(s)}$ es una constante no nula. Entonces, si γ es una minimizante no constante, tendremos que

$$d\big(\gamma(0), \gamma(s)\big) = \int_0^s ||\dot{\gamma}(t)||_{\gamma(t)} dt = ||\dot{\gamma}(0)||_{\gamma(0)}.s \underset{s\to\infty}{\to} \infty$$

Esto implica, $\mathcal{A}^*(C)$ está contenido en las componentes conexas no acotadas de $M \setminus C$.

En particular, si M es compacta, como todas las componentes conexas de $M \setminus C$ serán acotadas, entonces $\mathcal{A}^*(C) = \emptyset$ y $\mathcal{A}(C) = C$.

En general, como $\mathcal{A}^*(C)$ está contenido en las componentes conexas no acotadas de $M \setminus C$, tenemos que toda componentes conexa acotada de $M \setminus C$, es también una componente conexa acotada de $M \setminus \mathcal{A}(C)$.

Si consideramos $u : M \to \mathbb{R}$ tal que $u(x) = \hat{\xi}_C(1,x) = \frac{d_C^2(x)}{2}$ (en particular, por la propiedad de semigrupo tenemos que $\hat{u}(t,x) = \hat{\xi}_C(1+t,x)$), como u es Lipschitz podemos concluír por el teorema 8,6 que la inclusión

$$Sing^*(\hat{u}) = Sing^*(\hat{\xi}_C) = (0,\infty) \times Sing(d_C^2) = (0,\infty) \times Sing^*(d_C) \subset (0,\infty) \times \big(M \setminus \mathcal{A}(C)\big)$$

es una equivalencia de homotopía.

Como $(0,\infty)$ es contractible, se obtiene el siguiente teorema

Teorema 8.9. ***(Teorema global de homotopía para conjuntos cerrados)*** *La inclusión $Sing(d_C^2) = Sing^*(d_C) \subset M \setminus \mathcal{A}(C)$ es una equivalencia de homotopía para todo $C \subset M$ cerrado.*

8.5. Caso euclídeo

Intentaremos probar el teorema 8,9 para subconjuntos cerrados en $\mathbb{R}^k$ (con la métrica riemanniana usual).

Teorema 8.10. *Sea $C \subset \mathbb{R}^k$ un cerrado. La inlusión $Sing(d_C^2) = Sing^*(d_C) \subset \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$ es una equivalencia de homotopía.*

El teorema anterior también implica que

Teorema 8.11. *Sea $C \subset \mathbb{R}^k$ un cerrado. Entonces para toda componente conexa U de $\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$, se tiene que $Sing^*(d_C) \cap U \subset U$ es una equivalencia de homotopía.*

Probemos como el teorema 8,10 implica 8,11

Demostración. Sea $f_U : Sing^*(d_C) \cap U \hookrightarrow U$ la inclusión. Sabemos por hipótesis (teorema 8,10) que la inclusión $f : Sing^*(d_C) \hookrightarrow \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$ es una equivalencia de homotopía.

Es decir que existe $g : \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C) \to Sing^*(d_C)$ tal que

- $g \circ f$ es homotópica a $id_{Sing^*(d_C)} : Sing^*(d_C) \to Sing^*(d_C)$. Sea entonces
$$H_{g \circ f} : Sing^*(d_C) \times [0,1] \to Sing^*(d_C)$$
tal que $H_{g \circ f}(x, 0) = g \circ f(x)$ y que $H_{g \circ f}(x, 1) = x$.
- $f \circ g$ es homotópica a $id_{\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)} : \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C) \to \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$. Sea entonces
$$H_{f \circ g} : \big(\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)\big) \times [0,1] \to \big(\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)\big)$$
tal que $H_{f \circ g}(x, 0) = f \circ g(x)$ y que $H_{f \circ g}(x, 1) = x$.

Consideremos $g_U = g\Big|_U$.

Veamos primero que la imágen de g_U está contenida en $U \cap Sing^*(d_C)$ y que $f_U \circ g_U : U \to U$ es homotópica a $id_U : U \to U$.

Si $x \in U \subset \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$, entonces tenemos que la curva $\gamma_x : [0,1] \to \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$ tal que

$$\gamma_x(t) = H_{f \circ g}(x, t)$$

cumple que

$$\begin{cases} \gamma_x(t) \in \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C) & \forall t \in [0,1] \\ \gamma_x(1) = x \in U \subset \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C) \end{cases}$$

Por lo tanto, por continuidad de γ tenemos que $\gamma_x(t)$ está en la misma componente conexa de $\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$ que x, es decir que

$$\gamma_x(t) = H_{f\circ g}(x,t) \in U \ \ \forall (x,t) \in U \times [0,1] \tag{112}$$

Esto implica que la función $H_{f_U \circ g_U} : U \times [0,1] \to U$ dada por

$$H_{f_U\circ g_U}(x,t) = H_{f\circ g}(x,t) \quad \forall (x,t) \in U \times [0,1]$$

está bien definida (y claramente es continua por ser restricción de una función continua).

En particular, recordando que f es la inclusión y usando la expresión (112), tenemos entonces que

$$H_{f\circ g}(x,0) = f \circ g(x) = g(x) \in U \quad \forall x \in U$$

Y como el codominio de g es $Sing^*(d_C)$, obtenemos

$$g(x) \in Sing^*(d_C) \cap U \quad \forall x \in U$$

Es decir que la función $g_U : U \to U \cap Sing^*(d_C)$ dada por la restricción de g está bien definida.

Además para todo $x \in U$ se tiene que

$$\begin{cases} H_{f_U\circ g_U}(x,0) = H_{f\circ g}(x,0) = f \circ g(x) = f_U \circ g_U(x) \\ H_{f_U\circ g_U}(x,1) = H_{f\circ g}(x,1) = x \end{cases}$$

Es decir que $f_U \circ g_U$ es homotópica a $id_U : U \to U$.

Ahora veamos que $g_U \circ f_U$ es homotópica a $id_{Sing^*(d_C)} : Sing^*(d_C) \cap U \to Sing^*(d_C) \cap U$.

Si $x \in Sing^*(d_C) \cap U$, y consideramos la curva $\gamma_x : [0,1] \to Sing^*(d_C)$ dada por

$$\gamma_x(t) = H_{g\circ f}(x,t)$$

cumple que

$$\begin{cases} \gamma_x(t) \in Sing^*(d_C) \quad \forall t \in [0,1] \\ \gamma_x(1) = x \in Sing^*(d_C) \cap U \end{cases}$$

Como $\gamma_x(1) = x \subset U$, siendo U una componente conexa de $\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$, y $Sing^*(d_C) \subset \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$ (por el teorema de diferenciabilidad), tenemos entonces por continuidad de γ_x que $\gamma_x(t)$ debe estar en la misma componente conexa de $\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$ que x para todo $t \in [0,1]$, es decir que $\gamma_x(t) \in U$. Por lo tanto tenemos que

$$\gamma_x(t) \in Sing^*(d_C) \cap U \quad \forall t \in [0,1]$$

Entonces la función $H_{g_U \circ f_U} : Sing^*(d_C) \cap U \times [0,1] \to Sing^*(d_C) \cap U$ dada por

$$H_{g_U \circ f_U}(x,t) = H_{g \circ f}(x,t) \quad \forall (x,t) \in \big(Sing^*(d_C) \cap U\big) \times [0,1]$$

está bien definida, es continua (por ser restricción de una función continua), y claramente es una homotopía con la función $i_{Sing^*(d_C) \cap U} : Sing^*(d_C) \cap U \to Sing^*(d_C) \cap U$.

Tenemos entonces que la función inclusión $f_U : Sing^*(d_C) \cap U \hookrightarrow U$ es una equivalencia de homotopías.

□

Notemos que como en el caso euclídeo, las geodésicas entre 2 puntos $x, y \in \mathbb{R}^k$ son solamente segmentos

$$[x,y] = \{(1-s)x + sy : s \in [0,1]\}$$

entonces el teorema 8,8 implica que

Proposición 8.12. *Si $C \subset \mathbb{R}^k$ es un cerrado, entonces*

1. *La fución distancia d_C es diferenciable en $x \notin C$ si y sólo si $\#Proj_C(x) = 1$.*
2. *Si $x \notin C$ y $c_x \in Proj_C(x)$, la función d_C es diferenciable en cualquier punto del segmento*
$$(c_x, x) = \{(1-s)c_x + sx : s \in (0,1)\}$$
y además, como $Proj_C(y) = \{c_x\}$ para todo $y \in (c_x, x)$ (observar que por el primer punto sabemos que $\#Proj_C(y) = 1$, y como las curvas características hacia el pasado realizan la distancia a C, entonces $c_x \in Proj_C(y)$).

Más aún, el conjunto de Aubry $\mathcal{A}(C)$ se puede escribir como

$$\mathcal{A}(C) = C \cup \big(\cup_\gamma \{\gamma(1) : \gamma \in \mathcal{C}_{[0,\infty)}, \gamma(t) = c + tv, d_C(\gamma(t)) = t.||v|| \;\; \forall t \in [0,\infty)\}\big)$$

Es decir, $\mathcal{A}(C)$ es la unión de C con el recorrido de las semirrectas $\gamma : [0,\infty) \to \mathbb{R}^k$ que parten de $\gamma(0) \in C$ y cumplen que $d_C(\gamma(t)) = ||\gamma(t) - \gamma(0)||$ para todo $t \in [0,\infty)$.

El teorema 8,7 (el cual provenía del teorema local de homotopía 8,4) aplicado al caso euclídeo queda

Teorema 8.13. *Si $C \subset \mathbb{R}^k$ es un cerrado, entonces el conjunto $Sing(d_C^2) = Sing^*(d_C)$ es localmente contractible.*

8.6. Ejemplos euclídeos

Ejemplo 8.14. *Sea* $C_1 = \{0\} \subset \mathbb{R}^2$*. Entonces la función* $d^2_{C_1}$ *es diferenciable en todo* $\mathbb{R}^2$*, y entonces* $Sing(d^2_{C_1}) = \emptyset$*, el cual localmente contractible, como era de esperar debido al teorema* 8,13*.*

Además, el conjunto de Aubry es $\mathcal{A}(C_1) = \mathbb{R}^2$*, pues todas las semirrectas que parten de* $\{0\}$ *cumplen que la distancia al punto de inicio coincide con la distancia al cerrado* C_1 *(pues son el mismo punto).*

En particular, la inclusión $\emptyset = Sing(d^2_{c_1}) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}(C_1) = \emptyset$ *es una equivalencia de homotopía.*

Ejemplo 8.15. *Sea* $C_2 = \{(1,0),(-1,0)\} \subset \mathbb{R}^2$*. Sabemos por la proposición* 8,12*, que las singularidades (fuera de* C_2*) de la función* d_{C_2}*, corresponden con los puntos que tengan más de una proyección en* C_2*. Es decir que* $Sing^*(d_{C_2})$ *son los puntos que equidistan de* $(-1,0)$ *y de* $(1,0)$*, que corresponde con la mediatriz de estos puntos, es decir* $\{0\} \times \mathbb{R}$ *(ver figura* 2*).*

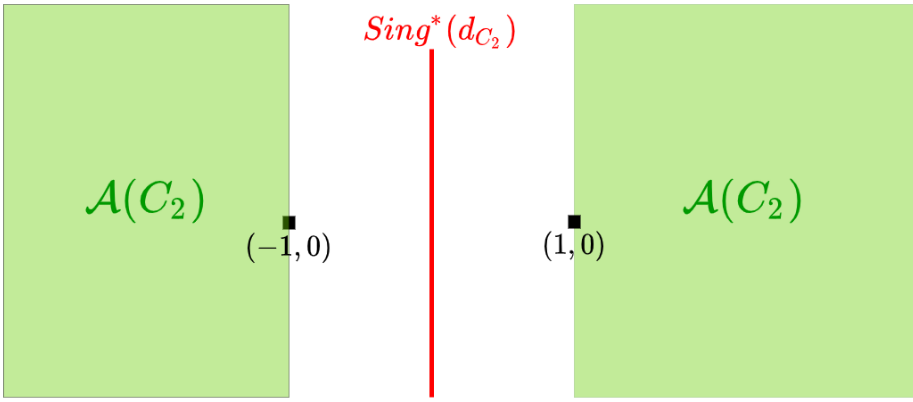

Figura 2: Singularidades (rojo) de la función distancia a 2 puntos, y su conjunto de Aubry (verde).

Claramente el conjunto $Sing^*(d_{C_2}) = \{0\} \times \mathbb{R}$ *es localmente contractible, como afirmaba el teorema* 8,13*.*

Además, su conjunto de Aubry es $\mathcal{A}(C_2) = \mathbb{R}^2 \setminus \big((-1,1) \times \mathbb{R}\big)$*, lo cual se ve claramente a partir de que todas las semirrectas que partan de* C_2 *que no corten a la región* $(-1,1) \times \mathbb{R}$*, tendrán que la distancia al punto de inicio coincide con la distancia a* C_2*, en cambio las semirrectas que se adentran en la región* $(-1,1) \times \mathbb{R}$ *eventualmente cruzan la mediatríz de estos puntos (y luego de pasar esa intersección, la distancia al punto de inicio de la semirrecta no coincidirá con la distancia al cerrado* C_2*).*

En particular $\{0\} \times \mathbb{R} = Sing(d^2_{C_2}) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}(C_2) = (-1,1) \times \mathbb{R}$ *es una equivalencia de homotopía, lo cual es puede verificar inmediatamente de la definición tomando* $g : (-1,1) \times \mathbb{R} \to \{0\} \times \mathbb{R}$ *como la proyección al eje vertical.*

Ejemplo 8.16. *Sea* $K_1 \subset \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ *un conjunto de Cantor contenido en el eje* x.

Sean $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *las componentes conexas acotadas de* $\big(\mathbb{R} \times \{0\}\big) \setminus K_1$.

Por la proposición 8,12*, sabemos que las singularidades de* d_{K_1} *fuera de* K_1 *son los puntos de* $\mathbb{R}^2$ *con proyección única sobre* K_1*, entonces*

$$Sing^*(d_{K_1}) = \cup_{i\in\mathbb{N}} D_i$$

donde D_i *es la mediatriz del segmento* I_i *(ver figura* 3*)*

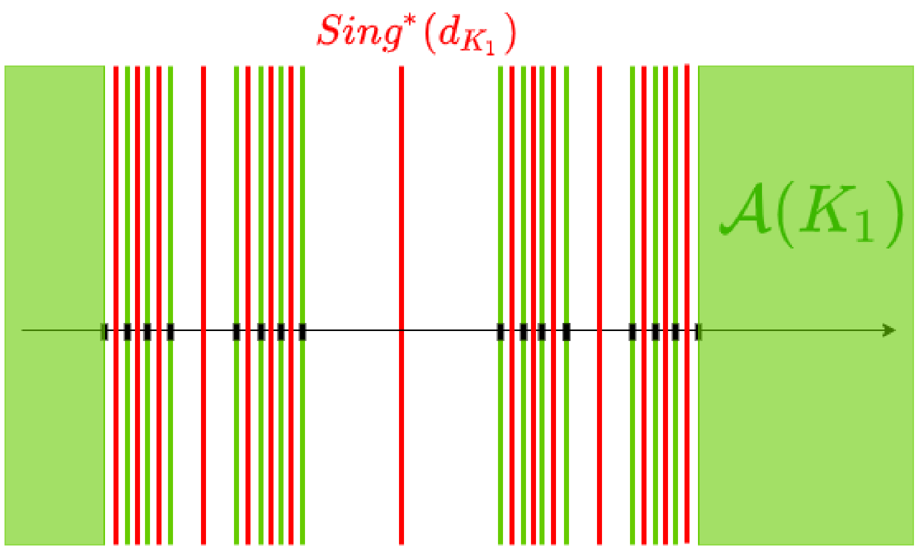

Figura 3: Singularidades (rojo) de la función distancia a un Cantor en $\mathbb{R}$, y su conjunto de Aubry (verde).

Es claro que $Sing^*(d_{K_1}) = \cup_{i\in\mathbb{N}} D_i$ *es localmente contractible, como afirmaba el teorema* 8,13*. Para ver esto, basta observar que si* $x \in D_i$*, entonces el entorno* $I_i \times \mathbb{R}$ *de* x *intersecta a* $Sing^*(d_{K_1})$ *solo sobre la recta* D_i.

Sin embargo (en contraste con los ejemplos anteriores), el conjunto $\overline{Sing^*(d_{K_1})} = Sing^*(d_{K_1}) \cup \big(\cup_{c\in K_1} D_c\big)$ *siendo* D_c *la recta vertical* $\{c\} \times \mathbb{R}$*, no es localmente contractible, pues ni siquiera es localmente conexo (observar que aqui aparecen rectas verticales que tocan al Cantor, las cuales se acumulan sobre otras rectas verticales del Cantor, lo que impide la conexión local).*

Tenemos que el conjunto de Aubry está formado por $\mathcal{A}(K_1) = \mathbb{R}^2 \setminus \big(\cup_{i\in\mathbb{N}} I_i \times \mathbb{R}\big)$. *Es decir que las rectas verticales* D_c *con* $c \in K_1$ *son parte del Aubry, y también los semiplanos cerrados a la derecha e izquierda del Cantor son parte del Aubry.*

La inclusión $\cup_{i\in\mathbb{N}} D_i = Sing(d^2_{K_1}) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}(K_1) = \cup_{i\in\mathbb{N}} I_i \times \mathbb{R}$ *es una equivalencia de homotopía, lo cual es puede corroborar inmediatamente de la definición tomando* $g : \cup_{i\in\mathbb{N}} I_i \times \mathbb{R} \to \cup_{i\in\mathbb{N}} D_i$ *tal que* $g\Big|_{I_i\times\mathbb{R}}$ *es la proyección sobre* D_i.

Observar que las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}(K_1)$ *son los* $I_i \times \mathbb{R}$, *los cuales son localmente contractibles, y* $Sing(d^2_{C_1}) \cap \big(I_i \times \mathbb{R}\big) = D_i \subset I_i \times \mathbb{R}$ *es una equivalencia de homotopía, como era de esperar por el teorema* 8,11.

Ejemplo 8.17. *Si* $K_2 \subset S^1 \subset \mathbb{R}^2$ *es un conjunto de Cantor en la circunferencia, denotemos* $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *a las componetes conexas de* $S^1 \setminus K_2$.

En este caso, si consideramos las semirrectas $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *tales que* δ_i *comienza en el origen y cortan al arco* γ_i *en su punto medio, tendremos que todos los puntos de* δ_i *tienen* 2 *proyecciones sobre* K_2 *(los extremos de* γ_i*), como se ve en la figura* 4

Se puede ver que todos los demás puntos de $\mathbb{R}^2$, *no tendrán distancia mínima más de un punto del Cantor, es decir que tendrán proyección única. Por lo tanto* $Sing^*(d_{K_2}) = \cup_{i\in\mathbb{N}} \delta_i$, *que que es localmente contractible (de hecho, es contractible pues el conjunto es estrellado respecto de* $\{0\}$*).*

Además, si para cada $c \in K_2$ *llamamos* α_c *a la semirrecta radial que comienza en* $c \in K_2$, *tendremos que todos los puntos de la semirrecta* α_c *cumplen que la distancia al Cantor* K_2 *coincide con la distancia a* S^1, *que es claramente la distancia a* c. *Entonces* $\cup_{c\in K_2} \alpha_c \subset \mathcal{A}(K_2)$.

Además, para todo $c \in K_2$ *tal que* $c \in \partial\gamma_i$ *para algún* i, *podemos generar semirrectas no radiales que parten de* c *y no cortan con* $Sing^*(d_{K_2})$ *(cualquier semirrecta contenida en el cono definido por* α_c *y* δ_i*), y los puntos de estas semirectas estarán contenidos en* $\mathcal{A}(K_2)$.

La inclusión $\cup_{i\in\mathbb{N}} \delta_i = Sing^*(d_{K_2}) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}(K_2)$ *es una equivalencia de homotopía, pues ambos son contractibles (más aún, ambos son estrellados con centro en el origen).*

Observación. *Observemos que en los ejemplos* 8,14, 8,15 *y* 8,16, *el conjunto de singularidades es una subvariedad (vacío, recta, y unión de rectas respectivamente), mientras que en el ejemplo* 8,17 *no (pues todas las semirrectas que lo conformaban, partían del* $(0,0)$*).*

En los ejemplos 8,14 *y* 8,15 *la clausura de las singularidades también era localmente*

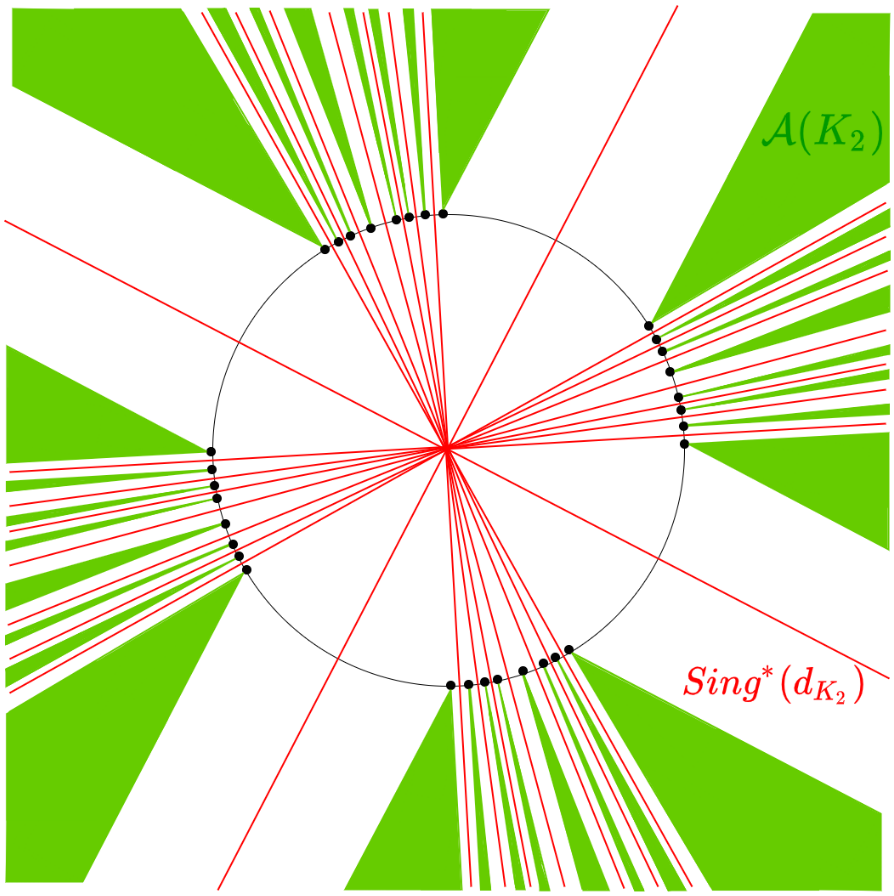

Figura 4: Singularidades (rojo) de la función distancia a un Cantor en S^1, y su conjunto de Aubry (verde).

contractible (pues en esos casos, los conjuntos de singularidades eran cerrados), sin embargo esto no ocurre en los ejemplos 8,16 *y* 8,17 *(pues se acumulan rectas/semirrectas de las singularidades sobre otras rectas/semirrectas que pasan por los puntos del Cantor).*

8.7. Prueba del Teorema Global de Homotopía para cerrados euclídeos

Intentaremos probar el teorema global de homotopía para cerrados $C \subset \mathbb{R}^k$, como se enunció en el teorema 8,10, el cual es un caso particular del teorema global de homotopía (teorema 8,6) aplicado a la función d_C.

Ya vimos (en la proposición 8,12) que la función d_C^2 es diferenciable en los puntos x donde la proyección sobre C es única, el cual provenía del teorema de diferenciabilidad 8,2 aplicado a la evolución de Lax-Oleinik $\hat{\xi}_C$ de la indicatriz modificada ξ_C para el lagrangiano L_0.

Recordamos que si $\#Proj_C(x) = 1$, denotamos c_x a la única proyección de x sobre C.

Proposición 8.18. *Si d_C^2 es diferenciable en $x \in \mathbb{R}^k$, entonces el gradiente de d_C^2 en x vale*

$$\nabla_x d_C^2 = 2(x - c_x)$$

Si la función d_C es diferenciable en $x \notin C$, entonces el gradiente de d_C en x vale

$$\nabla_x d_C = \frac{x - c_x}{||x - c_x||}$$

Demostración. Dado $v \in \mathbb{R}^k$ y $t > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} d_C^2(x + tv) \leq ||x + tv - c_x||^2 = ||x - c_x||^2 + 2 < x - c_x, tv > + ||tv||^2 = \\ = d_C^2(x) + 2t < x - c_x, v > + t^2||v||^2 \end{aligned}$$

Es decir que

$$d_C^2(x + tv) - d_C^2(x) \leq 2t < x - c_x, v > + t^2||v||^2$$

Dividiendo entre t y tomando $t \to 0$ obtenemos

$$< \nabla_x d_C^2, v > \leq 2 < x - c_x, v > \qquad \forall v \in \mathbb{R}^k$$

Es decir que

$$0 \leq < 2(x - c_x) - \nabla_x d_C^2, \ v > \qquad \forall v \in \mathbb{R}^k$$

Claramente tomando $v = -\big(2(x - c_x) - \nabla_x d_C^2\big)$ obtenemos

$$0 \leq -||2(x - c_x) - \nabla_x d_C^2||^2$$

Lo cual implica que

$$||2(x - c_x) - \nabla_x d_C^2||^2 = 0$$

y entonces

$$\nabla_x d_C^2 = 2(x - c_x) \tag{113}$$

Además por regla de la cadena sabemos que

$$\nabla_x d_c^2 = 2 d_C(x) \nabla_x d_C$$

y como $d_C(x) = ||x - c_x|| \neq 0$ para todo $x \notin C$, entonces despejando $\nabla_x d_C$ y usando la ecuación (113) obtenemos

$$\nabla_x d_C = \frac{x - c_x}{||x - c_x||}$$

□

Proposición 8.19. *La función $x \mapsto d_C^2(x) - ||x||^2$ es cóncava.*

En particular, la función d_C^2 se descompone como la suma de una función cóncava y una C^∞.

Demostración. Si $y \in \mathbb{R}^k$, entonces la función

$$x \mapsto ||x - y||^2 - ||x||^2 = -2 < y, x > +||y||^2$$

es afín en x.

Entonces

$$d_C^2(x) - ||x||^2 = \inf_{c \in C} ||x - c||^2 - ||x||^2$$

es cóncava (pues es ínfimo de funciones cóncavas).

Por lo tanto

$$d_C^2(x) = \big(d_C^2(x) - ||x||^2\big) + ||x||^2$$

es la suma de función cóncava y una función C^∞.

□

La existencia de la siguiente homotopía será fundamental para poder probar el teorema global de homotopías para conjuntos cerrados euclídeos.

Lema 8.20. ***(la homotopía F)*** *Existe una función continua $F : \mathbb{R}^k \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^k$ tal que*

1. *$F(y, 0) = y$ para todo $y \in \mathbb{R}^k$*
2. *$F(c, s) = c$ para todo $c \in C$, $s \geq 0$*
3. *$d_C(F(y, s)) \geq d_C(y)$ para todo $(y, s) \in \mathbb{R}^k \times (0, \infty)$. En particular, si $y \notin C$, entonces $F(y, s) \notin C$.*
4. *Si d_C^2 es diferenciable en $F(y, s)$ para algún $s > 0$, entonces $y \in [c_{F(y,s)}, F(y, s)]$, donde $c_{F(y,s)}$ es la única proyección de $F(y, s)$ sobre C. Además, para dicho (y, s) se cumple que $d_C\big(F(y, s)\big) = (1 + s)d_C(y)$.*

En particular $F(y,s) \in Sing(d_C^2) = Sing^*(d_C)$ *para todo* $y \in Sing(d_C^2) = Sing^*(d_C)$ *y todo* $s \geq 0$.

Demostración. Si $y \in \mathbb{R}^k$ y $s \in (0,\infty)$, definimos $\varphi_{y,s} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ como

$$\varphi_{y,s}(x) = d_C^2(x) - \frac{1+s}{s}||x-y||^2$$

Afirmación: La función $\varphi_{y,s}$ es estrictamente cóncava y $\varphi_{y,s}(x) \to -\infty$ cuando $||x|| \to \infty$.

Para ver que esta afirmación es cierta, observemos que

$$\varphi_{y,s}(x) = d_C^2(x) - ||x-y||^2 - \frac{1}{s}||x-y||^2 =$$
$$= d_C^2(x) - ||x||^2 + 2 < y, x > -||y||^2 - \frac{1}{s}||x-y||^2$$

Pero vimos que la función $x \mapsto d_C^2(x) - ||x||^2$ es cóncava (por la proposición 8,19), entonces tenemos que la función

$$\varphi_{y,s}(x) = \left(d_C^2(x) - ||x||^2 + 2 < y, x > -||y||^2\right) - \frac{1}{s}||x-y||^2$$

es la suma de una función cóncava (la cual en particular, está acotada por encima con una función afín) con $x \mapsto -\frac{1}{s}||x-y||^2$ que es estricamente cóncava y converge a $-\infty$ de manera cuadrática cuando $||x|| \to \infty$, y tenemos la afirmación.

Por lo tanto, si $y \in \mathbb{R}^k$ y $s \in (0,\infty)$, entonces la función $\varphi_{y,s}$ alcanza un máximo en un único punto, que llamaremos $F(y,s) \in \mathbb{R}^k$.

Claramente la función $\varphi_{y,s}(x) = d_C^2(x) - \frac{1+s}{s}||x-y||^2$ varía continuamente con $y \in \mathbb{R}^k$ y $s \in (0,\infty)$, y esto junto con la concavidad de $\varphi_{y,s}$ implica que el punto $F(y,s)$ donde se alcanza el máximo de $\varphi_{y,s}$ varía continuamente para $(y,s) \in \mathbb{R}^k \times (0,\infty)$.

Notar que $\varphi_{y,s}(y) = d_C^2(y)$, lo cual implica que el punto $F(y,s)$ debe verificar

$$d_C^2\big(F(y,s)\big) - \frac{1+s}{s}||F(y,s) - y||^2 = \varphi_{y,s}\big(F(y,s)\big) \geq \varphi_{y,s}(y) = d_C^2(y)$$

Reordenando, deducimos que

$$d_C^2\big(F(y,s)\big) \geq d_C^2(y) + \frac{1+s}{s}||F(y,s) - y||^2 \tag{114}$$

que en particular implica por transitiva que

$$d_C^2\big(F(y,s)\big) \geq d_C^2(y) \tag{115}$$

Más aún, podemos ver por desigualdad triangular que

$$d_C\big(F(y,s)\big) \leq d_C(y) + ||F(y,s) - y||$$

lo cual, juntándolo con la ecuación (114), obtenemos

$$\big(d_C(y) + ||F(y,s) - y||\big)^2 \geq d_C^2\big(F(y,s)\big) \geq d_C^2(y) + \frac{1+s}{s}||F(y,s) - y||^2$$

es decir que

$$\big(d_C(y) + ||F(y,s) - y||\big)^2 \geq d_C^2(y) + \frac{1+s}{s}||F(y,s) - y||^2$$

Desarrollando el cuadrado del lado izquierdo y cancelando los $d_C(y)^2$ y $||F(y,s)-y||^2$ de ambos lados, obtenemos que

$$2||F(y,s) - y||d_C(y) \geq \frac{1}{s}||F(y,s) - y||^2$$

Cancelando un $||F(y,s) - y||$ y multiplicando por $s > 0$ obtenemos

$$||F(y,s) - y|| \leq 2s.d_C(y) \tag{116}$$

Las ecuaciones (115) y (116) dadas por

$$\begin{cases} d_C\big(F(y,s)\big) \geq d_C(y) \\ ||F(y,s) - y|| \leq 2s.d_C(y) \end{cases}$$

y la continuidad de F en $\mathbb{R}^k \times (0,\infty)$, nos permiten extender F a un mapa continuo $F : \mathbb{R}^k \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^k$ tal que cumple los primeros 3 puntos que queríamos probar del lema, es decir

1. $F(y,0) = y$ para todo $y \in \mathbb{R}^k$
2. $F(c,s) = c$ para todo $c \in C$, $s \geq 0$
3. $d_C(F(y,s)) \geq d_C(y)$ para todo $(y,s) \in \mathbb{R}^k \times (0,\infty)$. En particular, si $y \notin C$, entonces $F(y,s) \notin C$.

Queda probar que F cumple el último punto del lema.

Para eso, distingamos dos casos

- Si $s = 0$, entonces $F(y,0) = y$ para todo $y \in \mathbb{R}^k$, y el punto 4 del lema es inmediato.

- Si $s > 0$, tomemos $(y, s) \in \mathbb{R}^k \times (0, \infty)$, y consideremos el punto $F(y, s) \in \mathbb{R}^k$ donde se maximiza la función

$$\varphi_{y,s}(x) = d_C^2(x) - \frac{1+s}{s}||x - y||^2$$

Como el mapa $x \mapsto ||x - y||^2$ es C^∞, tenemos que si d_C^2 es diferenciable en $F(y, s)$, entonces también lo es $\varphi_{y,s}$. Pero como $\varphi_{y,s}$ se maximiza en $F(y, s)$, tendremos entonces que

$$\nabla_{F(y,s)}\, \varphi_{y,s} = 0$$

es decir que

$$\big(\nabla_{F(y,s)}\, d_C^2\big)\ - 2\frac{1+s}{s}\big(F(y, s) - y\big) = 0$$

Usando que por la proposición 8,18 que $\nabla_{F(y,s)} d_C^2 = 2\big(F(y, s) - c_F(y, s)\big)$ (donde $c_{F(y,s)}$ es la única proyección de $F(y, s)$ sobre C), entonces la ecuación anterior queda

$$F(y, s) - c_{F(y,s)} - \frac{1+s}{s}\big(F(y, s) - y\big) = 0$$

o equivalentemente

$$y = \frac{1}{1+s}F(y, s) + \frac{s}{1+s}.c_{F(y,s)}$$

De esta igualdad y de que $\frac{1}{1+s} + \frac{s}{1+s} = 1$, concluímos que

$$y \in [c_{F(y,s)}, F(y, s)]$$

En particular (por el teorema de diferenciabilidad para cerrados 8,8), esto implica que d_C^2 sea diferenciable en y y que $c_y = c_{F(y,s)}$ es la única proyección de y sobre C.

Entonces

$$\begin{aligned} d_C(y) = ||y - c_{F(y,s)}|| = \left|\left|\frac{1}{1+s}F(y, s) + \frac{s}{1+s}.c_{F(y,s)} - c_{F(y,s)}\right|\right| &= \\ = \left|\left|\frac{1}{1+s}F(y, s) - \frac{1}{1+s}.c_{F(y,s)}\right|\right| &= \\ = \frac{1}{1+s}||F(y, s) - c_{F(y,s)}|| &= \\ = \frac{1}{1+s}d_C\big(F(y, s)\big) \end{aligned}$$

Es decir que $d_C\big(F(y, s)\big) = (1 + s)d_C(y)$.

Observar entonces que como vimos que si d_C^2 es diferenciable en $F(y,s)$ para un cierto $(y,s) \in \big(\mathbb{R}^k \setminus C\big) \times (0,\infty)$ implica que $y \in [c_{F(y,s)}, F(y,s)]$ y $d_C\big(F(y,s)\big) = (1+s)d_C(y) > d_C(y)$, y como el segmento $[c_{F(y,s)}, F(y,s)]$ realiza la distancia entre $F(y,s)$ y C, entonces por el segundo punto de teorema 8,8 tendremos que d_C es diferenciable en y.

Por contrarecíproco, si $y \in Sing(d_C^2)$, entonces $F(y,s) \in Sing(d_C^2)$ para todo $s \geq 0$.

□

Para probar el teorema global de homotopía para cerrados 8,10 el cual decía que la inclusión $Sing^*(d_C) = Sing(d_C^2) \subset \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$ es una equivalencia de homotopía, necesitaremos el siguiente lema

Lema 8.21. ***(más propiedades de*** F***)***

1. *La homotopía* F *mapea* $\big(\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)\big) \times [0,\infty)$ *sobre* $\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$.
2. *Si* $K \subset \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$ *es un compacto, entonces existe* $s_K \geq 0$ *tal que* $F(y,s) \in Sing(d_C^2)$ *para todo* $y \in K$, $s \geq s_K$.

Demostración. Recordemos que d_C^2 es diferenciable en todos los puntos del Aubry proyectado $\mathcal{A}(C)$.

Para probar el primer punto de este lema, supongamos por absurdo que tenemos $(y,s) \in \big(\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)\big) \times [0,\infty)$ tal que $F(y,s) \in \mathcal{A}(C)$.

En particular $F(y,s)$ debe tener una única proyección $c_{F(y,s)}$ sobre C y $[c_{F(y,s)}, F(y,s)] \subset \mathcal{A}(C)$.

Como d_C^2 es diferenciable en $F(y,s) \in \mathcal{A}(C)$, entonces por el cuarto punto del lema 8,20, tenemos que $y \in [c_{F(y,s)}, F(y,s)] \subset \mathcal{A}(C)$, lo que contradice que $y \notin \mathcal{A}(C)$.

Para probar el segundo punto de este lema, consideremos un compacto $K \subset \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$, y supongamos (por absurdo) que existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ y una sucesión $s_n \to +\infty$ (que podemos asumir creciente) tal que $F(y_n,s_n) \notin Sing(d_C^2)$.

Como $F(y_n,s_n) \notin Sing(d_C^2)$, tendremos entonces por el cuarto punto del lema 8,20 que

1. $F(y_n,s_n)$ tiene proyección única $c_{F(y_n,s_n)}$ sobre C.
2. $y_n \in [c_{F(y_n,s_n)}, F(y_n,s_n)]$
3. $||F(y_n,s_n) - c_{F(y_n,s_n)}|| = d_C\big(F(y_n,s_n)\big) = (1+s_n)d_C(y_n)$, es decir que la longitud del segmento $[c_{F(y_n,s_n)}, F(y_n,s_n)]$ es $(1+s_n)d_C(y_n)$.
4. $d_C(z) = ||z - c_{F(y_n,s_n)}||$ para todo $z \in [c_{F(y_n,s_n)}, F(y_n,s_n)]$

Como K es un compacto disjunto de $\mathcal{A}(C) \supset C$, tenemos que

$$0 < \inf_K d_C \leq \sup_K d_C < \infty$$

Como $y_n \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$0 < \inf_K d_C \leq ||y_n - c_{F(y_n,s_n)}|| = d_C(y_n) \leq \sup_K d_C < \infty \tag{117}$$

Como $y_n \in K$ para todo n (que en particular, la sucesión y_n acotada), concluímos entonces por la cadena de desigualdades anteriores que $c_{F(y_n,s_n)}$ también está acotada.

Podemos suponer (tomando una subsucesión si es necesario) que $y_n \to y$ para algún $y \in K$, y que $c_{F(y_n,s_n)} \to c \in C$.

Tomando límite $n \to \infty$ en la cadena de desigualdades (117) obtenemos

$$0 < \inf_K d_C \leq ||y - c|| = d_C(y) \leq \sup_K d_C < \infty$$

Si consideramos las semirrectas L_n que parten del punto $c_{F(y_n,s_n)}$ y pasan por el punto y_n, y consideramos la semirrecta L que parte de c y pasa por y, tendremos entonces (como $c_{F(y_n,s_n)} \to c$ y $y_n \to y$) que las semirrectas L_n se 'acercan' a la semirrecta L.

Como la longitud del segmento $[c_{F(y_n,s_n)}, F(y_n, s_n)]$ (el cual contiene a y_n) era

$$||F(y_n, s_n) - c_{F(y_n,s_n)}|| = d_C\big(F(y_n, s_n)\big) = (1 + s_n)d_C(y_n) \geq (1 + s_n) \inf_K d_C \to +\infty$$

tenemos que cualquier punto z de la semirrecta L que parte de c y pasa por y, se puede escribir como límite de una sucesión $z_n \in [c_{F(y_n,s_n)}, F(y_n, s_n)]$.

Pero entonces $d_C(z_n) = ||z_n - c_{F(y_n,s_n)}||$, que tomándo límite en n queda $d_C(z) = ||z - c||$ para todo $z \in L$.

Como $d_C(z) = ||z - c||$ para todo $z \in L$, implica entonces que $L \subset \mathcal{A}(C)$. Pero esto es absurdo, pues $y \in L \subset \mathcal{A}(C)$, y $y \in K \subset \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$.

$\square$

Probaremos ahora el teorema global de homotopías para conjuntos cerrados euclídeos (teorema 8,10) el cual volveremos a enunciar

Teorema 8.22. *Sea $C \subset \mathbb{R}^k$ un cerrado. La inlusión $Sing(d_C^2) = Sing^*(d_C) \subset \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$ es una equivalencia de homotopía.*

Demostración. Por la primer parte del lema 8,21, tenemos que el mapa F mapea $\big(\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)\big) \times [0, \infty)$ sobre $\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$.

Construiremos ahora una función continua $\alpha : \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C) \to [0, \infty)$ tal que

$$F\big(y, \alpha(y)\big) \in Sing(d_C^2) \quad \forall y \in \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$$

Para eso, elijamos un cubrimiento por abiertos $(O_i)_{i \in I}$ de $\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$, tal que $\overline{O}_i \subset \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$ son compactos para todo $i \in I$.

Por el segundo punto del lema 8,21, tenemos que para cada $i \in I$ podemos encontrar un $s_i \in [0, \infty)$ tal que

$$F(y, s) \in Sing(d_C^2) \quad \forall y \in \overline{O}_i, \ \forall s \geq s_i \tag{118}$$

Tomemos una partición de la unidad localmente finita $(\varphi_i)_{i \in I}$ subordinada al cubrimiento por abiertos $(O_i)_{i \in I}$.

Definimos la función continua $\alpha : \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C) \to [0, \infty)$ tal que

$$\alpha(y) = \sum_{i \in I} s_i \varphi_i(y)$$

Veamos que $F\big(y, \alpha(y)\big) \in Sing(d_C^2)$ para todo $y \in \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$.

Para eso, tomemos $y \in \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$. Como $(\varphi_i)_{i \in I}$ es una partición de la unidad localmente finita, tenemos entonces que el subconjunto de índices

$$I(y) = \{i \in I : \varphi_i(y) > 0\}$$

es finito.

Podemos escribir entonces $\alpha(y) = \sum_{i \in I(y)} s_i \varphi_i(y)$.

Como $I(y)$ es un conjunto finito, existirá $i_0 \in I(y)$ tal que $s_{i_0} = \min_{i \in I(y)} s_i$.

Entonces

$$\alpha(y) = \sum_{i \in I(y)} s_i \varphi_i(y) \geq s_{i_0} \tag{119}$$

Como $y \in O_{i_0}$ (pues $i_0 \in I(y)$), como los s_i los habíamos elegido tales que cumplan la expresión (118), tendremos entonces que

$$F\big(y, s\big) \in Sing(d_C^2) \quad \forall s \geq s_{i_0}$$

Tomando $s = \alpha(y)$, como vimos en la ecuación (119) que $\alpha(y) \geq s_{i_0}$, entonces concluímos

$$F\big(y, \alpha(y)\big) \in Sing(d_C^2)$$

Definamos ahora la homotopía $G : \big(\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)\big) \times [0,1] \to \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$ tal que

$$G(y,s) = F\big(y,\ s\alpha(y)\big)$$

Tenemos que

$$\begin{cases} G(y,0) = y \\ G(y,1) = F\big(y, \alpha(y)\big) \in Sing(d_C^2) \end{cases}$$

Entonces consideremos $G_1 : \big(\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)\big) \to Sing(d_C^2)$ dado por la restricción de G a $s = 1$, es decir

$$G_1(y) = G(y,1) \quad \forall y \in \big(\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)\big)$$

El mapa $G_1 : \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C) \to Sing(d_C^2)$ es la homotopía inversa de la inclusión $i : Sing(d_C^2) \hookrightarrow \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$ (es decir, G_1 es la función g de la definicion 8,6, siendo $f = i$ la inclusión).

De hecho, $G : \big(\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)\big) \times [0,1] \to \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$ es una homotopía entre la identidad $i_{\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)} : \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C) \to \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$ y la función $i \circ G_1 : \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C) \to \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}(C)$.

El mapa $G_1 \circ i : Sing(d_C^2) \to Sing(d_C^2)$ es homotópico a la identidad $i_{Sing(d_C^2)} : Sing(d_C^2) \to Sing(d_C^2)$, ya que dado $y \in Sing(d_C^2)$, tenemos que $G(y,s) = F\big(y, s\alpha(y)\big) \in Sing(d_C^2)$ (debido al cuarto punto del lema 8,20 donde se definió F). Es decir que la restricción de G a $Sing(d_C^2)$ es una homotopía entre la identidad $i_{Sing(d_C^2)} : Sing(d_C^2) \to Sing(d_C^2)$ y $G_1 \circ i : Sing(d_C^2) \to Sing(d_C^2)$.

$\square$

8.8. Contractibilidad local de las singularidades

Para probar que $Sing(d_C^2) = Sing^*(d_C)$ es localmente contractible (teorema 8,13), requeriremos el siguiente lema (que se prueba de forma similar al segundo punto del lema 8,21).

Lema 8.23. *Para todo $y^* \in Sing(d_C^2)$ y cualquier $s^* > 0$, existe un entorno V de y^* tal que $F(y,s^*) \in Sing(d_C^2)$ para todo $y \in V$*

Demostración. Como $Sing(d_C^2) \cap C = \emptyset$ y $y^* \in Sing(d_C^2)$, sabemos que $y^* \notin C$.

Tomemos entonces un compacto K tal que

$$\begin{cases} K \cap C = \emptyset \\ y^* \in \mathring{K} \end{cases} \tag{120}$$

Supongamos por absurdo que tenemos una sucesión $y_n \to y^*$, tal que $F(y_n, s^*) \notin Sing(d_C^2)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Podemos suponder sin pérdida de generalidad que $y_n \in \mathring{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $F(y_n, s^*) \notin Sing(d_C^2)$, tendremos entonces por el cuarto punto del lema 8,20, que

1. $F(y_n, s^*)$ tiene proyección única $c_{F(y_n,s^*)}$ sobre C.
2. $y_n \in [c_{F(y_n,s^*)}, F(y_n, s^*)]$
3. $||F(y_n, s^*) - c_{F(y_n,s^*)}|| = d_C\big(F(y_n, s^*)\big) = (1+s^*)d_C(y_n)$, es decir que la longitud del segmento $[c_{F(y_n,s^*)}, F(y_n, s^*)]$ es $(1 + s^*)d_C(y_n)$.
4. $d_C(z) = ||z - c_{F(y_n,s^*)}||$ para todo $z \in [c_{F(y_n,s^*)}, F(y_n, s^*)]$

Como K es un compacto disjunto de C, tenemos que

$$0 < \inf_K d_C \leq ||y_n - c_{F(y_n,s^*)}|| = d_C(y_n) = \sup_K d_C < \infty$$

Como $y_n \in K$ para todo n (en particular y_n es una sucesión acotada), concluímos que la sucesión $c_{F(y_n,s^*)}$ es una sucesión acotada.

A menos de remover una cantidad finita de elementos de la sucesión $c_{F(y_n,s^*)}$, podemos suponer que existe $c \in C$ tal que $c_{F(y_n,s^*)} \to c \in C$.

Es decir que $y_n \to y^* \in Sing(d_C^2)$ y $c_{F(y_n,s^*)} \to c \in C$.

Entonces consideremos los segmentos $[c_{F(y_n,s^*)}, F(y_n, s^*)]$ (que contiene a y_n) y el segmento $[c, F(y^*, s^*)]$.

Como la longitud del segmento $L_n = [c_{F(y_n,s^*)}, F(y_n, s^*)]$ es

$$||F(y_n, s^*) - c_{F(y_n,s^*)}|| = d_C\big(F(y_n, s^*)\big) = (1 + s^*)d_C(y_n)$$

Tenemos tomando límite en n y usando la continuidad de F que

$$||F\big(y^*, s^*\big) - c|| = d_C\big(F(y^*, s^*)\big) = (1 + s^*)d_C(y^*) > d_C(y^*) > 0$$

Claramente además, como $y_n \in [c_{F(y_n,s^*)}, F(y_n, s^*)]$, tendremos por continuidad que $y^* \in [c, F(y^*, s^*)]$. Es decir que tenemos

$$\begin{cases} y^* \in [c, F(y^*, s^*)] \\ 0 < d_C(y^*) < d_C\big(F(y^*, s^*)\big) = ||F(y^*, s^*) - c|| \end{cases} \tag{121}$$

Por lo tanto, como el segmento $[c, F(y^*, s^*)]$ realiza la distancia entre $F(y^*, s^*)$ y C, tendremos por el punto 2 del teorema 8,8 que d_C es diferenciable en todos los puntos del segmento (sin extremos) $\big(c, F(y^*, s^*)\big)$.

Como $y^* \in (c, F(y^*, s^*))$ (debido a las ecuaciones (121)), concluímos entonces que d_C es diferenciable en y^*.

Esto es absurdo, pues partíamos por hipótesis que $y^* \in Sing(d_C^2)$.

$\square$

Ahora enunciaremos (nuevamente) y probaremos el teorema local de contractibilidad (teorema 8,13)

Teorema 8.24. *Si $C \subset \mathbb{R}^k$ es un cerrado, entonces el conjunto $Sing(d_C^2) = Sing^*(d_C)$ es localmente contractible.*

Demostración. Sea $y_0 \in Sing(d_C^2) \subset \mathbb{R}^k$, y U entorno de y_0.

Como $F(y_0, 0) = y_0$ y F es continua, existe W entorno de y_0 y $s_0 > 0$ tal que

$$F\big(W \times [0, s_0]\big) \subset U$$

Por el lema 8,23, existe un entorno V de y_0 tal que $F(y, s_0) \in Sing(d_C^2)$ para todo $y \in V$.

Consideremos una bola euclídea $B(y_0, \epsilon) \subset V \cap W$, y definamos una homotopía $G : B(y_0, \epsilon) \times [0, 1] \to U$ dada por

$$G(y,t) = \begin{cases} F\big(y, 2ts_0\big) & \forall t \in [0, 1/2] \\ F\big((2-2t)y + (2t-1)y_0, s_0\big) & \forall t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

La homotopía G contrae la bola $B(y_0, \epsilon)$ a un punto en U, con

$$G\big[\big(B(y_0, \epsilon) \cap Sing(d_C^2) \times [0,1]\big] \subset U \cap Sing(d_C^2)$$

Para ver eso, observemos si $y \in B(y_0, \epsilon) \subset V \cap W$, entonces

$$(2-2t)y + (2t-1)y_0 \in [y_0, y] \subset B(y_0, \epsilon) \subset V \cap W \quad \forall t \in [1/2, 1]$$

entonces

$$\begin{cases} G(y,t) = F\big((2-2t)y + (2t-1)y_0, s_0\big) \subset F\big(W \times [0, s_0]\big) \subset U & \forall t \in [1/2, 1] \\ G(y,t) = F\big((2-2t)y + (2t-1)y_0, s_0\big) \subset F\big(V \times \{s_0\}\big) \subset Sing(d_C^2) & \forall t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Es decir que $G(y,t) \in U \cap Sing(d_C^2)$ para todo $(y,t) \in B(y_0, \epsilon) \times [1/2, 1]$.

Por lo tanto, si $y \in B(y_0, \epsilon)$ deducimos que

$$\begin{cases} G(y,0) = F(y,0) = y \in B(y_0,\epsilon) \\ G(y,t) = F(y, 2ts_0) \subset F\big(W \times [0,s_0]\big) \subset U \quad \forall t \in [0,1/2] \\ G(y,t) = F\big((2-2t)y + (2t-1)y_0, s_0\big) \subset F\big(V \cap W \times \{s_0\}\big) \subset Sing(d_C^2) \cap U \quad \forall t \in [1/2,1] \\ G(y,1) = F\big(y_0, s_0\big) \end{cases}$$

Por lo tanto, G contrae la bola $B(y_0,\epsilon)$ continuamente al punto en $F(y_0,s_0) \in U \cap Sing(d_C^2)$.

Resta ver que si $y \in B(y_0,\epsilon) \cap Sing(d_C^2)$, entonces $G(y,t) \in U \cap Sing(d_C^2)$ para todo $t \in [0,1]$.

Vimos que $G(y,t) = F(y,2ts_0) \subset F\big(W \times [0,s_0] \subset U$ para todo $t \in [0,1/2]$, y que $G(y,t) \in U \cap Sing(d_C^2)$ para todo $(y,t) \in B(y_0,\epsilon) \times [1/2,1]$, por lo que basta estudiar si $G(y,t) \in Sing(d_C^2)$ en el caso que $(y,t) \in \big(B(y_0,\epsilon) \cap Sing(d_C^2)\big) \times [0,1/2]$

Por el punto 4 del lema 8,20, tenemos que $F(y,s) \in Sing(d_C^2)$ para todo $y \in Sing(d_C^2)$ y $s \geq 0$, lo que implica que

$$G(y,t) = F(y,2ts_0) \in Sing(d_C^2) \quad \forall (y,t) \in \big(B(y_0,\epsilon) \cap Sing(d_C^2)\big) \times [0,1/2]$$

Por lo que $G(y,t) \in Sing(d_C^2) \cap U$ para todo $(y,t) \in B(y_0,\epsilon) \times [0,1]$.

$\square$

Referencias

[1] Albert Fathi,
«Viscosity solutions of the Hamilton-Jacobi equation on a non-compact manifold» **2020**.

[2] Albert Fathi,
«Weak KAM from a PDE point of view: viscosity solutions of the Hamilton–Jacobi equation and Aubry set»
Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, **2012**.

[3] Albert Fathi,
«Weak KAM Theory in Lagragian Dynamics»
Cambridge Univ Pr, **2018**.

[4] Lawrence C. Evans,
«Partial Differential Equations: Second Edition»
American Mathematical Society, **2010**.

[5] Guy Barles,
«Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi»
Springer-Verlag, **1994**.

[6] Michael G. Crandall & Pierre-Louis Lions ,
«Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations»
Trans. Amer. Math. Soc., **1983**.

[7] Michael G. Crandall, Hitoshi Ishii & Pierre-Louis Lions,
«user's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations»
Bull. Amer. Math. Soc., **1992**.

[8] Barles G.,
«An Introduction to the Theory of Viscosity Solutions for First-Order Hamilton–Jacobi Equations and Applications»
Springer, Berlin, Heidelberg, **2013**.

[9] Hitoshi Ishii,
«On uniqueness and existence of viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic PDE's»
Communications on Pure and Applied Mathematics, **1989**.

[10] Lawrence C. Evans,
«On solving certain nonlinear partial differential equations by accretive operator

methods»
Israel Journal of Mathematics, **1980**.

[11] M. G. Crandall, L. C. Evans & P.-L. Lions ,
«Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations»
Trans. Amer. Math. Soc. , **1984**.

[12] Gabriel P. Paternain, Leonid Polterovich & Karl Friedrich Siburg,
«Boundary rigidity for Lagrangian submanifolds, non–removable intersections, and Aubry–Mather theory.»
2018.

[13] Helmut Hofer & Eduard Zehnder,
«Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics»
Birkhauser, **2011**.

[14] Elliott H. Lieb & Michael Loss,
«Analysis: Second Edition »
American Mathematical Society, **2001**.