Trabajo Monográfico

# Sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch equivariante

Santiago Arambillete

*Orientadora:*

Eugenia Ellis

(IMERL, Facultad de Ingeniería)

Licenciatura en Matemática
Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

16 de junio de 2021

**Resumen**

En este trabajo exponemos y demostramos la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch equivariante, que es una generalización de la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch al contexto de los $G$-espacios, dado un grupo $G$. Esta sucesión permite calcular grupos de homología para una $G$-teoría de homología arbitraria. Primero probamos una versión de la sucesión para $\mathcal{C}$-espacios, donde $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña. La versión para $G$-espacios se deduce de ésta tomando $\mathcal{C} = \operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$, donde $\operatorname{Or} G$ es la categoría de órbitas de $G$. Luego mostramos un ejemplo de cálculo usando esta sucesión espectral.

# Índice

# Introducción

Las teorías de homología son una herramienta fundamental en la topología algebraica. En una teoría de homología se le asigna a un espacio topológico $X$ una sucesión de grupos abelianos $(h_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$, y a una función continua $f : X \to Y$ se le asigna una sucesión de morfismos $(f_n : h_n(X) \to h_n(Y))_{n\in\mathbb{Z}}$. Esta herramienta nos permite estudiar la topología de los espacios estudiando estos grupos y morfismos.

Un ejemplo de una teoría de homología es la *homología singular*, que se define de la siguiente manera. Para $n \in \mathbb{N}$, se define el *$n$-símplice* $\Delta^n$ como el espacio topológico

$$\Delta^n = \left\{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \textstyle\sum_i t_i = 1 \text{ y } t_i \geq 0 \text{ para todo } i\right\},$$

es decir, un "triángulo" de dimensión $n$. Dado un espacio topológico $X$, se define $C_n(X)$ como el grupo abeliano libre generado por el conjunto de funciones continuas

$$\sigma : \Delta^n \to X\,.$$

Se definen los *morfismos de borde* $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ para cada $n \geq 1$. Estos le asignan a cada $\sigma : \Delta^n \to X$ una suma formal de funciones $\sigma_i : \Delta^{n-1} \to X$ que representa el *borde* de $\sigma$. Los grupos $C_n(X)$ junto con los morfismos $\partial_n$ forman un *complejo de cadenas* $C_*(X)$:

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

Un complejo de cadenas es una sucesión de esta forma tal que $\partial_{n+1} \circ \partial_n = 0$ para todo $n \geq 0$, es decir que $\operatorname{im}\partial_{n+1} \subseteq \ker\partial_n$. La *homología* de este complejo de cadenas se define como

$$H_n(C_*(X)) = \frac{\ker\partial_n}{\operatorname{im}\partial_{n+1}}\,.$$

Luego los grupos de homología singular de $X$ se definen como

$$H_n(X) = H_n(C_*(X))$$

para todo $n \geq 0$.

En general, $H_n(X)$ es un cociente de dos grupos muy grandes, pero $H_n(X)$ puede ser relativamente simple. Por ejemplo, para la $n$-esfera $S^n$, se cumple que $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, $H_0(S^n) \cong \mathbb{Z}$, pero $H_k(S^n) = 0$ si $0 < k \neq n$. Una clase de espacios para la cual es relativamente fácil calcular los grupos de homología singular es la de los *CW-complejos*. Estos son espacios que se pueden construir inductivamente pegando discos $D^n$ de dimensión $n$, llamados *$n$-celdas*. Ejemplos de CW-complejos son las esferas, los grafos y todas las variedades diferenciables. Para estos espacios tenemos una forma alternativa de cálculo de la homología:

**Teorema 0.1.** (Homología celular [Hat02, 2.35]). Sea $X$ un CW-complejo. Para $n \geq 0$, sea $I_n$ el conjunto de $n$-celdas de $X$. Existe un complejo de cadenas

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{i\in I_{n+1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_{n+1}} \bigoplus_{i\in I_n} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_n} \bigoplus_{i\in I_{n-1}} \mathbb{Z} \longrightarrow \cdots,$$

tal que $H_n(X) \cong \ker d_n \,/\, \operatorname{im} d_{n+1}$ para todo $n \geq 0$.

Los morfismos $d_n$ se calculan a partir de las funciones de pegado de las $n$-celdas de $X$, que describen cómo se pega cada $n$-celda al resto del espacio. Notar que este teorema nos permite calcular los grupos de homología singular a partir de un nuevo complejo de cadenas, cuyos grupos son mucho más pequeños.

Los grupos $H_n(X;G)$ de *homología con coeficientes* en un grupo abeliano $G$ son una generalización de los grupos de homología singular. Se definen de la misma forma que estos, excepto que se utilizan los grupos $C_n(X;G) = C_n(X) \otimes G$ para definir el complejo de cadenas. Tenemos un teorema similar al anterior [ver Hat02, pág. 153]:

**Teorema 0.2.** Sea $X$ un CW-complejo. Para $n \geq 0$, sea $I_n$ el conjunto de $n$-celdas de $X$. Existe un complejo de cadenas

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{i \in I_{n+1}} G \xrightarrow{d_{n+1}} \bigoplus_{i \in I_n} G \xrightarrow{d_n} \bigoplus_{i \in I_{n-1}} G \longrightarrow \cdots,$$

tal que $H_n(X;G) \cong \ker d_n \,/\, \operatorname{im} d_{n+1}$ para todo $n \geq 0$. Notar que $H_n(X) \cong H_n(X;\mathbb{Z})$.

La homología singular y la homología con coeficientes en $G$ cumplen unos ciertos axiomas, y desde estos axiomas se pueden probar muchas propiedades sin tener que recurrir a las definiciones. Se define una *teoría de homología (generalizada)* como cualquier sucesión de funtores $(h_n : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ab})_{n \in \mathbb{Z}}$ que cumplan estos axiomas, donde Top es la categoría de espacios topológicos y Ab es la categoría de grupos abelianos.

Una propiedad que cumple la homología con coeficientes en $G$ (y por lo tanto también la homología singular) es que, si $pt$ es el espacio con un solo punto, entonces $H_n(pt;G) = 0$ para $n \neq 0$ (mientras que $H_0(pt;G) \cong G$). Las teorías de homología en general no tienen por qué cumplir esto. De hecho, se cumple lo siguiente [ver Hat02, 4.59]:

**Teorema 0.3.** Sea $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ una teoría de homología tal que $h_n(pt) = 0$ para todo $n \neq 0$. Si $X$ es un CW-complejo, entonces

$$h_n(X) \cong H_n(X; h_0(pt))$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Si combinamos el Teorema 0.3 con el Teorema 0.2 observamos que, dada $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que $h_n(pt) = 0$ para todo $n \neq 0$, podemos calcular los grupos de homología $h_n(X)$ usando un complejo de cadenas celular. Nos podemos preguntar si existirá un resultado similar para las teorías de homología en general, con $h_n(pt)$ no necesariamente trivial para $n \neq 0$.

La respuesta es *sí*, pero no es tan fácil como tomarle la homología a un complejo de cadenas. Hay que usar una herramienta llamada *sucesión espectral*. Estas son como los complejos de cadenas, pero en tres dimensiones. Una sucesión espectral consiste en

- Una familia de grupos abelianos $E^r_{pq}$ para $p, q \in \mathbb{Z}$ y $r \geq 1$.
- Una familia de morfismos $d^r_{pq} : E^r_{pq} \to E^r_{p-r,\, q+r-1}$ para todo $p, q, r$, tales que $d^r_{pq} \circ d^r_{p+q,\, q-r+1} = 0$.
- Isomorfismos $E^{r+1}_{pq} \cong \ker d^r_{pq} \,/\, \operatorname{im} d^r_{p+r,\, q-r+1}$ para todo $p, q, r$.

Es decir, dado un $r$ fijo, la *$r$-ésima página* $(E^r_{pq})_{p,q}$ está compuesta por infinitos complejos de cadenas, cuyos morfismos van en diagonal, con la pendiente dependiendo de $r$, y la $(r+1)$-ésima página se obtiene tomando la homología de la $r$-ésima página. Se dice que una sucesión espectral *converge a* una sucesión de grupos abelianos $(G_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ si existe una familia de subgrupos $F_pG_n \subseteq G_n$ tales que

$$\cdots \subseteq F_{p-1}G_n \subseteq F_pG_n \subseteq F_{p+1}G_n \subseteq \cdots \subseteq G_n = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} F_pG_n$$

(llamada *filtración*) para todo $n$, y tal que

$$\operatorname*{colím}_{r\to\infty} E^r_{pq} \cong \frac{F_pG_{p+q}}{F_{p-1}G_{p+q}}$$

para todo $p, q$.

Lo que podemos probar sobre las teorías de homología en general es que hay una sucesión espectral que converge los grupos de homología $(h_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$:

**Teorema 0.4.** (Sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch [Swi02, 15.7]). Sea $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una teoría de homología. Sea $X$ un CW-complejo. Existe una sucesión espectral cuya segunda página está dada por

$$E^2_{pq} \cong H_p(X; h_q(pt)) \,,$$

y que converge a $(h_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$.

Se puede notar la semejanza con el Teorema 0.3. La diferencia es que en este caso usamos la información de *todos* los grupos $h_q(pt)$, $q \in \mathbb{Z}$, mientras que en el caso anterior estos eran todos triviales menos uno, y el cálculo se vuelve bastante más complicado. De hecho se puede probar que el Teorema 0.3 es el caso particular del Teorema 0.4 en el que $h_n(pt) = 0$ para todo $n \neq 0$.

Estos resultados pueden ser generalizados al contexto de los *$G$-espacios.* Dado un grupo $G$, un *$G$-espacio* es un espacio topológico equipado con una acción continua de $G$. Los *$G$-CW-complejos* se definen como los CW-complejos, excepto que las celdas, en lugar de ser isomorfas a $D^n$, son de la forma $G\,/\,H_i \times D^n$ para algún subgrupo $H_i \leq G$. Las *$G$-teorías de homología* le asignan una sucesión de grupos abelianos a cada $G$-espacio, y se definen a partir de axiomas que son versiones *equivariantes* (es decir, que respetan la acción de $G$) de los axiomas que cumplen las teorías de homología.

Un objeto de estudio conveniente en este contexto es la *categorías de órbitas* $\operatorname{Or} G$, formada por los espacios $G/H$, que representan las posibles órbitas de una acción de $G$, y los morfismos $G\,/\,H \to G\,/\,K$ que preservan la acción de $G$. Sea $M$ un funtor covariante $\operatorname{Or} G \to \mathrm{Ab}$. La *homología de Bredon con coeficientes en $M$* es una $G$-teoría de homología que se puede pensar como la generalización de la homología con coeficientes en un grupo. Fue introducida por Glen Bredon, junto con la categoría $\operatorname{Or} G$, en [Bre67].

El objetivo principal de esta monografía es exponer y probar el siguiente teorema, que es una versión equivariante del Teorema 0.4:

**Teorema 0.5.** (Sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch equivariante [Lüc20, 10.44]). Sea $(\mathcal{H}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una $G$-teoría de homología. Sea $X$ un $G$-CW-complejo. Existe una sucesión espectral cuya segunda página está dada por

$$E^2_{pq} \cong H^G_p(X; \mathcal{H}_q(-)) \,,$$

y que converge a $(\mathcal{H}_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$. Aquí $\mathcal{H}_q(-)$ es el funtor que lleva $G / H$ a $\mathcal{H}_q(G / H)$, y $H_p^G(X;\mathcal{H}_q(-))$ es la homología de Bredon con coeficientes en $\mathcal{H}_q(-)$ de $X$.

Se puede ver que aquí $\mathcal{H}_q(-)$ juega el rol que jugaba $h_q(pt)$ en el Teorema 0.4, y la homología de Bredon el de la homología con coeficientes.

Cada $G$-espacio $X$ define un funtor contravariante $\operatorname{Or} G \to \mathrm{Top}$ dado por $G / H \mapsto X^H$, donde $X^H$ es el espacio de los puntos de $X$ que quedan fijos por la acción de $H$. Este hecho nos lleva a estudiar más en general los funtores $\mathcal{C} \to \mathrm{Top}$, para cualquier categoría pequeña $\mathcal{C}$. Estos se llaman *$\mathcal{C}$-espacios*. Se pueden definir también los *$\mathcal{C}$-CW-complejos libres* de una forma similar a los $G$-CW-complejos, así como teorías de homología para $\mathcal{C}$-espacios.

Resulta que hay una equivalencia entre la categoría de los $G$-CW-complejos y la categoría de los $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-CW-complejos libres, donde el $^{\mathrm{op}}$ indica que estos últimos son funtores contravariantes. Es usando esta equivalencia que se prueba el Teorema 0.5. El primer paso para lograr esto es generalizar los resultados clásicos de homotopía y homología de espacios al contexto de los $\mathcal{C}$-espacios y $\mathcal{C}$-CW-complejos libres. Luego, adaptando las pruebas clásicas, se prueba el siguiente teorema, que es una generalización del Teorema 0.4 para $\mathcal{C}$-espacios:

**Teorema 0.6.** ([DL98, 4.7(1) y pág. 236]). Sea $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una teoría de homología de $\mathcal{C}$-espacios. Sea $X$ un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre. Existe una sucesión espectral cuya segunda página está dada por

$$E^2_{pq} \cong H_p^{\mathcal{C}}(X; h_q(\hom_{\mathcal{C}}(?, -)))\,,$$

y que converge a $(h_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$. Aquí $H_*^{\mathcal{C}}$ es una generalización de la homología de Bredon, y $h_q(\hom_{\mathcal{C}}(?, -))$ es una generalización de $\mathcal{H}_q(-)$.

El último paso es usar la equivalencia que hay entre los $G$-CW-complejos y los $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-CW-complejos libres para traducir el Teorema 0.6 y llegar al Teorema 0.5.

En el Capítulo 1 de esta monografía probamos las propiedades de homotopía que cumplen los $\mathcal{C}$-espacios y $\mathcal{C}$-CW-complejos libres, basándonos en [DL98] y adaptando las pruebas clásicas de [Hat02]. En el Capítulo 2 probamos algunas propiedades que cumplen las teorías de homología de $\mathcal{C}$-espacios, generalizando las pruebas de [Swi02], culminando con la prueba del Teorema 0.6. En el Capítulo 3 mostramos la correspondencia entre los $G$-espacios y los $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-espacios, y la usamos para probar el Teorema 0.5. Para esto nos basamos en [DL98; Lüc20]. Luego, como ejemplo, hacemos un cálculo usando esta sucesión espectral. Este ejemplo proviene de [Ell+20].

En este trabajo asumiremos los resultados clásicos sobre homotopía de CW-complejos y sobre grupos de homotopía superiores que se pueden encontrar en [Hat02, Capítulos 0, 4].

# 1. $\mathcal{C}$-espacios y $\mathcal{C}$-CW-complejos

En este capítulo introducimos los conceptos de $\mathcal{C}$-espacio y de $\mathcal{C}$-CW-complejo, y probamos los teoremas principales que estos cumplen y que usaremos en el siguiente capítulo. En la Sección 1.1 definimos $\mathcal{C}$-espacio, y en la Sección 1.2 definimos $\mathcal{C}$-CW-complejo libre. Para estas dos secciones nos basamos en [DL98, Secciones 1, 3]. En la Sección 1.3 probamos una propiedad de extensión de homotopías para $\mathcal{C}$-CW-complejos libres, en la Sección 1.4 probamos una versión del teorema de Whitehead, y en la Sección 1.5 probamos la existencia y unicidad de aproximaciones $\mathcal{C}$-CW. Estos resultados vienen de [DL98, Sección 3], pero en nuestro caso las pruebas se basan en las pruebas clásicas que aparecen en [Hat02, Capítulos 0, 4]. En [DL98] las demostraciones están basadas principalmente en las de [Whi78].

## 1.1. $\mathcal{C}$-espacios

La siguiente definición proviene de [DL98, Definición 1.2].

**Definición 1.1.** Dada una categoría pequeña $\mathcal{C}$, un **$\mathcal{C}$-espacio** $X$ es un funtor covariante

$$X : \mathcal{C} \to \mathrm{Top}\,.$$

Es decir, para cada objeto $c \in \mathcal{C}$, un $\mathcal{C}$-espacio $X$ le asigna a $c$ un espacio topológico $X(c)$, y a cada morfismo $\phi : c \to d$ le asigna una función continua $X(\phi) : X(c) \to X(d)$, de manera que se preserve la composición

$$X(\psi \circ \phi) = X(\psi) \circ X(\phi)\,,$$

y que además $X(\mathrm{id}_c) = \mathrm{id}_{X(c)}$ para todo objeto $c \in \mathcal{C}$. A los $\mathcal{C}$-espacios también se les llama **diagramas de espacios**.

Dados dos $\mathcal{C}$-espacios $X, Y$, un **morfismo de $\mathcal{C}$-espacios** $f : X \to Y$ es una transformación natural entre $X$ e $Y$. Es decir, $f$ le asigna a cada objeto $c \in \mathcal{C}$ una función continua $f(c) : X(c) \to Y(c)$, tal que para cada morfismo $\phi : c \to d$ en $\mathcal{C}$ el cuadrilátero

$$\begin{tikzcd}
X(c) \arrow[r, "f(c)"] \arrow[d, "X(\phi)"'] & Y(c) \arrow[d, "Y(\phi)"] \\
X(d) \arrow[r, "f(d)"] & Y(d)
\end{tikzcd}$$

conmute. A la categoría de los $\mathcal{C}$-espacios y los morfismos entre ellos se le llama $\mathcal{C}$-Top. La composición de morfismos de $\mathcal{C}$-espacios está definida como $(g \circ f)(c) = g(c) \circ f(c)$.

Veamos algunos ejemplos sencillos de $\mathcal{C}$-espacios:

**Ejemplo 1.2.** Si $\mathbf{1}$ es la categoría con un solo objeto y un solo morfismo (el morfismo identidad), entonces un $\mathbf{1}$-espacio es lo mismo que un espacio topológico clásico, y un morfismo de $\mathbf{1}$-espacios es lo mismo que una función continua. Se cumple que $\mathbf{1}$-Top y Top son categorías isomorfas.

**Ejemplo 1.3.** Sea $\mathbf{2} = \{0 \longrightarrow 1\}$ la categoría con dos objetos $0, 1$ y un solo morfismo no identidad $0 \to 1$. Un **2**-espacio es lo mismo que un par de espacios topológicos $X(0), X(1)$ junto con una función continua $X(0) \to X(1)$ entre ellos. Un morfismo de **2**-espacios $f : X \to Y$ consiste en dos funciones continuas $f(0), f(1)$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X(0) & \xrightarrow{f(0)} & Y(0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(1) & \xrightarrow{f(1)} & Y(1)\,. \end{array}$$

**Ejemplo 1.4.** Sea $G$ un grupo, y sea $\mathcal{C}$ la categoría que tiene un solo objeto $*$ y cuyos morfismos $* \to *$ son los elementos $g \in G$, donde la composición está dada por el producto en $G$. En este caso un $\mathcal{C}$-espacio $X$ consiste en un espacio $X(*)$ junto con funciones continuas $X(g) : X(*) \to X(*)$ para cada $g \in G$, tales que $X(gh) = X(g) \circ X(h)$. Esto es lo mismo que un espacio con una $G$-acción continua izquierda (con $g \cdot x = X(g)(x)$ para $g \in G$ y $x \in X(*)$), y normalmente se le llama **$G$-espacio**. Un morfismo $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$-espacios está dado por una función continua $f(*) : X(*) \to Y(*)$ tal que $Y(g) \circ f(*) = f(*) \circ X(g)$ para todo $g \in G$, es decir que conmuta con la acción de $G$. A esto también se le llama **morfismo de $G$-espacios** o **función continua $G$-equivariante**.

Ahora veamos algunas formas de construir $\mathcal{C}$-espacios a partir de otros $\mathcal{C}$-espacios.

**Definición 1.5.** Sea $X$ un $\mathcal{C}$-espacio. Sea $Y$ un $\mathcal{C}$-espacio tal que $Y(c)$ es un subespacio de $X(c)$ para todo $c \in \mathcal{C}$. Se define $i : Y \to X$ tal que $i(c)$ es la función inclusión $Y(c) \hookrightarrow X(c)$ para todo $c \in \mathcal{C}$. Si $i$ es un morfismo de $\mathcal{C}$-espacios, entonces se dice que $Y$ es un **sub-$\mathcal{C}$-espacio** de $X$, y se escribe $Y \subseteq X$. En este caso $i$ se llama la **inclusión** de $Y$ en $X$ y se escribe $i : Y \hookrightarrow X$. Dado un morfismo $f : X \to Z$, se define el **morfismo restringido** $f|_Y : Y \to Z$ de la forma obvia.

**Observación 1.6.** Una definición equivalente que puede resultar útil es la siguiente. Un sub-$\mathcal{C}$-espacio de $X$ es una colección $(Y(c))_{c \in \mathcal{C}}$ de subespacios $Y(c) \subseteq X(c)$, tales que $X(\phi)(Y(c)) \subseteq Y(d)$ para todo $\phi : c \to d$. Las funciones $Y(\phi)$ se recuperan como la restricción de $X(\phi)$.

**Definición 1.7.** Muchas operaciones entre espacios se pueden extender a $\mathcal{C}$-espacios definiéndolas objeto a objeto. Si $X$ es un $\mathcal{C}$-espacio y $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una colección de sub-$\mathcal{C}$-espacios de $X$, se puede definir su **unión** como

$$\Big(\bigcup_\alpha Y_\alpha\Big)(c) = \bigcup_\alpha Y_\alpha(c)\,,$$

y por la observación anterior esto define un sub-$\mathcal{C}$-espacio de $X$. La **intersección** $\bigcap_\alpha Y_\alpha$ se define análogamente: $(\bigcap_\alpha Y_\alpha)(c) = \bigcap_\alpha Y_\alpha(c)$. Dado un morfismo de $\mathcal{C}$-espacios $f : X \to Z$ y un sub-$\mathcal{C}$-espacio $Y \subseteq X$, se define la **imagen** $f(Y)$ como el sub-$\mathcal{C}$-espacio $f(Y) \subseteq Z$ tal que $f(Y)(c) = f(c)(Y(c))$ para todo $c \in \mathcal{C}$. El **$\mathcal{C}$-espacio vacío** es el único $\mathcal{C}$ espacio $X$ tal que $X(c) = \varnothing$ para todo $c \in \mathcal{C}$; en este caso se escribe $X = \varnothing$. Notar que $\varnothing$ es un sub-$\mathcal{C}$-espacio de todos los $\mathcal{C}$-espacios.

Dada una colección de $\mathcal{C}$-espacios $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ se define su **unión disjunta** $\coprod_\alpha X_\alpha$ tal que para todo objeto $c \in \mathcal{C}$

$$\Big(\coprod_\alpha X_\alpha\Big)(c) = \coprod_\alpha X_\alpha(c)\,,$$

y para todo morfismo $\phi : c \to d$ en $\mathcal{C}$

$$\Big(\coprod_\alpha X_\alpha\Big)(\phi) = \coprod_\alpha i_{d,\alpha} \circ (X_\alpha(\phi)) : \coprod_\alpha X_\alpha(c) \to \coprod_\alpha X_\alpha(d)\,,$$

donde $i_{d,\alpha}$ es la inclusión $X_\alpha(d) \hookrightarrow \coprod_\beta X_\beta(d)$. Se puede ver que $\coprod_\alpha X_\alpha$ es un $\mathcal{C}$-espacio con esta definición, y que además este es el coproducto en $\mathcal{C}$-Top. Del mismo modo si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión con $X_n \subseteq X_{n+1}$, su **colímite** es

$$(\operatorname*{colím}_{n\to\infty} X_n)(c) = \operatorname*{colím}_{n\to\infty} X_n(c)\,.$$

## 1.2. $\mathcal{C}$-CW-complejos libres

En esta sección definiremos lo que es un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre. Nos basamos en [DL98, Sección 3]. Para esto primero probamos explícitamente una adjunción en la Proposición 1.13, adaptándola de [DL98, Lema 3.1]. Esta juega un rol muy importante en las secciones siguientes.

Los $\mathcal{C}$-CW-complejos libres se arman a partir de celdas *libres*, entonces lo primero que hay que hacer es definir lo que significa ser 'libre'. Esto va a ser similar al concepto de *libre* en el contexto de, por ejemplo, los grupos libres. En el caso de los grupos tenemos un funtor de olvido $F$ : Grp $\to$ Set que manda un grupo a su conjunto de elementos, y este tiene un adjunto izquierdo $B$ : Set $\to$ Grp que manda un conjunto al grupo libre generado por este conjunto.

Que $B$ sea adjunto izquierdo de $F$ significa que, dado un conjunto $S \in$ Set y un grupo $G \in$ Grp, hay una biyección natural

$$\hom_{\mathrm{Grp}}(B(S), G) \cong \hom_{\mathrm{Set}}(S, F(G))\,,$$

o, en palabras, un morfismo de grupos que parte de un grupo libre queda determinado exactamente por su acción en el conjunto generador de este grupo libre. Esta es la propiedad que define a los grupos libres.

En nuestro caso también vamos a empezar definiendo un funtor de olvido, pero su codominio va a ser Top en lugar de Set:

**Definición 1.8.** Dada una categoría pequeña $\mathcal{C}$ y un objeto $c \in \mathcal{C}$, se define el funtor

$$\mathrm{ev}_c : \mathcal{C}\text{-Top} \to \mathrm{Top}$$

tal que $\mathrm{ev}_c(X) = X(c)$ para todo $\mathcal{C}$-espacio $X$, y $\mathrm{ev}_c(f) = f(c)$ para todo morfismo de $\mathcal{C}$-espacios $f : X \to Y$. Es fácil ver que $\mathrm{ev}_c$ es un funtor bien definido.

Tenemos que encontrarle un adjunto izquierdo a $\mathrm{ev}_c$. Es decir, un funtor $B_c$ : Top $\to$ $\mathcal{C}$-Top que cumpla que

$$\hom_{\mathcal{C}\text{-Top}}(B_c(X), Y) \cong \hom_{\mathrm{Top}}(X, \mathrm{ev}_c(Y)) = \hom_{\mathrm{Top}}(X, Y(c))$$

a través de una biyección natural, para cualquier espacio topológico $X$ y cualquier $\mathcal{C}$-espacio $Y$. Es decir, queremos que $B_c$ sea tal que un morfismo $B_c(X) \to Y$ quede determinado completamente por una función continua $X \to Y(c)$, y que cualquier función de este tipo determine un morfismo $B_c(X) \to Y$. Esto es análogo a la propiedad que cumplen los grupos libres. Para lograr que $B_c$ cumpla esto, dado un espacio topológico $X$, el $\mathcal{C}$-espacio $B_c(X)$ va a tener que contener la misma información que $X$, en algún sentido. Las funciones $B_c(X)(\phi)$ van a tener que ser triviales de algún modo, de manera que no quede restringida la variedad de morfismos $B_c(X) \to Y$.

Como primer paso pongamos $B_c(X)(c) = X$. Sea $d \in \mathcal{C}$, con $d \neq c$, y supongamos que hay un morfismo $\psi : c \to d$. Tenemos que definir una función continua $B_c(X)(\psi) : B_c(X)(c) \to B_c(X)(d)$, así que no podemos poner $B_c(X)(d) = \varnothing$, a menos que $X$ fuera vacío. Un candidato de una función con poca información es la identidad: podemos poner $B_c(X)(d) = X$ y $B_c(X)(\psi) = \mathrm{id}_X$. Pero ahora supongamos que hay otro morfismo $\psi' : c \to d$, distinto de $\psi$. Si ponemos $B_c(X)(\psi') = \mathrm{id}_X$, nos quedan dos morfismos distintos en $\mathcal{C}$ correspondiendo a la misma función en $B_c(X)$. Esto es una relación, por así decirlo, y nos va a impedir que se cumpla la propiedad de adjunción.

Para arreglar este problema, podemos poner $B_c(X)(d) = X \amalg X$, y fijar

$$B_c(X)(\psi) = i_1 \,, \qquad B_c(X)(\psi') = i_2 \,,$$

donde $i_1$ y $i_2$ son las dos inclusiones distintas $X \hookrightarrow X \amalg X$. Obviamente puede haber aun más morfismos $c \to d$, así que lo que habría que definir en realidad sería fijar

$$B_c(X)(d) = \hom_{\mathcal{C}}(c, d) \times X \,,$$

donde $\hom_{\mathcal{C}}(c, d)$ es el conjunto de morfismos $c \to d$ visto como un espacio topológico con la topología discreta.

Resulta que esta es la definición correcta, incluso para $d = c$. La siguiente definición es una versión simplificada de la que aparece en [DL98, pág. 219].

**Definición 1.9.** Dado $c \in \mathcal{C}$, se define el funtor $B_c : \mathrm{Top} \to \mathcal{C}\text{-Top}$ de la siguiente manera. Dado un espacio topológico $X$, y dado $d \in \mathcal{C}$,

$$B_c(X)(d) = \hom_{\mathcal{C}}(c, d) \times X \,.$$

Dado un morfismo $\phi : d \to d'$ en $\mathcal{C}$, la función $B_c(X)(\phi) : B_c(X)(d) \to B(X)(d')$ es tal que, para todo $(\psi, x) \in \hom_{\mathcal{C}}(c, d) \times X$,

$$B_c(X)(\phi)(\psi, x) = (\phi \circ \psi, x) \,, \tag{1.10}$$

Se puede verificar fácilmente que $B_c(X)(\phi)$ es continua, que $B_c(X)(\mathrm{id}_d) = \mathrm{id}_{B_c(X)(d)}$ y que $B_c(X)(\phi_2 \circ \phi_1) = B_c(X)(\phi_2) \circ B_c(X)(\phi_1)$, lo cual prueba que $B_c(X)$ es un $\mathcal{C}$-espacio bien definido.

Queremos que $B_c$ sea un funtor, así que debe llevar funciones continuas a morfismos de $\mathcal{C}$-espacios. Dada una función continua $f : X \to Y$, se define $B_c(f) : B_c(X) \to B_c(Y)$ tal que, para todo $d \in \mathcal{C}$ y todo $(\psi, x) \in \hom_{\mathcal{C}}(c, d) \times X$,

$$B_c(f)(d)(\psi, x) = (\psi, f(x)) \,. \tag{1.11}$$

Verifiquemos que $B_c(f)$ es un morfismo de $\mathcal{C}$-espacios. Claramente las funciones $B_c(f)(d)$ son continuas; veamos que se cumple la condición de naturalidad. Hay que probar que conmuta

$$\begin{tikzcd}
B_c(X)(d) \arrow[r, "B_c(f)(d)"] \arrow[d, "B_c(X)(\phi)"'] & B_c(Y)(d) \arrow[d, "B_c(Y)(\phi)"] \\
B_c(X)(d') \arrow[r, "B_c(f)(d')"] & B_c(Y)(d') \,,
\end{tikzcd}$$

dados $d, d' \in \mathcal{C}$ y $\phi : d \to d'$. Pero mirando (1.10) y (1.11) se puede ver que lo que hacen ambas composiciones es $(\psi, x) \mapsto (\phi \circ \psi, f(x))$. Finalmente, hay que probar que $B$ es un funtor, es decir que $B_c(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{B_c(X)}$ y $B_c(g \circ f) = B_c(g) \circ B_c(f)$. Pero esto se deduce fácilmente de (1.11).

**Ejemplo 1.12.** Sea $\mathcal{C}$ como en el Ejemplo 1.4, definida a partir de un grupo $G$, y sea $X$ un espacio topológico cualquiera. Recordemos que en este caso $\mathcal{C}$ tiene un único objeto $*$. Aplicando definiciones, tenemos que $B_*(X)(*)$ es

$$B_*(X)(*) = \hom_{\mathcal{C}}(*, *) \times X = G \times X \,,$$

y la acción de $G$ sobre $B_c(X)(*)$ es la obvia: dado $g \in G$ y $(h, x) \in G \times X$,

$$g \cdot (h, x) = B_*(X)(g)(h, x) = (gh, x) \,.$$

De ahora en adelante escribiremos $\hom_{\mathcal{C}}(c, -) \times X$ en lugar de $B_c(X)$, $\hom_{\mathcal{C}}(c, d) \times X$ en lugar de $B_c(X)(d)$, y $\hom_{\mathcal{C}}(c, -) \times f$ en lugar de $B_c(f)$, siempre que no haya ambigüedad.

Adaptamos la siguiente proposición de [DL98, Lema 3.1].

**Proposición 1.13.** $B_c$ es adjunto izquierdo de $\mathrm{ev}_c$.

*Demostración.* Sea $X$ un espacio topológico, y sea $Y$ un $\mathcal{C}$-espacio. Hay que definir una biyección

$$T : \hom_{\mathcal{C}\text{-Top}}(\hom_{\mathcal{C}}(c, -) \times X, Y) \to \hom_{\mathrm{Top}}(X, Y(c))$$

que mande un morfismo de $\mathcal{C}$-espacios $f : \hom_{\mathcal{C}}(c, -) \times X \to Y$ a una función continua $T(f) : X \to Y(c)$. Para esto usaremos el hecho de que en $\hom_{\mathcal{C}}(c, -) \times X$ hay por lo menos un subespacio homeomorfo $X$; este es $\{\mathrm{id}_c\} \times X \subseteq \hom_{\mathcal{C}}(c, c) \times X$. Dado $x \in X$, definimos

$$T(f)(x) = f(c)(\mathrm{id}_c, x) \,, \tag{1.14}$$

que está bien definido porque el dominio de $f(c)$ es todo $\hom_{\mathcal{C}}(c, c) \times X$. Se puede pensar a $T(f)$ como la restricción de $f(c)$ al subespacio $\{\mathrm{id}_c\} \times X$. Está claro que con esta definición $T(f)$ es continua.

Veamos que $T$ es una biyección. Sea

$$T^{-1} : \hom_{\mathrm{Top}}(X, Y(c)) \to \hom_{\mathcal{C}\text{-Top}}(\hom_{\mathcal{C}}(c, -) \times X, Y)$$

tal que, dada una función continua $g : X \to Y(c)$, el morfismo $T^{-1}(g) : \hom_{\mathcal{C}}(c, -) \times X \to Y$ está definido de la siguiente forma. Para todo $d \in \mathcal{C}$ y $(\psi, x) \in \hom_{\mathcal{C}}(c, d) \times X$,

$$T^{-1}(g)(d)(\psi, x) = Y(\psi)(g(x)) \,. \tag{1.15}$$

Verifiquemos que $T^{-1}(g)$ es efectivamente un morfismo de $\mathcal{C}$-espacios. Como cada $Y(\psi)$ es continua, $T^{-1}(g)(d)$ es continua para todo $d$. Luego, dado $\phi : d \to d'$ en $\mathcal{C}$, hay que probar que conmuta

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{C}}(c,d) \times X \arrow[r, "T^{-1}(g)(d)"] \arrow[d, "B_c(X)(\phi)"'] & Y(d) \arrow[d, "Y(\phi)"] \\
\hom_{\mathcal{C}}(c,d') \times X \arrow[r, "T^{-1}(g)(d')"] & Y(d')\,.
\end{tikzcd}$$

Como $Y$ es un $\mathcal{C}$-espacio, se cumple que $Y(\phi) \circ Y(\psi) = Y(\phi \circ \psi)$, así que, usando (1.10) y (1.15),

$$\begin{tikzcd}
(\psi, x) \arrow[r, mapsto, "T^{-1}(g)(d)"] \arrow[d, mapsto, "B_c(X)(\phi)"'] & Y(\psi)(g(x)) \arrow[d, mapsto, "Y(\phi)"] \\
(\phi \circ \psi, x) \arrow[r, mapsto, "T^{-1}(g)(d')"] & Y(\phi \circ \psi)(g(x))
\end{tikzcd}$$

para todo $(\psi, x) \in \hom_{\mathcal{C}}(c,d) \times X$. Comprobemos que con esta definición $T^{-1}$ es realmente la inversa de $T$. Sea $f : \hom_{\mathcal{C}}(c,-) \times X \to Y$ un morfismo de $\mathcal{C}$-espacios. Por definición de morfismo de $\mathcal{C}$ espacios, $f$ cumple que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{C}}(c,c) \times X \arrow[r, "f(c)"] \arrow[d, "B_c(X)(\psi)"'] & Y(c) \arrow[d, "Y(\psi)"] \\
\hom_{\mathcal{C}}(c,d) \times X \arrow[r, "f(d)"] & Y(d)
\end{tikzcd}$$

conmuta para $d \in \mathcal{C}$ y $\psi : c \to d$ cualesquiera. Entonces por las definiciones (1.14) y (1.15) además de (1.10),

$$\begin{aligned}
T^{-1}(T(f))(d)(\psi, x) &= Y(\psi)(T(f)(x)) \\
&= Y(\psi)(f(c)(\mathrm{id}_c, x)) \\
&= f(d)(B_c(X)(\psi)(\mathrm{id}_c, x)) \\
&= f(d)(\psi, x)\,,
\end{aligned}$$

así que $T^{-1}(T(f)) = f$. Por otra parte, se cumple que $Y(\mathrm{id}_c) = \mathrm{id}_{Y(c)}$, así que, si $g : X \to Y(c)$ es una función continua,

$$T(T^{-1}(g))(x) = T^{-1}(g)(c)(\mathrm{id}_c, x) = Y(\mathrm{id}_c)(g(x)) = g(x)\,,$$

y por lo tanto $T(T^{-1}(g)) = g$.

Falta ver que $T$ es natural, es decir que se porta bien con la composición de morfismos. Consideremos espacios topológicos $X, X'$, $\mathcal{C}$-espacios $Y, Y'$, una función continua $g : X' \to X$, y morfismos $f : \hom_{\mathcal{C}}(c,-) \times X \to Y$ y $h : Y \to Y'$. Hay que probar que

$$T(h \circ f \circ \hom_{\mathcal{C}}(c,-) \times g) = h(c) \circ T(f) \circ g\,. \tag{1.16}$$

Para esto es suficiente aplicar las respectivas definiciones. Sea $d \in \mathcal{C}$ y $x' \in X'$:

$$\begin{aligned}
T(h \circ f \circ \hom_{\mathcal{C}}(c,-) \times g)(x') &= (h \circ f \circ \hom_{\mathcal{C}}(c,-) \times g)(c)(\mathrm{id}_c, x') \\
&= (h \circ f)(c)(\mathrm{id}_c, g(x')) \\
&= h(c)(f(c)(\mathrm{id}_c, g(x'))) \\
&= h(c)(T(f)(g(x'))) \\
&= (h(c) \circ T(f) \circ g)(x')\,,
\end{aligned}$$

donde usamos (1.14) y (1.11). De esto se desprende inmediatamente que, si $f' : X \to Y(c)$ es una función continua, entonces

$$T^{-1}(h(c) \circ f' \circ g) = h \circ T^{-1}(f') \circ \hom_{\mathcal{C}}(c, -) \times g\,.$$

□

Ahora estamos listos para empezar a definir lo que es un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre. Estos son análogos a los CW-complejos clásicos [por ejemplo ver Hat02, pág. 5; Swi02, Capítulo 5], excepto que mientras que los CW-complejos se construyen a partir de celdas homeomorfas a discos abiertos $\operatorname{int} D^n$, los $\mathcal{C}$-CW-complejos libres se construyen a partir de *celdas libres*, homeomorfas a $\hom_{\mathcal{C}}(c, -) \times \operatorname{int} D^n$. La definición que sigue proviene de [DL98, Definición 3.2].

**Definición 1.17.** Un **$\mathcal{C}$-CW-complejo libre** es un $\mathcal{C}$-espacio $X$ con la siguiente estructura:

1. $X$ viene equipado con sub-$\mathcal{C}$-espacios $X_n$, $n \in \{-1\} \cup \mathbb{N}$, tales que

$$\varnothing = X_{-1} \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n\,.$$

2. $X = \operatorname{colím}_{n \to \infty} X_n$.

3. Para todo $n \geq 0$, el sub-$\mathcal{C}$-espacio $X_n$ se construye a partir de $X_{n-1}$ pegando $\mathcal{C}$-$n$-celdas libres. Es decir, existe un conjunto de índices $I_n$, un objeto $c_i \in \mathcal{C}$ para cada $i \in I_n$, y un pushout de $\mathcal{C}$-espacios de la forma

$$\begin{tikzcd} \coprod_{i \in I_n} \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times S^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, hook] & X_{n-1} \arrow[d, hook] \\ \coprod_{i \in I_n} \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times D^n \arrow[r] & X_n\,, \end{tikzcd}$$

donde $\coprod_{i \in I_n} \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times S^{n-1} \hookrightarrow \coprod_{i \in I_n} \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times D^n$ y $X_{n-1} \hookrightarrow X_n$ son las inclusiones.

El sub-$\mathcal{C}$-espacio $X_n$ se llama **$n$-esqueleto**, y la imagen del morfismo inclusión $\hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times \operatorname{int} D^n \to X$ se llama **$\mathcal{C}$-$n$-celda libre basada en** $c_i$. Si definimos $X_\infty = X$, entonces la **dimensión** $\dim X$ se puede definir como

$$\dim X = \min\{n \in \mathbb{N} \cup \{-1, \infty\} \mid X_n = X\}\,.$$

**Observación 1.18.** Para $n = 0$ tenemos el pushout

$$\begin{tikzcd} \coprod_{i \in I_0} \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times S^{-1} \arrow[r] \arrow[d, hook] & X_{-1} \arrow[d, hook] \\ \coprod_{i \in I_0} \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times D^0 \arrow[r] & X_0\,. \end{tikzcd}$$

Por definición $S^{-1} = \varnothing$, así que los dos $\mathcal{C}$-espacios de la parte superior del pushout son vacíos, y $X_0 = \coprod_{i \in I_0} \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times D^0$.

Veamos un ejemplo de $\mathcal{C}$-CW-complejos libres.

**Ejemplo 1.19.** Sea $\mathcal{C}$ como en el Ejemplo 1.4, con $G = \mathbb{Z}$. En un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre, todas las $\mathcal{C}$-$n$-celdas libres están basadas en el único objeto $*$. Pongamos $X_0 = \hom_{\mathcal{C}}(*, -) \times D^0$, con una sola $\mathcal{C}$-0-celda libre. Como vimos en el Ejemplo 1.12, se cumple que

$$X_0(*) = \hom_{\mathcal{C}}(*, *) \times D^0 = \mathbb{Z} \times D^0 \cong \mathbb{Z}\,.$$

En lo siguiente vamos a escribir al elemento $(m, 0) \in X_0(*)$ (donde 0 es el único punto de $D^0$) directamente como $m$. La acción de $\mathbb{Z}$ sobre $X_0(*)$ es entonces

$$n \cdot m = X_0(n)(m) = n + m\,.$$

Construimos $X_1$ pegándole a $X_0$ una sola $\mathcal{C}$-1-celda. Por la adjunción probada en la Proposición 1.13, un morfismo $\hom_{\mathcal{C}}(*, -) \times S^0 \to X_0$ está determinado únicamente por una función continua $g : S^0 \to X_0(*)$. Sea $g$ tal que

$$g(-1) = 0\,, \qquad g(1) = 1\,.$$

A partir de $g$ obtenemos un morfismo de $\mathcal{C}$-espacios $T^{-1}(g) : \hom_{\mathcal{C}}(*, -) \times S^0 \to X_0$. Mirando la definición de $T^{-1}$ en (1.15), se deduce que, para todo $(n, t) \in \hom_{\mathcal{C}}(*, *) \times S^0 \cong \mathbb{Z} \times S^0$,

$$T^{-1}(g)(*)(n, t) = X_0(n)(g(t)) = g(t) + n\,.$$

Es decir,

$$T^{-1}(g)(*)(n, -1) = n\,, \qquad T^{-1}(g)(*)(n, 1) = n + 1\,. \tag{1.20}$$

Definimos a $X = X_1$ por el pushout

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{C}}(*, -) \times S^0 \arrow[r, "T^{-1}(g)"] \arrow[d, hook] & X_0 \arrow[d] \\
\hom_{\mathcal{C}}(*, -) \times D^1 \arrow[r] & X_1\,.
\end{tikzcd}$$

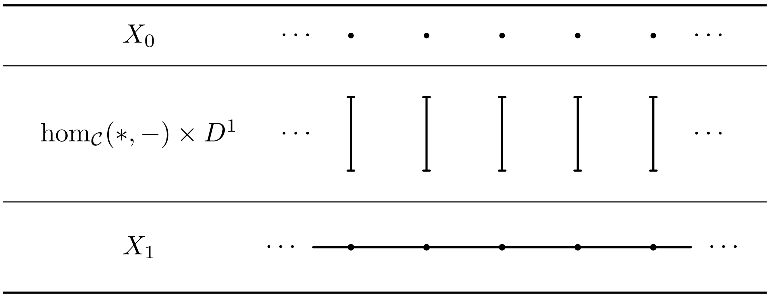
Habíamos visto que $X_0(*) \cong \mathbb{Z}$ y que $\hom_{\mathcal{C}}(*, *) \times S^0 \cong \mathbb{Z} \times D^1$, entonces $X_1(*)$ es homeomorfo a un cociente de $\mathbb{Z} \amalg (\mathbb{Z} \times D^1)$. Teniendo en cuenta (1.20), se puede verificar que este cociente corresponde al generado por las identificaciones

$$(n, -1) \sim n\,, \qquad (n, 1) \sim n + 1$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Entonces se deduce que $X_1(*) \cong \mathbb{R}$. La acción de $\mathbb{Z}$ en $X_1(*)$ queda determinada por las acciones en $X_0$ y en $\hom_{\mathcal{C}}(*, -) \times D^1$, ya que los morfismos $X_0 \to X_1$ y $\hom_{\mathcal{C}}(*, -) \times D^1 \to X_1$ son morfismos de $\mathcal{C}$-espacios. Por lo tanto, bajo el homeomorfismo $X_1(*) \cong \mathbb{R}$, la acción de $\mathbb{Z}$ corresponde a la acción sobre $\mathbb{R}$ dada por

$$n \cdot x = x + n$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R}$. Es decir, obtuvimos a $\mathbb{R}$ con la acción de $\mathbb{Z}$ dada por traslación como un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre de dimensión 1 formado por una sola $\mathcal{C}$-0-celda y una sola $\mathcal{C}$-1-celda. Se ilustra esta construcción en el siguiente dibujo:




## 1.3. Homotopía de $\mathcal{C}$-espacios

En esta sección veremos cómo definir una homotopía entre morfismos de $\mathcal{C}$-espacios y probaremos la propiedad de extensión de homotopías para $\mathcal{C}$-CW-complejos libres.

**Definición 1.21.** Dado un $\mathcal{C}$-espacio $X$ y un espacio topológico $Y$, se define el $\mathcal{C}$-espacio $X \times Y$ de la siguiente manera. Para todo objeto $c$ y morfismo $\phi$ en $\mathcal{C}$,

$$(X \times Y)(c) = X(c) \times Y\,, \qquad (X \times Y)(\phi) = \phi \times \mathrm{id}_Y\,.$$

Se verifica fácilmente que $X \times Y$ es un $\mathcal{C}$-espacio bien definido.

**Definición 1.22.** Sean $X$ e $Y$ dos $\mathcal{C}$-espacios, y sean $f, g : X \to Y$ morfismos de $\mathcal{C}$-espacios. Se dice que $f$ y $g$ son **homotópicos**, y se escribe $f \simeq g$, si existe un morfismo de $\mathcal{C}$-espacios $H : X \times I \to Y$ (donde $I$ es el segmento $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$) tal que, para todo $c \in \mathcal{C}$ y $x \in X(c)$,

$$H(c)(x, 0) = f(c)(x)\,, \qquad H(c)(x, 1) = g(c)(x)\,.$$

Se puede ver que esto define una relación de equivalencia, igual que la homotopía clásica entre funciones continuas. Al morfismo $H$ se le llama **homotopía** de morfismos de $\mathcal{C}$-espacios. Si $A \subseteq X$ es un sub-$\mathcal{C}$-espacio y $H$ cumple que

$$H(c)(a, t) = H(c)(a, 0)$$

para todo $c \in \mathcal{C}$, $a \in A(c)$ y $t \in I$, se dice que $H$ es una homotopía **relativa a** $A$. Un morfismo de $\mathcal{C}$-espacios $f : X \to Y$ se llama **equivalencia de homotopía** si existe un morfismo $g : Y \to X$ tal que $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ y $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. En este caso se dice que $g$ es la **inversa de homotopía** de $f$. Se puede probar que, al igual que con los espacios topológicos, la composición de dos equivalencias de homotopía es una equivalencia de homotopía.

Las dos siguientes definiciones vienen de [Hat02, págs. 2, 14].

**Definición 1.23.** Sea $X$ un $\mathcal{C}$-espacio, y sea $A \subseteq X$ un sub-$\mathcal{C}$-espacio. Se dice que $A$ es un **retracto por deformación** de $X$ si existe una homotopía $\mathrm{id}_X \simeq r$ relativa a $A$, donde $r : X \to X$ es un morfismo cuya imagen está contenida en $A$. Si $H : X \times I \to X$ es la homotopía que cumple estas propiedades, también se dice que $H$ es un **retracto por deformación** de $X$ sobre $A$.

**Observación 1.24.** Si $A$ es un retracto por deformación de $X$ con $\mathrm{id}_X \simeq r$ como en la definición, entonces, como la homotopía es relativa a $A$, se deduce que $r|_A$ es la inclusión $i : A \hookrightarrow X$. Ahora, sea $r' : X \to A$ igual a $r$ pero con el el codominio restringido. Tenemos que $i \circ r' = r \simeq \mathrm{id}_X$, y además $r' \circ i = \mathrm{id}_Y$. Es decir que la inclusión $i$ es una equivalencia de homotopía, con inversa de homotopía $r$.

**Definición 1.25.** Sean $X$ un $\mathcal{C}$-espacio y sea $A \subseteq X$ un sub-$\mathcal{C}$-espacio. Se dice que el par $(X, A)$ tiene la **propiedad de extensión de homotopías** si, dado cualquier morfismo $f : X \to Y$ y dada cualquier homotopía $H : A \times I \to Y$ que parta de $f|_A$, existe una homotopía que parte de $f$ y que extiende a $H$, es decir existe $H' : X \times I \to Y$ tal que $H'|_{A \times I} = H$ y tal que

$$H'(c)(x, 0) = f(c)(x)$$

para todo $c \in \mathcal{C}$ y $x \in X(c)$.

La siguiente condición suficiente nos será útil. El enunciado y la prueba vienen de [Hat02, págs. 14, 533-534], en donde en realidad se prueba una condición que es equivalente a la propiedad de extensión de homotopías, pero para nuestro caso nos será suficiente esta versión simplificada.

**Lema 1.26.** Sea $X$ un $\mathcal{C}$-espacio y $A \subseteq X$ un sub-$\mathcal{C}$-espacio tal que $A(c) \subseteq X(c)$ es cerrado para todo $c \in \mathcal{C}$. Supongamos que $X \times \{0\} \cup A \times I$ es un retracto por deformación de $X \times I$. Entonces $(X, A)$ tiene la propiedad de extensión de homotopías.

*Demostración.* Sea $Y$ un $\mathcal{C}$-espacio, $f : X \to Y$ un morfismo, y $H : A \times I \to Y$ una homotopía que parte de $f|_A$. Como cada $A(c) \subseteq X(c)$ es cerrado, tenemos un pushout

$$\begin{tikzcd}
A \times \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & A \times I \arrow[d] \\
X \times \{0\} \arrow[r] & X \times \{0\} \cup A \times I\,,
\end{tikzcd}$$

donde todas las flechas son inclusiones. Entonces los morfismos $H : A \times I \to Y$ y $f \circ \mathrm{pr}_1 : X \times \{0\} \to Y$, que por hipótesis son iguales en $A \times \{0\}$, inducen un único morfismo $X \times \{0\} \cup A \times I \to Y$ que los extiende a los dos. Llamémosle $F$ a este morfismo.

Por hipótesis, existe $r : X \times I \to X \times I$ tal que $\mathrm{id}_{X \times I} \simeq r$ por una homotopía relativa a $X \times \{0\} \cup A \times I$, y tal que la imagen de $r$ está en $X \times \{0\} \cup A \times I$. En particular se deduce que $r|_{X \times \{0\} \cup A \times I}$ es la inclusión $X \times \{0\} \cup A \times I \hookrightarrow X \times I$. Sea $r'$ igual que $r$ pero con el codominio restringido a $X \times \{0\} \cup A \times I$, y sea $H' = F \circ r'$. Como $r'|_{X \times \{0\} \cup A \times I}$ es la identidad y por la definición de $F$, se ve que $H'|_{A \times I} = H$ y que $H'|_{X \times \{0\}} = f \circ \mathrm{pr}_1$, es decir que $H'$ es una homotopía que parte de $f$ y que extiende a $H$.

□

Usaremos esto para mostrar una clase importante de pares que cumplen la propiedad de extensión de homotopías:

**Definición 1.27.** Sea $X$ un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre. Un **subcomplejo** de $X$ es un sub-$\mathcal{C}$-espacio $A \subseteq X$ tal que $A$ es una unión de celdas libres y tal que cada $A(c)$ es cerrado en $X(c)$. Se puede probar que entonces $A$ es un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre con la estructura que hereda de $X$ [ver Hat02, pág. 7, en nuestro caso hay que usar también la Proposición 1.13]. En este caso el par $(X, A)$ se llama **par $\mathcal{C}$-CW libre**.

La siguiente proposición nos será muy útil en lo que queda del capítulo. Adaptamos tanto el enunciado como la prueba a de [Hat02, Proposición 0.16].

**Proposición 1.28.** Sea $(X, A)$ un par $\mathcal{C}$-CW libre. Entonces $X \times \{0\} \cup A \times I$ es un retracto por deformación de $X \times I$, y entonces por el Lema 1.26 $(X, A)$ tiene la propiedad de extensión de homotopías.

*Demostración.* Partimos del hecho de que, para todo $n$, el espacio topológico $D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I$ es un retracto por deformación de $D^n \times I$. Esto se puede ver con un argumento geométrico [ver Hat02, pág. 15]. La idea de la prueba es usar este hecho para hacer la homotopía que queremos celda por celda, empezando por las celdas de dimensión mayor y terminando por las de dimensión menor.

Primero, es fácil ver que, por lo visto en el párrafo anterior, se cumple que, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $c \in \mathcal{C}$, el $\mathcal{C}$-espacio

$$\hom_{\mathcal{C}}(c, -) \times (D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I)$$

es un retracto por deformación del $\mathcal{C}$-espacio

$$\hom_{\mathcal{C}}(c, -) \times D^n \times I \,.$$

Llamémosle $K_{n,c}$ a la homotopía

$$K_{n,c} : \hom_{\mathcal{C}}(c, -) \times D^n \times I \times I \to \hom_{\mathcal{C}}(c, -) \times D^n \times I$$

que nos da este retracto. A partir de estas obtendremos el siguiente resultado intermedio: para todo $n \in \mathbb{N}$, el $\mathcal{C}$-espacio $X_n \times \{0\} \cup (X_{n-1} \cup A_n) \times I$ es un retracto por deformación de $X_n \times I$. Veamos cómo se llega a esto.

Por la definición de $\mathcal{C}$-CW-complejo libre, tenemos el pushout

$$\begin{tikzcd} \coprod_{i \in I_n} \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times S^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, hook] & X_{n-1} \arrow[d, hook] \\ \coprod_{i \in I_n} \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times D^n \arrow[r] & X_n \,, \end{tikzcd}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. El sub-$\mathcal{C}$-espacio $A_n = X_n \cap A$ es una unión de celdas, por lo tanto, dentro del conjunto de índices $I_n$, algunos índices corresponden a $n$-celdas de $A_n$, y otros no. Sea $I_n^A \subseteq I_n$ el conjunto de índices que corresponden a $n$-celdas de $A_n$, y sea $I'_n = I_n \setminus I_n^A$. Entonces

$$\begin{aligned} \coprod_{i \in I_n} \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times D^n = & \coprod_{i \in I_n^A} \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times D^n \\ & \amalg \coprod_{i \in I'_n} \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times D^n \,, \end{aligned}$$

y se puede ver que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I'_n} \hom_{\mathcal{C}}(c_i,-)\times S^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, hook] & X_{n-1}\cup A_n \arrow[d, hook] \\
\coprod_{i\in I'_n} \hom_{\mathcal{C}}(c_i,-)\times D^{n} \arrow[r] & X_n
\end{tikzcd}$$

también es un pushout. Ahora, si multiplicamos cada $\mathcal{C}$-espacio en un pushout por $I$, y reemplazamos a cada morfismo $f$ por $f\times \mathrm{id}_I$ (donde $f\times \mathrm{id}_I$ se define de la forma obvia), sigue quedando un pushout. Esto se deduce de que lo mismo se cumple en Top (recordar que los pushouts en $\mathcal{C}$-Top son pushouts topológicos objeto a objeto). Entonces

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I'_n} \hom_{\mathcal{C}}(c_i,-)\times S^{n-1}\times I \arrow[r] \arrow[d, hook] & (X_{n-1}\cup A_n)\times I \arrow[d, hook] \\
\coprod_{i\in I'_n} \hom_{\mathcal{C}}(c_i,-)\times D^{n}\times I \arrow[r] & X_n\times I
\end{tikzcd}$$

también es un pushout. A partir de este se puede llegar al siguiente pushout:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I'_n} \hom_{\mathcal{C}}(c_i,-)\times (D^n\times\{0\}\cup S^{n-1}\times I) \arrow[r] \arrow[d, hook] & X_n\times\{0\}\cup (X_{n-1}\cup A_n)\times I \arrow[d, hook] \\
\coprod_{i\in I'_n} \hom_{\mathcal{C}}(c_i,-)\times D^{n}\times I \arrow[r] & X_n\times I
\end{tikzcd}$$

Usando este la propiedad universal del pushout obtendremos el resultado intermedio que queríamos: Multiplicando el diagrama de arriba por $I$, obtenemos que el cuadrilátero superior del siguiente diagrama es un pushout:

$$\begin{tikzcd}
 & \Big(\coprod_{i\in I'_n} \hom_{\mathcal{C}}(c_i,-)\times (D^n\times\{0\}\cup S^{n-1}\times I)\Big)\times I \arrow[dl, hook] \arrow[dr, hook] & \\
\Big(\coprod_{i\in I'_n} \hom_{\mathcal{C}}(c_i,-)\times D^n\times I\Big)\times I \arrow[dr] \arrow[dd, "\coprod_{i\in I'_n} K_{n,c_i}"'] & & (X_n\times\{0\}\cup (X_{n-1}\cup A_n)\times I)\times I \arrow[dl, hook] \arrow[dd, "\mathrm{pr}_1"] \\
 & (X_n\times I)\times I \arrow[dd, dashed, "K_n"'] & \\
\coprod_{i\in I'_n} \hom_{\mathcal{C}}(c_i,-)\times D^n\times I \arrow[dr] & & X_n\times\{0\}\cup (X_{n-1}\cup A_n)\times I\,. \arrow[dl, hook] \\
 & X_n\times I &
\end{tikzcd}$$

Como cada $K_{n,c_i}$ es una homotopía relativa a

$$\hom_{\mathcal{C}}(c_i,-)\times (D^n\times\{0\}\cup S^{n-1}\times I)\,,$$

el hexágono exterior conmuta, y se puede aplicar la propiedad universal del pushout para obtener el morfismo $K_n$ que hace conmutar los cuadriláteros inferiores. Mirando este último diagrama y usando que cada $K_{n,c_i}$ es un retracto por deformación, se puede ver que $K_n$ es un retracto por deformación de

$X_n \times I$ sobre $X_n \times \{0\} \cup (X_{n-1} \cup A_n) \times I$. Por ejemplo, como el cuadrilátero inferior derecho conmuta, se deduce que $K_n$ es una homotopía relativa a $X_n \times \{0\} \cup (X_{n-1} \cup A_n) \times I$. Queda probado entonces el resultado intermedio.

Para terminar la prueba, tenemos que concatenar de alguna forma todas las homotopías $K_n$. Esto lo haremos poniendo a las $K_n$ con $n$ más grande en tiempos más pequeños, terminando con $K_0$. Primero construimos inductivamente, para todo $n \in \mathbb{N}$, la homotopía $H_n : (X_n \times I) \times I \to X_n \times I$ tal que $H_n$ es la concatenación de $K_n, K_{n-1}, \dots, K_0$. Más específicamente, definimos a las $H_n$ de forma que cumplan que

1. $H_n$ es constante en el intervalo $[0, 2^{-n-1}]$.
2. Para cada $0 \leq k \leq n$, la restricción $H_n|_{(X_k \times I) \times [2^{-k-1}, 2^{-k}]}$ es igual a $K_k$ a menos de reparametrización, y $H_n|_{(X_k \times I) \times [2^{-k-1}, 1]} = H_k$.

El caso $n = 0$ consiste simplemente en reparametrizar $K_0$, y el paso inductivo se prueba aplicando la propiedad universal del pushout de una forma muy similar a como hicimos en la parte anterior de esta prueba. Se puede ver que, dada esta definición, cada $H_n$ es un retracto por deformación de $X_n \times I$ sobre $X_n \times \{0\} \cup A_n \times I$.

Por último, usamos la propiedad universal del colímite (que cumple $X$ por ser un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre) para obtener un retracto por deformación definido en todo $(X \times I) \times I$. Dado $k \leq n$, por la segunda propiedad que define a $H_n$, se da que

$$\begin{tikzcd}
(X_k \times I) \times I \arrow[r, "H_k"] \arrow[d, hook] & X_k \times I \arrow[r, hook] & X \times I \\
(X_n \times I) \times I \arrow[r, "H_n"] & X_k \times I \arrow[ur, hook, bend right] &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Como $(X \times I) \times I = \operatorname{colím}_{n \to \infty} (X_n \times I) \times I$ (ya que $X = \operatorname{colím}_{n \to \infty} X_n$), podemos aplicar la propiedad universal del colímite para concluir que existe un único morfismo $H : (X \times I) \times I \to X \times I$ tal que

$$\begin{tikzcd}
(X_n \times I) \times I \arrow[r, "H_n"] \arrow[d, hook] & X_n \times I \arrow[r, hook] & X \times I \\
(X \times I) \times I \arrow[urr, bend right, "H"'] & &
\end{tikzcd}$$

conmuta para todo $n \in \mathbb{N}$. Como cada $H_n$ es un retracto por deformación de $X_n \times I$ sobre $X_n \times \{0\} \cup A_n \times I$, se deduce de la definición de $H$ que este debe ser un retracto por deformación de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \times I = X \times I$ sobre $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \times \{0\} \cup A_n \times I = X \times \{0\} \cup A \times I$.

□

## 1.4. Teorema de Whitehead

En esta sección probaremos una versión del teorema de Whitehead. La versión clásica de este teorema se puede encontrar por ejemplo en [Hat02, Teorema 4.5]. Empezamos con el siguiente lema, que adaptamos de [Hat02, Lema 4.6].

**Lema 1.29.** Sea $(X, A)$ un par $\mathcal{C}$-CW libre, y sea $(Y, B)$ un par de $\mathcal{C}$-espacios con $B \subseteq Y$. Supongamos que

1. Para todo $n \geq 1$ y $c_i \in \mathcal{C}$ tal que $X \setminus A$ tiene $\mathcal{C}$-$n$-celdas basadas en $c_i$, se da que $(Y(c_i), B(c_i))$ es $n$-conexo; esto significa que $\pi_n(Y(c_i), B(c_i), y_0) = 0$ para todo $y_0 \in B(c_i)$.

2. Si $X \setminus A$ tiene $\mathcal{C}$-0-celdas basadas en $c_i$, entonces el par $(Y(c_i), B(c_i))$ es 0-conexo, lo cual quiere decir que cualquier punto de $Y(c_i)$ está en la misma componente conexa por caminos que uno en $B(c_i)$.

Entonces todo morfismo $f : (X, A) \to (Y, B)$ (es decir, todo morfismo $f : X \to Y$ tal que $f(A) \subseteq B$) es homotópico relativo a $A$ a un morfismo $g$ cuya imagen está contenida en $B$.

*Demostración.* La idea de la prueba consiste en usar la hipótesis de que el par $(Y(c_i), B(c_i))$ es $n$-conexo para hallar, para cada $\mathcal{C}$-celda de $X \setminus A$, una homotopía desde la restricción de $f$ a esta celda a un morfismo que la manda a dentro de $B$. Luego se obtiene la homotopía $f \simeq g$ partiendo de estas homotopías. Esta prueba es igual a la versión para $\mathcal{C} = \mathbf{1}$ en [Hat02, Lema 4.6], excepto que usamos la adjunción de la Proposición 1.13 para convertir homotopías de funciones continuas $D^n \times I \to Y(c_i)$ a homotopías de morfismos de $\mathcal{C}$-espacios $\hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times D^n \times I \to Y$.

Empecemos probando la siguiente afirmación. Sea $f_0 = f$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un morfismo $f_n : (X, A) \to (Y, B)$ tal que $f_n(X_{n-1}) \subseteq B$, de forma que para todo $n$ se da que $f_n \simeq f_{n+1}$ a través de una homotopía $K_n$ relativa a $A \cup X_{n-1}$. Para $n = 0$, se cumple que $f_0(X_{-1}) = f(\varnothing) \subseteq B$ por definición, así que basta probar el paso inductivo. Sea $n \geq 1$, y supongamos que $f_n(X_{n-1}) \subseteq B$.

Si $X \setminus A$ no tiene $\mathcal{C}$-celdas de dimensión $n$, entonces $X_n \subseteq X_{n-1} \cup A$, por lo que $f_n(X_n) \subseteq B$, y podemos tomar $f_{n+1} = f_n$, con $K_n$ la homotopía constante. Entonces, supongamos que sí hay $\mathcal{C}$-$n$-celdas en $X \setminus A$. Sea $\varphi_i : \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times D^n \to X$ el morfismo de inclusión de una de estas $\mathcal{C}$-$n$-celdas. Por construcción, la restricción de $\varphi_i$ al sub-$\mathcal{C}$-espacio $\hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times S^{n-1}$ (es decir, el morfismo de pegado de esta celda) tiene su imagen dentro de $X_{n-1}$. Entonces $f_n \circ \varphi_i$ manda a $\hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times S^{n-1}$ a dentro de $B$. Vamos ver que $f_n \circ \varphi_i$ es homotópico relativo a $\hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times S^{n-1}$ a un morfismo cuya imagen está en $B$. A $f_n \circ \varphi_i : \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times D^n \to Y$ le corresponde, por la adjunción en la Proposición 1.13, una única función continua $D^n \to Y(c_i)$. Llamémosle $\psi_i$ a esta función. Se deduce de la naturalidad de esta adjunción que $\psi_i$ manda a $S^{n-1}$ a dentro de $B(c_i)$, es decir, que $\psi_i$ es una función $(D^n, S^{n-1}) \to (Y(c_i), B(c_i))$.

Por hipótesis, $(Y(c_i), B(c_i))$ es $n$-conexo, lo que implica que $\psi_i$ es homotópica, relativo a $S^{n-1}$, a una función cuya imagen está en $B(c_i)$. Sea $K'_i : D^n \times I \to Y(c_i)$ esta homotopía. Usando la adjunción en la otra dirección, esta homotopía induce un morfismo $K_i : \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times D^n \times I \to Y$. Por la naturalidad de la adjunción, $K_i$ hereda las propiedades correspondientes de $K'_i$, es decir que $K_i$ es una homotopía relativa a $\hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times S^{n-1}$ entre $f_n \circ \varphi_i$ y un morfismo cuya imagen está en $B$.

Ahora veamos cómo se usan las homotopías $K_i$ para construir la homotopía $K_n$ que pruebe que $f_n \simeq f_{n+1}$. La idea es usar las $K_i$ en las $\mathcal{C}$-$n$-celdas de $X \setminus A$, la homotopía constante en $X_{n-1} \cup A$, y luego usar la Proposición 1.28

para extender a todo $X$. Primero, con un argumento similar al de la prueba de la Proposición 1.28, se prueba que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I'_n} \hom_{\mathcal{C}}(c_i,-)\times S^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, hook] & X_{n-1}\cup A \arrow[d, hook] \\
\coprod_{i\in I'_n} \hom_{\mathcal{C}}(c_i,-)\times D^{n} \arrow[r] & X_{n}\cup A
\end{tikzcd}$$

es un pushout, donde $I'_n$ es el conjunto de índices que corresponden a $n$-celdas de $X\setminus A$. Por lo tanto también lo es el cuadrilátero superior del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & \coprod_{i\in I'_n} \hom_{\mathcal{C}}(c_i,-)\times S^{n-1}\times I \arrow[dl, hook'] \arrow[dr, hook] & \\
 & \coprod_{i\in I'_n} \hom_{\mathcal{C}}(c_i,-)\times D^{n}\times I \arrow[dr, hook] \arrow[dddr, bend right, "\coprod_{i\in I'_n} K_i"'] & & (X_{n-1}\cup A)\times I \arrow[dl, hook'] \arrow[dd, "\mathrm{pr}_1"] \\
 & & (X_n\cup A)\times I \arrow[dd, dashed, "K'_n"] & \\
 & & & X_{n-1}\cup A \arrow[dl, "f_n|_{X_{n-1}\cup A}"] \\
 & & Y &
\end{tikzcd}$$

Como cada $K_i$ es una homotopía relativa a $\hom_{\mathcal{C}}(c_i,-)\times S^{n-1}$ que parte de $f_n\circ\varphi_i$, el pentágono exterior de este diagrama conmuta, y por lo tanto existe un único $K'_n : (X_n\cup A)\times I\to Y$ que hace conmutar el diagrama. Como el cuadrilátero derecho conmuta, $K'_n$ es una homotopía relativa a $X_{n-1}\cup A$. Como el triángulo izquierdo conmuta y como cada $K_i$ es una homotopía a un morfismo cuya imagen está en $B$, $K'_n$ debe ser una homotopía a un morfismo cuya imagen está en $B$. Además como cada $K_i$ parte de $f_n\circ\varphi_i$, $K'_n$ debe partir de $f_n|_{X_n\cup A}$.

Para obtener una homotopía $X\times I\to Y$, basta con usar la propiedad de extensión de homotopías (que el par $\mathcal{C}$-CW $(X,A)$ cumple por la Proposición 1.28) y extender $K'_n$ a una homotopía $K_n : X\times I\to Y$ que parta de $f_n$. Como $K'_n$ ya estaba definida en $(X_n\cup A)\times I$ y $K_n$ es una extensión de esta, $K_n$ también cumple que es relativa a $X_{n-1}\cup A$ y que termina en un morfismo que manda a $X_n$ a $B$. Le llamamos $f_{n+1}$ a este morfismo.

Queda probada la afirmación. Ahora hay que concatenar todas las homotopías $K_n$ para terminar de probar este lema. Dado $n\in\mathbb{N}$, definimos $H_n : X\times I\to Y$ tal que

1. Para todo $0\le m\le n$, la restricción $H_n|_{X\times[1-2^m,1-2^{m+1}]}$ es igual a $K_m$ a menos de una reparametrización lineal.

2. $H_n$ es la homotopía constante en el intervalo $[1-2^{n+1},1]$.

Es decir que $H_n$ es una concatenación de $K_0,\dots,K_n$, y se hace constante a partir de $1-2^{n+1}$. Se ve que cada $H_n$ es una homotopía de $f=f_0$ a $f_{n+1}$. Notar que como cada $K_m$ es relativa a $A$, las $H_n$ también quedan relativas a $A$. Notar también que, por la definición de $H_n$, y como cada $K_m$ es relativa a $X_{m-1}$, se cumple que $H_n|_{X_k\times I} = H_k|_{X_k\times I}$ para todo $0\le k\le n$.

Entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_k \times I \arrow[r, "H_k|_{X_k\times I}"] \arrow[d, hook] & Y \\
X_n \times I \arrow[ur, bend right, "H_n|_{X_n\times I}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta para todo $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$. Como $X \times I = \operatorname{colím}_{n\to\infty} X_n \times I$, por la propiedad universal del colímite, existe un único morfismo $H : X \times I \to Y$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_n \times I \arrow[r, "H_n|_{X_n\times I}"] \arrow[d, hook] & Y \\
X \times I \arrow[ur, bend right, "H"'] &
\end{tikzcd}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. En otras palabras, tal que $H|_{X_n\times I} = H_n|_{X_n\times I}$. Como cada $H_n$ es una homotopía relativa a $A$, esto implica que $H$ deja fijo a cada $A_n = A \cap X_n$, lo que significa que $H$ deja fijo a $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Así que $H$ también es una homotopía relativa a $A$. Además, como cada $H_n$ es una homotopía de $f$ a un morfismo que manda el $n$-esqueleto a $B$, $H$ debe ser una homotopía de $f$ a un morfismo que manda cada $n$-esqueleto a $B$, es decir a un morfismo que manda a $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ a $B$.

$\square$

La siguiente definición viene de [DL98, Definición 3.3].

**Definición 1.30.** Un morfismo de $\mathcal{C}$-espacios $f : X \to Y$ es una **equivalencia de homotopía débil** si $f(c)$ es una equivalencia de homotopía débil para todo $c \in \mathcal{C}$. Aquí, una equivalencia de homotopía débil entre espacios es una función continua que induce isomorfismos en cada grupo de homotopía [ver por ejemplo Hat02, pág. 352].

Vamos a probar que, para el caso de los $\mathcal{C}$-CW-complejos libres, todas las equivalencias de homotopía débiles son equivalencias de homotopía (fuertes). Esto se conoce como el teorema de Whitehead. Para esto debemos definir una versión para morfismos entre $\mathcal{C}$-espacios del *mapping cylinder*. La definición es la extensión obvia de la definición clásica [ver por ejemplo Hat02, pág. 2]).

**Definición 1.31.** Dados dos $\mathcal{C}$-espacios $X, Y$ y un morfismo $f : X \to Y$, se define el **mapping cylinder** $M_f$ como el $\mathcal{C}$-espacio obtenido del pushout

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f"'] & X \times I \arrow[d] \\
Y \arrow[r] & M_f ,
\end{tikzcd}$$

donde el morfismo $i_1$ es tal que $i_1(c)(x) = (x, 1)$ para todo $c \in \mathcal{C}$ y $x \in X(c)$ (es fácil ver que esto define un morfismo de $\mathcal{C}$-espacios). Se puede probar que el morfismo $Y \to M_f$ es un isomorfismo sobre su imagen, y que $X$ es isomorfo a la imagen de $X \times \{0\}$ por el morfismo $X \times I \to M_f$. En lo que sigue vamos a identificar entonces a $Y$ con su imagen por $Y \to M_f$, y a $X$ con la imagen de $X \times \{0\}$ por $X \times I \to M_f$, escribiendo $X \subseteq M_f$ e $Y \subseteq M_f$.

**Observación 1.32.** Esta definición es compatible con la definición clásica de mapping cylinder, en el siguiente sentido: Dado $c \in \mathcal{C}$, tenemos que

$$\begin{tikzcd} X(c) \arrow[r, "i_1(c)"] \arrow[d, "f(c)"'] & X(c) \times I \arrow[d] \\ Y(c) \arrow[r] & M_f(c) \end{tikzcd}$$

es un pushout de espacios, así que $M_f(c) = M_{f(c)}$, el mapping cylinder (clásico) de la función continua $f(c)$.

Además, al igual que en el caso clásico, $M_f$ cumple que $Y$ es un retracto por deformación de $M_f$. Esto se prueba a partir de el hecho de que $X \times \{1\}$ es un retracto por deformación de $X \times I$ (lo cual se puede probar directamente) y usando la propiedad universal del pushout. Así que la inclusión $Y \hookrightarrow M_f$ es una equivalencia de homotopía, donde la inversa de homotopía $r : M_f \to Y$ está dada por la proyección $X \times I \to X$ y la identidad $Y \to Y$. Se puede ver que, si $i_X : X \hookrightarrow M_f$ es la inclusión, entonces $f = r \circ i_X$. Este hecho nos será útil en la prueba del teorema que sigue.

Usaremos el siguiente lema para luego probar el teorema de Whitehead en 1.34.

**Lema 1.33.** El par $(M_f, X \cup Y)$ tiene la propiedad de extensión de homotopías.

*Demostración.* Por la el Lema 1.26 basta probar que $M_f \times \{0\} \cup (X \cup Y) \times I$ es un retracto por deformación de $M_f \times I$. Dado que $I \times \{0\} \cup \{0,1\} \times I$ es un retracto por deformación de $I \times I$, es fácil probar que $(X \times I) \times \{0\} \cup (X \times \{0,1\}) \times I$ es un retracto por deformación de $(X \times I) \times I$. Este retracto está dado por una homotopía $H : (X \times I) \times I \times I \to (X \times I) \times I$. Tenemos un pushout

$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[r] \arrow[d] & (X \times I) \times I \arrow[d] \\ Y \times I \arrow[r] & M_f \times I \end{tikzcd}$$

obtenido de multiplicar por $I$ a todos los objetos y morfismos del pushout que define a $M_f$. Entonces, usando la propiedad universal del pushout, podemos definir una homotopía $M_f \times I \times I \to M_f \times I$ definiéndola en $(X \times I) \times I$ y en $Y \times I$ por separado: en $(X \times I) \times I$ usamos $H$ compuesta con el morfismo $(X \times I) \times I \to M_f \times I$ del diagrama de arriba, y en $Y \times I$ usamos la homotopía constante. Se puede aplicar la propiedad universal del pushout (es decir, estas definiciones son compatibles) porque $H$ es relativa a $(X \times I) \times \{0\} \cup (X \times \{0,1\}) \times I$. Entonces, por cómo definimos $H$, la homotopía $M_f \times I \times I \to M_f \times I$ resultante será el retracto por deformación que queremos.

□

Finalmente probamos una versión del teorema de Whitehead, como aparece en [DL98, Corolario 3.5].

**Teorema 1.34.** (Whitehead). Si $X, Y$ son $\mathcal{C}$-CW-complejos libres y $f : X \to Y$ es una equivalencia de homotopía débil, entonces $f$ es una equivalencia de homotopía.

*Demostración.* Reproducimos la prueba del caso clásico en [Hat02, pág. 347], con solo pequeñas modificaciones para adaptarla al caso general. La idea es reducir el problema a probar que $X$ es un retracto por deformación del mapping cylinder $M_f$, y probar esto último aplicando el Lema 1.29 y la propiedad de extensión de homotopías (la Proposición 1.28), entre otras cosas.

Sea $M_f$ el mapping cylinder de $f$. Como vimos en la observación 1.32, tenemos que $f = r \circ i_X$, donde $i_X : X \hookrightarrow M_f$ es la inclusión y $r : M_f \to Y$ es un retracto que es una equivalencia de homotopía. Entonces basta probar que $i_X$ es una equivalencia de homotopía (ya que entonces $f = r \circ i_X$ también lo será), y para esto es suficiente probar que $X$ es un retracto por deformación de $M_f$, por la observación 1.24. Así que tenemos que construir una homotopía $M_f \times I \to M_f$ que parta de la identidad y termine en un morfismo cuya imagen está contenida en $X$. Empezamos con una de la forma $(X \cup Y) \times I \to M_f$, que luego la extenderemos a todo $M_f \times I$.

Primero, notar que $X \cup Y$ es un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre, y que su inclusión en $M_f$ es un morfismo $i : (X \cup Y, X) \to (M_f, X)$. Como $M_f(c) = M_{f(c)}$ y $f(c)$ es una equivalencia de homotopía débil para todo $c \in \mathcal{C}$, se cumple que $\pi_n(M_f(c), X(c), x_0) = 0$ para todo $n$ y $x_0 \in X(c)$. Es decir que se cumplen las hipótesis del Lema 1.29, y obtenemos una homotopía $H$ relativa a $X$ que parte de la inclusión $i : (X \cup Y, X) \hookrightarrow (M_f, X)$ y llega a un morfismo cuya imagen está contenida en $X$. Como $(M_f, X \cup Y)$ tiene la propiedad de extensión de homotopías (por el Lema 1.33), y la inclusión $i : X \cup Y \hookrightarrow M_f$ es la restricción de la identidad $\mathrm{id}_{M_f} : M_f \to M_f$, podemos extender $H$ a una homotopía $H' : M_f \times I \to M_f$ que parta de la identidad. El hecho de que $H'$ extiende a $H$ implica que $H'$ es una homotopía, también relativa a $X$, que parte de la identidad y llega a un morfismo $g : M_f \to M_f$ que cumple que $g(X \cup Y) \subseteq X$. Pero no necesariamente se cumple que $g(M_f) \subseteq X$, que es lo que querríamos. En lo que sigue vamos a mostrar que sin embargo $g$ es homotópico a un morfismo que sí cumple esto.

Se puede probar que, como $X$ es un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre, también lo es $X \times I$, y además $(X \times I, X \times \{0,1\})$ es un par $\mathcal{C}$-CW libre. De la definición de $M_f$ tenemos un morfismo $j : X \times I \to M_f$ (el morfismo de la derecha en el pushout), composición $g \circ j$ (a la cual podemos ver como “la restricción de $g$ a $X \times I$”) es un morfismo $(X \times I, X \times \{0,1\}) \to (M_f, X)$. Podemos entonces aplicar otra vez el Lema 1.29 para obtener una homotopía $K : (X \times I) \times I \to M_f$ relativa a $X \times \{0,1\}$, que parta de $g \circ j$ y llegue a un morfismo cuya imagen está contenida en $X$. Podemos extender esta homotopía a una definida en todo $M_f$, definiendo a esta última en $Y$ como la homotopía constante. Específicamente, usamos la propiedad universal del pushout:

$$\begin{tikzcd}
 & X\times I \arrow[dl, "f\times \mathrm{id}_I"'] \arrow[dr, "i_1\times \mathrm{id}_I"] & \\
Y\times I \arrow[dr] \arrow[dd, "\mathrm{pr}_1"'] & & (X\times I)\times I \arrow[dl] \arrow[dddl, bend left, "K"] \\
 & M_f\times I \arrow[dd, dashed, "K'"] & \\
Y \arrow[d, hook] & & \\
M_f \arrow[r, "g"] & M_f &
\end{tikzcd}$$

En este diagrama, el cuadrilátero superior se obtiene del pushout de la definición de $M_f$ multiplicando por $I$, así que también es un pushout. Asumiendo que el hexágono exterior conmuta, se obtiene por la propiedad universal un único $K'$ que hace conmutar el diagrama. Veamos que $K'$ es la homotopía que queremos. Como $K$ era relativa a $X \times \{0,1\}$ (y en particular a $X \times \{0\}$) y conmuta el triángulo de la derecha, $K'$ es relativa a $X$. Como $K$ parte de $g \circ j$ y ambos lados del diagrama conmuta, se puede ver que entonces $K'$ parte de $g$. Y como $K$ llega a un morfismo con la imagen contenida en $X$, y $g(Y) \subseteq X$, se deduce que $K'$ llega a un morfismo cuya imagen está contenida en $X$. Entonces, concatenando las homotopías $H'$ y $K'$, obtenemos una homotopía relativa a $X$ desde la identidad $M_f \to M_f$ hasta un morfismo cuya imagen está en $X$, lo cual implica que $X$ es un retracto por deformación de $M_f$. Esto es lo que queríamos probar.

Finalmente, verificamos que el hexágono exterior realmente conmuta. Sea $c \in \mathcal{C}$ un objeto y $(x,t) \in X(c) \times I$ un punto. El camino izquierdo lleva a este punto a $(g \circ f)(c)(x)$, mientras que el derecho lo lleva a $K(c)((x,1),t)$. Como $K$ es relativa a $X \times \{0,1\}$ y en particular a $X \times \{1\}$, este último es igual a $K(c)((x,1),0)$, que es igual a $(g \circ j)(c)(x,1)$. Pero por la definición de $j$, se cumple que $j(c)(x,1) = f(c)(x)$, así que ambos caminos llevan al punto a $(g \circ f)(c)(x)$.

□

Como se puede ver los $\mathcal{C}$-CW-complejo libre cumplen ciertas propiedades que hacen que sea más fácil trabajar con ellos. En la siguiente sección veremos como sustituir un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre en lugar de un $\mathcal{C}$-espacio arbitrario.

## 1.5. Aproximaciones $\mathcal{C}$-CW

La siguiente definición es una versión un poco simplificada de la que aparece en [DL98, Definición 3.6] (en [DL98] lo definen para pares de $\mathcal{C}$-espacios, pero aquí lo hacemos para $\mathcal{C}$-espacios solos).

**Definición 1.35.** Sea $X$ un $\mathcal{C}$-espacio. Una **aproximación $\mathcal{C}$-CW**

$$f : Z \to X$$

consiste en un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre $Z$ junto con un morfismo de $\mathcal{C}$-espacios $f$ tal que $f$ es una equivalencia de homotopía débil.

En [DL98, Teorema 3.7] se prueba la existencia y unicidad de las aproximaciones $\mathcal{C}$-CW. Aquí haremos lo mismo pero adaptando las pruebas clásicas de [Hat02].

**Teorema 1.36.** Todo $\mathcal{C}$-espacio tiene una aproximación $\mathcal{C}$-CW.

*Demostración.* Sea $X$ un $\mathcal{C}$-espacio cualquiera. La idea es construir el $\mathcal{C}$-CW-complejo libre $Z$ y el morfismo $f : Z \to X$ inductivamente. Para cada $n \in \mathbb{N}$, construimos un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre $Z_n$ y un morfismo $f_n : Z_n \to X$ que cumple

1. $Z_n$ es de dimensión $n$, y si $k \leq n$, el $k$-esqueleto de $Z_n$ es $Z_k$ y $f_n|_{Z_k} = f_k$.
2. Para todo $c \in \mathcal{C}$, y para todo $z_0 \in Z_n(c)$, el morfismo inducido

$$(f_n(c))_* : \pi_k(Z_n(c), z_0) \to \pi_k(X(c), f_n(c)(z_0))$$

es un isomorfismo para $0 \leq k < n$ y sobreyectivo para $k = n$.

Construimos a cada $Z_n$ a partir de $Z_{n-1}$ pegando celdas. Luego tomaremos colímite para obtener $f : Z \to X$, y veremos que esta cumple las propiedades que queremos. Nos basamos en la prueba de [Hat02, págs. 352-353], solo que en nuestro caso usamos la adjunción en la Proposición 1.13 en cada paso para obtener morfismos de pegado que sean morfismos de $\mathcal{C}$-espacios, en lugar de funciones continuas.

Veamos primero el caso base $n = 0$. El espacio $Z_0$ será una unión de $\mathcal{C}$-0-celdas libres, y la condición que debe cumplir $f_0 : Z_0 \to X$ es únicamente que

$$(f_0(c))_* : \pi_0(Z_0(c), z_0) \to \pi_0(X(c), f_0(c)(z_0))$$

sea sobreyectiva para todo $c \in \mathcal{C}$ y $z_0 \in Z_0(c)$. Esto es equivalente a decir que la imagen de $f_0(c)$ intersecta a todas las componentes conexas de $X(c)$, para todo $c \in \mathcal{C}$. Veamos cómo se logra esto.

Para cada $c \in \mathcal{C}$, sea el $\mathcal{A}_c$ el conjunto de componentes conexas por caminos de $X(c)$, y sea $\{x_{c,A}\}_{A \in \mathcal{A}_c}$ un conjunto tal que $x_{c,A} \in A \subseteq X(c)$ para todo $A \in \mathcal{A}_c$. Dado $A \in \mathcal{A}_c$, sea $\psi_{c,A} : D^0 \to X(c)$ la función tal que $\psi_{c,A}(0) = x_{c,A}$, donde 0 es el único punto de $D^0$. Por la adjunción en la Proposición 1.13, a cada $\psi_{c,A}$ le corresponde un morfismo de $\mathcal{C}$-espacios $\varphi_{c,A} : \hom_{\mathcal{C}}(c, -) \times D^0 \to X$, y se puede ver que este $\varphi_{c,A}$ cumple que $x_{c,A}$ está contenido en la imagen de $\varphi_{c,A}(c)$ (específicamente, $\varphi_{c,A}(c)(0, \mathrm{id}_c) = x_{c,A}$). Definimos a $Z_0$ como

$$Z_0 = \coprod_{c \in \mathcal{C},\, A \in \mathcal{A}_c} \hom_{\mathcal{C}}(c, -) \times D^0 \,,$$

y a $f_0$ como

$$f_0 = \coprod_{c \in \mathcal{C},\, A \in \mathcal{A}_c} \varphi_{c,A} \,.$$

Por definición, cada $x_{c,A}$ pertenece a la imagen de $f_0(c)$, así que $f_0$ cumple lo que queríamos.

Ahora veamos el paso inductivo. Dado $n \geq 1$, supongamos que ya tenemos definidos a $Z_{n-1}$ y $f_{n-1} : Z_{n-1} \to X$, y queremos construir a $Z_n$ y a $f_n : Z_n \to X$. Primero, para cada $c \in \mathcal{C}$, elijamos un conjunto $\{z_{c,\ell}\}_{\ell \in \Lambda_c} \subseteq Z_{n-1}(c)$ que tenga un punto en cada componente conexa por caminos de $Z_{n-1}(c)$, donde $\Lambda_c$ es un conjunto de índices. Podemos asumir que $\{z_{c,\ell}\}_{\ell \in \Lambda_c}$ es una unión de 0-celdas de $Z_{n-1}(c)$, donde vemos a $Z_{n-1}(c)$ como un CW-complejo clásico. Usaremos a estos puntos $z_{c,\ell}$ como puntos base sobre los cuales pegaremos celdas nuevas para formar a $Z_n$. La primera parte de la construcción consistirá en definir todos los morfismos que vamos a necesitar. Estos son los morfismos de pegado que usaremos para definir $Z_n$, junto con algunos morfismos que usaremos para extender $f_{n-1}$ a $f_n$.

Para cada $c \in \mathcal{C}$ y $\ell \in \Lambda_c$, sea $\{[\psi_{c,\ell,\alpha}]\}_{\alpha \in A_{c,\ell}}$ un conjunto generador del kernel del morfismo

$$(f_{n-1}(c))_* : \pi_{n-1}(Z_{n-1}(c), z_{c,\ell}) \to \pi_{n-1}(X(c), f_{n-1}(c)(z_{c,\ell}))\,,$$

donde $A_{c,\ell}$ es un conjunto de índices. Podemos elegir a los representantes $\psi_{c,\ell,\alpha} : S^{n-1} \to Z_{n-1}(c)$ de modo que sean funciones celulares, donde $S^{n-1}$ tiene su estructura CW estándar con una sola 0-celda. Esto se da por el teorema de aproximación celular para funciones continuas [ver Hat02, Teorema 4.8]. Las funciones $\psi_{c,\ell,\alpha}$ inducen bajo la adjunción de la Proposición 1.13 morfismos

$$\varphi_{c,\ell,\alpha} : \hom_{\mathcal{C}}(c,-) \times S^{n-1} \to Z_{n-1} \,.$$

Por cómo elegimos a $\psi_{c,\ell,\alpha}$, se da que $f_{n-1}(c) \circ \psi_{c,\ell,\alpha} : S^{n-1} \to X(c)$ es homotópicamente trivial, por lo que existe una función $f'_{c,\ell,\alpha} : D^n \to X(c)$ que extiende a $f_{n-1}(c) \circ \psi_{c,\ell,\alpha}$. Esta induce un morfismo

$$f_{c,\ell,\alpha} : \hom_{\mathcal{C}}(c,-) \times D^n \to X$$

por la adjunción, y se puede ver que $f_{c,\ell,\alpha}$ extiende a $f_{n-1} \circ \varphi_{c,\ell,\alpha}$. Usaremos a $\varphi_{c,\ell,\alpha}$ más tarde como morfismo de pegado de una $\mathcal{C}$-$n$-celda libre, y a $f_{c,\ell,\alpha}$ para definir $f_n$ en el interior de esta celda. Estas celdas sirven para asegurar la condición de inyectividad de $(f_n(c))_*$.

Ahora, para cada $c \in \mathcal{C}$ y $\ell \in \Lambda_c$, sea $\{[g'_{c,\ell,\gamma}]\}_{\gamma \in \Gamma_{c,\ell}}$ un conjunto generador de

$$\pi_n(X(c), f_{n-1}(c)(z_{c,\ell}))\,,$$

donde $\Gamma_{c,\ell}$ es un conjunto de índices. Por aproximación celular [Hat02, Teorema 4.8] podemos hacer que cada representante $g'_{c,\ell,\gamma} : S^n \to X(c)$ mande el punto base de $S^n$ al punto $f_{n-1}(c)(z_{c,\ell})$. Las funciones $g'_{c,\ell,\gamma}$ inducen morfismos $g_{c,\ell,\gamma} : \hom_{\mathcal{C}}(c,-) \times S^n \to X$. Sea $q : D^n \to S^n$ una función que lleva el borde de $D^n$ al punto base de $S^n$ y es un homeomorfismo en el interior de $D^n$. Se define

$$f_{c,\ell,\gamma} = g_{c,\ell,\gamma} \circ \hom_{\mathcal{C}}(c,-) \times q : \hom_{\mathcal{C}}(c,-) \times D^n \to X\,.$$

Sea $k'_{c,\ell} : S^{n-1} \to Z_{n-1}(c)$ la función constante que vale $z_{c,\ell}$ en todo punto. Se define $k_{c,\ell} : \hom_{\mathcal{C}}(c,-) \times S^{n-1} \to Z_{n-1}$ a partir de $k'_{c,\ell}$ usando la adjunción. Se puede ver entonces (por ejemplo, usando la naturalidad de la adjunción (1.16)) que cada $f_{c,\ell,\gamma}$ extiende a $f_{n-1} \circ k_{c,\ell}$. Usaremos a los $k_{c,\ell}$ como morfismos de pegado de $\mathcal{C}$-$n$-celdas, y a los $f_{c,\ell,\gamma}$ en la definición de $f_n$. Estas celdas nos asegurarán la condición de sobreyectividad.

Ya tenemos todos los ingredientes necesarios para la definición de $Z_n$ y de $f_n : Z_n \to X$. Se define $Z_n$ a partir del pushout

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{c,\ell,\alpha} B_c(S^{n-1}) \amalg \coprod_{c,\ell,\gamma} B_c(S^{n-1}) \arrow[r, "\coprod \varphi_{c,\ell,\alpha} \amalg \coprod k_{c,\ell}"] \arrow[d, hook] & Z_{n-1} \arrow[d] \\
\coprod_{c,\ell,\alpha} B_c(D^n) \amalg \coprod_{c,\ell,\gamma} B_c(D^n) \arrow[r] & Z_n\,,
\end{tikzcd}$$

donde los coproductos a la izquierda del $\amalg$ son sobre todo $c \in \mathcal{C}$, $\ell \in \Lambda_c$ y $\alpha \in A_{c,\ell}$, y los de la derecha son sobre $c \in \mathcal{C}$, $\ell \in \Lambda_c$ y $\gamma \in \Gamma_{c,\ell}$; y recordamos que $B_c(X) = \hom_{\mathcal{C}}(c,-) \times X$ (volvemos a esta notación ahora para ahorrar espacio). Definimos a $f_n : Z_n \to X$ usando la propiedad universal del pushout:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{c,\ell,\alpha} B_c(S^{n-1}) \amalg \coprod_{c,\ell,\gamma} B_c(S^{n-1}) \arrow[r, "\coprod \varphi_{c,\ell,\alpha} \amalg \coprod k_{c,\ell}"] \arrow[d] & Z_{n-1} \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "f_{n-1}"] & \\
\coprod_{c,\ell,\alpha} B_c(D^n) \amalg \coprod_{c,\ell,\gamma} B_c(D^n) \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "\coprod f_{c,\ell,\alpha} \amalg \coprod f_{c,\ell,\gamma}"'] & Z_n \arrow[dr, dashed, "f_n"] & \\
 & & X\,.
\end{tikzcd}$$

El cuadrilátero exterior conmuta porque como vimos antes cada $f_{c,\ell,\alpha}$ extiende a $f_{n-1} \circ \varphi_{c,\ell,\alpha}$ y cada $f_{c,\ell,\gamma}$ extiende $f_{n-1} \circ k_{c,\ell}$. Así que obtenemos el morfismo único $f_n$ que hace conmutar el diagrama.

Veamos que $f_n : Z_n \to X$ cumple la propiedad 2 de arriba. Dividimos la prueba en tres casos: para $k \leq n-2$, para $k = n-1$ y para $k = n$. Primero, sea $k \leq n-2$. Hay que probar que

$$(f_n(c))_* : \pi_k(Z_n(c), z_0) \to \pi_k(X(c), f_n(c)(z_0))$$

es un isomorfismo para todo $z_0 \in Z_n(c)$. Como en la construcción no le agregamos nuevas componentes conexas por caminos a $Z_{n-1}(c)$, basta probar esto para todo $z_0 \in Z_{n-1}(c)$ [ver Hat02, pág. 345]. Notar que $Z_n(c)$ se construye a partir de $Z_{n-1}(c)$ pegando $n$-celdas (para cada $n$-celda libre que le pegamos a $Z_{n-1}$, se le pegan posiblemente muchas $n$-celdas clásicas a $Z_{n-1}(c)$) y que $Z_{n-1}(c)$ es el $(n-1)$-esqueleto de $Z_n(c)$. Para los CW-complejos, el $k$-ésimo grupo de homotopía solo depende del $(k+1)$-esqueleto [ver por ejemplo Hat02, Corolario 4.12]. Entonces la inclusión $Z_{n-1}(c) \hookrightarrow Z_n(c)$ induce un isomorfismo en estos grupos. Así que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\pi_k(Z_{n-1}(c), z_0) \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, bend left, "(f_{n-1}(c))_*"] & \\
\pi_k(Z_n(c), z_0) \arrow[r, "(f_n(c))_*"'] & \pi_k(X(c), f_n(c)(z_0)),
\end{tikzcd}$$

donde el morfismo vertical es el inducido por la inclusión. Por la hipótesis de inducción, $(f_{n-1}(c))_*$ era un isomorfismo, así que $(f_n(c))_*$ también debe serlo.

Ahora sea $k = n-1$. En este caso también hay que probar que $(f_n(c))_*$ es un isomorfismo, pero hay que ver la sobreyectividad y la inyectividad por separado. Para la sobreyectividad usamos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\pi_{n-1}(Z_{n-1}(c), z_0) \arrow[d] \arrow[dr, bend left, "(f_{n-1}(c))_*"] & \\
\pi_{n-1}(Z_n(c), z_0) \arrow[r, "(f_n(c))_*"'] & \pi_{n-1}(X(c), f_n(c)(z_0)),
\end{tikzcd}$$

donde el morfismo vertical es el inducido por la inclusión. Como por hipótesis de inducción $(f_{n-1}(c))_*$ era sobreyectivo, se deduce que $(f_n(c))_*$ también lo es. Para la inyectividad van a jugar su rol las celdas que pegamos a lo largo de los morfismos $\varphi_{c,\ell,\alpha}$. Notemos igual que antes que no le agregamos ninguna componente conexa nueva a $Z_{n-1}(c)$ (sí podemos haber reducido el número de componentes conexas en el caso $n = 1$). Entonces, por cómo elegimos al conjunto $\{z_{c,\ell}\}_{\ell \in \Lambda_c}$, basta probar que

$$(f_n(c))_* : \pi_{n-1}(Z_n(c), z_{c,\ell}) \to \pi_{n-1}(X(c), f_n(c)(z_{c,\ell}))$$

es inyectivo para todo $\ell \in \Lambda_c$ (esto es otra vez por [Hat02, pág. 345]). Supongamos que tenemos un elemento $[\psi]$ en el kernel de este morfismo. Por el teorema de aproximación celular, $\psi : S^{n-1} \to Z_n(c)$ es homotópica a una función cuya imagen está contenida en el $(n-1)$-esqueleto de $Z_n(c)$, es decir en $Z_{n-1}(c)$. Es decir, $\psi$ es homotópica a una función de la forma $i_{n-1} \circ \psi'$, donde

$i_{n-1} : Z_{n-1}(c) \to Z_n(c)$ es la inclusión, y $\psi'$ es representante de un elemento en el kernel de

$$(f_{n-1}(c))_* : \pi_{n-1}(Z_{n-1}(c), z_{c,\ell}) \to \pi_{n-1}(X(c), f_n(c)(z_{c,\ell}))\,,$$

debido a que $f_n(c)$ extiende $f_{n-1}(c)$. Como habíamos elegido a $\{[\psi_{c,\ell,\alpha}]\}_{\alpha \in A_{c,\ell}}$ como un generador de este kernel, se cumple que $[\psi'] = [\psi_{c,\ell,\alpha_1}] \cdots [\psi_{c,\ell,\alpha_m}]$, para algunos $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in A_{c,\ell}$. Así que, para probar que el elemento

$$\begin{aligned}[\psi] = [i_{n-1} \circ \psi'] &= [i_{n-1} \circ \psi_{c,\ell,\alpha_1}] \cdots [i_{n-1} \circ \psi_{c,\ell,\alpha_m}] \\ &\in \pi_{n-1}(Z_n(c), z_{c,\ell})\end{aligned}$$

es trivial, basta con probar que $[i_{n-1} \circ \psi_{c,\ell,\alpha}]$ es trivial para todo $\alpha \in A_{c,\ell}$. Esto se cumple porque, para cada $\alpha \in A_{c,\ell}$, le pegamos a $Z_{n-1}$ una $n$-celda libre a lo largo de $\varphi_{c,\ell,\alpha}$, lo que implica que le pegamos a $Z_{n-1}(c)$ por lo menos una $n$-celda clásica a lo largo de $\psi_{c,\ell,\alpha}$: esta es la imagen de $\{\mathrm{id}_c\} \times \operatorname{int} D^n$. Es decir que $i_{n-1} \circ \psi_{c,\ell,\alpha} : S^{n-1} \to Z_n(c)$ se puede extender a una función continua $D^n \to Z_n(c)$, lo que significa que $[i_{n-1} \circ \psi_{c,\ell,\alpha}] \in \pi_{n-1}(Z_n(c), z_{c,\ell})$ es trivial [ver Hat02, pág. 346].

Finalmente, queda el caso $k = n$. Hay que probar que

$$(f_n(c))_* : \pi_n(Z_n(c), z_0) \to \pi_n(X(c), f_n(c)(z_0))$$

es sobreyectivo para todo $c \in \mathcal{C}$ y $z_0 \in Z_n(c)$. Por el mismo argumento de arriba podemos sustituir a $z_0$ con $z_{c,\ell}$ para $\ell \in \Lambda_c$. Aquí es que se usan las celdas que pegamos a lo largo de los morfismos $k_{c,\ell}$. Como $\{[g'_{c,\ell,\gamma}]\}_{\gamma \in \Gamma_{c,\ell}}$ era un generador de $\pi_n(X(c), f_{n-1}(c)(z_{c,\ell})) = \pi_n(X(c), f_n(c)(z_{c,\ell}))$, basta probar que cada $g'_{c,\ell,\gamma} : S^n \to X(c)$ es de la forma $f_n(c) \circ h$, con $h : S^n \to Z_n(c)$ una función continua que manda al punto base de $S^n$ a $z_{c,\ell}$. Visto en términos de funciones que parten de $D^n$, hay que probar que

$$g'_{c,\ell,\gamma} \circ q : D^n \to X(c)$$

es de la forma $f_n(c) \circ h'$, con $h' : D^n \to Z_n(c)$ una función tal que $h'(S^{n-1}) = \{z_{c,\ell}\}$. Sea $\eta : \hom_{\mathcal{C}}(c, -) \times D^n \to Z_n$ el morfismo de inclusión de la $n$-celda libre con índice $(c, \ell, \gamma)$, es decir la que cumple que $f_n \circ \eta = f_{c,\ell,\gamma}$. Entonces, usando la naturalidad de la adjunción (1.16),

$$f_n(c) \circ T(\eta) = T(f_n \circ \eta) = T(f_{c,\ell,\gamma})\,.$$

Por definición tenemos que además $f_{c,\ell,\gamma} = g_{c,\ell,\gamma} \circ \hom_{\mathcal{C}}(c, -) \times q$, así que usando nuevamente (1.16),

$$T(f_{c,\ell,\gamma}) = T(g_{c,\ell,\gamma} \circ \hom_{\mathcal{C}}(c, -) \times q) = T(g_{c,\ell,\gamma}) \circ q = g'_{c,\ell,\gamma} \circ q\,.$$

Así que $T(\eta)$ es la $h'$ que queríamos.

Ahora que tenemos definidas aproximaciones $f_n : Z_n \to X$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar colímite: se define $Z = \operatorname{colím}_{n \to \infty} Z_n$. Como cada $f_n$ extiende a las $f_k$ anteriores, podemos definir $f = \operatorname{colím}_{n \to \infty} f_n$. Es decir, $f$ es el único morfismo que cumple que

$$\begin{tikzcd} Z_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, hook] & X \\ Z \arrow[ur, bend right, "f"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta para todo $n$. Sea $c \in \mathcal{C}$. Como el $n$-ésimo grupo de homotopía solo depende del $(n+1)$-esqueleto [ver Hat02, Corolario 4.12], y el $(n+1)$-esqueleto de $Z(c)$ es $Z_{n+1}(c)$, se cumple que la inclusión $Z_{n+1}(c) \hookrightarrow Z(c)$ induce un isomorfismo en el $n$-ésimo grupo de homotopía para todo $n$. Sea $z_0 \in Z_{n+1}(c)$. Como

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(Z_{n+1}(c), z_0) \arrow[r, "(f_{n+1}(c))_*"] \arrow[d, "\cong"'] & \pi_n(X(c), f(c)(z_0)) \\
\pi_n(Z(c), z_0) \arrow[ur, bend right, "(f(c))_*"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta y $(f_{n+1}(c))_*$ es un isomorfismo (por cómo construimos a $f_{n+1}$), entonces $(f(c))_*$ también lo es. Como $Z_{n+1}(c)$ ya corta todas las componentes conexas de $Z(c)$, esto es suficiente para probar que $f(c)$ es una equivalencia de homotopía débil. Entonces queda probado que $f$ es una equivalencia de homotopía débil.

□

Probamos entonces la existencia de las aproximaciones $\mathcal{C}$-CW. Ahora veremos que estas también cumplen una propiedad de unicidad. La siguiente proposición corresponde a [DL98, Teorema 3.7.2].

**Proposición 1.37.** Sean $f : Z \to X$ y $f' : Z' \to X'$ aproximaciones $\mathcal{C}$-CW. Sea $g : X \to X'$ un morfismo de $\mathcal{C}$-espacios. Existe un morfismo de $\mathcal{C}$-espacios $h : Z \to Z'$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "g"] \\
Z' \arrow[r, "f'"] & X'
\end{tikzcd}$$

conmuta a menos de homotopía. Además, este morfismo $h$ es el único morfismo, a menos de homotopía, que satisface esto.

*Demostración.* La prueba es una versión simplificada de la que se encuentra en [Hat02, Proposición 4.18], adaptada al caso de los $\mathcal{C}$-espacios. Sea $M_{f'}$ el mapping cylinder de $f'$. Como $f'$ es una equivalencia de homotopía débil, se da que $\pi_n(M_{f'}(c), Z'(c), z'_0)$ es trivial para todo $c \in \mathcal{C}$, $n \in \mathbb{N}$ y $z'_0 \in Z'(c)$, igual que en la prueba del Teorema 1.34. Sean $i_{X'} : X' \hookrightarrow M_{f'}$ e $i_{Z'} : X' \hookrightarrow M_{f'}$ las inclusiones. Entonces tenemos un morfismo

$$i_{X'} \circ g \circ f : (Z, \varnothing) \to (M_{f'}, Z')\,.$$

Como $(Z, \varnothing)$ es un par $\mathcal{C}$-CW, y por el Lema 1.29, existe una homotopía de este morfismo a uno cuya imagen está contenida en $Z'$. Es decir, tenemos un morfismo $h : Z \to Z'$, y una homotopía $H : Z \times I \to M_{f'}$ que prueba que

$$i_{X'} \circ g \circ f \simeq i_{Z'} \circ h\,.$$

Sea $r : M_{f'} \to X'$ la proyección, como en la observación 1.32. Se deduce de lo anterior que

$$r \circ i_{X'} \circ g \circ f \simeq r \circ i_{Z'} \circ h\,,$$

pero $r \circ i_{X'} = \mathrm{id}_{X'}$ y $r \circ i_{Z'} = f'$ (como vimos en la observación 1.32), así que queda probado que $g \circ f \simeq f' \circ h$, que es la primera parte de la proposición.

Ahora supongamos que tenemos dos morfismos $h_0, h_1 : Z \to Z'$ tales que

$$f' \circ h_0 \simeq f' \circ h_1 \simeq g \circ f \,.$$

Por la observación 1.32 tenemos una homotopía $\mathrm{id}_{M_{f'}} \simeq i_{X'} \circ r$. Esta induce homotopías

$$\begin{aligned} i_{Z'} \circ h_0 &= \mathrm{id}_{M_{f'}} \circ i_{Z'} \circ h_0 \simeq i_{X'} \circ r \circ i_{Z'} \circ h_0 = i_{X'} \circ f' \circ h_0 \,, \\ i_{Z'} \circ h_1 &= \mathrm{id}_{M_{f'}} \circ i_{Z'} \circ h_1 \simeq i_{X'} \circ r \circ i_{Z'} \circ h_1 = i_{X'} \circ f' \circ h_1 \,, \end{aligned}$$

y como $f' \circ h_0 \simeq f' \circ h_1$, esto implica que $i_{Z'} \circ h_0 \simeq i_{Z'} \circ h_1$. Sea $K : Z \times I \to M_{f'}$ la homotopía que prueba que $i_{Z'} \circ h_0 \simeq i_{Z'} \circ h_1$. Se puede ver que $(Z \times I, Z \times \{0,1\})$ es un par $\mathcal{C}$-CW, y que $K$ es un morfismo

$$K : (Z \times I, Z \times \{0,1\}) \to (M_{f'}, Z') \,.$$

Otra vez usando el Lema 1.29, se obtiene que $K$ es homotópica relativo a $Z \times \{0,1\}$ a un morfismo $K'$ cuya imagen está contenida en $Z'$. Como entonces $K'|_{Z \times \{0,1\}} = K|_{Z \times \{0,1\}}$, se ve que $K'$ también es una homotopía entre $i_{Z'} \circ h_0$ e $i_{Z'} \circ h_1$, pero como su imagen está contenida en $Z'$ se concluye que $K' = i_{Z'} \circ H$, donde $H : Z \times I \to Z'$ es una homotopía entre $h_0$ y $h_1$.

□

Se deduce lo siguiente:

**Corolario 1.38.** Las aproximaciones $\mathcal{C}$-CW son únicas a menos de equivalencia de homotopía.

*Demostración.* Adaptamos el enunciado y la prueba de [Hat02, Corolario 4.19]. Sea $X$ un $\mathcal{C}$-espacio y $f : Z \to X$ y $f' : Z' \to X$ aproximaciones $\mathcal{C}$-CW. Usando la Proposición 1.37 dos veces con $g = \mathrm{id}_X$ obtenemos morfismos $h : Z \to Z'$ y $h' : Z' \to Z$, que cumplen que $f \simeq f' \circ h$ y $f' \simeq f \circ h'$ respectivamente. Entonces $f \simeq f \circ h' \circ h$ y $f' \simeq f' \circ h \circ h'$, es decir que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle h' \circ h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_X} \\ Z & \xrightarrow{f} & X \,, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{f'} & X \\ {\scriptstyle h \circ h'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_X} \\ Z' & \xrightarrow{f'} & X \end{array}$$

conmutan a menos de homotopía. Como $\mathrm{id}_Z$ y $\mathrm{id}_{Z'}$ respectivamente también hacen conmutar estos diagramas a menos de homotopía (poniéndolos en lugar de $h' \circ h$ y $h \circ h'$ respectivamente), se deduce de la unicidad en la Proposición 1.37 que $h' \circ h \simeq \mathrm{id}_Z$ y que $h \circ h' \simeq \mathrm{id}_{Z'}$, es decir que $Z$ y $Z'$ son equivalentes de homotopía.

□

# 2. Teorías de homología

En este capítulo introducimos el concepto de teoría de homología para $\mathcal{C}$-espacios, y mostramos una herramienta importante para su cálculo, las sucesiones espectrales. En la Sección 2.1 damos la definición de teoría de homología y probamos algunas propiedades básicas, como la existencia de la sucesión de Mayer-Vietoris. En la Sección 2.2 probamos que las teorías de homología conmutan con los colímites, lo cual es una propiedad importante para las siguientes secciones. En la Sección 2.3, dado un $\mathcal{C}$-espacio $X$ y una teoría de homología, probamos la existencia de una cierta estructura que ayuda en el cálculo de esta homología. Esta resulta ser un ejemplo de algo llamado *sucesión espectral*. Usamos esta motivación para dar la definición de sucesión espectral en general. En la Sección 2.4 mejoramos este resultado en el caso de que $X$ es un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre, probando que la sucesión espectral resulta más fácil de calcular.

El objetivo principal del capítulo es reproducir el Teorema 4.7(1) y el comentario que aparece en la pág. 236 de [DL98], lo cual hacemos en las Secciones 2.3 y 2.4 respectivamente. Sin embargo, nos basamos más bien en [Swi02, Capítulos 7, 15] para la presentación y las pruebas de este capítulo. En particular, hacemos todo partiendo de los axiomas de homología, en lugar de partir de homología con coeficientes en un espectro como lo hacen en [DL98, Sección 4]. En la Sección 2.4 también nos apoyamos en [Lüc20] para algunas partes.

## 2.1. Definición y propiedades básicas

En esta sección veremos la definición de teoría de homología para $\mathcal{C}$-espacios y probaremos algunas propiedades básicas, incluyendo la existencia de dos sucesiones exactas largas: la sucesión exacta asociada a una terna y la sucesión de Mayer-Vietoris.

Las siguientes dos definiciones vienen de [Swi02, Definición 7.1], las adaptamos para el caso de $\mathcal{C}$-espacios de la forma obvia.

**Definición 2.1.** La **categoría de pares de $\mathcal{C}$-espacios** $(\mathcal{C}\text{-Top})^2$ es la categoría cuyos objetos son pares de $\mathcal{C}$-espacios $(X, A)$ (con $A \subseteq X$ un sub-$\mathcal{C}$-espacio) y cuyos morfismos son morfismos $f : (X, A) \to (Y, B)$. Se define el **funtor restricción** $R : (\mathcal{C}\text{-Top})^2 \to (\mathcal{C}\text{-Top})^2$ tal que $R(X, A) = (A, \varnothing)$, y tal que dado $f : (X, A) \to (Y, B)$ un morfismo, $R(f) = f|_A : (A, \varnothing) \to (B, \varnothing)$.

**Definición 2.2.** Se dice que dos morfismos $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ son **homotópicos** como morfismos de pares si $f \simeq g$ a través de una homotopía $H : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$. Se dice que $f : (X, A) \to (Y, B)$ es una **equivalencia de homotopía débil** (de pares) si tanto $f : X \to Y$ como $f|_A : A \to B$ son equivalencias de homotopía débiles.

Los siguientes términos nos serán útiles en lo que sigue. Los tomamos de [Swi02, Secciones 3.19, 6.16].

**Definición 2.3.** Una **terna** $(X, A, B)$ consiste en un $\mathcal{C}$-espacio $X$ junto con dos sub-$\mathcal{C}$-espacios $B \subseteq A \subseteq X$. Una **tríada** $(X; A, B)$ consiste en un $\mathcal{C}$-espacio $X$ junto con dos sub-$\mathcal{C}$-espacios $A, B \subseteq X$ tales que $A \cup B = X$. Si $X$ es un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre y $A$ y $B$ son subcomplejos, estas se llaman **terna $\mathcal{C}$-CW** y **tríada $\mathcal{C}$-CW** respectivamente.

Hay dos tipos de teorías de homología: reducida y no reducida. Aquí presentamos solo las no reducidas por conveniencia. De todos modos hay varias definiciones equivalentes de estas, y además distintas presentaciones a veces difieren en cuáles axiomas se consideran parte de la definición en sí y cuáles se mencionan por separado. La siguiente definición tiene la ventaja de que se asemeja a la versión para $G$-espacios que se encuentra en [Lüc20, Definición 10.1], lo cual nos será útil en el siguiente capítulo. Sin embargo tomamos algunos aspectos de la presentación de [Swi02, Definición 7.1], ya que este el libro en el que nos basamos principalmente en este capítulo.

**Definición 2.4.** Una **teoría de homología no reducida** es una sucesión de funtores $h_n : (\mathcal{C}\text{-Top})^2 \to \text{Ab}$ para $n \in \mathbb{Z}$, junto con transformaciones naturales $\partial_n : h_n \to h_{n-1} \circ R$ para $n \in \mathbb{Z}$, que satisfacen los siguientes axiomas:

1. *Homotopía*: Si $f \simeq g$ como morfismos de pares, entonces $h_n(f) = h_n(g)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

2. *Exactitud*: Sea $(X, A) \in (\mathcal{C}\text{-Top})^2$, y sean

$$\begin{aligned} i &: (A, \varnothing) \to (X, \varnothing) \,, \\ j &: (X, \varnothing) \to (X, A) \end{aligned}$$

   las inclusiones. Entonces la sucesión

$$\cdots \longrightarrow h_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}(X,A)} h_n(A, \varnothing) \xrightarrow{h_n(i)} h_n(X, \varnothing) \xrightarrow{h_n(j)} h_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n(X,A)} \cdots$$

   es exacta.

3. *Escisión*: Sea $(X; A, B)$ una tríada $\mathcal{C}$-CW. Entonces el morfismo inclusión $j : (A, A \cap B) \to (X, B)$ induce un isomorfismo

$$h_n(j) : h_n(A, A \cap B) \to h_n(X, B)$$

   para todo $n \in \mathbb{Z}$.

4. *Unión disjunta*: Sea $((X_\alpha, A_\alpha))_{\alpha \in I}$ una colección de pares de $\mathcal{C}$-espacios, y sea $(X, A) = (\coprod_\alpha X_\alpha, \coprod_\alpha A_\alpha)$ su unión disjunta (esto también se puede escribir como $\coprod_\alpha (X_\alpha, A_\alpha)$). Entonces las inclusiones $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow X$ inducen un isomorfismo

$$\bigoplus_\alpha h_n(i_\alpha) : \bigoplus_\alpha h_n(X_\alpha, A_\alpha) \to h_n(X, A)$$

   para todo $n \in \mathbb{Z}$.

5. *Equivalencia de homotopía débil*: Sea $f : (X, A) \to (Y, B)$ una equivalencia de homotopía débil de pares. Entonces $h_n(f) : h_n(X, A) \to h_n(Y, B)$ es un isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Los morfismos $\partial_n(X, A)$ se llaman **morfismos de borde**. De ahora en adelante vamos a escribir $f_*$ en lugar de $h_n(f)$ y $\partial$ en lugar de $\partial_n(X, A)$.

Primero probaremos algunas propiedades que cumple cualquier teoría de homología no reducida $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Adaptamos las siguientes proposiciones de [Swi02, 7.10, 7.11].

**Proposición 2.5.** Si $X$ es un $\mathcal{C}$-espacio, entonces $h_n(X,X)=0$.

*Demostración.* Miremos parte de la sucesión exacta larga para $(X,X)$:

$$h_n(X,\varnothing) \xrightarrow[\cong]{i_*} h_n(X,\varnothing) \xrightarrow[0]{j_*} h_n(X,X) \xrightarrow[0]{\partial} h_{n-1}(X,\varnothing) \xrightarrow[\cong]{i_*} h_{n-1}(X,\varnothing)\,.$$

La inclusión $i:(X,\varnothing)\to(X,\varnothing)$ es la identidad, por lo tanto $i_*:h_n(X,\varnothing)\to h_n(X,\varnothing)$ e $i_*:h_{n-1}(X,\varnothing)\to h_{n-1}(X,\varnothing)$ también son los respectivos morfismos identidad (y por lo tanto son isomorfismos). En el lado izquierdo tenemos que $\ker j_* = \operatorname{im} i_* = h_n(X,\varnothing)$, y por lo tanto $j_*=0$. En el derecho $\operatorname{im}\partial = \ker i_* = 0$, así que $\partial = 0$. Pero entonces $h_n(X,X)=\ker\partial = \operatorname{im} j_* = 0$.

□

**Proposición 2.6.** (Sucesión exacta larga asociada a una terna). Sea $(X,A,B)$ una terna: es decir, sea $X$ un $\mathcal{C}$-espacio y $B\subseteq A\subseteq X$ sub-$\mathcal{C}$-espacios. Sean

$$\begin{aligned} I&:(A,B)\to(X,B)\,,\\ J&:(X,B)\to(X,A)\,, \end{aligned}$$

las inclusiones. Entonces hay una sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow h_n(A,B) \xrightarrow{I_*} h_n(X,B) \xrightarrow{J_*} h_n(X,A) \xrightarrow{\varDelta} h_{n-1}(A,B) \longrightarrow \cdots\,,$$

donde $\varDelta$ está dado por la composición

$$h_n(X,A) \xrightarrow{\partial} h_{n-1}(A,\varnothing) \xrightarrow{j_*} h_{n-1}(A,B)\,.$$

*Demostración.* Adaptamos la prueba que aparece en [Swi02, 3.19-3.20]. Primero se dibuja el diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & h_{n+1}(X,A) \arrow[dr, "\partial_1"] \arrow[rr, bend left, "\varDelta"] & & h_n(A,B) \arrow[dr, "I_*"] \arrow[rr, bend left, "\partial_2"] & & h_{n-1}(B,\varnothing) \arrow[dr, "i_{2*}"] \arrow[rr, bend left, "i_{3*}"] & & h_{n-1}(X,\varnothing) \arrow[dr, "j_{3*}"] & \\
h_{n+1}(X,B) \arrow[ur, "J_*"] \arrow[dr, "\partial_3"'] & & h_n(A,\varnothing) \arrow[ur, "j_{2*}"'] \arrow[dr, "i_{1*}"'] & & h_n(X,B) \arrow[ur, "\partial_3"'] \arrow[dr, "J_*"'] & & h_{n-1}(A,\varnothing) \arrow[ur, "i_{1*}"'] \arrow[dr, "j_{2*}"'] & & h_{n-1}(X,B)\,, \\
 & h_n(B,\varnothing) \arrow[ur, "i_{2*}"] \arrow[rr, bend right, "i_{3*}"'] & & h_n(X,\varnothing) \arrow[ur, "j_{3*}"] \arrow[rr, bend right, "j_{1*}"'] & & h_n(X,A) \arrow[ur, "\partial_1"] \arrow[rr, bend right, "\varDelta"'] & & h_{n-1}(A,B) \arrow[ur, "I_*"'] &
\end{tikzcd}$$

donde los morfismos llamados $i_{1*}, i_{2*}, i_{3*}, j_{1*}, j_{2*}, j_{3*}$ son inducidos por inclusiones y $\partial_1,\partial_2,\partial_3$ son morfismos de borde. Verifiquemos que el diagrama conmuta. Se cumple que $i_{3*}=i_{1*}\circ i_{2*}$, que $I_*\circ j_{2*}=j_{3*}\circ i_{1*}$ y que $j_{1*}=J_*\circ j_{3*}$ porque los morfismos involucrados son inducidos por inclusiones y porque $h_n$ es un funtor. Se cumple que $\partial_1\circ J_* = i_{2*}\circ\partial_3$ y que $\partial_2 = \mathrm{id}\circ\partial_2 = \partial_3\circ I_*$ porque $\partial$ es una transformación natural. Por último $\varDelta = j_{2*}\circ\partial_1$ por definición de $\varDelta$.

Notar que este diagrama está formado a partir tres sucesiones exactas largas asociadas a pares (las de $(X, B)$, $(X, A)$ y $(A, B)$) junto con la sucesión que queremos probar que es exacta. Para lograr esto hay que verificar seis cosas distintas, para cada $n \in \mathbb{Z}$:

1. $\operatorname{im} \Delta \subseteq \ker I_*$: esto es equivalente a que $I_* \circ \Delta = 0$. Mirando el diagrama, se ve que $I_* \circ \Delta = j_{3*} \circ i_{1*} \circ \partial_1$, pero como $\partial_1$ e $i_{1*}$ son parte de la sucesión exacta larga de $(X, A)$, se da que $i_{1*} \circ \partial_1 = 0$.

2. $\operatorname{im} J_* \subseteq \ker \Delta$: similarmente que en la anterior, tenemos que $\Delta \circ J_* = j_{2*} \circ i_{2*} \circ \partial_3 = 0$, ya que $j_{2*} \circ i_{2*} = 0$ por ser composición de dos morfismos consecutivos en una sucesión exacta larga.

3. $\operatorname{im} I_* \subseteq \ker J_*$: observamos que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} h_n(A,B) & \xrightarrow{I_*} & h_n(X,B) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow J_* \\ h_n(A,A) & \longrightarrow & h_n(X,A)\,, \end{array}$$

donde todos los morfismos son inducidos por inclusiones. Por la Proposición 2.5, $h_n(A, A) = 0$, lo que implica que entonces $J_* \circ I_* = 0$.

4. $\ker I_* \subseteq \operatorname{im} \Delta$: Sea $x \in \ker I_* \subseteq h_n(A, B)$. Entonces $\partial_2 x = \partial_3 I_* x = 0$, y $x \in \ker \partial_2$. Como la sucesión del par $(A, B)$ es exacta, $\ker \partial_2 = \operatorname{im} j_{2*}$, así que $x \in \operatorname{im} j_{2*}$ y existe un $y \in h_n(A, \varnothing)$ tal que $j_{2*} y = x$. Se da que $j_{3*} i_{1*} y = I_* j_{2*} y = I_* x = 0$, así que $i_{1*} y \in \ker j_{3*} = \operatorname{im} i_{3*}$ y existe un $z \in h_n(B, \varnothing)$ tal que $i_{3*} z = i_{1*} y$. Entonces

$$i_{1*}(y - i_{2*} z) = i_{1*} y - i_{1*} i_{2*} z = i_{1*} y - i_{3*} z = 0\,,$$

por lo que $y - i_{2*} z \in \ker i_{1*} = \operatorname{im} \partial_1$, y existe un $w \in h_{n+1}(X, A)$ tal que $\partial_1 w = y - i_{2*} z$. Se cumple que

$$\Delta w = j_{2*} \partial_1 w = j_{2*}(y - i_{2*} z) = j_{2*} y - j_{2*} i_{2*} z = x\,,$$

ya que $j_{2*} \circ i_{2*} = 0$. Por lo tanto $x \in \operatorname{im} \Delta$.

5. $\ker \Delta \subseteq \operatorname{im} J_*$: Sea $x \in \ker \Delta \subseteq h_n(X, A)$. Entonces $j_{2*} \partial_1 x = \Delta x = 0$, y $\partial_1 x \in \ker j_{2*} = \operatorname{im} i_{2*}$. Así que existe $y \in h_{n-1}(B, \varnothing)$ tal que $i_{2*} y = \partial_1 x$. Como $i_{1*} \circ \partial_1 = 0$, se da que

$$i_{3*} y = i_{1*} i_{2*} y = i_{1*} \partial_1 x = 0\,,$$

es decir que $y \in \ker i_{3*} = \operatorname{im} \partial_3$ y entonces existe $z \in h_n(X, B)$ tal que $\partial_3 z = y$. Se cumple que

$$\partial_1(x - J_* z) = \partial_1 x - \partial_1 J_* z = \partial_1 x - i_{2*} \partial_3 z = \partial_1 x - i_{2*} y = 0\,,$$

y por lo tanto existe un $w \in h_n(X, \varnothing)$ tal que $j_{1*} w = x - J_* z$. Entonces

$$J_*(j_{3*} w + z) = J_* j_{3*} w + J_* z = j_{1*} w + J_* z = x\,,$$

y por lo tanto $x \in \operatorname{im} J_*$.

6. $\ker J_* \subseteq \operatorname{im} I_*$: Sea $x \in \ker J_* \subseteq h_n(X,B)$. Entonces $i_{2*}\partial_3 x = \partial_1 J_* x = 0$ y $\partial_3 x \in \ker i_{2*} = \operatorname{im} \partial_2$, así que hay un $y \in h_n(A,B)$ tal que $\partial_2 y = \partial_3 x$. Se da que

$$\partial_3(x - I_* y) = \partial_3 x - \partial_3 I_* y = \partial_3 x - \partial_2 y = 0\,,$$

y entonces existe un $z \in h_n(X,\varnothing)$ tal que $j_{3*}z = x - I_* y$. Como $J_* \circ I_* = 0$, se cumple que

$$j_{1*}z = J_* j_{3*} z = J_*(x - I_* y) = J_* x - J_* I_* y = 0\,,$$

y por lo tanto existe $w \in h_n(A,\varnothing)$ con $i_{1*}w = z$. Entonces

$$I_* j_{2*} w = j_{3*} i_{1*} w = j_{3*} z = x - I_* y\,,$$

lo que implica que $x = I_*(j_{2*}w + y)$, es decir que $x \in \operatorname{im} I_*$.

□

Los morfismos $\Delta$ también se llaman morfismos de borde. Notar que en el caso $B = \varnothing$ obtenemos de vuelta la sucesión exacta larga asociada al par $(X,A)$, dada por el axioma de exactitud. Terminaremos esta sección probando la existencia una versión de la sucesión de Mayer-Vietoris. Primero, una definición, que adaptamos de [Swi02, Definición 7.12].

**Definición 2.7.** Una tríada $(X;A,B)$ se llama **escisiva** con respecto a la teoría de homología $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ si la inclusión $j : (A, A\cap B) \to (X,B)$ induce un isomorfismo $j_* : h_n(A, A\cap B) \to h_n(X,B)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Notar que lo que dice el axioma de escisión es que las tríadas $\mathcal{C}$-CW son escisivas. El siguiente teorema lo adaptamos de [Swi02, Teorema 7.19].

**Teorema 2.8.** (Sucesión de Mayer-Vietoris). Sea $(X;A,B)$ una tríada escisiva, con un sub-$\mathcal{C}$-espacio $C \subseteq A\cap B$. Consideremos las siguientes inclusiones:

$$\begin{aligned}
&I_1 : (A\cap B, C) \to (A,C) && J_2 : (X,C) \to (X,B)\\
&I_2 : (B,C) \to (X,C) && j : (A, A\cap B) \to (X,B)\\
&I_3 : (A\cap B, C) \to (B,C) &&\\
&I_4 : (A,C) \to (X,C) &&
\end{aligned}$$

Dado $n \in \mathbb{Z}$, sea $\Delta_1 : h_n(A, A\cap B) \to h_{n-1}(A\cap B, C)$ el morfismo de borde asociado a la terna $(A, A\cap B, C)$, y definamos $\Delta' : h_n(X,C) \to h_{n-1}(A\cap B, C)$ como $\Delta' = \Delta_1 \circ j_*^{-1} \circ J_{2*}$ (recordar que $j_*$ es un isomorfismo por hipótesis). Existe una sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow h_n(A\cap B, C) \xrightarrow{\alpha} h_n(A,C) \oplus h_n(B,C) \xrightarrow{\beta} h_n(X,C) \xrightarrow{\Delta'}$$
$$h_{n-1}(A\cap B, C) \longrightarrow \cdots\,,$$

donde $\alpha x = (I_{1*}x, I_{3*}x)$ y $\beta(y,z) = I_{4*}y - I_{2*}z$, para todo $x \in h_n(A\cap B, C)$ y $(y,z) \in h_n(A,C) \oplus h_n(B,C)$.

*Demostración.* La prueba es como la que aparece en [Swi02], casi sin modificaciones. Primero notamos que las sucesiones exactas largas asociadas a las ternas $(A, A\cap B, C)$ y $(X,B,C)$ encajan en el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{array}{ccccccc}
h_{n+1}(A,C) & \xrightarrow{J_{1*}} & h_{n+1}(A,A\cap B) & \xrightarrow{\Delta_1} & h_n(A\cap B,C) & \xrightarrow{I_{1*}} & \\
{\scriptstyle I_{4*}}\downarrow & & {\scriptstyle j_*}\downarrow\cong & & {\scriptstyle I_{3*}}\downarrow & & \\
h_{n+1}(X,C) & \xrightarrow{J_{2*}} & h_{n+1}(X,B) & \xrightarrow{\Delta_2} & h_n(B,C) & \xrightarrow{I_{2*}} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
h_n(A,C) & \xrightarrow{J_{1*}} & h_n(A,A\cap B) & \xrightarrow{\Delta_1} & h_{n-1}(A\cap B,C) \\
{\scriptstyle I_{4*}}\downarrow & & {\scriptstyle j_*}\downarrow\cong & & {\scriptstyle I_{3*}}\downarrow \\
h_n(X,C) & \xrightarrow{J_{2*}} & h_n(X,B) & \xrightarrow{\Delta_2} & h_{n-1}(B,C)\,,
\end{array}
$$

donde $J_{1*}$ es inducido por la inclusión y $\Delta_2$ es el morfismo de borde (aquí se puede ver por qué elegimos esos nombres para las inclusiones más arriba). El diagrama conmuta porque los morfismos inducidos por inclusiones conmutan, y por la naturalidad de los morfismos de bordes asociados a ternas (la cual se deduce de la naturalidad de los $\partial$ asociados a pares). Otra vez tenemos que probar seis inclusiones para probar la exactitud.

1. $\operatorname{im}\alpha \subseteq \ker\beta$: Sea $x \in h_n(A\cap B,C)$. Aplicando las definiciones

   $$\beta\alpha x = \beta(I_{1*}x, I_{3*}x) = I_{4*}I_{1*}x - I_{2*}I_{3*}x\,,$$

   pero $I_{4*}\circ I_{1*} = I_{2*}\circ I_{3*}$, y entonces $\beta\circ\alpha = 0$.

2. $\operatorname{im}\Delta' \subseteq \ker\alpha$: Sea $x \in h_{n+1}(X,C)$. Entonces

   $$\begin{aligned}\alpha\Delta' x &= (I_{1*}\Delta' x,\ I_{3*}\Delta' x)\\ &= (I_{1*}\Delta_1 j_*^{-1}J_{2*}x,\ I_{3*}\Delta_1 j_*^{-1}J_{2*}x)\\ &= (I_{1*}\Delta_1 j_*^{-1}J_{2*}x,\ \Delta_2 J_{2*}x) = (0,0)\,,\end{aligned}$$

   ya que tanto $I_{1*}\circ\Delta_1 = 0$ como $\Delta_2\circ J_{2*} = 0$, por tratarse ambos de pares de morfismos consecutivos en una sucesión exacta. Así que $\alpha\circ\Delta' = 0$.

3. $\operatorname{im}\beta \subseteq \ker\Delta'$: Sea $(x,y) \in h_n(A,C)\oplus h_n(B,C)$. Aplicando $\Delta'\circ\beta$,

   $$\begin{aligned}\Delta'\beta(x,y) &= \Delta'(I_{4*}x - I_{2*}y)\\ &= \Delta_1 j_*^{-1}J_{2*}I_{4*}x - \Delta_1 j_*^{-1}J_{2*}I_{2*}y\\ &= \Delta_1 J_{1*}x - \Delta_1 j_*^{-1}J_{2*}I_{2*}y = 0\end{aligned}$$

   porque $\Delta_1\circ J_{1*} = 0$ y $J_{2*}\circ I_{2*} = 0$. Por lo tanto $\Delta'\circ\beta = 0$.

4. $\ker\beta \subseteq \operatorname{im}\alpha$: Sea $(x,y) \in \ker\beta \subseteq h_n(A,C)\oplus h_n(B,C)$. Es decir que $I_{4*}x - I_{2*}y = 0$, o bien

   $$I_{4*}x = I_{2*}y \in \operatorname{im} I_{2*} = \ker J_{2*}\,.$$

   Por lo tanto $J_{1*}x = j_*^{-1}J_{2*}I_{4*}x = 0$, es decir que $x \in \ker J_{1*} = \operatorname{im} I_{1*}$. Sea $z \in h_n(A\cap B,C)$ tal que $I_{1*}z = x$. Entonces

   $$I_{2*}(y - I_{3*}z) = I_{2*}y - I_{2*}I_{3*}z = I_{2*}y - I_{4*}I_{1*}z = I_{2*}y - I_{4*}x = 0\,,$$

   lo que implica que $y - I_{3*}z \in \ker I_{2*} = \operatorname{im}\Delta_2$. Sea $w \in h_{n+1}(X,B)$ tal que $\Delta_2 w = y - I_{3*}z$. El elemento $z - \Delta_1 j_*^{-1}w \in h_n(A\cap B,C)$ cumple que

   $$I_{1*}(z - \Delta_1 j_*^{-1}w) = I_{1*}z - I_{1*}\Delta_1 j_*^{-1}w = x$$

(porque $I_{1*} \circ \Delta_1 = 0$), y que

$$I_{3*}(z - \Delta_1 j_*^{-1} w) = I_{3*}z - I_{3*}\Delta_1 j_*^{-1} w = I_{3*}z - \Delta_2 w = y\,,$$

es decir que $\alpha(z - \Delta_1 j_*^{-1} w) = (x, y)$, y que $(x, y) \in \operatorname{im}\alpha$.

5. $\ker\alpha \subseteq \operatorname{im}\Delta'$: Sea $x \in \ker\alpha \in h_n(A\cap B, C)$. Se cumple que $(I_{1*}x, I_{3*}x) = (0,0)$. Como $x \in \ker I_{1*} = \operatorname{im}\Delta_1$, existe $y \in h_{n+1}(A, A\cap B)$ tal que $\Delta_1 y = x$. Entonces

   $$\Delta_2 j_* y = I_{3*}\Delta_1 y = I_{3*}x = 0\,,$$

   es decir que $j_* y \in \ker\Delta_2 = \operatorname{im} J_{2*}$, y existe un $z \in h_{n+1}(X, C)$ tal que $J_{2*}z = j_* y$. Así que

   $$\Delta' z = \Delta_1 j_*^{-1} J_{2*} z = \Delta_1 j_*^{-1} j_* y = \Delta_1 y = x$$

   y $x \in \operatorname{im}\Delta'$.

6. $\ker\Delta' \subseteq \operatorname{im}\beta$: Sea $x \in \ker\Delta' \subseteq h_n(X, C)$. Como $\Delta' x = \Delta_1 j_*^{-1} J_{2*}x = 0$, tenemos que $j_*^{-1} J_{2*}x \in \ker\Delta_1 = \operatorname{im} J_{1*}$. Sea $y \in h_n(A, C)$ tal que $J_{1*}y = j_*^{-1} J_{2*}x$. Se cumple que

   $$J_{2*}(I_{4*}y - x) = J_{2*}I_{4*}y - J_{2*}x = j_* J_{1*}y - J_{2*}x = J_{2*}x - J_{2*}x = 0\,,$$

   es decir que $I_{4*}y - x \in \ker J_{2*} = \operatorname{im} I_{2*}$. Entonces existe $z \in h_n(B, C)$ tal que $I_{2*}z = I_{4*}y - x$, es decir, tal que $x = I_{4*}y - I_{2*}z = \beta(y, z)$. Queda probado que $x \in \operatorname{im}\beta$.

$\square$

## 2.2. Continuidad

En esta sección probamos una proposición y su corolario, que implican que las teorías de homología cumplen una especie de continuidad: $h_n$ evaluado en un colímite de espacios es isomorfo a el colímite de $h_n$ evaluado en cada espacio. Adaptamos esto de [Swi02, Proposición 7.53 y Ejercicio 7.73], extendiéndolo al caso de los pares de $\mathcal{C}$-CW-complejos libres.

**Proposición 2.9.** Sea $X$ un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre y sean

$$Y \subseteq X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \cdots \subseteq X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n$$

subcomplejos (no necesariamente $n$-esqueletos) tales que $X = \operatorname{colím}_{n\to\infty} X^n$, y sean $i_n : (X^n, Y) \to (X, Y)$ las inclusiones. Entonces conmutan los diagramas de la forma

$$\begin{tikzcd} h_q(X^n, Y) \arrow[r, "i_{n*}"] \arrow[d] & h_q(X, Y)\,, \\ h_q(X^m, Y) \arrow[ur, bend right, "i_{m*}"'] & \end{tikzcd}$$

donde el morfismo vertical también está inducido por la inclusión, y el morfismo colímite

$$\operatorname*{colím}_{n\to\infty} i_{n*} : \operatorname*{colím}_{n\to\infty} h_q(X^n, Y) \to h_q(X, Y)$$

es un isomorfismo para todo $q \in \mathbb{Z}$.

*Demostración.* Adaptamos la prueba de [Swi02], con algunas modificaciones para que funcione para pares de $\mathcal{C}$-CW-complejos libres (en, particular, agregamos una parte en la que utiliza directamente el axioma de escisión). Primero, consideremos el $\mathcal{C}$-CW-complejo libre $X \times [-2, +\infty)$. Se puede ver que el subespacio

$$X' = \bigcup_{n\geq -1} X^n \times [n-1, n] \subseteq X \times [-2, +\infty)$$

(donde $X^{-1} = Y$) es un subcomplejo. La proyección $\mathrm{pr}_1 : X \times [-2, +\infty) \to X$ es un morfismo de $\mathcal{C}$-espacios, y se restringe a un morfismo $r : X' \to X$. Dado $n \geq -1$, definimos

$$X'_n = \bigcup_{k=-1}^{n} X^k \times [k-1, k] \subseteq X',$$

y podemos definir $r_n : X'_n \to X^n$ restringiendo $\mathrm{pr}_1 : X \times [-2, +\infty)$. Es fácil ver que cada $r_n$ es una equivalencia de homotopía: si $k_n : X^n \to X'_n$ es tal que $k_n(c)(x) = (x, n)$ para todo $c \in \mathcal{C}$ y $x \in X^n(c)$, entonces $r_n \circ k_n = \mathrm{id}_{X^n}$, y $k_n \circ r_n \simeq \mathrm{id}_{X'_n}$ por una homotopía tal que

$$H_n(c)((x, s), t) = (x, (1-t)s + tn),$$

para todo $c \in \mathcal{C}$, $(x, s) \in X'_n(c)$ y $t \in I$. Para $n \geq -1$, sea $i'_n : X'_n \to X'$ la inclusión. Se puede verificar que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X'_{-1} \arrow[r] \arrow[d, "r_{-1}"'] \arrow[rrrr, bend left, "i'_{-1}"] & X'_0 \arrow[r] \arrow[d, "r_0"'] \arrow[rrr, bend left, "i'_0"] & X'_1 \arrow[r] \arrow[d, "r_1"'] \arrow[rr, bend left, "i'_1"] & \cdots & X' \arrow[d, "r"] \\
Y = X^{-1} \arrow[r] \arrow[rrrr, bend right, "i_{-1}"'] & X^0 \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "i_0"'] & X^1 \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "i_1"'] & \cdots & X,
\end{tikzcd}$$

donde los morfismos horizontales son inclusiones. Esto significa que, dado $q \in \mathbb{N}$, y $c \in \mathcal{C}$, también conmuta

$$\begin{tikzcd}
\pi_q(X'_{-1}(c)) \arrow[r] \arrow[d, "r_{-1}(c)_*"'] \arrow[rrrr, bend left, "i'_{-1}(c)_*"] & \pi_q(X'_0(c)) \arrow[r] \arrow[d, "r_0(c)_*"'] \arrow[rrr, bend left, "i'_0(c)_*"] & \pi_q(X'_1(c)) \arrow[r] \arrow[d, "r_1(c)_*"'] \arrow[rr, bend left, "i'_1(c)_*"] & \cdots & \pi_q(X'(c)) \arrow[d, "r(c)_*"] \\
\pi_q(Y(c)) \arrow[r] \arrow[rrrr, bend right, "i_{-1}(c)_*"'] & \pi_q(X^0(c)) \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "i_0(c)_*"'] & \pi_q(X^1(c)) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "i_1(c)_*"'] & \cdots & \pi_q(X(c)),
\end{tikzcd}$$

y por lo tanto hay un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{colím}_n \pi_q(X'_n(c)) & \xrightarrow{\operatorname{colím}_n i'_n(c)_*} & \pi_q(X'(c)) \\ {\scriptstyle \operatorname{colím}_n r_n(c)_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r(c)_*} \\ \operatorname{colím} \pi_q(X^n(c)) & \xrightarrow{\operatorname{colím}_n i_n(c)_*} & \pi_q(X(c)) \end{array}$$

[ver Swi02, Corolario 7.49]. Por la continuidad de $\pi_q$ se da que $\operatorname{colím}_{n\to\infty} i'_n(c)_*$ y $\operatorname{colím}_{n\to\infty} i_n(c)_*$ son isomorfismos. Esto se puede probar con un argumento de compacidad [ver por ejemplo Swi02, Proposición 7.52]. Además se cumple que $\operatorname{colím}_{n\to\infty} r_n(c)_*$ es un isomorfismo por ser colímite de isomorfismos [ver Swi02, Corolario 7.51]. Por lo tanto $r(c)_*$ es un isomorfismo para todo $q \in \mathbb{N}$ y $c \in \mathcal{C}$, es decir, $r$ es una equivalencia de homotopía débil.

Sea $Y' = Y \times [-2, +\infty) \subseteq X'$. Entonces $r$ es un morfismo de pares $(X', Y') \to (X, Y)$, y la restricción $r|_{Y'} : Y' \to Y$ también es una equivalencia de homotopía débil por ser simplemente la proyección en la primera coordenada. Entonces por el axioma de equivalencia de homotopía débil el morfismo inducido $r_* : h_q(X', Y') \to h_q(X, Y)$ es un isomorfismo para todo $q \in \mathbb{Z}$. También podríamos usar el Teorema 1.34 para probar que $r$ es una equivalencia de homotopía fuerte, lo que implica por el axioma de homotopía que $r_*$ es un isomorfismo. Pero habría que verificar que las homotopías producidas por este teorema respetan la estructura de par $(X', Y')$.

Definimos algunos subcomplejos de $X'$. Sean

$$A' = \bigcup_{\substack{n \geq -1 \\ n \text{ impar}}} X^n \times [n-1, n]\,, \qquad B' = \bigcup_{\substack{n \geq 0 \\ n \text{ par}}} X^n \times [n-1, n]\,,$$

y sean $A = A' \cup Y'$ y $B = B' \cup Y'$. Se verifica que $(A; A', Y')$, $(B; B', Y')$ y $(A \cap B; A' \cap B', Y')$ son tríadas $\mathcal{C}$-CW. Entonces por el axioma de escisión tenemos isomorfismos

$$h_q(A', A' \cap Y') \xrightarrow{\cong} h_q(A, Y')$$

$$h_q(B', B' \cap Y') \xrightarrow{\cong} h_q(B, Y')$$

$$h_q(A' \cap B', A' \cap B' \cap Y') \xrightarrow{\cong} h_q(A \cap B, Y')$$

inducidos por inclusiones para cada $q \in \mathbb{Z}$. Se puede ver que

$$\coprod_{n \geq -1} k_n : \coprod_{n \geq -1} X^n \to A' \cap B' = \bigcup_{n \geq -1} X^n \times \{n\}\,,$$

donde cada $k_n$ está definido como arriba, es un isomorfismo de $\mathcal{C}$-espacios. En particular es un isomorfismo de pares de $\mathcal{C}$-espacios $\coprod_{n\geq -1}(X^n, Y) \to (A' \cap B', A' \cap B' \cap Y')$. Entonces tenemos la siguiente composición de isomorfismos para cada $q \in \mathbb{Z}$, donde el primero viene del axioma de unión disjunta

$$\bigoplus_{n\geq -1} h_q(X^n, Y) \xrightarrow[\cong]{\bigoplus \iota_{n*}} h_q(\textstyle\coprod_{n\geq -1}(X^n, Y)) \xrightarrow[\cong]{(\coprod k_n)_*}$$

$$h_q(A' \cap B', A' \cap B' \cap Y') \xrightarrow[\cong]{j_*} h_q(A \cap B, Y')\,,$$

donde $\iota_n : X^n \hookrightarrow \coprod_{m\geq -1} X^m$ y $j : A' \cap B' \hookrightarrow A \cap B$ son inclusiones. La composición de estos morfismos es igual a

$$
\begin{aligned}
j_* \circ \Big( \coprod_{n\geq -1} k_n \Big)_* \circ \bigoplus_{n\geq -1} \iota_{n*} &= \bigoplus_{n\geq -1} \Big( j_* \circ \Big( \coprod_{m\geq -1} k_m \Big)_* \circ \iota_{n*} \Big) \\
&= \bigoplus_{n\geq -1} \Big( j \circ \Big( \coprod_{m\geq -1} k_m \Big) \circ \iota_n \Big)_* \\
&= \bigoplus_{n\geq -1} (j \circ k_n)_* = \bigoplus_{n\geq -1} k_{n*}\,.
\end{aligned}
$$

Similarmente, se puede verificar que

$$
\coprod_{\substack{n\geq -1 \\ n \text{ impar}}} k_n : \coprod_{\substack{n\geq -1 \\ n \text{ impar}}} X^n \to A'\,, \qquad \coprod_{\substack{n\geq 0 \\ n \text{ par}}} k_n : \coprod_{\substack{n\geq 0 \\ n \text{ par}}} X^n \to B'
$$

son equivalencias de homotopía, con homotopías que respetan la estructura de pares. Entonces usando el axioma de homotopía y un razonamiento similar al de arriba, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\bigoplus_{\substack{n\geq -1 \\ n \text{ impar}}} k_{n*} &: \bigoplus_{\substack{n\geq -1 \\ n \text{ impar}}} h_q(X^n, Y) \to h_q(A, Y')\,, \\
\bigoplus_{\substack{n\geq 0 \\ n \text{ par}}} k_{n*} &: \bigoplus_{\substack{n\geq 0 \\ n \text{ par}}} h_q(X^n, Y) \to h_q(B, Y')
\end{aligned}
$$

son isomorfismos para todo $q \in \mathbb{Z}$.

La tríada $(X'; A, B)$ es una tríada $\mathcal{C}$-CW, y se da que $Y' \subseteq A \cap B$. Por lo tanto tenemos una sucesión exacta larga asociada por el Teorema 2.8. Dado $q \in \mathbb{Z}$, dibujamos el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
h_q(A \cap B, Y') \arrow[r, "\alpha"] & h_q(A, Y') \oplus h_q(B, Y') \arrow[r, "\beta"] & h_q(X', Y') \arrow[dd, "r_*", "\cong"'] \\
 & (\bigoplus_{n \text{ impar}} h_q(X^n, Y)) \oplus (\bigoplus_{n \text{ par}} h_q(X^n, Y)) \arrow[u, "(\bigoplus_{\text{imp.}} k_{n*}) \oplus (\bigoplus_{\text{par}} k_{n*})"', "\cong"] & \\
\bigoplus_{n\geq -1} h_q(X^n, Y) \arrow[uu, "\bigoplus k_{n*}", "\cong"'] \arrow[r, "\alpha'"] & \bigoplus_{n\geq -1} h_q(X^n, Y) \arrow[u, "\varphi"', "\cong"] \arrow[r, "\bigoplus (-1)^{n+1} i_{n*}"] & h_q(X, Y)\,,
\end{tikzcd}
$$

donde la fila superior es una parte de esta sucesión exacta, el isomorfismo $\varphi$ es el obvio, y el morfismo $\alpha'$ está definido de la siguiente manera: dado $n \geq -1$ y $x \in h_q(X^n, Y)$,

$$
\alpha' x = i_n x + i_{n+1} j_{n*} x\,, \tag{2.10}
$$

donde $i_n : h_q(X^n, Y) \to \bigoplus_{m\geq -1} h_q(X^m, Y)$ es la inyección canónica y $j_n : X^n \hookrightarrow X^{n+1}$ es la inclusión. Se puede verificar que el diagrama conmuta aplicando directamente las definiciones de los morfismos involucrados.

Sea $x \in \bigoplus_{n\geq -1} h_q(X^n, Y)$, y sea $p_n : \bigoplus_{m\geq -1} h_q(X^m, Y) \to h_q(X^n, Y)$ la proyección canónica en el $n$-ésimo sumando. De la definición de $\alpha'$ en (2.10) se deduce que

$$p_n \alpha' x = \begin{cases} j_{n-1*} p_{n-1} x + p_n x & \text{si } n \geq 0 \\ p_n x & \text{si } n = -1\,. \end{cases} \tag{2.11}$$

Supongamos que $\alpha' x = 0$ y $x \neq 0$. Sea $n \geq -1$ el menor entero que cumple que $p_n x \neq 0$. Entonces (2.11) implica que $p_n x = p_n \alpha' x = 0$, lo cual es absurdo. Por lo tanto concluimos que $\alpha'$ es inyectiva. Como en el diagrama de arriba todos los morfismos verticales son isomorfismos, esto implica que $\alpha : h_q(A \cap B, Y') \to h_q(A, Y') \oplus h_q(B, Y')$ también lo es. Notar que esto se cumple para todo $q \in \mathbb{Z}$, en particular $\alpha : h_{q-1}(A \cap B, Y') \to h_{q-1}(A, Y') \oplus h_{q-1}(B, Y')$ tiene kernel igual a 0. Pero entonces $\Delta' : h_q(X', Y') \to h_{q-1}(A \cap B, Y')$ tiene imagen nula, es decir que su kernel es todo $h_q(X', Y')$. Esto último implica que $\beta : h_q(A, Y') \oplus h_q(B, Y') \to h_q(X', Y')$ es un morfismo sobreyectivo. Otra vez como los morfismos verticales del diagrama son isomorfismos, concluimos que

$$\bigoplus_{n\geq -1} (-1)^{n+1} i_{n*} : \bigoplus_{n\geq -1} h_q(X^n, Y) \to h_q(X, Y)$$

también es sobreyectivo. También se puede ver que el kernel de este morfismo es igual a la imagen de $\alpha'$, debido a que $\ker \beta = \operatorname{im} \alpha$.

Entonces tenemos una sucesión exacta corta formada por los morfismos $\alpha'$ y $\bigoplus_{n\geq -1} (-1)^{n+1} i_{n*}$. Esta es isomorfa a otra sucesión exacta corta, en el sentido de que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & \bigoplus_{n\geq -1} h_q(X^n, Y) \arrow[dd, "\cong"', "\bigoplus(-1)^{n+1} i_n"] \arrow[dr, "\bigoplus(-1)^{n+1} i_{n*}"] & & \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{n\geq -1} h_q(X^n, Y) \arrow[ur, "\alpha'"] \arrow[dr, "d"'] & & h_q(X, Y) \arrow[r] & 0\,, \\
 & & \bigoplus_{n\geq -1} h_q(X^n, Y) \arrow[ur, "\bigoplus i_{n*}"'] & &
\end{tikzcd}$$

donde el morfismo $d$ está definido como

$$dx = (-1)^n (i_{n+1} j_{n*} x - i_n x)$$

para $x \in h_q(X^n, Y)$. Como la sucesión de arriba es exacta, la de abajo también lo es. Así que tenemos un isomorfismo

$$\Big(\bigoplus_{n\geq -1} i_{n*}\Big)^{\sim} : \frac{\bigoplus_{n\geq -1} h_q(X^n, Y)}{\operatorname{im} d} \to h_q(X, Y)$$

inducido por $\bigoplus_{n\geq -1} i_{n*}$. Se puede verificar que, por la definición de $d$ y por la definición de colímite de grupos abelianos, se da que

$$\frac{\bigoplus_{n\geq -1} h_q(X^n, Y)}{\operatorname{im} d} = \operatorname*{colím}_{n\to\infty} h_q(X^n, Y)\,,$$

y que entonces $(\bigoplus_{n\geq -1} i_{n*})^{\sim} = \operatorname{colím}_{n\to\infty} i_{n*}$.

$\square$

Este resultado se puede extender fácilmente a $\mathcal{C}$-espacios en general. Como ya mencionamos, tomamos el siguiente corolario y la idea de su prueba de [Swi02, Ejercicio 7.73].

**Corolario 2.12.** Sea $X$ un $\mathcal{C}$-espacio cualquiera, sean

$$Y \subseteq X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \cdots \subseteq X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$$

sub-$\mathcal{C}$-espacios tales que $X = \operatorname{colím}_{n\to\infty} X^n$, y sean $i_n : (X^n, Y) \to (X, Y)$ las inclusiones. Entonces el colímite

$$\operatorname*{colím}_{n\to\infty} i_{n*} : \operatorname*{colím}_{n\to\infty} h_q(X^n, Y) \to h_q(X, Y)$$

es un isomorfismo para todo $q \in \mathbb{Z}$.

*Demostración.* Por el Teorema 1.36 existe un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre $W$ con una equivalencia de homotopía débil $f_{-1} : W \to Y$, es decir una aproximación $\mathcal{C}$-CW de $Y$. A partir de $W$ y $f_{-1}$ y usando un proceso inductivo análogo al que usamos en la prueba del Teorema 1.36, podemos construir un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre $Z^0$ y una equivalencia de homotopía débil $f_0 : Z^0 \to X^0$, tal que $W$ sea un subcomplejo de $Z^0$ y que $f_0|_W$ sea $f_{-1}$. A esto se le puede llamar una aproximación $\mathcal{C}$-CW de el par $(X^0, Y)$. Iterando este proceso, podemos construir para cada $n \in \mathbb{N}$ un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre $Z^n$ con una equivalencia de homotopía débil $f_n : Z^n \to X^n$ tales que $Z^{n-1}$ es un subcomplejo de $Z^n$ y que $f_n|_{Z^{n-1}} = f_{n-1}$. Finalmente, sean $Z = \operatorname{colím}_{n\to\infty} Z^n$ y $f = \operatorname{colím}_{n\to\infty} f_n : Z \to X$.

Estamos en la misma situación que en la prueba de la Proposición 2.9, en la cual tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r] \arrow[d, "f_{-1}"'] \arrow[rrrr, bend left] & Z^0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"'] \arrow[rrr, bend left] & Z_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] \arrow[rr, bend left] & \cdots & Z \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r] \arrow[rrrr, bend right] & X^0 \arrow[r] \arrow[rrr, bend right] & X^1 \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \cdots & X
\end{tikzcd}$$

en el cual todos los morfismos verticales excepto el último son equivalencias de homotopía débiles y los no verticales son inclusiones. Con el mismo razonamiento que en la prueba anterior, se concluye que $f$ también es una equivalencia de homotopía débil.

Se cumple que $f_n|_W = f_{-1}$ para $n \in \mathbb{N}$, y que $f|_W = f_{-1}$. Entonces tanto $f_n : (Z^n, W) \to (X^n, Y)$ dado un $n$ cualquiera como $f : (Z, W) \to (X, Y)$ son aproximaciones $\mathcal{C}$-CW de pares, y se concluye por el axioma de equivalencia de homotopía débil que

$$f_{n*} : h_q(Z^n, W) \to h_q(X^n, W)\,,$$
$$f_* : h_q(Z, W) \to h_q(X, Y)$$

son isomorfismos para todo $n \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{Z}$.

Como $h_q$ es un funtor, el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
h_q(Z^0, W) \arrow[r] \arrow[d, "f_{0*}"'] \arrow[rrr, bend left] & h_q(Z^1, W) \arrow[r] \arrow[d, "f_{1*}"'] \arrow[rr, bend left] & \cdots & h_q(Z, W) \arrow[d, "f_*"] \\
h_q(X^0, Y) \arrow[r] \arrow[rrr, bend right] & h_q(X^1, Y) \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \cdots & h_q(X, Y)
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Entonces tenemos un diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{colím}_n h_q(Z^n, W) \arrow[r, "\operatorname{colím}_n i'_{n*}"] \arrow[d, "\operatorname{colím}_n f_{n*}"'] & h_q(Z, W) \arrow[d, "f_*"] \\
\operatorname{colím} h_q(X^n, Y) \arrow[r, "\operatorname{colím}_n i_{n*}"] & h_q(X, Y)\,,
\end{tikzcd}
$$

donde $i_n : X^n \to X$, $i'_n : Z^n \to Z$ son inclusiones. Ya vimos que $f_*$ es un isomorfismo, y $\operatorname{colím}_{n\to\infty} f_{n*}$ es un isomorfismo por ser colímite de isomorfismos. Además, como $Z$ es un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre y los $Z_n$ y $W$ son subcomplejos, tenemos por la Proposición 2.9 que $\operatorname{colím}_{n\to\infty} i'_{n*}$ es un isomorfismo. Se concluye que entonces $\operatorname{colím}_{n\to\infty} i_{n*}$ también lo es.

□

## 2.3. Sucesión espectral para $\mathcal{C}$-espacios

Esta sección se basa en la presentación de [Swi02, págs. 336-340], aunque alteramos un poco el orden de las proposiciones, y agregamos el Lema 2.16 para ahorrar espacio.

Supongamos que $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña y que $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una teoría de homología no reducida de $\mathcal{C}$-espacios. Supongamos que tenemos un $\mathcal{C}$-espacio $X$, con sub-$\mathcal{C}$-espacios

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

tales que $X = \operatorname{colím}_{n\to\infty} X_n$. Vamos mostrar una forma de calcular los grupos $h_q(X, \varnothing)$ para $q \in \mathbb{Z}$ partiendo los grupos $h_q(X_n, X_{n-1})$ (para $n \geq 1$) y algunos morfismos que los relacionan.

**Definición 2.13.** Sean $p, q \in \mathbb{Z}$. Para cada $r \geq 1$, definimos los siguientes subgrupos de $h_{p+q}(X_p, X_{p-1})$:

$$
\begin{aligned}
Z^r_{pq} &= \operatorname{im}(j_* : h_{p+q}(X_p, X_{p-r}) \to h_{p+q}(X_p, X_{p-1}))\,,\\
Z^\infty_{pq} &= \operatorname{im}(j_* : h_{p+q}(X_p, \varnothing) \to h_{p+q}(X_p, X_{p-1}))\,,\\
B^r_{pq} &= \operatorname{im}(\varDelta : h_{p+q+1}(X_{p+r-1}, X_p) \to h_{p+q}(X_p, X_{p-1}))\,,\\
B^\infty_{pq} &= \operatorname{im}(\varDelta : h_{p+q+1}(X, X_p) \to h_{p+q}(X_p, X_{p-1}))\,,
\end{aligned}
$$

donde definimos $X_n = \varnothing \subseteq X$ para $n < 0$, los $j_*$ son inducidos por inclusiones, y los $\varDelta$ son morfismos de borde de sucesiones exactas largas asociadas a ternas, como en la Proposición 2.6. Definimos también

$$F_{pq} = \operatorname{im}(i_* : h_{p+q}(X_p, \varnothing) \to h_{p+q}(X, \varnothing))\,,$$

donde $i_*$ es inducido por la inclusión.

**Proposición 2.14.** Dados $p, q \in \mathbb{Z}$ fijos, los grupos $B^r_{pq}, B^\infty_{pq}, Z^r_{pq}, Z^\infty_{pq}$ satisfacen

$$\begin{aligned} 0 = B^1_{pq} \subseteq B^2_{pq} \subseteq \cdots \subseteq B^r_{pq} \subseteq B^{r+1}_{pq} \subseteq \cdots \subseteq B^\infty_{pq} \subseteq \\ Z^\infty_{pq} \subseteq \cdots \subseteq Z^{r+1}_{pq} \subseteq Z^r_{pq} \subseteq \cdots \subseteq Z^2_{pq} \subseteq Z^1_{pq} = h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \,. \end{aligned}$$

*Demostración.* Por definición $B^1_{pq}$ es la imagen de

$$h_{p+q+1}(X_p, X_p) \xrightarrow{\Delta} h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \,,$$

pero por la Proposición 2.5 se da que $h_{p+q+1}(X_p, X_p) = 0$, así que $B^1_{pq} = 0$. Dado $r \geq 1$, por la naturalidad de los $\Delta$ tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} h_{p+q+1}(X_{p+r-1}, X_p) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "i_*"'] & h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \,, \\ h_{p+q+1}(X_{p+r}, X_p) \arrow[ur, bend right, "\Delta"'] & \end{tikzcd}$$

donde $i_*$ es inducido por la inclusión. Entonces $B^r_{pq}$ es la imagen del $\Delta$ de arriba y $B^{r+1}_{pq}$ es la imagen del de abajo, por lo que se deduce que $B^r_{pq} \subseteq B^{r+1}_{pq}$. Similarmente tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} h_{p+q+1}(X_{p+r-1}, X_p) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "i_*"'] & h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \,, \\ h_{p+q+1}(X, X_p) \arrow[ur, bend right, "\Delta"'] & \end{tikzcd}$$

con el que se prueba que $B^r_{pq} \subseteq B^\infty_{pq}$. Para verificar que $B^\infty_{pq} \subseteq Z^\infty_{pq}$, recordamos que, por la definición de $\Delta$ en la Proposición 2.6, conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} h_{p+q+1}(X, X_p) \arrow[r, "\partial"] \arrow[rr, bend right, "\Delta"'] & h_{p+q}(X_p, \varnothing) \arrow[r, "j_*"] & h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \,, \end{tikzcd}$$

y entonces $B^\infty_{pq} = \operatorname{im} \Delta \subseteq \operatorname{im} j_* = Z^\infty_{pq}$.

El diagrama

$$\begin{tikzcd} h_{p+q}(X_p, X_{p-r-1}) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d] & h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \\ h_{p+q}(X_p, X_{p-r}) \arrow[ur, bend right, "j_*"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta porque todos sus morfismos son inducidos por inclusiones. Como $Z^{r+1}_{pq}$ es la imagen del $j_*$ de arriba y $Z^r_{pq}$ es la imagen del de abajo, se deduce que $Z^{r+1}_{pq} \subseteq Z^r_{pq}$. Se puede ver que $Z^r_{pq} = Z^\infty_{pq}$ si $r \geq p + 1$, así que esto prueba también que $Z^\infty_{pq} \subseteq Z^r_{pq}$ para todo $r \geq 1$. Finalmente, $Z^1_{pq}$ es la imagen de

$$h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \xrightarrow{j_*} h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \,.$$

Como este $j$ es la identidad de $(X_p, X_{p-1})$, el morfismo $j_*$ es la identidad de $h_{p+q}(X_p, X_{p-1})$, así que su imagen $Z^1_{pq}$ es igual a todo $h_{p+q}(X_p, X_{p-1})$.

$\square$

**Definición 2.15.** Dado que $B^r_{pq} \subseteq Z^r_{pq}$ y $B^\infty_{pq} \subseteq Z^\infty_{pq}$ para todos $p, q \in \mathbb{Z}$ y $r \geq 1$, definimos los grupos

$$E^r_{pq} = Z^r_{pq} \,/\, B^r_{pq}\,, \qquad E^\infty_{pq} = Z^\infty_{pq} \,/\, B^\infty_{pq}\,.$$

Notar que $E^1_{pq} = Z^1_{pq} \,/\, B^1_{pq} = h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \,/\, 0 \cong h_{p+q}(X_p, X_{p+1})$. Este es el primer paso de nuestro cálculo, y vamos a ver que luego se puede hallar $h_n(X, \varnothing)$ procediendo de la siguiente manera:

1. Partiendo de cada "$r$-ésima página" $(E^r_{pq})_{p,q}$ se puede obtener la $(r+1)$-página $(E^{r+1}_{pq})_{p,q}$.
2. Después de haber calculado inductivamente $(E^r_{pq})_{p,q}$ para todo $r \geq 1$, se encuentra $(E^\infty_{pq})_{p,q}$, tomando un colímite.
3. Los grupos $F_{pq}$ se obtienen inductivamente a partir de $(E^\infty_{pq})_{p,q}$.
4. Se obtiene $h_n(X, \varnothing)$ como la unión de ciertos $F_{pq}$.

Empezamos probando un lema que nos resultará útil:

**Lema 2.16.** Dado un un diagrama conmutativo de grupos abelianos

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "a"] \arrow[dd, "e"'] & & B \arrow[dl, "b"'] \arrow[dd, "f"] \\
& G \arrow[dl, "c"] \arrow[dr, "d"'] & \\
C & & D
\end{tikzcd}$$

tal que $\operatorname{im} a = \ker d$ y $\operatorname{im} b = \ker c$, existe un isomorfismo

$$\varphi : \frac{\operatorname{im} c}{\operatorname{im} e} \to \frac{\operatorname{im} d}{\operatorname{im} f}\,.$$

*Demostración.* Sea $x + \operatorname{im} e \in \operatorname{im} c / \operatorname{im} e$ un elemento cualquiera. Como $x \in \operatorname{im} c$, existe un $y \in G$ tal que $cy = x$. Definimos

$$\varphi(x + \operatorname{im} e) = dy + \operatorname{im} f \in \frac{\operatorname{im} d}{\operatorname{im} f}\,.$$

Vamos a verificar que entonces $\varphi : \operatorname{im} c \,/\, \operatorname{im} e \to \operatorname{im} d \,/\, \operatorname{im} f$ es un morfismo de grupos bien definido, y que además es un isomorfismo.

Sea $x \in \operatorname{im} c$, y supongamos que tenemos que $y, y' \in G$ cumplen que $cy = cy' = x$. Entonces $y - y' \in \ker c = \operatorname{im} b$, y existe un $z \in B$ con $bz = y - y'$. Por lo tanto

$$d(y - y') = dbz = fz \in \operatorname{im} f\,,$$

y entonces

$$dy + \operatorname{im} f = dy' + \operatorname{im} f\,,$$

es decir que nuestra definición de $\varphi$ no depende de la elección del $y$. Ahora supongamos que tenemos otro $x' \in \operatorname{im} c$ tal que $x' + \operatorname{im} e = x + \operatorname{im} e$, es decir que $x - x' \in \operatorname{im} e$. Sea $z \in A$ tal que $ez = x - x'$. Entonces

$$c(y - az) = cy - caz = x - ez = x' ,$$

y por lo tanto $\varphi(x' + \operatorname{im} e) = d(y - az) + \operatorname{im} f$, pero

$$d(y - az) = dy - daz = dy ,$$

ya que $d \circ a = 0$ porque $\operatorname{im} a = \ker d$. Así que $\varphi(x' + \operatorname{im} e) = \varphi(x + \operatorname{im} e)$ y concluimos que nuestra definición no dependía del representante $x$ y $\varphi$ es una función bien definida.

Es fácil ver que $\varphi$ es un morfismo de grupos abelianos: sean $x_1, x_2 \in \operatorname{im} c$, y sean $y_1, y_2 \in G$ tales que $cy_i = x_i$, para $i = 1, 2$. Entonces $c(y_1 + y_2) = x_1 + x_2$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1 + \operatorname{im} e) &= dy_1 + \operatorname{im} f ,\\
\varphi(x_2 + \operatorname{im} e) &= dy_2 + \operatorname{im} f ,\\
\varphi(x_1 + x_2 + \operatorname{im} e) &= d(y_1 + y_2) + \operatorname{im} f\\
&= dy_1 + dy_2 + \operatorname{im} f\\
&= \varphi(x_1 + \operatorname{im} e) + \varphi(x_2 + \operatorname{im} e) .
\end{aligned}$$

Veamos ahora que $\varphi$ es un isomorfismo. Para la inyectividad, sea $x \in \operatorname{im} c$ tal que $x + \operatorname{im} e \in \ker \varphi$, es decir que $dy \in \operatorname{im} f$ para algún $y \in G$ tal que $cy = x$. Sea $z \in B$ tal que $fz = dy$. Entonces

$$d(y - bz) = dy - dbz = dy - fz = 0 ,$$

es decir que $y - bz \in \ker d = \operatorname{im} a$. Sea $w \in A$ tal que $aw = y - bz$. Se cumple que

$$ew = caw = c(y - bz) = cy - cbz = x ,$$

ya que $c \circ b = 0$ porque $\operatorname{im} b = \ker c$. Así que $x \in \operatorname{im} e$, es decir que $x + \operatorname{im} e$ es el elemento identidad. Para la sobreyectividad, sea $z \in \operatorname{im} d$. Existe un $y \in G$ tal que $dy = z$, y sea entonces $x = cy$. Se da que $\varphi(x + \operatorname{im} e) = dy + \operatorname{im} f = z + \operatorname{im} f$, es decir que $z + \operatorname{im} f$ está en la imagen de $\varphi$.

$\square$

En las dos proposiciones que siguen veremos la relación entre la $r$-página $(E^r_{pq})_{p,q}$ y la $(r+1)$-página $(E^{r+1}_{pq})_{p,q}$.

**Proposición 2.17.** Dados $p, q \in \mathbb{Z}$ y $r \geq 1$, hay un isomorfismo

$$\frac{Z^r_{pq}}{Z^{r+1}_{pq}} \cong \frac{B^{r+1}_{p-r,\, q+r-1}}{B^r_{p-r,\, q+r-1}} .$$

*Demostración.* Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
h_{p+q}(X_p, X_{p-r-1}) \arrow[dd, "j_{3*}"'] \arrow[dr, "j_{1*}"] & & h_{p+q}(X_{p-1}, X_{p-r}) \arrow[dl, "i_{2*}"'] \arrow[dd, "\Delta_2"] \\
& h_{p+q}(X_p, X_{p-r}) \arrow[dl, "j_{2*}"] \arrow[dr, "\Delta_1"'] & \\
h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) & & h_{p+q-1}(X_{p-r}, X_{p-r-1}) ,
\end{tikzcd}$$

donde $j_{1*}, j_{2*}, j_{3*}, i_{2*}$ son inducidos por inclusiones y $\Delta_1, \Delta_2$ son morfismos de borde asociados a ternas. El triángulo de la izquierda conmuta porque está formado por morfismos inducidos por inclusiones, mientras que el de la derecha conmuta por la naturalidad de los morfismos de borde.

Notar que las diagonales en el diagrama son parte de las sucesiones exactas largas asociadas a las ternas $(X_p, X_{p-r}, X_{p-r-1})$ y $(X_p, X_{p-1}, X_{p-r})$, es decir que $\operatorname{im} j_{1*} = \ker \Delta_1$ y $\operatorname{im} i_{2*} = \ker j_{2*}$. Entonces el Lema 2.16 nos da un isomorfismo $\varphi : \operatorname{im} j_{2*} \,/\, \operatorname{im} j_{3*} \to \operatorname{im} \Delta_1 \,/\, \operatorname{im} \Delta_2$. Pero se puede verificar que, por definición,

$$\frac{Z^r_{pq}}{Z^{r+1}_{pq}} = \frac{\operatorname{im} j_{2*}}{\operatorname{im} j_{3*}}\,, \qquad \frac{B^{r+1}_{p-r,\,q+r-1}}{B^r_{p-r,\,q+r-1}} = \frac{\operatorname{im} \Delta_1}{\operatorname{im} \Delta_2}\,.$$

□

**Definición 2.18.** Sean $p, q \in \mathbb{Z}$, y $r \geq 1$. Por la Proposición 2.14 se cumple que $B^r_{pq} \subseteq Z^{r+1}_{pq} \subseteq Z^r_{pq}$, así que por el tercer teorema de isomorfismo [ver Hun74, Corolario I.5.10] tenemos que

$$\frac{Z^r_{pq} \,/\, B^r_{pq}}{Z^{r+1}_{pq} \,/\, B^r_{pq}} \cong \frac{Z^r_{pq}}{Z^{r+1}_{pq}}\,.$$

Es decir que hay un morfismo sobreyectivo $\pi : Z^r_{pq} \,/\, B^r_{pq} \to Z^r_{pq} \,/\, Z^{r+1}_{pq}$ cuyo kernel es $Z^{r+1}_{pq} \,/\, B^r_{pq}$. Como $B^r_{p-r,q+r-1} \subseteq B^{r+1}_{p-r,q+r-1} \subseteq Z^r_{p-r,q+r-1}$, se da que

$$\frac{B^{r+1}_{p-r,\,q+r-1}}{B^r_{p-r,\,q+r-1}} \subseteq \frac{Z^r_{p-r,\,q+r-1}}{B^r_{p-r,\,q+r-1}}\,.$$

Si $\varphi$ es el isomorfismo de la proposición anterior, definimos entonces el morfismo $d^r : E^r_{pq} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ como la composición

$$\begin{tikzcd}
\dfrac{Z^r_{pq}}{B^r_{pq}} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, equal] & \dfrac{Z^r_{pq}}{Z^{r+1}_{pq}} \arrow[r, "\varphi", "\cong"'] & \dfrac{B^{r+1}_{p-r,\,q+r-1}}{B^r_{p-r,\,q+r-1}} \arrow[r, hook, "i"] & \dfrac{Z^r_{p-r,\,q+r-1}}{B^r_{p-r,\,q+r-1}} \arrow[d, equal] \\
E^r_{pq} \arrow[rrr, "d^r_{pq}"] & & & E^r_{p-r,\,q+r-1}\,.
\end{tikzcd}$$

En particular $d^r_{pq}$ cumple que

$$\ker d^r_{pq} = \ker \pi = \frac{Z^{r+1}_{pq}}{B^r_{pq}}\,, \qquad \operatorname{im} d^r_{pq} = \operatorname{im} i = \frac{B^{r+1}_{p-r,\,q+r-1}}{B^r_{p-r,\,q+r-1}}\,.$$

Cuando no haya ambigüedad escribiremos $d^r$ en lugar de $d^r_{pq}$.

**Proposición 2.19.** Dado $r \geq 1$ y $p, q \in \mathbb{Z}$, la sucesión

$$\cdots \longrightarrow E^r_{p+r,\,q-r+1} \xrightarrow{d^r} E^r_{pq} \xrightarrow{d^r} E^r_{p-r,\,q+r-1} \longrightarrow \cdots$$

donde todos los morfismos son $d^r$ es un complejo de cadenas cuya homología es

$$\cdots \qquad E^{r+1}_{p+r,\,q-r+1} \qquad E^{r+1}_{pq} \qquad E^{r+1}_{p-r,\,q+r-1} \qquad \cdots\,.$$

*Demostración.* Tenemos que

$$\operatorname{im} d^r_{p+r,\,q-r+1} = \frac{B^{r+1}_{pq}}{B^r_{pq}} \subseteq \frac{Z^{r+1}_{pq}}{B^r_{pq}} = \ker d^r_{pq}\,,$$

es decir que $d^r_{pq} \circ d^r_{p+r,\,q-r+1} = 0$. Notar que como esto se cumple para $p$ y $q$ arbitrarios, esta inclusión se da en todos los lugares de la sucesión, y por lo tanto probamos que es un complejo de cadenas. Usando el tercer teorema de isomorfismo [ver Hun74, Corolario I.5.10], vemos que la homología en el lugar $E^r_{pq}$ es

$$\frac{\ker d^r_{pq}}{\operatorname{im} d^r_{p+r,\,q-r+1}} = \frac{Z^{r+1}_{pq} \,/\, B^r_{pq}}{B^{r+1}_{pq} \,/\, B^r_{pq}} \cong \frac{Z^{r+1}_{pq}}{B^{r+1}_{pq}} = E^{r+1}_{pq}\,.$$

Como esto se cumple para cualquier $p, q$, queda probada la proposición.

□

Veamos cómo se obtiene $E^\infty_{pq}$ a partir de $E^r_{pq}$ para todo $r \geq 1$.

**Proposición 2.20.** Sean $p, q \in \mathbb{Z}$. Entonces para todo $r \geq p+1$ hay morfismos sobreyectivos $E^r_{pq} \to E^{r+1}_{pq}$, y usando estos morfismos $E^\infty_{pq} \cong \operatorname{colím}_{r\to\infty} E^r_{pq}$.

*Demostración.* Como ya notamos en la prueba de la Proposición 2.14, si $r \geq p+1$ entonces $Z^r_{pq} = Z^\infty_{pq}$. Por lo tanto

$$E^{r+1}_{pq} = \frac{Z^{r+1}_{pq}}{B^{r+1}_{pq}} = \frac{Z^\infty_{pq}}{B^{r+1}_{pq}} = \frac{Z^r_{pq}}{B^{r+1}_{pq}} \cong \frac{Z^r_{pq} \,/\, B^r_{pq}}{B^{r+1}_{pq} \,/\, B^r_{pq}} = \frac{E^r_{pq}}{B^{r+1}_{pq} \,/\, B^r_{pq}}\,,$$

es decir que hay un morfismo sobreyectivo $E^r_{pq} \to E^{r+1}_{pq}$ cuyo kernel es $B^{r+1}_{pq}/B^r_{pq}$.

Ahora, sea $i_r : (X_{p+r-1}, X_p) \to (X, X_p)$ la inclusión, para cada $r \geq 1$. Como $X = \bigcup_{n \geq p+1} X_n = \operatorname{colím}_{n\to\infty} X_n$, se puede usar el Corolario 2.12 para deducir que

$$\operatorname*{colím}_{r\to\infty} i_{r*} : \operatorname*{colím}_{r\to\infty} h_{p+q+1}(X_{p+r-1}, X_p) \to h_{p+q+1}(X, X_p)$$

es un isomorfismo. Para todo $r \geq 1$ sea

$$\Delta_r : h_{p+q+1}(X_{p+r-1}, X_p) \to h_{p+q}(X_p, X_{p-1})$$

el morfismo de borde para la terna $(X_{p+r-1}, X_p, X_{p-1})$. Sea $\Delta$ el morfismo de borde de la terna $(X, X_p, X_{p-1})$. Se tiene que, para cada $r \geq 1$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & h_{p+q+1}(X, X_p) \arrow[d, "\Delta"] \\
h_{p+q+1}(X_{p+r-1}, X_p) \arrow[ur, bend left, "i_{r*}"] \arrow[dr, bend right, "\Delta_r"'] & \\
 & h_{p+q}(X_p, X_{p-1})
\end{tikzcd}$$

conmuta, gracias a la naturalidad de los morfismos de borde. Por lo tanto conmuta también el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & h_{p+q+1}(X, X_p) \arrow[d, "\Delta"] \\
\operatorname{colím}_{r\to\infty} h_{p+q+1}(X_{p+r-1}, X_p) \arrow[ur, bend left, "\operatorname{colím}_r i_{r*}", "\cong"'] \arrow[dr, bend right, "\operatorname{colím}_r \Delta_r"'] & \\
 & h_{p+q}(X_p, X_{p-1})
\end{tikzcd}$$

[ver Swi02, Corolario 7.49]. Entonces

$$B^{\infty}_{pq} = \operatorname{im} \Delta = \operatorname{im}(\operatorname*{colím}_{r\to\infty} \Delta_r) = \bigcup_{r\geq 1} \operatorname{im} \Delta_r = \bigcup_{r\geq 1} B^r_{pq}\,.$$

Por consecuencia se puede verificar que

$$\operatorname*{colím}_{r\to\infty} E^r_{pq} = \operatorname*{colím}_{r\to\infty} \frac{Z^{\infty}_{pq}}{B^r_{pq}} \cong \frac{Z^{\infty}_{pq}}{\bigcup_{r\geq 1} B^r_{pq}} = \frac{Z^{\infty}_{pq}}{B^{\infty}_{pq}} = E^{\infty}_{pq}\,,$$

siempre y cuando $\operatorname{colím}_{r\to\infty} E^r_{pq}$ esté definido usando los morfismos sobreyectivos de arriba.

□

Finalmente, veamos los dos últimos pasos: es decir, la relación entre los grupos $E^{\infty}_{pq}$ y los grupos $F_{pq}$, y la relación entre $F_{pq}$ y $h_n(X, \varnothing)$.

**Proposición 2.21.** Dados $p, q \in \mathbb{Z}$, se cumple que

$$\begin{aligned} 0 = F_{-1,\,p+q+1} \subseteq \cdots \subseteq F_{p-1,\,q+1} \subseteq F_{pq} \subseteq \\ F_{p+1,\,q-1} \subseteq \cdots \subseteq h_{p+q}(X, \varnothing) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} F_{p+k,\,q-k}\,, \end{aligned}$$

y además hay un isomorfismo $F_{pq} \,/\, F_{p-1,\,q+1} \cong E^{\infty}_{pq}$.

*Demostración.* Por definición

$$F_{-1,\,p+q+1} = \operatorname{im}(i_* : h_{p+q}(X_{-1}, \varnothing) \to h_{p+q}(X, \varnothing))\,,$$

pero $h_{p+q}(X_{-1}, \varnothing) = h_{p+q}(\varnothing, \varnothing) = 0$ por la Proposición 2.5, así que se cumple que $F_{-1,\,p+q+1} = 0$. Tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} h_{p+q}(X_p, \varnothing) \arrow[r, "i_{p*}"] \arrow[d] & h_{p+q}(X, \varnothing) \\ h_{p+q}(X_{p+1}, \varnothing) \arrow[ur, bend right, "i_{p+1*}"'] & \end{tikzcd}$$

donde todos los morfismos son inducidos por inclusiones. Aquí $F_{pq}$ es la imagen de $i_{p*}$ y $F_{p+1,\,q-1}$ es la imagen de $i_{p+1*}$, así que se deduce que $F_{pq} \subseteq F_{p+1,\,q-1}$.

Para probar el isomorfismo, consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} h_{p+q}(X_{p-1}, \varnothing) \arrow[dd, "i_{p-1*}"'] \arrow[dr, "i_*"] & & h_{p+q+1}(X, X_p) \arrow[dl, "\partial"'] \arrow[dd, "\Delta"] \\ & h_{p+q}(X_p, \varnothing) \arrow[dl, "i_{p*}"] \arrow[dr, "j_*"'] & \\ h_{p+q}(X, \varnothing)\,, & & h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \end{tikzcd}$$

donde $i_*, i_{p*}, i_{p-1*}, j_*$ son inducidos por inclusiones y $\partial, \Delta$ son morfismos de borde. El triángulo de la derecha conmuta porque está compuesto por morfismos inducidos por inclusiones, y se deduce que el de la izquierda conmuta por la naturalidad de los morfismos de borde. Como $\partial, i_{p*}$ forman parte de la sucesión exacta larga asociada $(X, X_p)$ y $i_*, j_*$ forman parte de la sucesión exacta larga asociada a $(X_p, X_{p-1})$, se cumple que $\operatorname{im}\partial = i_{p*}$ y $\operatorname{im} i_* = j_*$. Entonces podemos aplicar el Lema 2.16 para concluir que

$$\frac{F_{pq}}{F_{p-1,\,q+1}} = \frac{\operatorname{im} i_{p*}}{\operatorname{im} i_{p-1*}} \cong \frac{\operatorname{im} j_*}{\operatorname{im} \varDelta} = \frac{Z^\infty_{pq}}{B^\infty_{pq}} = E^\infty_{pq}\,.$$

Finalmente, como $X = \bigcup_{n\geq 0} X_n = \operatorname{colím}_{n\to\infty} X_n$, podemos usar el Corolario 2.12 para concluir que

$$\operatorname*{colím}_{k\to\infty} i_{p+k*} : \operatorname*{colím}_{k\to\infty} h_{p+q}(X_{p+k}, \varnothing) \to h_{p+q}(X, \varnothing)$$

es un isomorfismo para todos $p, q \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$h_{p+q}(X, \varnothing) = \operatorname{im}(\operatorname*{colím}_{k\to\infty} i_{p+k*}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{im} i_{p+k*} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} F_{p+k,\,q-k}\,.$$

□

Esta estructura es un ejemplo de algo llamado sucesión espectral. La siguiente definición es una versión un poco modificada de la que aparece en [McC00, Definiciones 2.2, 2.4].

**Definición 2.22.** Una **sucesión espectral (de tipo homológico)** consiste en

1. Una familia de grupos abelianos $(E^r_{pq})_{p,q,r}$, para $p, q \in \mathbb{Z}$ y $r \geq 1$.
2. Una familia de morfismos $(d^r_{pq})_{p,q,r}$, llamados **diferenciales**, con

   $$d^r_{pq} : E^r_{pq} \to E^r_{p-r,\,q+r-1}$$

   y tales que $d^r_{pq} \circ d^r_{p+r,\,q-r+1} = 0$ para todos $p, q, r$.
3. Isomorfismos $E^{r+1}_{pq} \cong H_{p,q}(E^r_{**}, d^r_{**})$, donde se define

   $$H_{p,q}(E^r_{**}, d^r_{**}) = \frac{\ker d^r_{pq}}{\operatorname{im} d^r_{p+r,\,q-r+1}}\,.$$

Dado un $r \geq 0$ fijo, la familia $(E^r_{pq})_{p,q}$ se llama la **$r$-ésima página** o el **$r$-ésimo término**. Sea $(H_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de grupos abelianos. Se dice que la sucesión espectral $(E^r_{pq}, d^r_{pq})_{p,q,r}$ **converge a** $(H_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ si existe una familia de subgrupos $F_pH_n \subseteq H_n$ para $p, n \in \mathbb{Z}$, con

$$\cdots \subseteq F_{p-1} \subseteq F_pH_n \subseteq F_{p+1}H_n \subseteq \cdots \subseteq H_n = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} F_pH_n\,,$$

tal que hay isomorfismos

$$\frac{F_pH_{p+q}}{F_{p-1}H_{p+q}} \cong \operatorname*{colím}_{r\to\infty} E^r_{pq} \; (= E^\infty_{pq})$$

para todo $p, q \in \mathbb{Z}$.

Dada esta definición, podemos resumir lo visto hasta ahora con el siguiente teorema:

**Teorema 2.23.** (Sucesión espectral asociada a un $\mathcal{C}$-espacio). Sea $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una teoría de homología no reducida de $\mathcal{C}$-espacios, y sea $X$ un $\mathcal{C}$-espacio con sub-$\mathcal{C}$-espacios

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

tales que $X = \operatorname{colím}_{n\to\infty} X_n$. Entonces existe una sucesión espectral de tipo homológico $(E^r_{pq}, d^r_{pq})_{p,q,r}$ cuya primera página $(E^1_{pq})_{p,q}$ está dada por

$$E^1_{pq} \cong h_{p+q}(X_p, X_{p-1})$$

y cuyo primer diferencial $(d^1_{pq})_{p,q}$ es el morfismo de borde

$$\begin{array}{ccc} h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) & \xrightarrow{\Delta} & h_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-2}) \\ \wr\Vert & & \wr\Vert \\ E^1_{pq} & \xrightarrow{\quad d^1 \quad} & E^1_{p-1,q} \end{array}$$

asociado a la terna $(X_p, X_{p-1}, X_{p-2})$. Esta sucesión espectral converge a

$$(h_n(X, \varnothing))_{n\in\mathbb{Z}}\,.$$

Notar que este corresponde a [DL98, Teorema 4.7(1)].

*Demostración.* Definimos a los grupos $E^r_{pq}$ en la Definición 2.15 y a los morfismos $d^r_{pq}$ en la Definición 2.18. En la Proposición 2.19 probamos que $d^r_{pq} \circ d^r_{p+r,\,q-r+1} = 0$ y hallamos los isomorfismos $E^{r+1}_{pq} \cong H_{p,q}(E^r_{**}, d^r_{**})$, probando que $(E^r_{pq}, d^r_{pq})_{p,q,r}$ es una sucesión espectral. A los grupos $E^\infty_{pq}$ los definimos en la Definición 2.15, y en la Proposición 2.20 probamos que estos son iguales a $\operatorname{colím}_{r\to\infty} E^r_{pq}$ Luego, poniendo $F_p h_n(X,\varnothing) = F_{p,n-p}$ para $p \geq 0$ y $F_p h_n(X,\varnothing) = 0$ para $p < 0$, lo que probamos en la Proposición 2.21 es que $(E^r_{pq}, d^r_{pq})_{p,q,r}$ converge a $(h_n(X,\varnothing))_{n\in\mathbb{Z}}$.

Como ya notamos, se cumple que por definición

$$E^1_{pq} = Z^1_{pq} \,/\, B^1_{pq} = h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \,/\, 0 \cong h_{p+q}(X_p, X_{p-1})\,.$$

Entonces lo único que falta probar es la afirmación sobre el diferencial $d^1_{pq}$. Expandiendo la definición de $d^1_{pq}$ y las de los grupos involucrados en ella, vemos que el morfismo $h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \to h_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-2})$ que corresponde a $d^1_{pq}$ está dado por la composición

$$\begin{array}{ccc} h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) & \xrightarrow{\pi} & \dfrac{h_{p+q}(X_p, X_{p-1})}{\operatorname{im} j_*} & & \\ & & \cong\big\downarrow\varphi & & \\ & & \operatorname{im}\Delta & \xhookrightarrow{i} & h_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-2})\,, \end{array}$$

donde $j : (X_p, X_{p-2}) \to (X_p, X_{p-1})$ es la inclusión, $\Delta : h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \to h_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-2})$ es el morfismo de borde, $\pi$ es la proyección canónica, $i$ es la inclusión, y $\varphi$ es un isomorfismo. Mirando la prueba de la Proposición 2.17, vemos que $\varphi$ viene de aplicarle el Lema 2.16 al diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
h_{p+q}(X_p, X_{p-2}) \arrow[dd, "j_*"'] \arrow[dr, "j_*"] & & 0 \arrow[dl] \arrow[dd] \\
& h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \arrow[dl, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\Delta"'] & \\
h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) & & h_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-2})\,.
\end{tikzcd}$$

Luego, mirando la definición de $\varphi$ en la prueba del Lema 2.16, se concluye fácilmente que entonces $\varphi$ es el único morfismo que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \arrow[r, "\Delta'"] \arrow[d, "\pi"'] & \operatorname{im} \Delta\,, \\
\dfrac{h_{p+q}(X_p, X_{p-1})}{\operatorname{im} j_*} \arrow[ur, bend right, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\Delta'$ es igual a $\Delta$ pero con el codominio restringido. Entonces $i \circ \varphi \circ \pi = i \circ \Delta' = \Delta$, que es lo que queríamos probar.

$\square$

## 2.4. Sucesión espectral para $\mathcal{C}$-CW-complejos libres

En esta sección vamos a desarrollar las consecuencias del Teorema 2.23 en el caso en el que $X$ es un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre. El objetivo es probar una versión del Teorema 2.23 para $\mathcal{C}$-CW-complejos libres, en el que se da una fórmula para calcular la segunda página de la sucesión espectral, usando una cierta teoría de homología más simple. Nos basamos en [DL98, págs. 226, 236; Swi02, págs. 341, 174-178; y Lüc20, Ejemplo 10.2], pero la presentación que damos es un poco distinta. En lugar de primero definir la homología con coeficientes en un $\mathbb{Z}\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$-módulo y luego verificar que $(E^2_{pq})_{p,q}$ se puede expresar usando esta teoría de homología, usamos el cálculo de $(E^2_{pq})_{p,q}$ en sí para motivar la definición de $R\mathcal{C}$-módulo en general y la definición de homología con coeficientes en un $\mathbb{Z}\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$-módulo.

Primero veamos cómo queda la primera página $(E^1_{pq})_{p,q}$ de la sucesión espectral cuando $X$ es un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre.

**Proposición 2.24.** Supongamos que el $\mathcal{C}$-espacio $X$ se obtiene del $\mathcal{C}$-espacio $Y$ pegando $\mathcal{C}$-$p$-celdas libres, de forma que

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i \in I} \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times S^{p-1} \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, hook] \\
\coprod_{i \in I} \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times D^{p} \arrow[r] & X\,,
\end{tikzcd}$$

donde $I$ es un conjunto de índices, sea un pushout. Entonces se cumple que, para todo $q \in \mathbb{Z}$,

$$h_{p+q}(X, Y) \cong \bigoplus_{i \in I} h_q(\hom_{\mathcal{C}}(c_i, -), \varnothing)\,,$$

donde identificamos $\hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) = \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times D^0$.

*Demostración.* Adaptamos la prueba de [Swi02, pág. 341]. Para esta se necesitan varios resultados básicos sobre teorías de homotopía que no hemos probado. En lugar de probar estos resultados, solo citaremos dónde se encuentra la versión clásica de estas pruebas. Luego las pruebas para $\mathcal{C}$-espacios se obtienen de la misma forma que hemos hecho hasta este punto.

Primero, se cumple que

$$h_{p+q}(X, Y) \cong h_{p+q}(X \,/\, Y, Y \,/\, Y)\,, \tag{2.25}$$

donde el $\mathcal{C}$-espacio cociente $X \,/\, Y$ se define como

$$(X \,/\, Y)(c) = X(c) \,/\, Y(c)\,,$$

y las funciones $(X/Y)(\phi)$ se definen a partir de $X(\phi)$ con la propiedad universal del cociente. La prueba de (2.25) se puede deducir a partir de la que está en [Swi02, Proposición 7.14] (que prueba el caso $\mathcal{C} = \mathbf{1}$) de forma relativamente directa. De ahora en adelante abreviaremos las expresiones del tipo $h_{p+q}(X \,/\, Y, Y \,/\, Y)$ como $h_{p+q}(X \,/\, Y, *)$ para ahorrar espacio.

Ahora, a partir del pushout que define a $X$, se puede ver que el cociente $X \,/\, Y$ es de la forma

$$\begin{aligned} X \,/\, Y &\cong \frac{\coprod_{i \in I} \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times D^p}{\coprod_{i \in I} \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times S^{p-1}} \\ &\cong \frac{\coprod_{i \in I} \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times D^p \,/\, \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times S^{p-1}}{\coprod_{i \in I} \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times S^{p-1} \,/\, \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times S^{p-1}}\,. \end{aligned}$$

Además es claro que también

$$Y \,/\, Y \cong \frac{\coprod_{i \in I} \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times S^{p-1} \,/\, \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times S^{p-1}}{\coprod_{i \in I} \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times S^{p-1} \,/\, \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times S^{p-1}}\,.$$

Entonces, usando otra vez la versión general de (2.25), pero en la otra dirección, tenemos que

$$\begin{aligned} h_{p+q}(X \,/\, Y, Y \,/\, Y) \cong h_{p+q}(&\textstyle\coprod_{i \in I} \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times D^p \,/\, \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times S^{p-1}, \\ &\textstyle\coprod_{i \in I} \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times S^{p-1} \,/\, \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times S^{p-1})\,. \end{aligned}$$

Usando el axioma de unión disjunta, se concluye que lo de arriba es isomorfo a

$$\begin{aligned} &\bigoplus_{i \in I} h_{p+q}(\hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times D^p \,/\, \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times S^{p-1}, *) \\ &\cong \bigoplus_{i \in I} h_{p+q}(\hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times D^p, \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times S^{p-1})\,. \end{aligned}$$

Ahora, usando suspensiones de una forma similar a la que se describe en [Swi02, Secciones 7.15-7.18], se puede probar que

$$\begin{aligned} &h_{p+q}(\hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times D^p, \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times S^{p-1}) \\ &\cong h_{p+q-1}(\hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times D^{p-1}, \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times S^{p-2})\,. \end{aligned}$$

Repitiendo este proceso $p$ veces, obtenemos que esto es isomorfo a

$$h_q(\hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times D^0, \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \times S^{-1}) = h_q(\hom_{\mathcal{C}}(c_i, -), \varnothing)\,.$$

Combinando todos estos isomorfismos, llegamos a que

$$h_{p+q}(X,Y) \cong \bigoplus_{i\in I} h_q(\hom_{\mathcal{C}}(c_i,-),\varnothing)\,,$$

que es lo que queríamos.

□

**Corolario 2.26.** En particular, dado $X$ un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre, si aplicamos el Teorema 2.23, se cumple que la página 1 de la sucesión espectral esta dada por

$$E^1_{pq} \cong h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \cong \bigoplus_{i\in I_p} h_q(\hom_{\mathcal{C}}(c_i,-),\varnothing)\,,$$

donde $I_p$ es el conjunto que indexa las $p$-celdas de $X$.

De ahora en adelante escribiremos $h_q(X)$ en lugar de $h_q(X,\varnothing)$ para ahorrar espacio. Se concluye de este último corolario que, suponiendo que conocemos los grupos $h_q(\hom_{\mathcal{C}}(c,-))$ para todo $c\in\mathcal{C}$ y $q\in\mathbb{Z}$, es fácil obtener $(E^1_{pq})_{p,q}$ dado un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre arbitrario. Veremos que se cumple algo similar con los diferenciales $d^1$, pero va a ser un poco más complicado. Primero necesitamos dos definiciones que nos serán útiles en el cálculo de los diferenciales. La siguiente está basada en [Swi02, Definición 10.10].

**Definición 2.27.** Sea $X$ un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre, y sea $p\in\mathbb{N}$. Supongamos que $I_p$ es el conjunto de índices de las $\mathcal{C}$-$p$-celdas de $X$, y que $I_{p-1}$ es el conjunto de índices de las $\mathcal{C}$-$(p-1)$-celdas de $X$. Sea $i\in I_p$ y $j\in I_{p-1}$. Es decir, $X$ tiene (por lo menos) una $\mathcal{C}$-$p$-celda, basada en un objeto $c_i\in\mathcal{C}$, y una $\mathcal{C}$-$(p-1)$-celda, basada en un objeto $c_j\in\mathcal{C}$. Supongamos que $\hom_{\mathcal{C}}(c_j,c_i)$ no es vacío, y sea $\phi\in\hom_{\mathcal{C}}(c_j,c_i)$ (es decir, $\phi: c_j\to c_i$).

Primero, recordemos que la $\mathcal{C}$-$p$-celda indexada por $i$ se pega al $(p-1)$-esqueleto $X_{p-1}$ través de un morfismo de pegado

$$g_i : \hom_{\mathcal{C}}(c_i,-)\times S^{p-1}\to X_{p-1}\,.$$

Este morfismo induce por la adjunción en la Proposición 1.13 una función continua

$$T(g_i): S^{p-1}\to X_{p-1}(c_i)\,.$$

Por otra parte, la $\mathcal{C}$-$(p-1)$-celda indexada por $j$ es la imagen de un morfismo

$$f_j : \hom_{\mathcal{C}}(c_j,-)\times \operatorname{int} D^{p-1}\to X$$

(para esta no nos importará el morfismo de pegado). Por definición, este morfismo está dado por funciones continuas $(\hom_{\mathcal{C}}(c_j,-)\times\operatorname{int} D^{p-1})(c)\to X(c)$ para todo $c\in\mathcal{C}$. Pero $(\hom_{\mathcal{C}}(c_j,-)\times\operatorname{int} D^{p-1})(c) = \hom_{\mathcal{C}}(c_j,c)\times\operatorname{int} D^{p-1}$. En particular, tenemos una función continua

$$f_j(c_i): \hom_{\mathcal{C}}(c_j,c_i)\times\operatorname{int} D^{p-1}\to X(c_i)\,,$$

la cual se puede restringir a una función

$$f_j(c_i)|_{\{\phi\}\times\operatorname{int} D^{p-1}} : \{\phi\}\times\operatorname{int} D^{p-1}\to X(c_i)\,.$$

Claramente la imagen de esta función es una $(p-1)$-celda de $X(c_i)$, si vemos a $X(c_i)$ como un CW-complejo clásico. Llamémosle $e_{j,\phi}$ a esta imagen, y definimos el espacio cociente

$$X^{p-1}_{c_i,j,\phi} = X_{p-1}(c_i) \,/\, (X_{p-1}(c_i) \setminus e_{j,\phi}) \,,$$

es decir, el resultado de colapsar todo $X_{p-1}(c_i)$ excepto por la celda $e_{j,\phi}$ a un punto. Sea $p_{j,\phi} : X_{p-1}(c_i) \to X^{p-1}_{c_i,j,\phi}$ la proyección al cociente. Se puede ver que $X^{p-1}_{c_i,j,\phi}$ es homeomorfo a $D^{p-1} \,/\, S^{p-2} \cong S^{p-1}$. Usando todo esto, definimos la **función de pegado relativa** $h_{i,j,\phi} : S^{p-1} \to S^{p-1}$ como la composición

$$S^{p-1} \xrightarrow{T(g_i)} X_{p-1}(c_i) \xrightarrow{p_{j,\phi}} X^{p-1}_{c_i,j,\phi} \xrightarrow{\cong} S^{p-1} \,.$$

**Definición 2.28.** Supongamos que $\phi : c_j \to c_i$ es un morfismo en $\mathcal{C}$. Definimos el morfismo de $\mathcal{C}$-espacios

$$\phi_\circ : \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -) \to \hom_{\mathcal{C}}(c_j, -)$$

de la siguiente manera: dado $c \in \mathcal{C}$, y dado $\psi \in \hom_{\mathcal{C}}(c_i, -)(c) = \hom_{\mathcal{C}}(c_i, c)$, definimos

$$\phi_\circ(c)(\psi) = \psi \circ \phi \in \hom_{\mathcal{C}}(c_j, c) \,.$$

Veamos que $\phi_\circ$ es un morfismo de $\mathcal{C}$-espacios bien definido. Cada $\hom_{\mathcal{C}}(c_i, c)$ está equipado con la topología discreta, así que cada $\phi_\circ(c)$ es una función continua. Para la naturalidad, hay que probar que conmutan los diagramas de la forma

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{C}}(c_i, c) \arrow[r, "\phi_\circ(c)"] \arrow[d, "\hom_{\mathcal{C}}(c_i,-)(\varphi)"'] & \hom_{\mathcal{C}}(c_j, c) \arrow[d, "\hom_{\mathcal{C}}(c_j,-)(\varphi)"] \\
\hom_{\mathcal{C}}(c_i, d) \arrow[r, "\phi_\circ(d)"] & \hom_{\mathcal{C}}(c_j, d)
\end{tikzcd}$$

para todo morfismo $\varphi : c \to d$ en $\mathcal{C}$. Pero por la definición en (1.10) se da que $\hom_{\mathcal{C}}(c_i, -)(\varphi)(\psi) = \varphi \circ \psi$, así que ambos caminos en el diagrama hacen $\psi \mapsto \varphi \circ (\psi \circ \phi) = (\varphi \circ \psi) \circ \phi$.

Ahora podemos afirmar la propiedad que cumplen los diferenciales $d^1$.

**Proposición 2.29.** Sea $X$ un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre. Sea $(E^r_{pq}, d^r_{pq})_{p,q,r}$ la sucesión espectral dada por el Teorema 2.23. Entonces para cada $p, q$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
E^1_{pq} \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & E^1_{p-1,q} \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\
h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & h_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-2}) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\
\bigoplus_{i \in I_p} h_q(\hom_{\mathcal{C}}(c_i, -)) \arrow[r, "d'"] & \bigoplus_{j \in I_{p-1}} h_q(\hom_{\mathcal{C}}(c_j, -)) \,.
\end{tikzcd}$$

Para definir el morfismo $d'$, primero definimos los morfismos

$$d'_{ij} : h_q(\hom_{\mathcal{C}}(c_i, -)) \to h_q(\hom_{\mathcal{C}}(c_j, -))$$

para todo $i \in I_p$ y $j \in I_{p-1}$, tal que

$$d'_{ij}x = \sum_{\phi \in \hom_{\mathcal{C}}(c_j, c_i)} \deg(h_{i,j,\phi})(\phi_\circ)_* x\,,$$

donde $\deg(h_{i,j,\phi})$ es el grado de la función de pegado relativa $h_{i,j,\phi} : S^{p-1} \to S^{p-1}$ definida en 2.27, y $\phi_\circ$ es el morfismo de $\mathcal{C}$-espacios definido en 2.28. El grado de una función continua $S^n \to S^n$ se define como en [Swi02, Definición 10.10]. Luego definimos $d'$ como

$$d'(x_i)_{i \in I_p} = \Big( \sum_{i \in I_p} d'_{ij} x_i \Big)_{j \in I_{p-1}}.$$

Se puede ver por un argumento de compacidad que, dado $i \in I_p$, hay solo finitos pares $(j, \phi)$ tales que $\deg(h_{i,j,\phi}) \neq 0$, así que $d'$ está bien definido.

*Demostración.* Omitimos la prueba completa. La idea es adaptar la prueba dada en [Swi02, Teorema 15.7] (que a su vez se basa en la prueba de [Swi02, Proposición 10.11]) reemplazando celdas $D^n$ por celdas libres $\hom_{\mathcal{C}}(c, -) \times D^n$, con algunas correcciones para compensar por el hecho de que una celda libre puede tener más de una componente conexa.

□

**Observación 2.30.** Vale la pena ver el caso $p = 1$ por separado. Dado $i \in I_1$, la función

$$T(g_i) : S^0 \to X_0(c_i)$$

queda determinada por la elección de los puntos $T(g_i)(+1)$ y $T(g_i)(-1)$, donde $\{+1, -1\} = S^0$. Dado $j \in I_0$ y $\phi : c_j \to c_i$, el conjunto $e_{j,\phi}$ es una 0-celda de $X(c_i)$, por lo tanto es un conjunto que contiene un solo punto. Recíprocamente, cualquier punto de $X_0(c_i)$ es el único punto de una única 0-celda $e_{j,\phi}$, para algún $j \in I_0$ y $\phi : c_j \to c_i$. Entonces, asumiendo que definimos bien la noción de grado de funciones $S^0 \to S^0$, se cumple que

$$\deg(h_{i,j,\phi}) = \begin{cases} +1 & \text{si } e_{j,\phi} = \{T(g_i)(+1)\} \\ -1 & \text{si } e_{j,\phi} = \{T(g_i)(-1)\} \\ 0 & \text{de otro modo}\,. \end{cases}$$

Por lo tanto el morfismo

$$d' : \bigoplus_{i \in I_1} h_q(\hom_{\mathcal{C}}(c_i, -)) \to \bigoplus_{j \in I_0} h_q(\hom_{\mathcal{C}}(c_j, -))$$

está dado por la siguiente definición: dado $(x_i)_{i \in I_1} \in \bigoplus_{i \in I_1} h_q(\hom_{\mathcal{C}}(c_i, -))$,

$$d'(x_i)_{i \in I_1} = \sum_{i \in I_1} (\iota_i^+ (\phi_i^+{}_\circ)_* x_i - \iota_i^- (\phi_i^-{}_\circ)_* x_i)\,,$$

donde, para todo $i \in I_1$,

- El morfismo $\phi_i^+ : c_{j_i^+} \to c_i$ es tal que $e_{j_i^+, \phi_i^+} = \{T(g_i)(+1)\}$.
- El morfismo $\phi_i^- : c_{j_i^-} \to c_i$ es tal que $e_{i_1, \phi_i^-} = \{T(g_i)(-1)\}$.

- Los morfismos $\iota_i^{\pm} : h_q(\hom_{\mathcal{C}}(c_{j_i^{\pm}}, -)) \to \bigoplus_{j\in I_0} h_q(\hom_{\mathcal{C}}(c_j,-))$ son las inclusiones canónicas.

Recordemos que la segunda página $(E^2_{pq})_{p,q}$ se obtiene tomando la homología de $(E^1_{pq}, d^1)_{p,q}$. Entonces lo que nos dice la Proposición 2.29 es que para calcular esta segunda página en el caso en el que $X$ es un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre, nos basta con, por un lado, conocer todos los grupos $h_q(\hom_{\mathcal{C}}(c,-))$ y todos los morfismos $(\phi_\circ)_*$; y, por otro lado, conocer los conjuntos $I_p$ y los grados $\deg(h_{i,j,\phi})$. Lo primero solo depende de la teoría de homología $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ (y no de $X$), y lo segundo solo depende del $\mathcal{C}$-CW-complejo libre $X$ (y no de $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$). Es decir que tenemos separada la información sobre $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ y la información sobre $X$.

La información de todos los grupos $h_q(\hom_{\mathcal{C}}(c,-))$ y morfismos $(\phi_\circ)_*$ para un $q \in \mathbb{Z}$ fijo es un ejemplo de una estructura llamada $\mathbb{Z}\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$-módulo. La siguiente definición viene de [DL98, págs. 204-205].

**Definición 2.31.** Dado un anillo $R$ y una categoría pequeña $\mathcal{C}$, un **$R\mathcal{C}$-módulo** es un funtor covariante

$$M : \mathcal{C} \to R\text{-Mód}\,.$$

Es decir, $M$ le asigna a cada objeto $c \in \mathcal{C}$ un $R$-módulo $M(c)$, y a cada morfismo $\phi : c \to d$ un morfismo de $R$-módulos $M(\phi) : M(c) \to M(d)$, respetando las composiciones. Si $M$ y $N$ son $R\mathcal{C}$ módulos, un **morfismo de $R\mathcal{C}$-módulos** $f : M \to N$ es una transformación natural entre $M$ y $N$.

Entonces si definimos $M(c) = h_q(\hom_{\mathcal{C}}(c,-))$ y $M(\phi) = (\phi_\circ)_*$, resulta que $M$ es un $\mathbb{Z}\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$-módulo. El anillo es $\mathbb{Z}$ porque los $h_q(\hom_{\mathcal{C}}(c,-))$ son grupos abelianos (es decir, $\mathbb{Z}$-módulos). La categoría es $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ en lugar de $\mathcal{C}$ porque, dado $\phi \in \hom_{\mathcal{C}}(c,d) = \hom_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(d,c)$,

$$(\phi_\circ)_* : h_q(\hom_{\mathcal{C}}(d,-)) \to h_q(\hom_{\mathcal{C}}(c,-))\,,$$

es decir, $M(\phi) : M(d) \to M(c)$. Es fácil ver que además $((\phi' \circ \phi)_\circ)_* = (\phi_\circ)_* \circ (\phi'_\circ)_*$. A este $\mathbb{Z}\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$-módulo lo llamaremos $h_q(\hom_{\mathcal{C}}(?,-))$ de ahora en adelante.

En lo siguiente estudiamos un caso en el que se simplifica bastante el cálculo de los grupos de homología.

**Proposición 2.32.** Sea $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una teoría de homología tal que, para todo $q \neq 0$, $h_q(\hom_{\mathcal{C}}(?,-)) = 0$ (el $\mathbb{Z}\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$-módulo trivial). Sea $X$ un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre, y sea $(E^r_{pq}, d^r_{pq})_{p,q,r}$ la sucesión espectral obtenida en el Teorema 2.23. Entonces los grupos de homología $(h_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$ cumplen que $h_n(X) \cong E^2_{n,0}$. Es decir que $h_n(X) = 0$ para $n < 0$, y para $n \geq 0$ los $h_n(X)$ se obtienen tomándole la homología (algebraica) al complejo de cadenas

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{i\in I_n} h_0(\hom_{\mathcal{C}}(c_i,-)) \xrightarrow{d'} \bigoplus_{i\in I_{n-1}} h_0(\hom_{\mathcal{C}}(c_i,-)) \longrightarrow$$
$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{i\in I_0} h_0(\hom_{\mathcal{C}}(c_i,-)) \longrightarrow 0\,,$$

donde los diferenciales $d'$ están definidos como en la Proposición 2.29.

*Demostración.* Por el Corolario 2.26, se deduce que, para todo $q \neq 0$ y $p \in \mathbb{Z}$,

$$E^1_{pq} \cong \bigoplus_{i\in I_p} h_q(\hom_{\mathcal{C}}(c_i,-)) \cong \bigoplus_{i\in I_p} 0 = 0\,.$$

Como $E^{r+1}_{pq}$ es un cociente de dos subgrupos de $E^r_{pq}$, se deduce inductivamente que $E^r_{pq} = 0$ para todo $q \neq 0$, $p \in \mathbb{Z}$, $r \geq 1$. Entonces $E^\infty_{pq} = \operatorname{colím}_{r\to\infty} E^r_{pq} = 0$, para todo $q \neq 0$ y $p \in \mathbb{Z}$. Por otro lado, sea $r \geq 2$. Tenemos que

$$\begin{aligned} d^r_{p,0} &: E^r_{p,0} \to E^r_{p-r,\,r-1}\,, \\ d^r_{p+r,\,1-r} &: E^r_{p+r,\,1-r} \to E^r_{p,0}\,. \end{aligned}$$

Como tanto $E^r_{p-r,\,r-1}$ como $E^r_{p+r,\,1-r}$ son triviales (ya que $r-1 \neq 0$), se deduce que $d^r_{p,0}$ y $d^r_{p+r,\,1-r}$ son morfismos triviales. Entonces

$$E^{r+1}_{p,0} \cong \frac{\ker d^r_{p,0}}{\operatorname{im} d^r_{p+r,\,1-r}} = \frac{E^r_{p,0}}{0} \cong E^r_{p,0}\,.$$

Por inducción se deduce que $E^r_{p,0} \cong E^2_{p,0}$, para todo $p \in \mathbb{Z}$ y $r \geq 2$. Entonces $E^\infty_{p,0} = \operatorname{colím}_{r\to\infty} E^2_{p,0} = E^2_{p,0}$ (se puede verificar que en este caso los morfismos que se usan para definir el colímite son la identidad).

Llegamos a que la $\infty$-página de la sucesión espectral es

$$E^\infty_{pq} \cong \begin{cases} E^2_{pq} & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{si } q \neq 0\,, \end{cases}$$

para todo $p, q \in \mathbb{Z}$. Queremos obtener $h_n(X)$ a partir de esto. Por la Proposición 2.21, tenemos que

$$0 = F_{-1,\,n+1} \subseteq F_{0,n} \subseteq \cdots \subseteq F_{k,\,n-k} \subseteq \cdots \subseteq h_n(X) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_{k,\,n-k}\,.$$

Si $n < 0$, entonces $n - k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por la segunda parte de la Proposición 2.21, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{F_{k,\,n-k}}{F_{k-1,\,n-k+1}} \cong E^\infty_{k,\,n-k} = 0\,,$$

lo que implica que

$$0 = F_{-1,\,n+1} = F_{0,n} = \cdots = F_{k,\,n-k} = \cdots = h_n(X)\,.$$

Es decir que $h_n(X) = 0$ para $n < 0$. Ahora, si $n \geq 0$,

$$\frac{F_{k,\,n-k}}{F_{k-1,\,n-k+1}} \cong E^\infty_{k,\,n-k} \cong \begin{cases} E^2_{k,\,n-k} & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n\,. \end{cases}$$

Esto implica que $0 = F_{-1,\,n+1} = F_{0,n} = \cdots = F_{n-1,\,1}$ y que $F_{n,0} = F_{n+1,\,-1} = \cdots = h_n(X)$. Entonces, como

$$F_{n,0} \cong \frac{F_{n,0}}{0} = \frac{F_{n,0}}{F_{n-1,\,1}} \cong E^2_{n,0}\,,$$

concluimos que $h_n(X) \cong E^2_{n,0}$ para todo $n \geq 0$. Como siempre se cumple que $E^r_{pq} = 0$ para $p < 0$, llegamos a que $h_n(X) \cong E^2_{n,0}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Como

$$E^2_{n,0} \cong \frac{\ker d^1_{n,0}}{\operatorname{im} d^1_{n+1,\,0}}\,,$$

y por la Proposición 2.29, queda probada la última afirmación

□

Supongamos que $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una teoría de homología, y que $X$ *no* es un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre. Podemos usar el Teorema 1.36 para obtener una aproximación $\mathcal{C}$-CW $f : Z \to X$. Luego el axioma de equivalencia de homotopía débil nos garantiza que $f_* : h_n(Z) \to h_n(X)$ es un isomorfismo, y entonces podemos usar sucesiones espectrales para calcular $h_n(Z) \cong h_n(X)$. En particular, esto significa que si $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ cumple las hipótesis de la Proposición 2.32, esta queda determinada completamente a menos de isomorfismo por el valor del $\mathbb{Z}\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$-módulo $h_0(\hom_{\mathcal{C}}(?, -))$.

Nos podemos preguntar si cualquier $\mathbb{Z}\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$-módulo determina una teoría de homología de esta forma. La respuesta es sí. La siguiente definición es equivalente a la de [DL98, Definición 3.15]:

**Definición 2.33.** Sea $M$ un $\mathbb{Z}\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$-módulo. La **homología con coeficientes en** $M$ es la teoría de homología $(H_n^{\mathcal{C}}(-; M))_{n\in\mathbb{Z}}$ definida de la siguiente forma. Dado un $\mathcal{C}$-espacio $X$, sea $f : X' \to X$ una aproximación $\mathcal{C}$-CW, con $I_n$ el conjunto de índices de las $\mathcal{C}$-$n$-celdas de $X'$ (donde la celda indexada por $i \in I_n$ está basada en el objeto $c_i$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos $H_n^{\mathcal{C}}(X; M) = 0$ para $n < 0$, y para $n \geq 0$ definimos a $H_n^{\mathcal{C}}(X; M)$ como la homología algebraica del complejo de cadenas

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{i\in I_n} M(c_i) \xrightarrow{d'} \bigoplus_{i\in I_{n-1}} M(c_i) \longrightarrow$$
$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{i\in I_0} M(c_i) \longrightarrow 0\,,$$

donde los morfismos $d' : \bigoplus_{i\in I_n} M(c_i) \to \bigoplus_{j\in I_{n-1}} M(c_j)$ son tales que

$$d'(x_i)_{i\in I_n} = \Big( \sum_{i\in I_n,\, \phi\in\hom_{\mathcal{C}}(c_j,c_i)} \deg(h_{i,j,\phi}) M(\phi) x \Big)_{j\in I_{n-1}}\,.$$

Aquí $h_{i,j,\phi}$ está definida como en 2.27, pero con las celdas de $X'$.

Omitimos la definición de la homología de un par $H_n^{\mathcal{C}}(X, Y; M)$ para $Y \neq \varnothing$, la definición los morfismos $g_* : H_n^{\mathcal{C}}(X; M) \to H_n^{\mathcal{C}}(Y; M)$ inducidos por morfismos de $\mathcal{C}$-espacios $g : X \to Y$, así como la prueba de que esto define una teoría de homología que cumple todos los axiomas.

Como $\hom_{\mathcal{C}}(c, -)$ es un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre con una única $\mathcal{C}$-0-celda basada en $c$, se deduce que

$$H_n^{\mathcal{C}}(\hom_{\mathcal{C}}(c, -); M) \cong \begin{cases} M(c) & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0\,, \end{cases}$$

ya que entonces el complejo de cadenas tiene un solo grupo no trivial, que es $M(c)$. Entonces $H_0^{\mathcal{C}}(\hom_{\mathcal{C}}(?, -); M) \cong M$, lo cual responde nuestra pregunta.

Notar que la definición de $d'$ en 2.33 es la misma que la de la Proposición 2.29, pero reemplazando $h_q(\hom_{\mathcal{C}}(?, -))$ con $M$. Ahora que tenemos definida la homología con coeficientes en un $\mathbb{Z}\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$-módulo, podemos escribir la versión completa del Teorema 2.23 para $\mathcal{C}$-CW-complejos libres. El siguiente es una generalización de [Swi02, Teorema 15.7].

**Teorema 2.34.** (Sucesión de Atiyah-Hirzebruch para $\mathcal{C}$-CW-complejos libres). Sea $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una teoría de homología no reducida de $\mathcal{C}$-espacios, y sea $X$ un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre. Entonces existe una sucesión espectral de tipo homológico $(E^r_{pq}, d^r_{pq})_{p,q,r}$ cuya segunda página $(E^2_{pq})_{p,q}$ está dada por

$$E^2_{pq} \cong H^{\mathcal{C}}_p(X; h_q(\hom_{\mathcal{C}}(?, -)))\,,$$

y que converge a

$$(h_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}\,.$$

*Demostración.* La Proposición 2.29 nos da los grupos $E^1_{pq}$ y el diferencial $d^1$. Luego basta con notar que, dado $q \in \mathbb{Z}$, si tomamos $M_q = h_q(\hom_{\mathcal{C}}(?, -))$, tanto $H^{\mathcal{C}}_p(X; M_q)$ como $E^2_{pq}$ se calculan tomándole homología al mismo complejo de cadenas.

$\square$

# 3. $G$-espacios y $G$-teorías de homología

En este capítulo mostramos cómo se puede traducir lo que hemos hecho hasta ahora si sustituimos $\mathcal{C}$-espacios por $G$-espacios, donde $G$ es un grupo. En la Sección 3.1 traducimos lo que obtuvimos en el Capítulo 1, mientras que en la Sección 3.2 traducimos lo obtenido en el Capítulo 2. Nos basamos principalmente en [Lüc20, Capítulos 9, 10; DL98, Sección 7]. En la Sección 3.3 usamos el teorema al que llegamos en la Sección 3.2 para hacer el cálculo de una aplicación que tomamos de [Ell+20].

## 3.1. $G$-espacios y $G$-CW-complejos

En esta sección introduciremos a los $G$-espacios y a los $G$-CW-complejos, y mostraremos su relación con los $\mathcal{C}$-espacios y $\mathcal{C}$-CW-complejo libre respectivamente. Luego mostramos cómo se puede usar esta relación para probar teoremas sobre $G$-espacios y $G$-CW-complejos usando los resultados del Capítulo 1. Nos basamos en [Lüc20, Capítulo 9] y en [DL98, Sección 7], pero nuestra presentación es un poco distinta a la de [DL98, Sección 7].

Empezamos con una definición básica.

**Definición 3.1.** Sea $G$ un grupo. Un **$G$-espacio** es un espacio topológico $X$ equipado con una acción izquierda de $G$ continua, es decir una función continua $\cdot : G \times X \to X$ tal que $gh \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ para $g, h \in G$ y tal que $e \cdot x = x$, donde $e \in G$ es el elemento neutro.

Un **morfismo de $G$-espacios** o una **función continua $G$-equivariante** entre dos $G$-espacios $X \to Y$ es una función continua $f : X \to Y$ que respeta la acción de $G$, es decir tal que

$$g \cdot f(x) = f(g \cdot x)$$

para todo $g \in G$ y $x \in X$. De ahora en adelante siempre que dibujemos una flecha entre dos $G$-espacios se entenderá que esta representa una función continua $G$-equivariante. A la categoría de los $G$-espacios y los morfismos entre ellos la llamamos $G$-Top.

Notar que esta definición es equivalente a la de $\mathcal{C}$-espacio cuando $\mathcal{C}$ es una categoría con un solo objeto $*$ y tal que $\hom_{\mathcal{C}}(*, *) = G$, como vimos en el Ejemplo 1.4. Sin embargo en esta sección convendrá mantener estos conceptos separados y pensar a los $G$-espacios como una cosa distinta a los $\mathcal{C}$-espacios.

Vamos a definir a los $G$-CW-complejos, pero primero hay que hacer otras definiciones:

**Definición 3.2.** Dado un grupo $G$ y un subgrupo cualquiera $H \leq G$, le llamamos $G \,/\, H$ al **conjunto de coclases a izquierda**

$$G \,/\, H = \{gH \mid g \in G\}\,,$$

donde $gH = \{gh \mid h \in H\}$. Le damos a este conjunto la acción izquierda de $G$ dada por

$$k \cdot (gH) = (kg)H\,,$$

para todos $k, g \in G$. Podemos ver a $G \,/\, H$ como un $G$-espacio equipándole la topología discreta.

Se puede ver que la unión disjunta de $G$-espacios es un $G$-espacio, que el pushout de $G$-espacios es un $G$-espacio, etc. Si $Y$ es un espacio topológico sin una acción de $G$ dada, y $X$ es un $G$-espacio, se define el $G$-espacio $X \times Y$ con la topología producto y con la acción

$$g \cdot (x, y) = (g \cdot x,\, y)\,,$$

para todo $(x, y) \in X \times Y$. Esto es análogo a la Definición 1.21. Igual que para el caso de $\mathcal{C}$-espacios, definimos una homotopía de $G$-espacios como un morfismo de $G$-espacios $H : X \times I \to Y$, donde $X$ e $Y$ son $G$-espacios.

Adaptamos la siguiente definición de [Lüc20, Definición 9.2].

**Definición 3.3.** Un $G$**-CW-complejo** es un $G$-espacio $X$ con la siguiente estructura:

1. $X$ viene equipado con subespacios $X_n$, $n \in \{-1\} \cup \mathbb{N}$ invariantes por la acción de $G$, tales que

$$\varnothing = X_{-1} \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n\,.$$

2. $X = \operatorname{colím}_{n\to\infty} X_n$.

3. Para todo $n \geq 0$, el subespacio $X_n$ se construye a partir de $X_{n-1}$ pegando $n$-celdas equivariantes. Es decir, existe un conjunto de índices $I_n$, un subgrupo $H_i \leq G$ para cada $i \in I_n$, y un pushout de $G$-espacios de la forma

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I_n} G \,/\, H_i \times S^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, hook] & X_{n-1} \arrow[d, hook] \\
\coprod_{i\in I_n} G \,/\, H_i \times D^{n} \arrow[r] & X_n\,.
\end{tikzcd}$$

La imagen de la función inclusión $G \,/\, H_i \times \operatorname{int} D^n \to X$ se llama $n$**-celda equivariante**. Los conceptos de $n$-esqueleto y dimensión de un $G$-CW-complejo se definen de la forma obvia, igual que en la Definición 1.17.

Se puede ver la similaridad con la Definición 1.17. De hecho, resulta que cualquier $G$-CW-complejo se puede ver como un $\mathcal{C}$-CW-complejo libre para una determinada categoría $\mathcal{C}$. La siguiente definición viene de [Bre67, Sección I.3].

**Definición 3.4.** Sea $G$ un grupo. Se define la **categoría de órbitas de** $G$ como la categoría $\operatorname{Or} G$ cuyos objetos son los conjuntos $G \,/\, H$ para todo subgrupo $H \leq G$, y cuyos morfismos con funciones que preservan la acción de $G$. Es decir, un morfismo $G \,/\, H \to G \,/\, K$ es una función $f : G \,/\, H \to G \,/\, K$ tal que

$$g' \cdot f(gH) = f(g'gH)$$

para todos $g, g' \in G$. Notar que esta condición es equivalente a pedir que $f(gH) = g \cdot f(eH)$ para todo $g \in G$, donde $e \in G$ es la identidad. La composición de morfismos en esta categoría se define simplemente como la composición de funciones.

Ahora veremos cómo se puede ver a cualquier $G$-espacio como un $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-espacio, donde $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$ es la categoría opuesta a $\operatorname{Or} G$. Lo que sigue viene de [DL98, Ejemplo 1.3].

**Definición 3.5.** Sea $X$ un $G$-espacio. Dado $H \leq G$ un subgrupo, le llamamos $X^H$ al subespacio de $X$ dado por

$$X^H = \{x \in X \mid h \cdot x = x \text{ para todo } h \in H\} .$$

Definiremos un $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-espacio $\operatorname{map}_G(-, X)$ tal que, para todo $G / H$,

$$\operatorname{map}_G(-, X)(G / H) = X^H .$$

Dada $f \in \hom_{\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}}(G / K, G / H) = \hom_{\operatorname{Or} G}(G / H, G / K)$, definimos la función continua

$$\operatorname{map}_G(-, X)(f) : \operatorname{map}_G(-, X)(G / K) \to \operatorname{map}_G(-, X)(G / H)$$

tal que, si $f(eH) = gK$, entonces

$$\operatorname{map}_G(-, X)(f)(x) = g \cdot x \tag{3.6}$$

para todo $x \in \operatorname{map}_G(-, X)(G / K)$. Esta función está bien definida ya que si $g'K = gK$ entonces $g^{-1}g' \in K$, y por lo tanto $g \cdot x = g \cdot (g^{-1}g' \cdot x) = g' \cdot x$. Queda claro que cada $\operatorname{map}_G(-, X)(f)$ es continua. Hay que verificar que se cumple que

$$\operatorname{map}_G(-, X)(f' \circ f) = \operatorname{map}_G(-, X)(f) \circ \operatorname{map}_G(-, X)(f') ,$$

donde $f' \circ f$ es la composición en $\operatorname{Or} G$. Pero esto se deduce de que si $f(eH) = gK$ y $f'(eK) = g'L$, entonces $(f' \circ f)(eH) = f'(gK) = g \cdot f'(eK) = (gg')L$. Así que $\operatorname{map}_G(-, X)$ es un $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-espacio bien definido.

La notación $\operatorname{map}_G(-, X)$ surge de que el espacio $\operatorname{map}_G(G / H, X)$ de funciones equivariantes $G / H \to X$ es homeomorfo al subespacio de $X$ formado por los puntos que quedan fijos por la acción de $H$, es decir, a lo que definimos como $X^H$. Sin embargo, este hecho no nos será útil, y para nosotros $\operatorname{map}_G(-, X)(G / H)$ será solamente un subespacio de $X$, y no un espacio de funciones.

**Proposición 3.7.** La correspondencia $X \mapsto \operatorname{map}_G(-, X)$ nos da un funtor inyectivo $G\text{-Top} \to \operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}\text{-Top}$, cuyo inverso izquierdo es $\operatorname{ev}_{G/1} : \operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}\text{-Top} \to G\text{-Top}$.

*Demostración.* Para probar que esta correspondencia nos da un funtor primero hay que definir cómo lleva un morfismo de $G$-espacios a un morfismo de $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-espacios. Sean $X, Y$ dos $G$-espacios, y sea $F : X \to Y$ un morfismo entre ellos. Se define el morfismo de $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-espacios

$$\operatorname{map}_G(-, F) : \operatorname{map}_G(-, X) \to \operatorname{map}_G(-, Y)$$

de manera que cada función $\operatorname{map}_G(-, F)(G / H) : X^H \to Y^H$ sea simplemente la restricción de $F$, es decir que

$$\operatorname{map}_G(-, F)(G / H)(x) = F(x) , \tag{3.8}$$

para todo $x \in X^H$. Esto está bien definido, ya que, como $F$ es un morfismo de $G$ espacios,

$$h \cdot F(x) = F(h \cdot x) = F(x)\,,$$

para todo $h \in H$, y por lo tanto $F(x) \in Y^H$. Veamos que este $\mathrm{map}_G(-, F)$ es un morfismo de $\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}$-espacios bien definido. Claramente cada función $\mathrm{map}_G(-, F)(G \,/\, H)$ es continua. Es fácil probar que conmutan los diagramas de la forma

$$\begin{tikzcd} X^K \arrow[r, "\mathrm{map}_G(-,F)(G / K)"] \arrow[d, "\mathrm{map}_G(-,X)(f)"'] & Y^K \arrow[d, "\mathrm{map}_G(-,Y)(f)"] \\ X^H \arrow[r, "\mathrm{map}_G(-,F)(G / H)"] & Y^H \end{tikzcd},$$

ya que ambos caminos hacen $x \mapsto g \cdot F(x) = F(g \cdot x)$, para $f(eH) = gK$. Así que $\mathrm{map}_G(-, F)$ es un morfismo de $\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}$-espacios bien definido. Además es claro que con esta definición el funtor respeta las composiciones, y lleva identidades a identidades.

Mostraremos que el funtor evaluación

$$\mathrm{ev}_{G/1} : \mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}\text{-Top} \to G\text{-Top}$$

es una inversa izquierda de este funtor, probando que este es inyectivo. Definimos a $1 = \{e\} \leq G$ como el subgrupo trivial. Se puede ver que $G \,/\, 1$ es isomorfo al conjunto de elementos de $G$ con la acción dada por traslación izquierda. Una función $f : G \,/\, 1 \to G \,/\, 1$ que preserve esta acción cumple que

$$f(a1) = a \cdot f(e1)$$

para todo $a \in G$, es decir que $f$ queda determinada por la elección del $g \in G$ tal que $f(e1) = g1$. Por otro lado, es fácil ver que cualquier $g \in G$ determina una única función $f$ de esta forma. Notar que estas funciones actúan por la derecha. Es por esto que todo $\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}$-espacio $X$ (no un $\mathrm{Or}\, G$-espacio) cumple que

$$\mathrm{ev}_{G/1}(X) = X(G \,/\, 1)$$

es un $G$-espacio *con acción a izquierda.* La acción viene definida por las funciones

$$X(f) : X(G \,/\, 1) \to X(G \,/\, 1)\,.$$

Explícitamente, dado $g \in G$ y $x \in X(G \,/\, 1)$, se define

$$g \cdot x = X(f)(x) \tag{3.9}$$

donde $f : G/1 \to G/1$ es tal que $f(e1) = g$. Claramente se cumple que $e \cdot x = x$ (ya que en ese caso $f$ es la identidad), y se puede verificar que

$$g' \cdot (g \cdot x) = (X(f') \circ X(f))(x) = X(f \circ f')(x) = (g'g) \cdot x\,,$$

donde $f(e1) = g1$ y $f'(e1) = g'1$. Se puede verificar también que, si $F : X \to Y$ es un morfismo de $\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}$-espacios, entonces con estas acciones $\mathrm{ev}_{G/1}(F) = F(G \,/\, 1)$ es un morfismo de $G$-espacios:

$$\begin{aligned} g \cdot F(G \,/\, 1)(x) &= (Y(f) \circ F(G \,/\, 1))(x) \\ &= (F(G \,/\, 1) \circ X(f))(x) = F(G \,/\, 1)(g \cdot x)\,. \end{aligned}$$

Queda establecido entonces que $\mathrm{ev}_{G/1}$ es un funtor $\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}$-Top $\to G$-Top. Veamos que es inverso izquierdo de $X \mapsto \mathrm{map}_G(-, X)$, es decir, que

$$\mathrm{map}_G(-, X)(G \,/\, 1) = X \,,$$

con la misma acción de $G$. Por definición

$$\mathrm{map}_G(-, X)(G \,/\, 1) = \{x \in X \mid e \cdot x = x \text{ para todo } e \in 1\} \subseteq X \,,$$

lo cual es obviamente igual a todo $X$. Si escribimos como $\cdot'$ a la acción en $\mathrm{map}_G(-, X)(G \,/\, 1)$, se ve aplicando las definiciones de (3.9) y (3.6) que

$$g \cdot' x = \mathrm{map}_G(-, X)(f)(x) = g \cdot x \,,$$

es decir que las acciones son las mismas. Si $F : X \to Y$ es un morfismo de $G$-espacios, entonces por la definición en (3.8),

$$\mathrm{map}_G(-, F)(G \,/\, 1) = F \,,$$

lo que prueba que $\mathrm{ev}_{G/1}$ también es un inverso izquierdo para los morfismos. □

Al funtor que hace $X \mapsto \mathrm{map}_G(-, X)$ lo llamaremos $\mathrm{map}_G(-, ?)$. Resulta que se cumple algo más fuerte que lo que acabamos de probar si nos restringimos a los $G$-CW-complejos y a los $\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}$-CW-complejos libres. Lo que sigue es una versión de [DL98, Teorema 7.4].

**Teorema 3.10.** Sea $X$ un $G$-CW-complejo, y sea $X'$ un $\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}$-CW-complejo libre. Entonces se cumple que $\mathrm{map}_G(-, X)$ es un $\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}$-CW-complejo libre, $X'(G \,/\, 1)$ es un $G$-CW-complejo, y

$$\begin{aligned} \mathrm{map}_G(-, X)(G \,/\, 1) &= X \,, \\ \mathrm{map}_G(-, X'(G \,/\, 1)) &\cong X' \,, \end{aligned}$$

a través de isomorfismos naturales. Es decir, si nos restringimos a los $G$-CW-complejos y a los $\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}$-CW-complejos libres, $\mathrm{ev}_{G/1}$ no solo es un inverso izquierdo, si no que también es un inverso derecho a menos de isomorfismo. Esto implica que la categoría de los $G$-CW-complejos es equivalente a la categoría de los $\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}$-CW-complejos libres.

*Demostración.* Primero probamos que $X'(G \,/\, 1)$ es un $G$-CW-complejo. Hay que mostrar que la estructura de un $\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}$-CW-complejo libre (dada por la Definición 1.17) induce la estructura de un $G$-CW-complejo que definimos en la Definición 3.3 al evaluar en $G \,/\, 1$. Primero, sabemos que $X'$ tiene sub-$\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}$-espacios

$$X'_0 \subseteq X'_1 \subseteq X'_2 \subseteq \cdots \subseteq X' \,,$$

y por lo tanto $X'(G \,/\, 1)$ tiene subespacios

$$X'_0(G \,/\, 1) \subseteq X'_1(G \,/\, 1) \subseteq X'_2(G \,/\, 1) \subseteq \cdots \subseteq X'(G \,/\, 1) \,.$$

Por la definición sub-$\mathcal{C}$-espacio, estos deben ser invariantes por las funciones $X'(f) : X'(G/1) \to X'(G/1)$ que definen la acción de $G$ sobre $X'(G/1)$ (ver la observación 1.6). Como $X' = \mathrm{colím}_{n\to\infty} X'_n$, tenemos también que $X'(G \,/\, 1) = \mathrm{colím}_{n\to\infty} X'_n(G/1)$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos un pushout de $\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}$-espacios

$$\begin{array}{ccc}
\coprod_{i\in I'_n} \hom_{\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}}(G\,/\,H_i,\, -)\times S^{n-1} & \longrightarrow & X'_{n-1} \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\coprod_{i\in I'_n} \hom_{\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}}(G\,/\,H_i,\, -)\times D^{n} & \longrightarrow & X'_{n}\,.
\end{array}$$

Evaluando en $G\,/\,1$, tenemos entonces un pushout de espacios topológicos

$$\begin{array}{ccc}
\coprod_{i\in I'_n} \hom_{\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}}(G\,/\,H_i,\, G\,/\,1)\times S^{n-1} & \longrightarrow & X'_{n-1}(G\,/\,1) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\coprod_{i\in I'_n} \hom_{\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}}(G\,/\,H_i,\, G\,/\,1)\times D^{n} & \longrightarrow & X'_{n}(G\,/\,1)\,.
\end{array}$$

Como los morfismos del primer pushout eran morfismos de $\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}$-espacios, las funciones continuas de las que están hechos (y en particular, las funciones del segundo pushout) conmutan con las funciones de tipo $X'(f)$ para $f : G\,/\,1 \to G\,/\,1$. Esto implica que el segundo pushout es un pushout de $G$-espacios, dado que la acción de $G$ se define a partir de estas funciones. Ahora, tenemos que

$$\hom_{\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}}(G\,/\,H_i,\, G\,/\,1) = \hom_{\mathrm{Or}\, G}(G\,/\,1,\, G\,/\,H_i)\,.$$

Una función $f : G\,/\,1 \to G\,/\,H_i$ que preserva la acción de $G$ es tal que

$$f(a1) = a\cdot f(e1)\,,$$

por lo tanto esta $f$ queda determinada por la elección del $gH_i \in G\,/\,H_i$ tal que $f(e1) = gH_i$. Se puede ver también que cualquier $gH_i \in G$ determina una $f$ de esta forma. Por lo tanto $\hom_{\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}}(G\,/\,H_i, G\,/\,1)$ está en biyección con el conjunto $G\,/\,H_i$. Veamos cómo es la acción de $G$ sobre $\hom_{\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}}(G\,/\,H_i, G\,/\,1)$. Sea $f \in \hom_{\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}}(G\,/\,H_i, G\,/\,1)$ tal que $f(e1) = gH_i$. Sea $g' \in G$ un elemento cualquiera, y sea $f' : G\,/\,1 \to G\,/\,1$ tal que $f'(e1) = g'1$. Entonces, aplicando las definiciones en (3.9) y (1.10),

$$g'\cdot f = \hom_{\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}}(G\,/\,H_i,\, -)(f')(f) = f\circ f'$$

(hay que dar vuelta el orden de la composición por estar en $\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}$ y no en $\mathrm{Or}\, G$). Así que $g'\cdot f$ es la función $G\,/\,1 \to G\,/\,H_i$ que hace

$$e1 \mapsto (f\circ f')(e1) = f(g'1) = g'\cdot f(e1) = g'\cdot gH_i\,.$$

Se concluye que $\hom_{\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}}(G\,/\,H_i, G\,/\,1)$ es isomorfo a $G\,/\,H_i$ como $G$-espacio. Deducimos fácilmente que $\hom_{\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}}(G\,/\,H_i, G\,/\,1)\times Y$ es isomorfo a $G\,/\,H_i\times Y$ para cualquier espacio topológico $Y$, y por lo tanto tenemos un pushout

$$\begin{array}{ccc}
\coprod_{i\in I'_n} G\,/\,H_i\times S^{n-1} & \longrightarrow & X'_{n-1}(G\,/\,1) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\coprod_{i\in I'_n} G\,/\,H_i\times D^{n} & \longrightarrow & X'_{n}(G\,/\,1)\,.
\end{array}$$

Esto prueba que $X'(G\,/\,1)$ es un $G$-espacio, con $n$-esqueleto $X'_n(G\,/\,1)$.

Para probar que $\operatorname{map}_G(-,X)$ es un $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-CW-complejo libre se puede usar un método similar. Solo mostraremos la parte más importante, que es probar que

$$\operatorname{map}_G(-, G \,/\, H_i) \cong \hom_{\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}}(G \,/\, H_i,\, -) = \hom_{\operatorname{Or} G}(-,\, G \,/\, H_i)\,.$$

Este hecho está sugerido por la notación, pero con la definición que dimos para $\operatorname{map}_G(-, G \,/\, H_i)$ la prueba no es del todo trivial. Sea $H \leq G$ un subgrupo cualquiera. Entonces

$$(G \,/\, H_i)^H = \{gH_i \in G \,/\, H_i \mid h \cdot gH_i = gH_i \text{ para todo } h \in H\}\,.$$

Sea $gH_i \in (G \,/\, H_i)^H$. Podemos definir $f : G \,/\, H \to G \,/\, H_i$ la función tal que $f(eH) = gH_i$, y luego extender $f(aH) = a \cdot f(eH) = agH_i$. Para que esto esté bien definido se tiene que dar que $f(eH) = f(hH) = h \cdot f(eH)$ para todo $h \in H$, pero

$$h \cdot f(eH) = h \cdot gH_i = gH_i \tag{3.11}$$

por hipótesis. Similarmente si $f : G \,/\, H \to G \,/\, H_i$ preserva la acción de $G$, esta debe cumplir (3.11), así que $f(eH) \in (G \,/\, H_i)^H$. Entonces tenemos una biyección entre $(G \,/\, H_i)^H$ y $\hom_{\operatorname{Or} G}(G \,/\, H, G \,/\, H_i) = \hom_{\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}}(G \,/\, H_i, G \,/\, H)$ para todo $H \leq G$. Para ver que estas biyecciones inducen un isomorfismo de $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-espacios, basta con aplicar las definiciones de $\operatorname{map}_G(-, G \,/\, H_i)(f)$ y de $\hom_{\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}}(-, G \,/\, H_i)(f)$ y ver que son compatibles con estas biyecciones.

Por último, hay que probar que

$$\operatorname{map}_G(-,X)(G \,/\, 1) = X\,,$$
$$\operatorname{map}_G(-,X'(G \,/\, 1)) \cong X'\,.$$

La primera igualdad ya la tenemos probada por la Proposición 3.7. Veamos cómo se prueba la segunda. Dado $H \subseteq G$, sea $p_H : G \,/\, 1 \to G \,/\, H$ tal que $p_H(g1) = gH$. Se puede ver que esta preserva la acción de $G$. Dado un $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-espacio $Y$ cualquiera, tenemos una función continua

$$Y(p_H) : Y(G \,/\, H) \to Y(G \,/\, 1)\,.$$

Recordemos que $Y(G \,/\, 1)$ tiene una acción de $G$ que le dimos en la prueba de la Proposición 3.7. Sea $x \in Y(G \,/\, H)$, y sea $h \in H$. Si $f : G \,/\, 1 \to G \,/\, 1$ es la función que preserva la acción de $G$ tal que $f(e1) = h1$, entonces

$$h \cdot Y(p_H)(x) = (Y(f) \circ Y(p_H))(x) = Y(p_H \circ f)(x)\,.$$

Como $(p_H \circ f)(g1) = p_H(gh1) = ghH = gH = p_H(g1)$, tenemos que $p_H \circ f = p_H$ y por lo tanto $h \cdot Y(p_H)(x) = Y(p_H)(x)$. En otras palabras,

$$\operatorname{im}(Y(p_H)) \subseteq Y(G \,/\, 1)^H\,.$$

Por lo tanto podemos definir un morfismo de $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-espacios

$$P_Y : Y \to \operatorname{map}_G(-, Y(G \,/\, 1))$$
$$P_Y(G \,/\, H)(x) = Y(p_H)(x)\,.$$

Se puede verificar que este es un morfismo de $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-espacios (es decir, que conmuta con las del tipo $Y(f)$) aplicando las definiciones. Afirmamos que si

$X'$ es un $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-CW-complejo libre, este $P_{X'}$ es un isomorfismo. No vamos a probar todos los detalles, pero la idea es la siguiente. Primero, se prueba que

$$\begin{aligned} P_{\hom_{\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}}(G/H_i,-)} : \hom_{\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}}&(G \,/\, H_i, -) \\ &\to \operatorname{map}_G(-, \hom_{\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}}(G \,/\, H_i, G \,/\, 1)) \end{aligned}$$

es un isomorfismo. De hecho, es el mismo isomorfismo que se obtiene combinando los dos isomorfismos ya vimos antes en esta prueba. Luego, dado

$$F_i : \hom_{\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}}(G \,/\, H_i, -) \times S^{n-1} \to X'_{n-1}$$

un morfismo de pegado de $X'$, se prueba que conmuta

$$\begin{tikzcd} \hom_{\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}}(G \,/\, H_i, -) \times S^{n-1} \arrow[r, "F_i"] \arrow[d, "P_{\cdots \times S^{n-1}}"', "\cong"] & X'_{n-1} \arrow[d, "\cong"', "P_{X'_{n-1}}"] \\ \operatorname{map}_G(-, \hom_{\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}}(G \,/\, H_i, G \,/\, 1) \times S^{n-1}) \arrow[r, "{\operatorname{map}_G(-, F_i(G \,/\, 1))}"] & \operatorname{map}_G(-, X'_{n-1}(G \,/\, 1))\,. \end{tikzcd}$$

Esto se reduce a simplemente aplicar las definiciones y usar que $F_i$ es un morfismo de $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-espacios. Una vez que tenemos esto, se puede probar inductivamente $P_{X'_n}$ es un isomorfismo para cada $n$-esqueleto $X'_n$, ya que entonces habrá un isomorfismo de pushouts. Finalmente, se prueba que $P_{X'}$ es el colímite de los $P_{X'_n}$, y por lo tanto es un isomorfismo $X' \to \operatorname{map}_G(-, X'(G \,/\, 1))$.

Para terminar la prueba habría que probar que $P_-$ es una transformación natural. Es decir, dados $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-espacios $Y, Y'$ y un morfismo $F : Y \to Y'$ entre ellos, hay que probar que conmuta

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "P_Y"] \arrow[d, "F"'] & \operatorname{map}_G(-, Y(G \,/\, 1)) \arrow[d, "{\operatorname{map}_G(-, F(G \,/\, 1))}"] \\ Y' \arrow[r, "P_{Y'}"] & \operatorname{map}_G(-, Y'(G \,/\, 1))\,, \end{tikzcd}$$

pero es fácil de ver que esto no es nada más que una generalización del diagrama conmutativo anterior, y la prueba es exactamente la misma verificación.

□

Podemos usar esto para traducir los resultados que obtuvimos en el Capítulo 1 a resultados sobre $G$-espacios y $G$-CW-complejos. Primero damos una definición, que proviene de [Lüc20, pág. 273].

**Definición 3.12.** Dados $G$-espacios $X$ e $Y$ y un morfismo de $G$-espacios $F : X \to Y$, se dice que $F$ es una **$G$-equivalencia de homotopía débil** si el morfismo $\operatorname{map}_G(-, F) : \operatorname{map}_G(-, X) \to \operatorname{map}_G(-, Y)$ es una equivalencia de homotopía débil de $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-espacios, es decir si la restricción de $F$ a cada subespacio $X^H$ es una equivalencia de homotopía débil. Notar que esta es una condición más fuerte que ser una equivalencia de homotopía débil entre espacios topológicos. Una **aproximación $G$-CW** de $X$ es un $G$-CW-complejo $Z$ junto con una $G$-equivalencia de homotopía débil $F : Z \to X$.

Hay una versión del teorema de Whitehead para $G$-CW-complejos: lo siguiente es equivalente a [Lüc20, Teorema 9.16(ii)].

**Proposición 3.13.** Si $X$ e $Y$ son $G$-CW-complejos, y $F : X \to Y$ es una $G$-equivalencia de homotopía débil, entonces $F$ es una $G$-equivalencia de homotopía, es decir que es una equivalencia de homotopía (fuerte) donde todas las homotopías involucradas son morfismos de $G$-espacios.

*Demostración.* Como $\mathrm{map}_G(-, F) : \mathrm{map}_G(-, X) \to \mathrm{map}_G(-, Y)$ es una equivalencia de homotopía débil entre $\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}$-CW-complejos libres, el Teorema 1.34 implica que $\mathrm{map}_G(-, F)$ es una equivalencia de homotopía de $\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}$-espacios. Luego es fácil verificar que $F = \mathrm{map}_G(-, F)(G / 1)$ es una $G$-equivalencia de homotopía.

□

También probamos una versión del teorema de aproximación CW [ver Lüc20, Ejercicio 9.17]:

**Proposición 3.14.** Todo $G$-espacio $X$ tiene una aproximación $G$-CW $F : Z \to X$.

*Demostración.* Como $\mathrm{map}_G(-, X)$ es un $\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}$-espacio, podemos usar el Teorema 1.36 para hallar una aproximación $\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}$-CW

$$F' : Z' \to \mathrm{map}_G(-, X)\,.$$

Definimos $Z = Z'(G / 1)$, y

$$F = F'(G / 1) : Z \to \mathrm{map}_G(-, X)(G / 1) = X^1 = X\,.$$

Por el Teorema 3.10 $Z$ es un $G$-CW-complejo. Además $\mathrm{map}_G(-, F) = F'$ es una equivalencia de homotopía débil, así que $F$ es una $G$-equivalencia de homotopía débil. Entonces $F : Z \to X$ es una aproximación $G$-CW.

□

## 3.2. $G$-teorías de homología

En esta sección definiremos el concepto de $G$-teoría de homología, y usaremos la equivalencia que hallamos en la sección anterior para relacionarlo con el de teoría de homología para $\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}$-espacios. Luego probaremos una versión del Teorema 2.34 para $G$-CW-complejos, esta es la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch equivariante. Nos basamos en [Lüc20, Capítulo 10].

Muchos conceptos que necesitaremos se definen igual que para $\mathcal{C}$-espacios. Por ejemplo, la categoría $(G\text{-Top})^2$ de pares de $G$-espacios se define de la misma forma que en la Definición 2.1, donde el segundo espacio de un par es un subespacio invariante del primero. El funtor restricción $(G\text{-Top})^2 \to (G\text{-Top})^2$ se define igual que en la Definición 2.1, las $G$-homotopías de pares y $G$-equivalencias de homotopía débiles de pares se definen igual que en la Definición 2.2, y las ternas y tríadas se definen igual que en la Definición 2.3. Adaptamos la siguiente definición de [Lüc20, Definición 10.1].

**Definición 3.15.** Una **$G$-teoría de homología no reducida** es una sucesión de funtores $\mathcal{H}_n : (G\text{-Top})^2 \to \mathrm{Ab}$ para $n \in \mathbb{Z}$, junto con transformaciones naturales $\partial_n : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_{n-1} \circ R$ para $n \in \mathbb{Z}$, que satisfacen los siguientes axiomas:

1. *Homotopía*: Si $f \simeq g$ como morfismos de pares, entonces $h_n(f) = h_n(g)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

2. *Exactitud*: Sea $(X, A) \in (G\text{-Top})^2$, y sean

$$\begin{aligned} i &: (A, \varnothing) \to (X, \varnothing)\,, \\ j &: (X, \varnothing) \to (X, A) \end{aligned}$$

las inclusiones. Entonces la sucesión

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_{n+1}(X,A)} \mathcal{H}_n(A,\varnothing) \xrightarrow{\mathcal{H}_n(i)}$$
$$\mathcal{H}_n(X,\varnothing) \xrightarrow{\mathcal{H}_n(j)} \mathcal{H}_n(X,A) \xrightarrow{\partial_n(X,A)} \cdots$$

es exacta.

3. *Escisión*: Sea $(X; A, B)$ una tríada $G$-CW. Entonces el morfismo inclusión $j : (A, A \cap B) \to (X, B)$ induce un isomorfismo

$$\mathcal{H}_n(j) : \mathcal{H}_n(A, A \cap B) \to \mathcal{H}_n(X, B)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

4. *Unión disjunta*: Sea $((X_\alpha, A_\alpha))_{\alpha \in I}$ una colección de pares de $G$-espacios, y sea $(X, A) = (\coprod_\alpha X_\alpha, \coprod_\alpha A_\alpha)$ su unión disjunta. Entonces las inclusiones $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow X$ inducen un isomorfismo

$$\bigoplus_\alpha \mathcal{H}_n(i_\alpha) : \bigoplus_\alpha \mathcal{H}_n(X_\alpha, A_\alpha) \to \mathcal{H}_n(X, A)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

5. *Equivalencia de homotopía débil*: Sea $f : (X, A) \to (Y, B)$ una $G$-equivalencia de homotopía débil de pares. Entonces $\mathcal{H}_n(f) : \mathcal{H}_n(X, A) \to \mathcal{H}_n(Y, B)$ es un isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Se puede ver la similaridad con la definición de teoría de homología para $\mathcal{C}$-espacios. Podemos hacer esto más riguroso:

**Proposición 3.16.** Sea $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ una $G$-teoría de homología, y sea $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ una teoría de homología de $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-espacios. Consideremos a los funtores

$$\begin{aligned} \operatorname{map}_G(-, ?) &: G\text{-Top} \to \operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}\text{-Top} \\ \operatorname{ev}_{G/1} &: \operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}\text{-Top} \to G\text{-Top} \end{aligned}$$

definidos en la sección anterior. Entonces $(\mathcal{H}_n \circ \operatorname{ev}_{G/1})_{n \in \mathbb{Z}}$ es una teoría de homología de $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-espacios, y $(h_n \circ \operatorname{map}_G(-, ?))_{n \in \mathbb{Z}}$ es una $G$-teoría de homología.

*Demostración.* Basta con verificar que cada axioma de las $G$-teorías de homología se traduce a un axioma de teorías de homología de $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-espacios y viceversa, explotando las propiedades buenas que cumplen $\operatorname{ev}_{G/1}$ y $\operatorname{map}_G(-, ?)$. □

Veamos un caso particular de esto. La siguiente definición es equivalente a la que aparece en [Lüc20, Ejemplo 10.2].

**Definición 3.17.** Sea $M$ un $\mathbb{Z}\mathrm{Or}\,G$-módulo. La **homología de Bredon con coeficientes en** $M$ es la $G$-teoría de homología definida como

$$(H_n^G(-;M))_{n\in\mathbb{Z}} = (H_n^{\mathrm{Or}\,G^{\mathrm{op}}}(-;M)\circ \mathrm{map}_G(-,?))_{n\in\mathbb{Z}}\,,$$

donde $(H_n^{\mathrm{Or}\,G^{\mathrm{op}}}(-;M))_{n\in\mathbb{Z}}$ es la homología con coeficientes en el $(\mathrm{Or}\,G^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$-módulo $M$ $(\mathrm{Or}\,G = (\mathrm{Or}\,G^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}})$ definida en 2.33. Por la Proposición 3.16 esta definición nos da una $G$-teoría de homología bien definida.

**Observación 3.18.** Nos será conveniente dar una definición más explícita de la homología de Bredon. Aplicando las definiciones, y usando algunas cosas que probamos en el Teorema 3.10, llegamos a que la homología de Bredon $(H_n^G(-;M))_{n\in\mathbb{Z}}$ está definida de la siguiente manera. Dado un $G$-espacio $X$, sea $F: X' \to X$ una aproximación $G$-CW, con $I_n$ el conjunto de índices de las $n$-celdas equivariantes de $X'$ (donde la celda indexada por $i \in I_n$ es de la forma $G \,/\, H_i \times D^n$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Se define $H_n^G(X;M) = 0$ para $n < 0$, y para $n \geq 0$ se define a $H_n^G(X;M)$ como la homología algebraica del complejo de cadenas

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow \textstyle\bigoplus_{i\in I_n} M(G \,/\, H_i) \xrightarrow{d'} \textstyle\bigoplus_{i\in I_{n-1}} M(G \,/\, H_i) \longrightarrow \\ \cdots \longrightarrow \textstyle\bigoplus_{i\in I_0} M(G \,/\, H_i) \longrightarrow 0\,,\end{aligned}$$

donde los morfismos $d' : \bigoplus_{i\in I_n} M(G/H_i) \to \bigoplus_{j\in I_{n-1}} M(G/H_j)$ están definidos como

$$d'(x_i)_{i\in I_n} = \Big(\sum_{i\in I_n,\, gH_j\in (G/H_j)^{H_i}} \deg(h'_{i,j,gH_j}) M(r_{gH_j})x\Big)_{j\in I_{n-1}}.$$

Aquí, $r_{gH_j} : G \,/\, H_i \to G \,/\, H_j$ es la función equivariante tal que

$$r_{gH_j}(eH_i) = gH_j\,,$$

y $\deg(h'_{i,j,gH_j})$ es el grado de la función $h'_{i,j,gH_j} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ definida de la siguiente forma: Sea $g_i : G \,/\, H_i \times S^{n-1} \to X'_{n-1}$ el morfismo de pegado de la $n$-celda indexada por $i$. Sea $f_j : G \,/\, H_j \times \mathrm{int}\, D^{n-1} \to X'$ la función de pegado de la $(n-1)$-celda indexada por $j$. Sea $e_{j,gH_i} = f_j(\{gH_i\} \times \mathrm{int}\, D^{n-1})$, y

$$X^{n-1}_{H_i,j,gH_i} = X'_{n-1} \,/\, (X'_{n-1} \setminus e_{j,gH_i})\,,$$

con $p_{j,gH_i} : X'_{n-1} \to X^{n-1}_{H_i,j,gH_i}$ la proyección a este cociente. Hay un isomorfismo obvio $X^{n-1}_{H_i,j,gH_i} \cong S^{n-1}$. Entonces $h'_{i,j,gH_j}$ es la composición

$$S^{n-1} \xrightarrow{\cong} \{eH_i\} \times S^{n-1} \xrightarrow{g_i|_{\{eH_i\}\times S^{n-1}}} X'_{n-1} \xrightarrow{p_{j,gH_i}} X^{n-1}_{H_i,j,gH_i} \xrightarrow{\cong} S^{n-1}\,.$$

**Observación 3.19.** También será conveniente tener una versión de la observación 2.30 para el contexto de $G$-espacios y la homología de Bredon. Se puede deducir que el morfismo de borde

$$d' : \bigoplus_{i\in I_1} M(G \,/\, H_i) \to \bigoplus_{j\in I_0} M(G \,/\, H_j)$$

está dado por la siguiente definición: dado $(x_i)_{i\in I_1} \in \bigoplus_{i\in I_1} M(G / H_i)$,

$$d'(x_i)_{i\in I_1} = \sum_{i\in I_1} (\iota_i^+ M(r_{g_i^+ H_{j_i^+}}) x_i - \iota_i^- M(r_{g_i^- H_{j_i^-}}) x_i) \,,$$

donde, si $F_i : G / H_i \times S^0 \to X_0'$ es el morfismo de pegado de la 1-celda indexada por $i$, entonces

- El punto $F_i(eH_i, +1)$ corresponde con el punto $(g_i^+ H_{j_i^+}, 0)$ de la 0-celda $G / H_{j_i^+} \times D^0$.
- El punto $F_i(eH_i, -1)$ corresponde con el punto $(g_i^- H_{j_i^-}, 0)$ de la 0-celda $G / H_{j_i^-} \times D^0$.
- Los morfismos $\iota_i^\pm : M(G / H_{j_i^\pm}) \to \bigoplus_{j\in I_0} M(G / H_j)$ son las inclusiones canónicas.

Es esperable que la sucesión espectral del Teorema 2.34 tenga una versión para $G$-CW-complejos, dadas las equivalencias del Teorema 3.10 y la Proposición 3.16. Veamos primero qué jugará el rol del $\mathbb{Z}\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$-módulo $h_n(\hom_{\mathcal{C}}(?, -))$.

**Observación 3.20.** Recordemos que para todo $H \leq G$, el objeto de $\mathrm{Or}\, G$ llamado $G / H$ también es un $G$-espacio. Entonces dada una $G$-teoría de homología $(\mathcal{H}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ y dado $n \in \mathbb{Z}$, tenemos un grupo abeliano $\mathcal{H}_n(G / H, \varnothing)$. Si $f : G / H \to G / K$ es un morfismo en $\mathrm{Or}\, G$, entonces por definición $f$ es un morfismo de $G$-espacios, y por lo tanto

$$\mathcal{H}_n(f) : \mathcal{H}_n(G / H, \varnothing) \to \mathcal{H}_n(G / K, \varnothing)$$

es un morfismo de grupos abelianos para todo $n$. Como $\mathcal{H}_n$ ya es un funtor, esto implica que tenemos un funtor

$$\mathcal{H}_n(-, \varnothing) : \mathrm{Or}\, G \to \mathrm{Ab} = \mathbb{Z}\text{-Mód} \,,$$

es decir que $\mathcal{H}_n(-, \varnothing)$ es un $\mathbb{Z}\mathrm{Or}\, G$-módulo.

Ahora podemos probar nuestra versión del Teorema 2.34 [ver Lüc20, Teorema 10.44].

**Teorema 3.21.** (Sucesión de Atiyah-Hirzebruch equivariante). Sea $(\mathcal{H}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una $G$-teoría de homología, y sea $X$ un $G$-CW-complejo. Entonces hay una sucesión espectral de tipo homológico $(E^r_{pq}, d^r_{pq})_{p,q,r}$ cuya segunda página $(E^2_{pq})_{p,q}$ está dada por

$$E^2_{pq} \cong H_p^G(X; \mathcal{H}_q(-, \varnothing)) \,,$$

y que converge a

$$(\mathcal{H}_n(X))_{n\in\mathbb{Z}} \,.$$

*Demostración.* La idea es traducir todo a $\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}$-espacios, usar el Teorema 2.34 para obtener una sucesión espectral, y volver a traducir el resultado a $G$-espacios. Definimos la teoría de homología de $\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}$-espacios

$$(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\mathcal{H}_n \circ \mathrm{ev}_{G/1})_{n\in\mathbb{Z}} \,,$$

como en la Proposición 3.16. Sea $X' = \mathrm{map}_G(-, X)$, entonces por el Teorema 3.10 $X'$ es un $\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}$-CW-complejo libre. Entonces, para $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ y $X'$, el Teorema 2.34 nos da una sucesión espectral $(E^r_{pq}, d^r_{pq})_{p,q,r}$, cuya segunda página $(E^2_{pq})_{p,q}$ está dada por

$$E^2_{pq} \cong H^{\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}}_p(X'; h_q(\hom_{\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}}(?, -)))\,.$$

Por definición de la homología de Bredon, y por cómo definimos a $X'$, esto es igual a

$$H^G_p(X; h_q(\hom_{\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}}(?, -)))\,.$$

Por otro lado, dado $H \leq G$, por la definición de $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

$$\begin{aligned} h_q(\hom_{\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}}(G \,/\, H, -)) &= \mathcal{H}_q(\hom_{\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}}(G \,/\, H,\, G \,/\, 1)) \\ &= \mathcal{H}_q(\hom_{\mathrm{Or}\, G}(G \,/\, 1,\, G \,/\, H))\,. \end{aligned}$$

En la prueba del Teorema 3.10 probamos que $\hom_{\mathrm{Or}\, G}(G\,/\,1, G\,/\,H)$ es isomorfo a $G \,/\, H$ como $G$-espacio, así que se deduce que

$$h_q(\hom_{\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}}(G \,/\, H, -)) \cong \mathcal{H}_q(G \,/\, H,\, \varnothing)$$

(recordar que $h_q(\hom_{\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}}(G\,/\,H, -))$ es una abreviación de $h_q(\hom_{\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}}(G\,/\,H, -), \varnothing)$. Vamos a verificar que esto induce un isomorfismo de $\mathbb{Z}\mathrm{Or}\, G$-módulos

$$h_q(\hom_{\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}}(?, -)) \cong \mathcal{H}_q(-, \varnothing)\,.$$

Para esto hay que probar que, dado $f : G \,/\, H \to G \,/\, K$ un morfismo de $G$-espacios, el diagrama

$$\begin{tikzcd} h_q(\hom_{\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}}(G \,/\, H, -)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(f_\circ)_*"'] & \mathcal{H}_q(G \,/\, H,\, \varnothing) \arrow[d, "\mathcal{H}_q(f)"] \\ h_q(\hom_{\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}}(G \,/\, K, -)) \arrow[r, "\cong"] & \mathcal{H}_q(G \,/\, K\, \varnothing) \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Para esto basta ver que

$$\begin{tikzcd} \hom_{\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}}(G \,/\, H,\, G \,/\, 1) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f_\circ(G \,/\, 1)"'] & G \,/\, H \arrow[d, "f"] \\ \hom_{\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}}(G \,/\, K,\, G \,/\, 1) \arrow[r, "\cong"] & G \,/\, K \end{tikzcd}$$

conmuta, ya que al aplicarle $\mathcal{H}_q$ a este nos da el diagrama anterior (notar que $(f_\circ)_* = h_q(f_\circ) = (\mathcal{H}_q \circ \mathrm{ev}_{G/1})(f_\circ) = \mathcal{H}_q(f_\circ(G \,/\, 1)))$. Sea $f' \in \hom_{\mathrm{Or}\, G^{\mathrm{op}}}(G \,/\, H,\, G \,/\, 1)$, es decir $f' : G \,/\, 1 \to G \,/\, H$. Verificando la definición de $f_\circ$ en 2.28 y la de los isomorfismos en la prueba del Teorema 3.10, se puede ver que este último diagrama hace

$$\begin{tikzcd} f' \arrow[r, mapsto, "\cong"] \arrow[d, mapsto, "f_\circ(G \,/\, 1)"'] & f'(e1) \arrow[d, mapsto, "f"] \\ f \circ f' \arrow[r, mapsto, "\cong"] & f(f'(e1)) = (f \circ f')(e1) \end{tikzcd}$$

(notar que $f_\circ(G\,/\,1)(f') = f \circ f'$ y no $f' \circ f$ porque la categoría en la que se define esta $f_\circ$ es $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$ y no $\operatorname{Or} G$). Así que este diagrama conmuta para toda $f$ y tenemos un isomorfismo de $\mathbb{Z}\operatorname{Or} G$-módulos. Se puede verificar que un isomorfismo de $\mathbb{Z}\operatorname{Or} G$-módulos induce un isomorfismo en la homología de Bredon, así que concluimos que

$$E^2_{pq} \cong H^G_p(X; h_q(\hom_{\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}}(?, -))) \cong H^G_p(X; \mathcal{H}_q(-, \varnothing))\,.$$

Por último, el Teorema 2.34 nos garantiza que $(E^r_{pq}, d^r_{pq})_{p,q,r}$ converge a

$$(h_n(X'))_{n\in\mathbb{Z}} = ((\mathcal{H}_n \circ \mathrm{ev}_{G/1})(\mathrm{map}_G(-, X)))_{n\in\mathbb{Z}}\,,$$

pero esto es igual a

$$(\mathcal{H}_n(\mathrm{map}_G(-, X)(G\,/\,1))_{n\in\mathbb{Z}} = (\mathcal{H}_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}\,,$$

donde la última igualdad viene de la Proposición 3.7.

□

## 3.3. Ejemplo: $H^{D_\infty}_n(\mathbb{R}; \mathbf{K}(R))$

En esta sección desarrollaremos un ejemplo dado en [Ell+20, Sección 3.2], que es un cálculo que usa la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch equivariante.

Primero hay que ver algunas definiciones. Estas se pueden encontrar en [Lüc20, Sección 9.1].

**Definición 3.22.** Dado un grupo $G$, una **familia de subgrupos** de $G$ es un conjunto $\mathcal{F}$ de subgrupos de $G$ que es cerrado por conjugación y por pasar a subgrupos. Es decir, $\mathcal{F}$ es tal que, si $H \in \mathcal{F}$, entonces $gHg^{-1} \in \mathcal{F}$ para cualquier $g \in G$, y $K \in \mathcal{F}$ para cualquier subgrupo $K \leq H$.

Ejemplos de familias de subgrupos son *All*, la familia de todos los subgrupos, *Tr*, la familia que solo contiene al subgrupo trivial, *Fin*, la familia de los subgrupos finitos, y *Cyc*, la familia de los subgrupos cíclicos, entre otros.

**Definición 3.23.** Dado un grupo $G$ y una familia $\mathcal{F}$ de subgrupos de $G$, se dice que un $G$-CW-complejo $X$ es un **modelo del espacio clasificante para** $\mathcal{F}$ si cumple que

$$X^H \text{ es } \begin{cases} \text{contractible} & \text{si } H \in \mathcal{F} \\ \text{vacío} & \text{si } H \notin \mathcal{F}\,. \end{cases}$$

En este caso, a $X$ se le llama $E_{\mathcal{F}}G$. Veremos que $E_{\mathcal{F}}G$ queda determinado a menos de equivalencia de homotopía.

En lo que sigue escribiremos “modelo de $E_{\mathcal{F}}G$” en lugar de “modelo del espacio clasificante para $\mathcal{F}$” para ahorrar espacio. Lo siguiente se puede deducir de [DL98, Lema 7.6(2) y el comentario que sigue a la Definición 3.8].

**Proposición 3.24.** Sean $G$ un grupo y $\mathcal{F}$ una familia. Existe un único modelo $X$ de $E_{\mathcal{F}}G$ a menos de $G$-equivalencia de homotopía.

*Demostración.* Vamos a construir a $X$ a partir de una aproximación $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-CW, y luego usaremos la unicidad de estas aproximaciones para probar la unicidad de los modelos de $E_{\mathcal{F}}G$. Definimos un $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-espacio $X_{\mathcal{F}}$ de la siguiente manera:

$$X_{\mathcal{F}}(G / H) = \begin{cases} \{*\} & \text{si } H \in \mathcal{F} \\ \varnothing & \text{si } H \notin \mathcal{F}\,, \end{cases}$$

donde $\{*\}$ es un espacio con un solo punto. Las funciones $X_{\mathcal{F}}(f) : X_{\mathcal{F}}(G/H) \to X_{\mathcal{F}}(G / K)$ dada $f : G / K \to G / H$ son las inclusiones. Hay que ver que esto está bien definido, es decir que $X_{\mathcal{F}}(f)$ no termine teniendo que ser una función $\{*\} \to \varnothing$. Es decir, si existe $f : G / K \to G / H$ en $\operatorname{Or} G$, hay que probar que entonces $X_{\mathcal{F}}(G / H)$ y $X_{\mathcal{F}}(G / K)$ no pueden ser $\{*\}$ y $\varnothing$ respectivamente al mismo tiempo. O, lo que es lo mismo, hay que ver que entonces $H \in \mathcal{F}$ implica que $K \in \mathcal{F}$. Probemos esto.

Tenemos que $f(eK) = gH$ para algún $g \in G$. Además, para todo $k \in K$,

$$f(eK) = f(kK) = k \cdot f(eK) = kgH\,,$$

es decir que $gH = kgH$, por lo tanto $g^{-1}kg \in H$, y entonces $k \in gHg^{-1}$. Probamos entonces que $K \leq gHg^{-1}$. Como $\mathcal{F}$ es una familia, si $H$ está en $\mathcal{F}$ entonces $gHg^{-1}$ también, así como cualquier subgrupo de este, incluyendo $K$. Queda probado entonces que $X_{\mathcal{F}}$ está bien definido.

Sea $F : X' \to X_{\mathcal{F}}$ una aproximación $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-CW de $X_{\mathcal{F}}$. Esta existe por el Teorema 1.36. Sea $X = X'(G/1)$. Por el Teorema 3.10, tenemos un isomorfismo $P_{X'} : X' \to \operatorname{map}_G(-, X(G / 1)) = \operatorname{map}_G(-, X)$. Sea $F' : \operatorname{map}_G(-, X) \to X_{\mathcal{F}}$ definida como $F' = F \circ P_{X'}^{-1}$. Entonces para cada $H \leq G$

$$F'(G / H) = F(G / H) \circ P_{X'}(G / H)^{-1}$$

es una equivalencia de homotopía débil, por ser composición de un homeomorfismo y una equivalencia de homotopía débil. Supongamos que $H \in \mathcal{F}$. Entonces tenemos una equivalencia de homotopía débil

$$F'(G / H) : X^H \to \{*\}\,.$$

Por el teorema de Whitehead para espacios topológicos (es decir, el Teorema 1.34 con $\mathcal{C} = \mathbf{1}$) esta es una equivalencia de homotopía fuerte, ya que tanto $X^H$ como $\{*\}$ son CW-complejos. Es decir que $X^H$ es contractible. Por otro lado, si $H \notin \mathcal{F}$, tenemos una función

$$F'(G / H) : X^H \to \varnothing\,,$$

lo cual implica inmediatamente que $X^H$ es vacío. Queda probado entonces $X$ es un modelo de $E_{\mathcal{F}}G$.

Ahora, supongamos que $X_1$ y $X_2$ son dos modelos de $E_{\mathcal{F}}G$. Definimos

$$X'_1 = \operatorname{map}_G(-, X_1)\,, \qquad X'_2 = \operatorname{map}_G(-, X_2)\,.$$

Como $X'_1(G / H) = X'_2(G / H) = \varnothing$ para cualquier $H \notin \mathcal{F}$, hay morfismos de $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-espacios

$$F_1 : X'_1 \to X_{\mathcal{F}}\,, \qquad F_2 : X'_2 \to X_{\mathcal{F}}$$

definidos de la forma única: $F_1(G / H)(x_1) = F_2(G / H)(x_2) = *$ para todo $H \in \mathcal{F}$ y $x_1 \in X_1'(G / H)$, $x_2 \in X_2'(G / H)$. Pero si $H \in \mathcal{F}$, por hipótesis $X_1'(G / H)$ y $X_2'(G / H)$ son contractibles, lo cual es equivalente a que

$$F_1(G / H) : X_1'(G / H) \to \{*\}\,,$$
$$F_2(G / H) : X_2'(G / H) \to \{*\}$$

sean equivalencias de homotopía, en particular equivalencias de homotopía débiles. Si $H \notin \mathcal{F}$, entonces

$$F_1(G / H) : \varnothing \to \varnothing\,, \qquad F_2(G / H) : \varnothing \to \varnothing$$

son equivalencias de homotopía débiles por definición. Así que $F_1$ y $F_2$ son equivalencias de homotopía débiles de $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-espacios, y por lo tanto $X_1'$ y $X_2'$ son aproximaciones $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-CW del mismo $\operatorname{Or} G^{\mathrm{op}}$-espacio $X_{\mathcal{F}}$. Entonces por el Corolario 1.38 existe una equivalencia de homotopía $h : X_1' \to X_2'$. Luego es fácil ver que $h(G / 1)$ es una $G$-equivalencia de homotopía entre $X_1'(G / 1) = X_1$ y $X_2'(G / 1) = X_2$.

□

Tomamos la siguiente definición de [Ell+20, (1.2)].

**Definición 3.25.** El **grupo diedral infinito** $D_\infty$ es el grupo dado por la presentación

$$D_\infty = \langle r, s \mid s^2 = 1,\, rs = sr^{-1} \rangle\,.$$

Se puede ver que cualquier elemento de $D_\infty$ se puede escribir como $r^m s^n$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \{0, 1\}$.

El objetivo de esta sección será hallar un modelo de $E_{Fin} D_\infty$ (donde *Fin* es la familia de los subgrupos finitos de $D_\infty$) y calcular los grupos de homología de este para una cierta $G$-teoría de homología (la cual introduciremos más tarde). Primero debemos hallar los subgrupos de $D_\infty$. Lo siguiente se puede encontrar en [Ell+20, Sección 3.2].

**Proposición 3.26.** Los subgrupos de $D_\infty$ son

1. El subgrupo trivial 1.
2. Los subgrupos $\langle r^m s \rangle$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Estos tienen orden 2: $\langle r^m s \rangle = \{e, r^m s\}$.
3. Los subgrupos $\langle r^m \rangle$ para todo $m \in \mathbb{Z}^+$. Estos tienen orden infinito y son isomorfos a $\mathbb{Z}$: $\langle r^m \rangle = \{r^{km} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
4. Los subgrupos $\langle r^m, r^k s \rangle$ para $m \in \mathbb{Z}^+$ y $k \in \mathbb{Z}$. Estos tienen orden infinito y son isomorfos a $D_\infty$: $\langle r^m, r^k s \rangle = \{r^{\ell m + nk} s^n \mid \ell \in \mathbb{Z},\, n \in \{0, 1\}\}$.

Omitimos la prueba de esta proposición. Notar que los subgrupos finitos son los primeros dos tipos, es decir el trivial y $\langle r^m s \rangle$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Presentamos el $D_\infty$-espacio que será nuestro modelo de $E_{Fin} D_\infty$ [ver Ell+20, pág. 14]:

**Definición 3.27.** Se define el $D_\infty$-espacio $\mathbb{R}$ como el espacio de los números reales con la acción de $D_\infty$ dada por

$$r^m s^n \cdot x = (-1)^n x + m$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \{0, 1\}$. Es fácil probar que esta está bien definida.

Ahora sería fácil verificar que se cumple que $\mathbb{R}^H$ es contractible para $H$ finito y vacío para $H$ infinito, pero nos faltaría algo importante para que se cumpla la definición de modelo de $E_{Fin}D_\infty$: hay que probar que $\mathbb{R}$ es un $D_\infty$-CW-complejo, lo cual no es trivial. Para esto hay que ver cómo son los $D_\infty$-espacios $D_\infty \,/\, H$ para $H \leq D_\infty$ finito (se puede ver que $\mathbb{R}$ no puede tener celdas de tipo $D_\infty \,/\, H \times D^n$ con $H$ infinito). Ya sabemos que $D_\infty \,/\, 1$ es isomorfo a $D_\infty$ con la acción dada por traslación izquierda, así que veamos cómo es $D_\infty \,/\, \langle r^m s\rangle$ como $D_\infty$-espacio.

**Proposición 3.28.** Los subespacios de $\mathbb{R}$

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}\,, \qquad \mathbb{Z} + \tfrac{1}{2} = \{k + \tfrac{1}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$$

son invariantes por la acción de $D_\infty$, es decir que son sub-$D_\infty$-espacios de $\mathbb{R}$. Además, dado $m \in \mathbb{Z}$, hay un isomorfismo de $D_\infty$-espacios

$$D_\infty \,/\, \langle r^m s\rangle \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m \text{ es par} \\ \mathbb{Z} + \frac{1}{2} & \text{si } m \text{ es impar}\,. \end{cases}$$

*Demostración.* Dado $k \in \mathbb{Z}$, tenemos que

$$r^\ell s^n \cdot k = (-1)^n k + \ell \in \mathbb{Z}\,,$$

así que $\mathbb{Z}$ invariante por la acción de $D_\infty$, y

$$\begin{aligned} r^\ell s^n \cdot (k + \tfrac{1}{2}) &= (-1)^n (k + \tfrac{1}{2}) + \ell \\ &= ((-1)^n k + \tfrac{1}{2}((-1)^n - 1) + \ell) + \tfrac{1}{2} \in \mathbb{Z} + \tfrac{1}{2}\,, \end{aligned}$$

así que $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ también es invariante por la acción de $D_\infty$.

Ahora sea $m \in \mathbb{Z}$. Por definición,

$$\begin{aligned} D_\infty \,/\, \langle r^m s\rangle &= \{r^k s^n \langle r^m s\rangle \mid k \in \mathbb{Z},\, n \in \{0,1\}\} \\ &= \{r^k s^n \{e, r^m s\} \mid k \in \mathbb{Z},\, n \in \{0,1\}\} \\ &= \big\{\{r^k s^n, r^{(-1)^n m + k} s^{n+1}\} \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \{0,1\}\big\}\,. \end{aligned}$$

Si $n = 0$, entonces

$$\big\{r^k s^n, r^{(-1)^n m + k} s^{n+1}\big\} = \{r^k, r^{k+m} s\}\,,$$

mientras que si $n = 1$, entonces

$$\big\{r^k s^n, r^{(-1)^n m + k} s^{n+1}\big\} = \{r^k s, r^{k-m}\} = \{r^{k-m}, r^{(k-m)+m} s\}\,,$$

así que podemos concluir que $D_\infty \,/\, \langle r^m s\rangle = \{\{r^k, r^{k+m} s\} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Definimos un morfismo $F_m : D_\infty \,/\, \langle r^m s\rangle \to \mathbb{R}$ como

$$F_m(\{r^k, r^{k+m} s\}) = k + \tfrac{m}{2}\,.$$

Verifiquemos que $F_m$ es un morfismo de $D_\infty$-espacios. Como $D_\infty \,/\, \langle r^m s\rangle$ tiene la topología discreta, basta probar que $F_m(g \cdot x) = g \cdot F_m(x)$ para todo $g \in D_\infty$ y $x \in D_\infty \,/\, \langle r^m s\rangle$, y para esto es suficiente probarlo con $g = r$ y con $g = s$:

$$\begin{aligned} F_m(r\{r^k, r^{k+m} s\}) &= F_m(\{r^{k+1}, r^{k+m+1} s\}) = k + 1 + \tfrac{m}{2} \\ &= r \cdot (k + \tfrac{m}{2}) = r \cdot F_m(\{r^k, r^{k+m} s\}) \\ F_m(s\{r^k, r^{k+m} s\}) &= F_m(\{r^{-k} s, r^{-k-m}\}) = -k - m + \tfrac{m}{2} \\ &= -(k + \tfrac{m}{2}) = s \cdot (k + \tfrac{m}{2}) = s \cdot F_m(\{r^k, r^{k+m} s\})\,, \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. Claramente la imagen de $F_m$ es $\mathbb{Z}$ si $m$ es par y $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ si $m$ es impar. Como $F_m$ es inyectiva y estos espacios tienen la topología discreta, concluimos que $F_m$ es un isomorfismo sobre su imagen.

$\square$

Como corolario, concluimos que $D_\infty \,/\, \langle r^{m_1} s\rangle \cong D_\infty \,/\, \langle r^{m_2} s\rangle$ si $m_1 - m_2$ es par. Se puede que además $\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, así que $D_\infty \,/\, \langle r^{m_1} s\rangle \ncong D_\infty \,/\, \langle r^{m_2} s\rangle$ si $m_1 - m_2$ es impar. Entonces basta con trabajar con los casos $m = 0$ y $m = 1$, es decir, con $D_\infty \,/\, \langle s\rangle$ ($\cong \mathbb{Z}$) y con $D_\infty \,/\, \langle rs\rangle$ ($\cong \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$). Ya estamos en condiciones par probar que $\mathbb{R}$ es un modelo de $E_{Fin} D_\infty$.

**Proposición 3.29.** $\mathbb{R}$ es un modelo de $E_{Fin} D_\infty$.

*Demostración.* Primero veamos que $\mathbb{R}$ tiene estructura de $D_\infty$-CW-complejo. Será un $D_\infty$-CW-complejo de dimensión 1, lo cual es esperable. Su 0-esqueleto será $\mathbb{Z} \cup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2}) \subseteq \mathbb{R}$, es decir, la unión disjunta de dos 0-celdas, una de tipo $D_\infty \,/\, \langle s\rangle \times D^0$ y la otra de tipo $D_\infty \,/\, \langle rs\rangle \times D^0$. El 1-esqueleto lo formamos pegándole al 0-esqueleto una única 1-celda, de tipo $D_\infty \,/\, 1 \times D^1 \cong D_\infty \times D^1$. Es decir, afirmamos que hay un pushout de $D_\infty$-espacios

$$\begin{tikzcd} D_\infty \times S^0 \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook] & \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \arrow[d, hook] \\ D_\infty \times D^1 \arrow[r] & \mathbb{R}\,. \end{tikzcd}$$

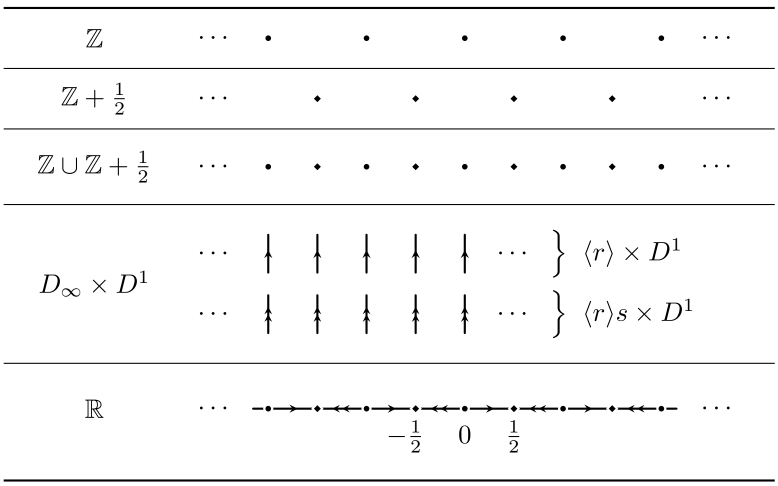
Definimos $F$ como el único morfismo de $D_\infty$-espacios tal que

$$F(e, -1) = 0\,, \qquad F(e, +1) = \tfrac{1}{2}\,.$$

Se puede ver que entonces

$$F(r^m s^n, -1) = m, \qquad F(r^m s^n, +1) = m + \tfrac{1}{2}(-1)^n\,.$$

Luego es fácil ver que lo de arriba es un pushout: los segmentos $\{r^m\} \times D^1$ de $D_\infty \times D^1$ conectan los puntos $m$ y $m + \frac{1}{2}$, mientras que los segmentos $\{r^m s\} \times D^1$ conectan los puntos $m$ y $m - \frac{1}{2}$, rellenando los agujeros de $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ y formando un $D_\infty$-espacio isomorfo a $\mathbb{R}$, como muestra el siguiente dibujo:



Probamos entonces que $\mathbb{R}$ es un $D_\infty$-CW-complejos, con dos 0-celdas y una 1-celda. Ahora hay que verificar que se cumple la condición de modelo de $E_{Fin}D_\infty$. Primero, verifiquemos que $\mathbb{R}^H$ es contractible para $H \in Fin$. Sabemos que los subgrupos finitos de $D_\infty$ son 1 y $\langle r^m s\rangle$ para $m \in \mathbb{Z}$. Para el subgrupo trivial 1, siempre se cumple que $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, y $\mathbb{R}$ es contractible. Para $\langle r^m s\rangle$, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{\langle r^m s\rangle} &= \{x \in \mathbb{R} \mid h \cdot x = x \text{ para todo } h \in \langle r^m s\rangle\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid r^m s \cdot x = x \text{ y } e \cdot x = x\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid m - x = x\} = \{\tfrac{m}{2}\}\,.\end{aligned}$$

Claramente estos conjuntos con un solo punto son contractibles.

Por último hay que verificar que $\mathbb{R}^H$ es vacío para $H \leq D_\infty$ infinito. Por la Proposición 3.26, sabemos que cualquier $H \leq D_\infty$ infinito contiene un subgrupo de la forma $\langle r^m\rangle$ para algún $m \in \mathbb{Z}^+$. Como ningún $x \in \mathbb{R}$ cumple que $r^m \cdot x = x$ (es decir, que $x + m = x$), se deduce efectivamente que $\mathbb{R}^H$ es vacío.

□

Ahora introduciremos la $D_\infty$-teoría de homología que evaluaremos en $\mathbb{R}$ usando el Teorema 3.21. Lo siguiente proviene de [Ell+20, Sección 2.5].

**Definición 3.30.** Sea $R$ un anillo, y $G$ un grupo. En [DL98, Sección 2] se define una $G$-teoría de homología $(H_n^G(-;\mathbf{K}(R)))_{n\in\mathbb{Z}}$ que cumple la siguiente propiedad: dado un subgrupo $H \leq G$ y $n \in \mathbb{Z}$,

$$H_n^G(G / H; \mathbf{K}(R)) \cong K_n(RH)\,,$$

donde $K_n(RH)$ es el $n$-ésimo grupo de *$K$-teoría algebraica* del anillo de grupo $RH$ [ver Ros94]. No se debe confundir esta teoría con la homología de Bredon (definida en 3.17), la cual se escribe parecido: aquí $\mathbf{K}(R)$ no es un $\mathbb{Z}\mathrm{Or}\,G$-módulo, sino que es un objeto llamado *$\Omega$-espectro* [ver DL98, pág. 209].

Calculamos el resultado de evaluar esta teoría en $\mathbb{R}$ [ver Ell+20, pág. 15].

**Proposición 3.31.** Se cumple que

$$H_n^{D_\infty}(\mathbb{R};\mathbf{K}(R)) \cong K_n(R\langle s\rangle) \oplus_{K_n(R)} K_n(R\langle rs\rangle)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, donde $K_n(R\langle s\rangle) \oplus_{K_n(R)} K_n(R\langle rs\rangle)$ se define como el pushout

$$\begin{array}{ccc} K_n(R) & \longrightarrow & K_n(R\langle s\rangle) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_n(R\langle rs\rangle) & \longrightarrow & K_n(R\langle s\rangle) \oplus_{K_n(R)} K_n(R\langle rs\rangle)\,. \end{array}$$

*Demostración.* En la Proposición 3.29 probamos que $\mathbb{R}$ es un $D_\infty$-CW-complejo, por lo que podemos usar el Teorema 3.21. Este nos dice que hay una sucesión espectral $(E^r_{pq}, d^r_{pq})_{p,q,r}$ que converge al resultado que queremos calcular, tal que su segunda página $(E^2_{pq})_{p,q}$ está dada por

$$E^2_{pq} \cong H_p^{D_\infty}(\mathbb{R}; H_q^{D_\infty}(-;\mathbf{K}(R)))\,,$$

es decir, el $p$-ésimo grupo de la homología de Bredon del $D_\infty$-CW-complejo $\mathbb{R}$ con coeficientes en el $\mathbb{Z}\mathrm{Or}\,D_\infty$-módulo $H_q^{D_\infty}(-;\mathbf{K}(R))$. Por la observación 3.18, estos se calculan tomándole la homología (algebraica) al complejo de cadenas formado por los grupos

$$\bigoplus_{i \in I_p} H_q^{D_\infty}(D_\infty \,/\, H_i; \mathbf{K}(R)) \,,$$

donde $I_p$ es el conjunto que indexa las $n$-celdas de $\mathbb{R}$ (como $\mathbb{R}$ ya es un $D_\infty$-CW-complejo, podemos tomar a sí mismo como aproximación $D_\infty$-CW), y la celda indexada por $i$ es de tipo $D_\infty \,/\, H_i \times D^n$. Por definición se da que $H_q^{D_\infty}(D_\infty \,/\, H_i; \mathbf{K}(R)) \cong K_q(RH_i)$. Además, por la Proposición 3.29, sabemos que $\mathbb{R}$ solo tiene dos celdas de dimensión 0 (una de tipo $D_\infty \,/\, \langle s \rangle \times D^0$ y una de tipo $D_\infty \,/\, \langle rs \rangle \times D^0$), una celda de dimensión 1 (de tipo $D_\infty \,/\, 1 \times D^1$), y no tiene celdas de dimensión más alta. Juntando estos hechos, concluimos que el complejo de cadenas al que le tenemos que tomar homología es

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow K_q(R1) \xrightarrow{d'} K_q(R\langle s \rangle) \oplus K_q(R\langle rs \rangle) \longrightarrow 0 \,.$$

Notar que $K_q(R1) \cong K_q(R)$.

Usaremos la observación 3.19 para ver cómo es el morfismo $d'$. Recordamos que el morfismo de pegado $F : D_\infty \times S^0 \to \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ de la única 1-celda de $\mathbb{R}$ es tal que

$$F(e, -1) = 0 \,, \qquad F(e, +1) = \tfrac{1}{2} \,.$$

Aquí, el punto $0 \in \mathbb{Z}$ le corresponde al punto $(\{e, s\}, 0) = (e\langle s \rangle, 0) \in D_\infty \,/\, \langle s \rangle \times D^0$ a través del isomorfismo $\mathbb{Z} \cong D_\infty \,/\, \langle s \rangle \times D^0$, mientras que $\frac{1}{2} \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ le corresponde a $(\{e, rs\}, 0) = (e\langle rs \rangle, 0) \in D_\infty \,/\, \langle rs \rangle \times D^0$ a través del isomorfismo $\mathbb{Z} + \frac{1}{2} \cong D_\infty \,/\, \langle rs \rangle \times D^0$ (ver la prueba de la Proposición 3.28). Entonces, si

$$r_{e\langle s \rangle} : D_\infty \,/\, 1 \to D_\infty \,/\, \langle s \rangle \,, \qquad r_{e\langle rs \rangle} : D_\infty \,/\, 1 \to D_\infty \,/\, \langle rs \rangle$$

son tales que

$$r_{e\langle s \rangle}(g1) = ge\langle s \rangle = g\langle s \rangle \,, \qquad r_{e\langle rs \rangle}(g1) = ge\langle rs \rangle = g\langle rs \rangle \,,$$

la observación 3.19 nos dice que

$$d'x = (-H_q^{D_\infty}(r_{e\langle s \rangle}; \mathbf{K}(R))x, H_q^{D_\infty}(r_{e\langle rs \rangle}; \mathbf{K}(R))x) \,,$$

o bien que

$$d' = (-H_q^{D_\infty}(r_{e\langle s \rangle}; \mathbf{K}(R)), H_q^{D_\infty}(r_{e\langle rs \rangle}; \mathbf{K}(R))) \,.$$

Llamémosle $\iota_0$ a $H_q^{D_\infty}(r_{e\langle s \rangle}; \mathbf{K}(R))$ y $\iota_1$ a $H_q^{D_\infty}(r_{e\langle rs \rangle}; \mathbf{K}(R))$. Resulta que $\iota_0$ y $\iota_1$ son inyectivos, lo cual no vamos a probar aquí [ver Ell+20, pág. 15]. Así que el complejo de cadenas es

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow K_q(R) \xrightarrow{(-\iota_0, \iota_1)} K_q(R\langle s \rangle) \oplus K_q(R\langle rs \rangle) \longrightarrow 0 \,.$$

Como $\iota_0$ y $\iota_1$ son inyectivos, $(-\iota_0, \iota_1)$ también lo es, y entonces

$$E^2_{1,q} \cong \frac{\ker (-\iota_0, \iota_1)}{\operatorname{im} 0} = \frac{0}{0} \cong 0 \,.$$

Por otra parte,

$$E^2_{0,q} \cong \frac{\ker 0}{\operatorname{im} (-\iota_0, \iota_1)} = \frac{K_q(R\langle s \rangle) \oplus K_q(R\langle rs \rangle)}{\operatorname{im} (-\iota_0, \iota_1)} \,,$$

es decir que tenemos un pushout de grupos abelianos

$$\begin{array}{ccc} K_q(R) & \xrightarrow{\iota_0} & K_q(R\langle s\rangle) \\ {\scriptstyle\iota_1}\downarrow & & \downarrow \\ K_q(R\langle rs\rangle) & \longrightarrow & E^2_{0,q}\,. \end{array}$$

Claramente se cumple que $E^2_{pq} \cong 0 \,/\, 0 = 0$ para $p \notin \{0,1\}$, así que se concluye que

$$E^2_{pq} \cong \begin{cases} K_q(R\langle s\rangle) \oplus_{K_q(R)} K_q(R\langle rs\rangle) & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p \neq 0\,, \end{cases}$$

donde la notación $K_q(R\langle s\rangle) \oplus_{K_q(R)} K_q(R\langle rs\rangle)$ simplemente es una forma de representar el pushout anterior.

De esto se deduce inmediatamente que $E^r_{pq} = 0$ para $p \neq 0$ y $r \geq 2$. Además, se cumple que los diferenciales

$$d^r_{0,q} : E^r_{0,q} \to E^2_{-r,\,q+r-1}$$
$$d^r_{r,\,q-r+1} : E^r_{r,\,q-r+1} \to E^r_{0,q}$$

son morfismos nulos, ya que su codominio o dominio respectivamente son grupos triviales. Por lo tanto,

$$E^{r+1}_{0,q} \cong \frac{\ker d^r_{0,q}}{\operatorname{im} d^r_{r,\,q-r+1}} = \frac{\ker 0}{\operatorname{im} 0} = \frac{E^r_{0,q}}{0} \cong E^r_{0,q}\,.$$

Esto implica que $E^r_{0,q} \cong E^2_{0,q}$ para todo $r$, y entonces

$$\begin{aligned} E^\infty_{pq} &\cong \operatorname*{colím}_{r\to\infty} E^r_{pq} \cong \operatorname*{colím}_{r\to\infty} E^2_{pq} = E^2_{pq} \\ &\cong \begin{cases} K_q(R\langle s\rangle) \oplus_{K_q(R)} K_q(R\langle rs\rangle) & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p \neq 0\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Como la sucesión espectral converge a $(H^{D_\infty}_n(\mathbb{R};\mathbf{K}(R)))_{n\in\mathbb{Z}}$, tenemos para todo $n \in \mathbb{Z}$ subgrupos

$$0 = F_{-1,\,n+1} \subseteq F_{0,n} \subseteq \cdots \subseteq F_{k,\,n-k} \subseteq \cdots \subseteq H^{D_\infty}_n(\mathbb{R};\mathbf{K}(R))\,,$$

donde $H^{D_\infty}_n(\mathbb{R};\mathbf{K}(R)) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_{k,\,n-k}$ y se cumple que

$$\frac{F_{k,\,n-k}}{F_{k-1,\,n-k+1}} \cong E^\infty_{k,\,n-k}$$

para todo $k \geq 0$. Esto es 0 para $k > 0$, así que $F_{k,\,n-k} = F_{0,n}$ para todo $k \geq 0$. Por otro lado,

$$F_{0,n} \cong \frac{F_{0,n}}{0} = \frac{F_{0,n}}{F_{-1,\,n+1}} \cong E^\infty_{0,n} \cong K_n(R\langle s\rangle) \oplus_{K_n(R)} K_n(R\langle rs\rangle)\,,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} H^{D_\infty}_n(\mathbb{R};\mathbf{K}(R)) &= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_{k,\,n-k} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_{0,n} = F_{0,n} \\ &\cong K_n(R\langle s\rangle) \oplus_{K_n(R)} K_n(R\langle rs\rangle)\,, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

□

# Referencias


[Bre67] Glen E. Bredon. *Equivariant Cohomology Theories*. Lecture Notes in Mathematics 34. Springer, 1967. ISBN: 978-3-540-03905-1. DOI: 10.1007/BFb0082690.

[DL98] James Davis y Wolfgang Lück. «Spaces over a Category and Assembly Maps in Isomorphism Conjectures in $K$- and $L$-Theory». En: *$K$-Theory* 15 (ene. de 1998), págs. 201-252. DOI: 10.1023/A:1007784106877. URL: https://www.him.uni-bonn.de/lueck/data/a.pdf (visitado 09-03-2021).

[Ell+20] Eugenia Ellis, Emanuel Rodríguez Cirone, Gisela Tartaglia y Santiago Vega. «Two examples of vanishing and squeezing in $K_1$». En: *New York Journal of Mathematics* 26 (2020). arXiv: 1907.06135 [math.KT].

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002. ISBN: 978-0-521-79540-1. URL: https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf (visitado 09-03-2021).

[Hun74] Thomas W. Hungerford. *Algebra*. Graduate Texts in Mathematics 73. Springer, 1974. ISBN: 978-0-387-90518-1. DOI: 10.1007/978-1-4612-6101-8.

[Lüc20] Wolfgang Lück. *Isomorphism Conjectures in $K$- and $L$-Theory*. Manuscrito incompleto. 8 de jul. de 2020. URL: https://www.him.uni-bonn.de/lueck/data/ic200708.pdf (visitado 09-03-2021).

[McC00] John McCleary. *A User's Guide to Spectral Sequences*. 2.ª ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 58. Cambridge University Press, 2000. ISBN: 978-0-521-56141-9. DOI: 10.1017/CBO9780511626289.

[Ros94] Jonathan Rosenberg. *Algebraic $K$-Theory and Its Applications*. Graduate Texts in Mathematics 147. Springer, 1994. ISBN: 978-0-387-94248-3. DOI: 10.1007/978-1-4612-4314-4.

[Swi02] Robert M. Switzer. *Algebraic Topology: Homotopy and Homology*. Classics in Mathematics 212. Springer, 2002. ISBN: 978-3-540-42750-6. DOI: 10.1007/978-3-642-61923-6. Reimpresión de la edición de 1975.

[Whi78] George W. Whitehead. *Elements of Homotopy Theory*. Graduate Texts in Mathematics 61. Springer, 1978. ISBN: 978-1-4612-6318-0. DOI: 10.1007/978-1-4612-6318-0.