TRABAJO MONOGRÁFICO

La Obstrucción de finitud de Wall

Jazmin Finot

Orientadora: Eugenia Ellis

Licenciatura en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Uruguay
Junio 2020

Introducción

Los CW-complejos, definidos por Whitehead en la década de los 40, son espacios topológicos que se construyen inductivamente mediante un proceso de pegado de n-discos D^n, o células, a lo largo de sus bordes, $(n-1)$-esféras S^{n-1}, para todo $n \in \mathbb{N}$. En virtud de sus buenas propiedades, los CW-complejos son de mucho interés en la topología algebraica. De hecho, el teorema de aproximación CW afirma que para todo espacio topológico X existe un CW-complejo Y y un morfismo $f : Y \to X$ que induce ismorfismos en todos los grupos de homotopía y homología. Es decir que todo espacio X es débilmente homotópicamente equivalente a un CW-complejo.

Nos preguntamos, en este trabajo, cuándo un espacio X es homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito, es decir cuándo existen un CW-complejo finito Y y morfismos $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ y $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$.

Decimos que un espacio X es finitamente dominado si existen un CW-complejo finito Y y morfismos $i : X \to Y$ y $r : Y \to X$ tales que $r \circ i \simeq \mathrm{id}_X$. Es claro que esta condición es necesaria para que X sea homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito. La pregunta es cuándo esta condición es suficiente:

¿Cuándo un espacio X finitamente dominado es homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito?

La obstrucción de finitud de Wall de un espacio X es un invariante del tipo de homotopía de X que nos permite responder a esta pregunta. Dicha obstrucción se obtiene como un elemento de $K_0(\mathbb{Z}G)$, siendo $G = \pi_1(X)$ y su anulación es una condición necesaria y suficiente para que un espacio X finitamente dominado sea homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito. Este resultado fue originalmente desarrollado por Wall en 1965.

En este trabajo realizaremos una exposición de este resultado utilizando como bibliografía tanto los artículos clásicos [16] y [17] como los artículos recientes [4] y [9].

La monografía está organizada de la siguiente manera.

En el primer capítulo presentaremos los principales resultados de la teoría de categorías y de la teoría de homotopía que se usarán en el resto del trabajo.

En el segundo capítulo veremos primero cómo asignarle un complejo de cadenas a un CW-complejo y describiremos las formas que toma según las propiedades que tenga el CW-complejo. Luego, estudiaremos los conjuntos simpliciales. Veremos el funtor realización geométrica que le asigna a un conjunto simplicial X un espacio topológico $|X|$. Probaremos que $|X|$ no es cualquier espacio topológico, sino que es un CW-complejo. Igualmente, veremos el funtor Sing que le asigna a un espacio topológico un conjunto simplicial. Al respecto, Milnor prueba en [8] que hay una equivalencia de homotopía débil entre $|\mathrm{Sing}(X)|$ y X.

En el tercer capítulo presentaremos el grupo $K_0(R)$ de un anillo R. Para definir el K_0 de un anillo, estudiaremos los módulos proyectivos y el teorema de Grothendieck que establece una construcción para transformar un monoide conmutativo en un grupo abeliano. Luego, definiremos la característica de Euler de un complejo de cadenas de tipo finito de módulos proyectivos y probaremos que es constante en las clases de homotopía de complejos de cadenas de tipo finito.

Finalmente, en el cuarto capítulo definiremos la obstrucción de finitud de Wall σ, que es un elemento de $K_0(\mathbb{Z}\pi_1(X))$y probaremos el resultado central de este trabajo:

Teorema 1. [9] *Sea X un espacio finitamente dominado. Existe un invariante $\sigma(X) \in \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi_1(X,x)])$ tal que X es homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito si y solamente si $\sigma(X) = 0$.*

Adicionalmente, en este capítulo, veremos una caracterización de los espacios finitamente dominados que será de mucha utilidad para probar el teorema anterior.

Teorema 2. [9] *Un espacio conexo X es finitamente dominado si y solamente si valen las siguientes condiciones:*

1. *X es homotópicamente equivalente a un CW-complejo*

2. *$\pi_1(X)$ es finitamente presentado*

3. *$S(\tilde{X})$, las cadenas singulares del cubrimiento universal, es homotópicamente equivalente por cadenas como complejo de cadenas de $\mathbb{Z}[\pi]$-módulos a un complejo de cadenas*

$$P_* :\ 0 \longrightarrow P_k \longrightarrow P_{k-1} \longrightarrow ... \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

de $\mathbb{Z}[\pi]$-módulos proyectivos finitamente generados.

Probaremos, asimismo, el siguiente resultado interesante que afirma que cualquier elemento de $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi_1(X,x)])$ es la obstrucción de finitud de Wall de algún espacio.

Teorema 3. [9] *Si π es un grupo finitamente presentado, entonces todo elemento $\sigma \in \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi])$ es la obstrucción de finitud de un CW-complejo finitamente dominado X tal que $\pi_1(X) = \pi$.*

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, definiremos algunos conceptos básicos de la teoría de categorías y luego veremos algunos resultados importantes como el lema de Yoneda, usando como referencias a [7] y [12]. Asimismo, definiremos los grupos de homotopía superiores y presentaremos los principales resultados de la teoría de homotopía que se usarán en el resto del trabajo: el teorema de Whitehead, el teorema de aproximación CW y el teorema de Hurewicz. Para ello nos referimos a [6].

1.1. Teoría de categorías

En esta sección, veremos conceptos básicos de teoría de categorías que utilizaremos a lo largo del trabajo.

Nos referimos a [7] y a [12].

Definición 1.1.1. Una categoría C consiste en

- una colección de objetos $\mathrm{Obj}(C)$
- para cada par (X, Y) de objetos ordenados, una colección $\hom(X, Y)$ de morfismos de dominio X y codominio Y; para $f \in \hom(X, Y)$ escribimos $f : X \to Y$
- para cada tripleta ordenada (X, Y, Z), un morfismo

  $$\hom(Y, Z) \times \hom(X, Y) \to \hom(X, Z)$$

  que llamamos composición; si $f \in \hom(X, Y)$ y $g \in \hom(Y, Z)$, entonces denotaremos la imagen de (g, f) en $\hom(X, Z)$ por $g \circ f$.

Estos objetos y morfismos deben satisfacer los siguientes axiomas:

1. si $f \in \hom(X, Y)$, $g \in \hom(Y, Z)$ y $h \in \hom(Z, W)$, entonces
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \in \hom(X, W)$$
2. dado un objeto Y, existe un morfismo $\mathrm{id}_Y : Y \to Y$ tal que $\mathrm{id}_Y \circ g = g$ para todo morfismo $g \in \hom(X, Y)$ y $h \circ \mathrm{id}_Y = h$ para todo morfismo $h \in \hom(Y, Z)$; además el morfismo id_Y es único.

Ejemplo 1.1.2. Algunos ejemplos de categorías son

- *Set*, la categoría cuyos objetos son todos los conjuntos y cuyos morfismos son todas las funciones.
- *Top*, la categoría de los espacios topológicos y las funciones continuas.
- *Grp*, la categoría de los grupos y los homomorfismos de grupos.

Definición 1.1.3. Dada una categoría C, la categoría opuesta C^{op} tiene:

- los mismos objetos que C,
- un morfismo f^{op} en C^{op} por cada morfismo f en C de forma que el dominio de f^{op} es el codominio de f y el codominio de f^{op} es el dominio de f,
$$f^{op} : X \to Y \in C^{op} \quad \leftrightsquigarrow \quad f : Y \to X \in C.$$

Es decir, C^{op} tiene los mismos objetos y los mismos morfismos que C, pero cada morfismo tiene la dirección opuesta.

Definición 1.1.4. Un funtor $F : C \to D$ entre dos categorías C y D es una flecha que le asigna

- un objeto $F(X) \in D$ a cada objeto $X \in C$
- un morfismo $F(f) \in \hom_D(F(X), F(Y))$ a cada morfismo $f \in \hom_C(X, Y)$

y que satisface las siguientes condiciones

1. para cada objeto $X \in C$ tenemos $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$
2. si $f \in \hom_C(X, Y)$ y $g \in \hom_C(Y, Z)$ tenemos $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \in \hom_D(F(X), F(Z))$

Ejemplo 1.1.5. A modo de ejemplo veremos el funtor Hom. Consideramos una categoría C y un objeto X en esa categoría. El funtor $\mathrm{Hom}(X, -) : C \to Set$ esta dado por:

- $\mathrm{Hom}(X,-)$ manda cada objeto Y de C en el conjunto de morfismos $\mathrm{Hom}(X,Y)$
- $\mathrm{Hom}(X,-)$ manda cada morfismo $f: A \to B$ en el morfismo $\mathrm{Hom}(X,f): \mathrm{Hom}(X,A) \to \mathrm{Hom}(X,B)$ dado por $g \mapsto f \circ g$ para todo morfismo $g \in \mathrm{Hom}(X,A)$

Los funtores que acabamos de definir se dicen covariantes para distinguirlos de los que definiremos a continuación.

Definición 1.1.6. Un funtor contravariante F de una categoría C en una categoría D es un funtor $F: C^{op} \to D$. Explícitamente, le asigna

- un objeto $F(X) \in D$ a cada objeto $X \in C$
- un morfismo $F(f) \in \mathrm{hom}_D(F(Y), F(X))$ a cada morfismo $f \in \mathrm{hom}_C(X,Y)$

y que satisface las dos condiciones siguientes:

1. para cada objeto $X \in C$ tenemos $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$
2. si $f \in \mathrm{hom}_C(X,Y)$ y $g \in \mathrm{hom}_C(Y,Z)$ tenemos $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g) \in \mathrm{hom}_D(F(Z), F(X))$

Ejemplo 1.1.7. Un ejemplo de funtor contravariante es $\mathrm{Hom}(-,X): C \to Set$ está dado por:

- $\mathrm{Hom}(-,X)$ manda cada objeto Y de C en el conjunto de morfismos $\mathrm{Hom}(Y,X)$
- $\mathrm{Hom}(-,X)$ manda cada morfismo $f: A \to B$ en el morfismo $\mathrm{Hom}(f,X): \mathrm{Hom}(X,B) \to \mathrm{Hom}(X,A)$ dado por $g \mapsto g \circ h$ para todo morfismo $g \in \mathrm{Hom}(B,X)$.

Definición 1.1.8. Una transformación natural es un morfismo entre funtores: dadas dos categorías C y D y dos funtores $F, G: C \to D$, una transformación natural T de F en G es una función que

- a cada objeto $X \in C$ le asigna un morfismo $T(X) \in \mathrm{hom}_D(F(X), G(X))$
- para cada morfimo $f \in \mathrm{hom}_C(X,Y)$, satisface

  $$T(Y) \circ F(f) = G(f) \circ T(X)$$

  es decir el siguiente diagrama conmuta

  $$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "T(X)"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "T(Y)"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

1.1.1. Límites y colímites

Los límites y colímites son construcciones universales en una categoría. Antes de definirlos, necesitaremos revisar la noción de diagrama.

Definición 1.1.9. Decimos que una categoría J es pequeña si la colección de objetos de J y la colección de morfismos de J son conjuntos.

Definición 1.1.10. Un diagrama en una categoría C es un funtor $F : J \to C$ tal que J es una categoría pequeña. Llamamos categoría indexante al dominio del funtor.

Ejemplo 1.1.11. Consideramos la categoría $\mathbb{2} \times \mathbb{2}$ que tiene cuatro objetos y los morfismos ilustrados en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

En $\mathbb{2} \times \mathbb{2}$, el morfismo diagonal es la composición del morfismo de arriba y del de la derecha, y también es la composición de los morfismos de la izquierda y de abajo. Luego, un diagrama indexado en $\mathbb{2} \times \mathbb{2}$ es un cuadrado conmutativo.

Podemos pensar la categoría indexante como un grafo dirigido que determina la forma del diagrama junto con las relaciones de conmutatividad.

Por ejemplo, para definir un morfismo que tenga por dominio la categoría $\mathbb{2} \times \mathbb{2}$ basta con dar las imágenes de los cuatro objetos junto con cuatro morfismos:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & b \arrow[d, "h"] \\
c \arrow[r, "k"'] & d
\end{tikzcd}$$

Definición 1.1.12. Para cualquier objeto $c \in C$ y cualquier categoría J, el funtor constante $c : J \to C$ manda todo objeto de J a c y todo morfismo en J al morfismo identidad id_c.

Definición 1.1.13. Un cono sobre un diagrama $F : J \to C$ con vértice $c \in C$ es una transformación natural $\lambda : c \Rightarrow F$ cuyo dominio es el funtor constante en c. Explícitamente,

- Un cono sobre $F : J \to C$ con vértice $c \in C$ es una colección de morfismos $\lambda_j : c \to F(j)$ indexados por los objetos $j \in J$

- Una familia de morfismos $(\lambda_j : c \to F(j))$ define un cono sobre F si y solamente si para cada morfismo $f : j \to k$ en J, el siguiente diagrama conmuta en C

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "\lambda_j"'] \arrow[dr, "\lambda_k"] & \\ F(j) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(k) \end{tikzcd}$$

Dualmente, un cono bajo F con nadir c es una transformación natural $\lambda : F \Rightarrow c$. La condición de naturalidad implica que para cada morfismo $f : j \to k$ en J, el siguiente triángulo conmuta en C

$$\begin{tikzcd} F(j) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, "\lambda_k"'] & & F(k) \arrow[dl, "\lambda_j"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

Observación 1.1.14. Un cono bajo $F : J \to C$ es un cono sobre $F : J^{op} \to C^{op}$.

Definición 1.1.15. El límite de un diagrama $F : J \to C$ es el cono universal sobre F.

Explícitamente, el límite de $F : J \to C$ es un objeto $limF \in C$ junto con morfismos $\eta_j : limF \to F(j)$ para cada objeto j de J. Además, estos morfismos cumplen la siguiente propiedad: para cualquier objeto $X \in C$ y cualquier colección de morfismos $\lambda_j : X \to F(j)$ que satisfacen $\lambda_k = F(f) \circ \lambda_j$ existe un único morfismo $h : X \to limF$ tal que $\lambda_j = \eta_j \circ h$ para todo objeto j en J.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[ddl, bend right, "\lambda_j"'] \arrow[ddr, bend left, "\lambda_k"] & \\ & limF \arrow[dl, "\eta_j"'] \arrow[dr, "\eta_k"] & \\ j \arrow[rr, "f"'] & & k \end{tikzcd}$$

Dualmente, el colímite de un diagrama $F : J \to C$ es el cono universal bajo F. Explícitamente, es un objeto $colimF$ en C junto con morfismos $\epsilon_j \to colimF$ que forman un cono bajo F. Además, para cualquier objeto X en C y cualquier colección de morfismos $\lambda_j : j \to C$ que formen un cono bajo F, tenemos que existe un único morfismo $g : colimF \to X$ tal que $\lambda_j = g \circ \epsilon_j$ para todo j en J.

$$
\begin{tikzcd}
j \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\epsilon_j"] \arrow[ddr, bend right, "\lambda_j"'] & & k \arrow[dl, "\epsilon_k"'] \arrow[ddl, bend left, "\lambda_k"] \\
& colimF \arrow[d, dashed, "g"] & \\
& X &
\end{tikzcd}
$$

A modo de ejemplo, veremos dos colímites y un límite de diagramas particulares que necesitaremos más adelante.

Ejemplo 1.1.16. Un coegalizador es el colímite de un diagrama indexado por la categoría $\bullet \rightrightarrows \bullet$. El coegalizador de un par de morfismos paralelos $f, g : A \rightrightarrows B$ es un objeto $\mathrm{Coeq}(f, g)$ junto con un morfismo $q : B \to \mathrm{Coeq}(f, g)$ tal $q \circ f = q \circ g$ y es universal en el sentido que si X es otro objeto con un morfismo $q' : B \to X$ tal que $q' \circ f = q' \circ g$ entonces existe un único morfismo $u : \mathrm{Coeq}(f, g) \to X$ de forma que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "q'"'] & \mathrm{Coeq}(f,g) \arrow[d, dashed, "\exists!\, u"] \\
& & X
\end{tikzcd}
$$

Ejemplo 1.1.17. Dualmente, un egalizador es el límite de un diagrama indexado por la categoría $\bullet \rightrightarrows \bullet$. El egalizador de un par de morfismos $f, g : A \rightrightarrows B$ es un objeto $\mathrm{Eq}(f, g)$ junto con un morfismo $e : \mathrm{Eq}(f, g) \to A$ tal que $f \circ e = g \circ e$ y es universal en el sentido que si X es otro objeto con un morfismo $e' : X \to A$ tal que $f \circ e' = g \circ e'$ entonces existe un único morfismo $u : X \to \mathrm{Eq}(f, g)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Eq}(f,g) \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
X \arrow[u, dashed, "\exists!\, u"] \arrow[ur, "e'"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Ejemplo 1.1.18. Un pushout es el colímite de un diagrama indexado por la categoría $\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet$. El pushout de los morfismos $f : A \to B$ y $g : A \to C$ consiste en un objeto P y dos morfismos $i_1 : B \to P$ e $i_2 : C \to P$ tales que completan el diagrama a un cuadrado conmutativo y (P, i_1, i_2) es universal respecto al diagrama. Es decir para otra tripleta (Q, j_1, j_2) tal que el diagrama conmuta, existe un único morfismo $u : p \to Q$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "j_1"] & \\
C \arrow[r, "i_2"] \arrow[drr, bend right, "j_2"'] & P \arrow[dr, dashed, "\exists!\, u"] & \\
 & & Q
\end{tikzcd}
$$

1.1.2. Categorías abelianas y funtores exactos

En esta sección, definiremos las categorías abelianas para luego ver los funtores exactos en este contexto.

Para definir categoría abeliana, necesitamos primero ver los siguientes conceptos.

Definición 1.1.19. Sea C una categoría. Decimos que un objeto t en C es terminal si para cada objeto a en C existe un único morfismo $a \to t$. Un objeto s en C es inicial si para cada objeto a en C existe un único morfismo $s \to a$. Un objeto z en C es nulo si es inicial y terminal.

Definición 1.1.20. Sea C una categoría que tiene un objeto nulo. Definimos el kernel de un morfismo $f : a \to b$ como el egalizador de los morfismos $f, 0 : a \rightrightarrows b$. Explícitamente, $k : s \to a$ es un kernel de $f : a \to b$ si $fk = 0$ y todo morfismo $h : c' \to a$ tal que $fh = 0$ se factoriza de forma única a través de k, es decir existe un único morfismo h' tal que $h = kh'$

$$
\begin{tikzcd}
s \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "0"] & & \\
 & a \arrow[r, "f"] & b \\
c \arrow[uu, dashed, "\exists! h'"] \arrow[ur, "h"] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Veremos también la noción dual de cokernel.

Definición 1.1.21. Consideramos una categoría C que tiene un elemento nulo. El cokernel de un morfismo $f : a \to b$ es un morfismo $u : b \to e$ tal que $uf = 0$ y todo morfismo $h : b \to c$ que verifica $hf = 0$ se factoriza como $h = h'u$ para un único morfismo $h' : e \to c$

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "h"'] & e \arrow[d, dashed, "\exists! h'"] \\
 & & c
\end{tikzcd}
$$

Definición 1.1.22. Sea C una categoría. Un morfismo $m : a \to b$ es mónico en C si para cada par de morfismos paralelos $f_1, f_2 : d \to a$, la igualdad $m \circ f_1 = m \circ f_2$ implica que $f_1 = f_2$, es decir m es mónico si se puede cancelar a izquierda. Un morfismo $h : a \to b$ es epi en C si para todo par de morfismos $g_1, g_2 : b \to c$, la igualdad $g_1 \circ h = g_2 \circ h$ implica $g_1 = g_2$, es decir h es epi si se puede cancelar a la derecha.

Definición 1.1.23. Una Ab-categoría es una categoría para la cual cada conjunto de morfismos $\hom(a, b)$ es un grupo abeliano aditivo donde la composición es bilineal: dados morfismos $f, f' : a \to b$ y $g, g' : b \to c$ se cumple

$$(g + g') \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f' + g' \circ f + g' \circ f'$$

Definición 1.1.24. Sea A una Ab-categoría y a y b objetos en A. Un diagrama de biproducto para los objetos a y b es un diagrama

$$a \underset{p_1}{\overset{i_1}{\rightleftarrows}} c \underset{i_2}{\overset{p_2}{\rightleftarrows}} b$$

tal que $p_1 i_1 = \mathrm{id}_a$, $p_2 i_2 = \mathrm{id}_b$ y $i_1 p_1 + i_2 p_2 = \mathrm{id}_c$

Estamos ahora en condiciones de dar la definición de categoría abeliana.

Definición 1.1.25. Una categoría abeliana A es una Ab-categoría que verifica las siguientes condiciones

1. A tiene un objeto nulo
2. A tiene biproductos binarios
3. todo morfismo en A tiene un kernel y un cokernel
4. todo morfismo mónico es un kernel y todo morfismo epi es un cokernel

Veremos ahora la noción de funtor exacto en el contexto de categorías abelianas.

Definición 1.1.26. Sean C y C' categorías abelianas, decimos que un funtor covariante $F : C \to C'$ es exacto por izquierda si una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

induce una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow F(K) \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(N)$$

Decimos que es exacto por derecha si induce una sucesión exacta

$$F(K) \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(N) \longrightarrow 0$$

F es exacto si es exacto por izquierda y por derecha, es decir si preserva sucesiones exactas cortas.

Proposición 1.1.27. *El funtor $Hom(X, -)$ es exacto por izquierda.*

Demostración. Sea $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{q} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta. Queremos ver que

$$0 \longrightarrow Hom(X, A) \xrightarrow{i_*} Hom(X, B) \xrightarrow{q_*} Hom(X, C)$$

es exacta, donde los morfismos inducidos están dados por post-composición con i y q.

Sea $f \in Hom(X, A)$. Si $i \circ f = 0$, entonces tenemos que $(i \circ f)(x) = 0$ para todo $x \in X$. Luego, como i es inyectiva, $f(x) = 0$ para todo x. Entonces $Ker(i_*) = \{0\}$ y se cumple la condición de exactitud en

$$0 \longrightarrow Hom(X, A) \xrightarrow{i_*} Hom(X, B) \ .$$

Como $q \circ i = 0$, tenemos que cualquier $f \in Hom(X, A)$ tiene imagen $0 \in Hom(X, C)$ mediante $f \mapsto q \circ i \circ f$. Luego $Im(i_*) \subset Ker(q_*)$.

Para probar la otra inclusión, tomamos $g \in Hom(X, B)$ tal que $q \circ g = 0 \in Hom(X, C)$. Entonces $g(X) \subset Ker(q) = Im(i)$. Como i es inyectiva es un isomorfismo sobre su imagen y por lo tanto tiene una inversa $i^{-1} : i(A) \to A$. Podemos definir $f = i^{-1} \circ g \in Hom(X, A)$ ya que $g(X) \subset Im(i)$. Luego $i \circ f = g$ y por lo tanto $Ker(q_*) \subset Im(i_*)$. Entonces tenemos exactitud en

$$Hom(X, A) \xrightarrow{i_*} Hom(X, B) \xrightarrow{q_*} Hom(X, C) \ .$$

□

Observación 1.1.28. En general, el funtor $Hom(X, -)$ no es exacto por derecha. Por ejemplo, consideramos

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n \longrightarrow 0$$

con $n > 1$.

Como no existe un morfismo no nulo de $\mathbb{Z}/n$ en $\mathbb{Z}$, tenemos que el extremo derecho de la sucesión inducida no cumple la condición de exactitud

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Hom(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & Hom(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & Hom(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/n) \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & 0 \\
& 0 & 0 & \mathbb{Z}/n &
\end{tikzcd}$$

1.1.3. Lema de Yoneda

Definición 1.1.29. Decimos que una categoría C es localmente pequeña si $\hom(A, B)$ es un conjunto para cualquier par de objetos A y B.

En esta sección C será una categoría localmente pequeña.

Como C es localmente pequeña, cada objeto A en C induce un funtor $C \to Set$ llamado hom-funtor y denotado por $h^A = \mathrm{Hom}(A, -)$ tal que

- h^A manda un objeto X en el conjunto de morfismos $\hom(A, X)$
- h^A manda un morfismo $f : X \to Y$ en el morfismo $f \circ -$ (composición con f a la izquierda), es decir $h^A(f)(g) = f \circ g$ para g en $\hom(A, X)$

Teorema 1.1.30 (Lema de Yoneda)**.** *Sea $F : C \to Set$ Para cada objeto A en la categoría C, las transformaciones naturales de h^A en F están en biyección con los elementos del conjunto $F(A)$. Es decir,*

$$\mathrm{Nat}(h^A, F) \simeq F(A)$$

Además, el isomorfismo es natural en A y F.

Notamos que el isomorfismo $\mathrm{Nat}(h^A, F) \simeq F(A)$ está dado por:

- dado $c \in F(X)$ definimos $\eta : \hom(-, X) \to F$ donde $\eta_Y : \hom(Y, X) \to F(X)$ es el morfismo que manda $g : Y \to X$ al elemento $Fg(c)$ en $F(X)$ donde Fg es la imágen de g por F
- recíprocamente, una transformación natural $\eta : \hom(-, X) \to F$ da lugar a un elemento $\eta_X(\mathrm{id}_X)$ en $F(X)$ donde η_Y es el morfismo $\hom(X, X) \to F(X)$.

Un importante caso particular del lema de Yoneda es cuando el funtor $F : C \to Set$ es otro hom-funtor. En este caso, el lema de Yoneda afirma que

$$\mathrm{Nat}(h^A, h^B) \simeq \mathrm{Hom}(B, A)$$

Es decir que las transformaciones naturales entre hom-funtores están en biyección con los morfismos (en la dirección opuesta) entre los objetos asociados. Dado un morfismo $f : B \to A$, denotamos por $\mathrm{Hom}(f, -)$ a la transformación natural asociada.

Definición 1.1.31. El encaje de Yoneda es un funtor contravariante

$$\mathscr{Y} : C \to Set^C$$

donde Set^C es la categoría de todos los funtores covariantes de C en Set, tal que

- cada objeto A en C se manda en su hom-funtor asociado $h^A = \mathrm{Hom}(A, -)$
- cada morfismo $f : A \to B$ se manda en su transformación natural correspondiente $\mathrm{Hom}(f, -)$

Observación 1.1.32. Podemos tomar el encaje de Yoneda como un funtor covariante considerando

$$\mathscr{Y} : C^{op} \to Set^C$$

Definición 1.1.33. Un funtor cualquiera $F : C \to D$ induce una función $\mathrm{hom}_C(X, Y) \to \mathrm{hom}_D(F(X), F(Y))$ dada por $f \mapsto F(f)$. Si este morfismo es inyectivo, decimos que F es fiel y si es sobreyectivo decimos que F es pleno.

Veremos ahora dos consecuencias del lema de Yoneda.

Corolario 1.1.34. *El encaje de Yoneda $\mathscr{Y} : C^{op} \to Set^C$ es pleno y fiel.*

Demostración. Para esta demostración nos referimos al corolario 2.2.8 de [12]. □

Corolario 1.1.35. *Sean X e Y dos objetos de la categoría C. Entonces $X \simeq Y$ si y solamente si $hom(X, -) \simeq hom(Y, -)$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Esta afirmación se debe a que $\mathscr{Y}$ es un funtor: si X e Y son isomorfos, entonces $\mathrm{hom}(X, -)$ y $\mathrm{hom}(Y, -)$ también lo son.

($\Leftarrow$) Este sentido es consecuencia de que $\mathscr{Y}$ sea fiel y pleno y se debe a una propiedad más general: si $F : C \to D$ es un funtor pleno y fiel y $F(X) \simeq F(Y)$ entonces $X \simeq Y$. Para probar esta propiedad, tomemos un isomorfismo $h : F(X) \to F(Y)$ con inversa h^{-1}. Como F es pleno y fiel existe un único morfismo $f : X \to Y$ tal que $F(f) = h$. Análogamente, existe un único morfismo $g : Y \to X$ tal que $F(g) = h^{-1}$. Entonces

$$F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)} = h^{-1} \circ h = F(g) \circ F(f) = F(fg)$$

y por lo tanto, como F es fiel, $fg = \mathrm{id}_X$. Análogamente, se ve que $gf = id_Y$ y concluimos que f es un ismorfismo. □

1.1.4. Adjunción

Definición 1.1.36. Sean F y G dos functores entre C y D.

$$C \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} D$$

Decimos que F es adjunto a izquierda de G si existe una biyección natural

$$hom_D(F(X), Y) \to hom_C(X, G(Y)) \text{ para } X \in C, Y \in D$$

y lo notamos como $F \dashv G$.

Lema 1.1.37. *El funtor* $\hom(X, -)$ *verifica*

$$\hom(X, \lim X_i) \simeq \lim \hom(X, X_i)$$

y el funtor $\hom(-, X)$ *verifica*

$$\hom(\operatorname{colim} X_i, X) \simeq \lim \hom(X_i, X)$$

Demostración. La primera afirmación es consecuencia de que al ser $\hom(X, -)$ un funtor covariante preserva el sentido de las flechas en los conos.

Por el otro lado, como el funtor $\hom(-, X)$ es contravariante da vuelta las flechas de conos lo que nos da la segunda afirmación. $\square$

Proposición 1.1.38. *Si $F \dashv G$, entonces F preserva colímites y G preserva límites.*

Demostración.

$$\begin{aligned} hom_D(F(\operatorname{colim} X), Y) &\simeq \hom_C(\operatorname{colim} X, G(Y)) && (1)\\ &\simeq \lim\hom_C(X, G(Y)) && (2)\\ &\simeq \lim\hom_D(F(X), Y) && (3)\\ &\simeq \hom_D(\operatorname{colim} F(X), Y) && (4) \end{aligned}$$

Donde (1) y (3) se deben a la definición de adjuntos y (2) y (4) se deben al lema 1.1.37. Entonces, por corolario 1.1.35 del lema de Yoneda, tenemos que $F(\operatorname{colim} X) \simeq \operatorname{colim} F(X)$. De forma análoga, se prueba que G preserva límites. $\square$

1.2. Teoría de homotopía

En esta sección veremos los grupos de homotopía superiores, así como resultados importantes de la teoría de homotopía que utilizaremos en el trabajo. Para ello, nos referimos a [6].

1.2.1. CW-complejos

Definición 1.2.1. Un CW-complejo es un espacio topológico que se construye de forma inductiva mediante un proceso de pegado de n-discos que llamamos n-células a lo largo de las $(n-1)$-esferas que constituyen sus bordes. Concretamente, la construcción de un CW-complejo sigue los siguientes pasos:

- Comenzamos con un conjunto discreto X^0 cuyos puntos llamamos 0-células.
- Inductivamente, construímos el n-esqueleto X^n a partir de X^{n-1} pegando n-células e_α^n a través de mapas $\phi_\alpha : S^{n-1} \to X^{n-1}$, es decir que X^n es la unión disjunta $X^{n-1} \sqcup_\alpha D_\alpha^n$ donde identificamos x con $\phi_\alpha(x)$ para todo $x \in \partial D_\alpha^n$.
- Este proceso puede terminar luego de un número finito de pasos tomando $X = X^n$ para algún $n < \infty$ o puede continuar idefinidamente y en ese caso tomamos $X = \bigcup_n X^n$.

Definición 1.2.2. Sean X e Y CW-complejos y $f : X \to Y$ continua. Decimos que f es celular si manda el n-esqueleto de X en el n-esqueleto de Y para todo n, es decir, si $f(X^n) \in Y^n$ para todo n.

1.2.2. Operaciones en espacios

En esta sección estudiaremos el mapping torus y el mapping telescope.

Definición 1.2.3. Sea X un espacio topológico. El mapping torus de un morfismo $f : X \to X$ está definido por

$$T(X, f) = (X \times [0,1])/ \sim$$

donde la relación $\sim$ está dada por $(x, 1) \sim (f(x), 0)$ para todo $x \in X$.

Veremos algunas propiedades del mapping torus que necesitaremos más adelante.

Lema 1.2.4. *[9] El morfismo $T(f) : T(X, f) \to T(X, f)$ dado por $(x, s) \mapsto (f(x), s)$ es homotópico a la identidad.*

Demostración. Consideramos

$$H(x, s, t) = \begin{cases} (x, s+t) & \text{si } s+t \leq 1 \\ (f(x), s+t-1) & \text{si } s+t \geq 1 \end{cases}$$

Si $t = 0$, tenemos $H(x, s, 0) = (x, s) = id(x, s)$.
Si $t = 1$, tenemos $H(x, s, 1) = (f(x), s) = T(f)(x, s)$.
Además, H es continua si $s + t = 1$ porque $(x, 1) \sim (f(x), 0)$ en $T(X, f)$.
Por lo tanto, H es una homotopía de la identidad a $T(f)$. $\square$

Lema 1.2.5. *[9] Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ dos morfismos. Entonces, $T(X, g \circ f)$ y $T(Y, f \circ g)$ son espacios homotópicamente equivalentes.*

Demostración. Primero veremos que f induce un morfismo $\widehat{f} : T(X, g \circ f) \to T(Y, f \circ g)$.

Para ello consideramos

$$\begin{tikzcd} X \times [0,1] \arrow[r, "f \times id"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[rd, bend left=60, "F"] & Y \times [0,1] \arrow[d] \\ T(X, g \circ f) \arrow[r, dashed, "\widehat{f}"'] & T(Y, f \circ g) \end{tikzcd}$$

$(f \times id)(x, 1) = (f(x), 1)$ es equivalente a $(f \times id)(g \circ f(x), 0) = (f \circ g \circ f(x), 0)$ en $T(Y, f \circ g)$, entonces tenemos que F es constante en las clases de equivalencia y por lo tanto pasa al cociente.

Entonces, $\widehat{f}$ está bien definida.

De manera análoga, se ve que g induce un morfismo $\widehat{g} : T(Y, f \circ g) \to T(X, g \circ f)$.

Luego tenemos

$$\begin{tikzcd} T(X, g \circ f) \arrow[r, "\widehat{f}"] \arrow[rr, bend right, "T(g \circ f)"'] & T(Y, f \circ g) \arrow[r, "\widehat{g}"] & T(X, g \circ f) \end{tikzcd}$$

Por el lema anterior, $T(g \circ f) \simeq id_{T(X, g \circ f)}$ y por lo tanto, $\widehat{g} \circ \widehat{f} \simeq id_{T(X, g \circ f)}$. Por otro lado, tenemos

$$\begin{tikzcd} T(Y, f \circ g) \arrow[r, "\widehat{g}"] \arrow[rr, bend right, "T(f \circ g)"'] & T(X, g \circ f) \arrow[r, "\widehat{f}"] & T(Y, f \circ g) \end{tikzcd}$$

Entonces, como $T(f \circ g) \simeq id_{T(Y,f\circ g)}$, tenemos que $\widehat{f} \circ \widehat{g} \simeq id_{T(Y,f\circ g)}$.

Por lo tanto, $T(X, g \circ f)$ y $T(Y, f \circ g)$ son homotópicamente equivalentes. □

Lema 1.2.6. *[9] Si $f, g : X \to X$ son morfismos homotópicamente equivalentes, entonces $T(X, f)$ y $T(X, g)$ son espacios homotópicamente equivalentes.*

Demostración. Sea $H : X \times [0, 1] \to X$ una homotopía de f a g.

Definimos los morfismos $F : T(X, f) \to T(X, g)$ y $G : T(X, g) \to T(X, f)$ mediante

$$F(x, s) = \begin{cases} (x, 2s) & \text{si } s \leq \frac{1}{2} \\ (H(x, 2s - 1), 0) & \text{si } s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

y

$$G(x, s) = \begin{cases} (x, 2s) & \text{si } s \leq \frac{1}{2} \\ (H(x, 2 - 2s), 0) & \text{si } s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Luego, tenemos que $G \circ F : T(X, f) \to T(X, f)$ está dado por

$$(x, s) \mapsto \begin{cases} (x, 4s) & \text{si } s \leq \frac{1}{4} \\ (H(x, 2 - 4s), 0) & \text{si } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ (H(x, 2s - 1), 0) & \text{si } s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Veremos que $G \circ F$ es homotópico a la identidad dando una homotopía explícita H'. La homotopía $H' : T(X, f) \times [0, 1] \to T(X, f)$ está dada por

$$H'(x, s, t) = \begin{cases} (x, s + t) & \text{si } s + t \leq 1 \\ (x, 4(s + t - 1)) & \text{si } 1 \leq s + t \leq \frac{5}{4} \\ (H(x, 2 - 4(s + t - 1)), 0) & \text{si } \frac{5}{4} \leq s + t \leq \frac{3}{2} \\ (H(x, 2(s + t - 1) - 1), 0) & \text{si } \frac{3}{2} \leq s + t \end{cases}$$

Análogamente, se ve que $F \circ G$ es homotópico a la identidad.

Concluimos entonces que $T(X, f)$ y $T(X, g)$ son homotópicamente equivalentes. □

Antes de ver la definición del mapping telescope, definiremos el mapping cylinder de un morfismo.

Definición 1.2.7. Sean X e Y espacios topológicos. El mapping cylinder de un morfismo $f : X \to Y$ está definido por

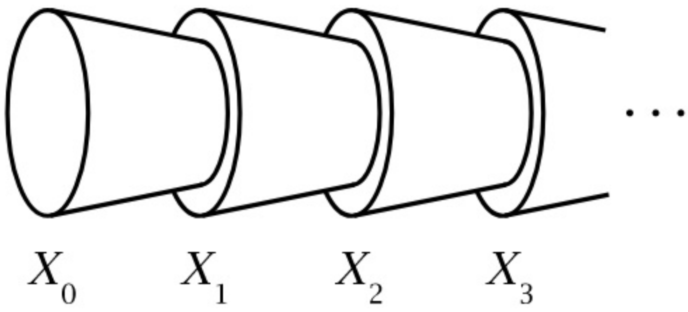
$$M_f = (([0, 1] \times X) \sqcup Y)/ \sim$$

donde la relación $\sim$ está dada por $(0, x) \sim f(x)$ para todo x.

Definición 1.2.8. El mapping telescope de una secuencia de morfismos

$$X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \longrightarrow ...$$

es la unión de los mapping cylinders M_{f_i} con las copias de X_i en M_{f_i} y $M_{f_{i-1}}$ identificadas para todo i.



Equivalentemente, el mapping telescope es el cociente de la unión disjunta $\coprod(X_i \times [i, i+1])$ en que cada punto $(x_i, i+1) \in X_i \times [i, i+1]$ se identifica con $(f_i(x_i), i+1) \in X_{i+1} \times [i+1, i+2]$.

Observación 1.2.9. En el mapping telescope T, sea T_i la unión de los primeros i mapping cylinders. T_i se retrae por deformación en X_i retrayendo sucesivamente cada mapping cylinder hacia la derecha.

Si los morfismos f_t son celulares, cada mapping cylinder es un CW-complejo y el mapping telescope T es una unión creciente de los subcomplejos $T_t \simeq X_t$.

Observación 1.2.10. Notaremos el mapping telescope de una secuencia de la forma $Y \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f} ...$, como $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M(f)$ donde $M(f)$ es el mapping cylinder de f.

1.2.3. Los grupos de homotopía de orden superior $\pi_n(X)$

Indicaremos el intervalo unitario mediante $I = [0, 1]$. El n-cubo unitario será I^n y su frontera ∂I^n.

Consideraremos $I^{n-1} \in I^n$ identificando I^{n-1} con la cara de I^n que tiene última coordenada $s_n = 0$. Sea J^{n-1} la clausura de $\partial I^n - I^{n-1}$, es decir, la unión del resto de las caras de I^n.

Definición 1.2.11. Dado un espacio X con un punto base $x_0 \in X$, definimos $\pi_n(X, x_0)$ como el conjunto de clases de homotopía de morfismos $f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$, donde las homotopías f_t verifican que $f_t(\partial I^n) = x_0$.

El conjunto $\pi_n(X, x_0)$ tiene estructura de grupo con el producto entre dos elementos $f, g \in \pi_n(X, x_0)$ definido mediante

$$(f \cdot g)(s_1, ..., s_n) = \begin{cases} f(2s_1, ..., s_n), \text{si } s_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s_1 - 1, ..., s_n), \text{si } s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Observación 1.2.12. El primer grupo de homotopía, o grupo fundamental, por lo general no es abeliano; sin embargo, $\pi_n(X, x_0)$ es abeliano si $n \geq 2$ (ver [6] p.340).

Observación 1.2.13. Si X es conexo por caminos, entonces $\pi_n(X, x_0)$ es independiente de la elección de punto base y lo notaremos por $\pi_n(X)$.

Observación 1.2.14. Nos será útil para más adelante considerar la siguiente definición alternativa de $\pi_n(X)$. Un morfismo $(I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ es análogo a un morfismo del cociente $I^n/\partial I^n = S^n$ a X que lleva el punto base $s_0 = \partial I^n/\partial I^n$ a x_0. Luego, podemos ver $\pi_n(X)$ como el conjunto de clases de homotopía de morfismos $(S^n, s_0) \to (X, x_0)$.

Observación 1.2.15. Un morfismo $\phi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induce un morfismo $\phi_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ definido mediante $\phi_*([f]) = [\phi f]$. Luego, π_n es un funtor.

Definición 1.2.16. Dado un par (X, A) con punto base $x_0 \in A$, definimos el n-ésimo grupo de homotopía relativo $\pi_n(X, A, x_0)$ como el conjunto de clases de homotopía de morfismos $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$, donde las homotopías son a través de morfismos de la misma forma.

Observación 1.2.17. En realidad, para $n = 1$, $\pi_n(X, A, x_0)$ no es un grupo. Sí lo es para $n \geq 2$ y es abeliano para $n \geq 3$.

Veremos a continuación que los grupos de homotopía relativos encajan en sucesiones exactas largas. Ésta es una propiedad muy útil de los grupos de homotopía superiores.

Teorema 1.2.18. *Dada una tripleta $x_0 \in B \subset A \subset X$, tenemos una sucesión exacta larga de grupos de homotopía relativos:*

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\delta}$$

$$\pi_{n-1}(A, B, x_0) \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \pi_1(X, A, x_0)$$

donde i_* y j_* son los morfismos inducidos por las inclusiones $(A, B, x_0) \hookrightarrow (X, B, x_0)$ y $(X, B, x_0) \hookrightarrow (X, A, x_0)$ respectivamente. El morfismo δ está dado por la restricción de morfismos $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, B, x_0)$ a I^{n-1}.

Demostración. Para esta demostración nos referimos al teorema 4.3 de [6]. □

Observación 1.2.19. Tomando $B = x_0$ en la sucesión exacta larga anterior obtenemos la sucesión exacta larga para un par $x_0 \in A \subset X$:

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\delta}$$

$$\pi_{n-1}(A, x_0) \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

Definición 1.2.20. Decimos que un espacio X con punto base x_0 es n-conexo si $\pi_n(X, x_0) = 0$ para $i \leq n$.

Observación 1.2.21. Si un espacio es 0-conexo, es conexo por caminos y si es 1-conexo, es simplemente conexo. Como ser n-conexo implica ser 0-conexo, la elección de punto no es significativa y podemos dar la definición de ser n-conexo sin considerar punto base.

Definición 1.2.22. Decimos que el par (X, A) es n-conexo si $\pi_i(X, A, x_0) = 0$ para todo $i \leq n$, $i > 0$ y todo $x_0 \in A$.

1.2.4. Teorema de Whitehead

Definición 1.2.23. Dados dos espacios topológicos X e Y, un morfismo $f : X \to Y$ es una equivalencia débil de homotopía si para todo $x \in X$ y para todo $n \geq 1$, f induce isomorfismos en los grupos de homotopía:

$$f_* : \pi_n(X, x) \xrightarrow{\simeq} \pi_n(Y, f(x))$$

Teorema 1.2.24 (Teorema de Whitehead)**.** *Una equivalencia de homotopía débil entre CW complejos conexos es una equivalencia homotópica.*

Además, si la equivalencia débil está dada por por la inclusión de un subcomplejo $Y \hookrightarrow X$, entonces la conclusión es más fuerte: Y es retracto por deformación de X.

Demostración. Para esta demostración nos referimos al teorema 4.5 de [6]. □

Veremos también la siguiente versión del teorema de Whitehead que considera grupos de homología en vez de grupos de homotopía que por lo general son más fáciles de calcular. Para las definiciones de homología y homología reducida, nos referimos a la sección 2.1 del capítulo 2 de [6].

Teorema 1.2.25. *Una función continua $f : X \to Y$ entre CW-complejos simplemente conexos es una equivalencia homotópica si induce isomorfismos en los grupos de homología para todo $n \in \mathbb{N}$:*

$$f_* : H_n(X) \xrightarrow{\simeq} H_n(Y)$$

Demostración. Para esta demostración nos referimos al corolario 4.33 de [6]. □

1.2.5. Teorema de aproximación CW

Definición 1.2.26. Una aproximación CW de un espacio X es un CW-complejo Z junto con una equivalencia de homotopía débil $f : Z \to X$.

El teorema de aproximación CW nos dice que para todo espacio X existe una aproximación CW.

Teorema 1.2.27 (Aproximación CW)**.** *Para todo espacio X existe una aproximación CW $f : Z \to X$.*

Si X es conexo por caminos, podemos tomar Z con una única 0-célula de tal forma que el resto de las células se pegan mediante morfismos que preservan el punto base.

Demostración. Para esta demostración nos referimos a la proposición 4.13 de [6]. □

La siguiente propiedad nos da una interpretación más geométrica de la noción de n-conexión.

Proposición 1.2.28. *Si (X, A) es un par CW n-conexo, existe un par CW $(Z, A) \simeq (X, A)$ rel A tal que todas la células de $Z - A$ tienen dimensión mayor que n.*

Demostración. Para esta demostración nos referimos a la proposición 4.15 de [6]. □

Nos interesa también notar que las aproximaciones CW se comportan bien con respecto a la homología.

Proposición 1.2.29. *Una equivalencia de homotopía débil $f : X \to Y$ induce isomorfismos $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ para todo n.*

Demostración. Para esta demostración nos referimos a la proposición 4.21 de [6]. □

1.2.6. Teorema de Hurewicz

Teorema 1.2.30 (Teorema de Hurewicz)**.** *Si un espacio X es $(n-1)$-conexo, $n \geq 2$, entonces $\tilde{H}_i(X) = 0$ para todo $i < n$ y $\pi_n(X) \approx H_n(X)$.*

Si un par (X, A) es $(n-1)$-conexo, $n \geq 2$ y además A es simplemente conexo y no vacío, entonces $H_i(X, A) = 0$ para $i < n$ y $\pi_n(X, A) \approx H_n(X, A)$.

Demostración. Para esta demostración nos referimos al teorema 4.32 de [6] □

El teorema de Hurewicz en esta forma afirma la existencia de un isomorfismo entre grupos de homlogía y grupos de homotopía, pero podemos refinarlo dando un isomorfismo explícito.

Definición 1.2.31 (Morfismo de Hurewicz)**.** Considerando $\pi_n(X, A, x_0)$ como clases de homotopía de morfismos $f : (D^n, \partial D^n, s_0) \to (X, A, x_0)$, el morfismo de Hurewicz $h : \pi_n(X, A, x_0) \to H_n(X, A)$ está dado por $h([f]) = f_*(\alpha)$ donde α es un generador fijo de $H_n(D^n, \partial D^n) \approx \mathbb{Z}$ y

$$f_* : H_n(D^n, \partial D^n) \to H_n(X, A)$$

es inducido por f.

Proposición 1.2.32. *El morfismo de Hurewicz $h : \pi_n(X, A, x_0) \to H_n(X, A)$ es un homomorfismo para todo $n > 1$.*

Para enunciar el teorema Hurewicz de una forma más sencilla, haremos una ligera modificación: consideraremos h', el morfismo inducido por h en $\pi'_n(X, A, x_0)$, la abelianización de $\pi_n(X, A, x_0)$.

Teorema 1.2.33 (Forma general del teorema de Hurewicz)**.** *Si (X, A) es un par $(n-1)$-conexo de espacios conexos por caminos con A no vacío y $n \geq 2$, entonces $h' : \pi'_n(X, A, x_0) \to H_n(X, A)$ es un isomorfismo y $H_i(X, A) = 0$ para $i < n$.*

Demostración. Para esta demostración nos referimos al teorema 4.37 de [6]. □

Capítulo 2

Realización geométrica y complejos de cadenas

En este capítulo veremos primero cómo asignarle un complejo de cadenas a un CW-complejo, usando como referencia a [6], y luego describiremos las formas que puede tomar según las propiedades que tenga el CW-complejo. A continuación, estudiaremos los conjuntos simpliciales. Definiremos dos funtores: el funtor realización geométrica que le asigna a un conjunto simplicial un espacio topológico y el funtor Sing que le asigna a un espacio topológico un conjunto simplicial y veremos algunas de sus propiedades. Para ello, usaremos como referencias a [7], [13] y [8].

2.1. Complejo de cadenas asociado a un CW-complejo

Definición 2.1.1. Decimos que un CW-complejo X es

1. de dimensión finita si, $dim(X) = n$ para algún n, es decir $X = X^n$ para algún n.

2. de esqueleto finito si, X^n es finito para todo n.

3. finito, si tiene finitas células, es decir, si es de dimensión finita y de esqueleto finito.

Definición 2.1.2. Decimos que un complejo de cadenas $(C_\bullet, \delta)$ es

1. acotado o de largo finito, si los módulos C_j son nulos salvo para una cantidad finita de índices.

2. finitamente generado, si todos los módulos C_j son finitamente generados.

3. de tipo finito, si es acotado y finitamente generado.

En esta sección, describiremos cómo asignarle un complejo de cadenas a un CW-complejo y veremos qué forma tiene según las propiedades que tenga el CW-complejo.

Empezaremos viendo el siguiente resultado preliminar que corresponde al lema 2.34 de [6].

Lema 2.1.3. *[6] Si X es un CW-complejo, entonces:*

1. $H_k(X_n, X_{n-1}) = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq n \\ \mathbb{Z}^{\#n-\text{células}}, & \text{si } k = n \end{cases}$

   Es decir, si $k = n$ entonces $H_k(X_n, X_{n-1})$ es un grupo abeliano libre con una base en biyección con las n-células de X.

2. $H_k(X_n) = 0$ si $k > n$. *En particular, si X tiene dimensión finita entonces $H_k(X) = 0$ si $k > \dim(X)$.*

3. *La inclusión $i : X_n \to X$ induce un isomorfismo $H_k(X_n) \to H_k(X)$ si $k < n$.*

Demostración. 1. X_n se obtiene de X_{n-1} pegando las n-células $(e^n_\lambda)_\lambda$. Tomamos un punto x_λ en el centro de cada n-célula $(e^n_\lambda)_\lambda$. Sea $A = X_n - \{(e^n_\lambda)_\lambda\}_\lambda$. Entonces, A se retrae por deformación en X_{n-1} y por lo tanto tenemos

$$H_k(X_n, X_{n-1}) \simeq H_k(X_n, A)$$

Aplicando excisión en X_{n-1} obtenemos que

$$H_k(X_n, A) \simeq \oplus_\lambda H_k(D^n_\lambda, D^n_\lambda - \{x_\lambda\})$$

.

Por otro lado, tenemos que $H_k(D^n_\lambda - \{x_\lambda\}) = H_k(S^{n-1}_\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq n-1, \\ \mathbb{Z} & \text{si } k = n-1 \end{cases}$

Además, $H_k(D^n_\lambda) = 0$ para todo $k \geq 1$.
Luego, usando la sucesión exacta larga del par $(D^n_\lambda, D^n_\lambda - \{x_\lambda\})$ obtenemos que

$$H_k(D^n_\lambda, D^n_\lambda - \{x_\lambda\}) \simeq \widetilde{H}_{k-1}(S^{n-1}_\lambda) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}$$

Concluimos entonces que

$$H_k(X_n, X_{n-1}) \simeq \oplus_\lambda H_k(D^n_\lambda, D^n_\lambda - \{x_\lambda\}) = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq n, \\ \mathbb{Z}^{\#n-\text{células}} & \text{si } k = n \end{cases}$$

2. Consideramos la sucesión exacta larga del par (X_n, X_{n-1})

$$... \longrightarrow H_{k+1}(X_n, X_{n-1}) \longrightarrow H_k(X_{n-1}) \longrightarrow H_k(X_n) \longrightarrow H_k(X_n, X_{n-1}) \longrightarrow ...$$

Si $k \neq n$ y $k+1 \neq n$ tenemos por la parte anterior que $H_{k+1}(X_n, X_{n-1}) = 0$ y $H_k(X_n, X_{n-1}) = 0$. Por lo tanto, $H_k(X_{n-1}) \simeq H_k(X_n)$. Luego, si $k > n$, en particular tenemos $k \neq n$ y $k+1 \neq n$ y podemos iterar el argumento anterior obteniendo

$$H_k(X_{n-1}) \simeq H_k(X_n) \simeq ... \simeq H_k(X_0)$$

Como X_0 es una colección de puntos, tenemos que $H_k(X_0) = 0$. Concluimos entonces que $H_k(X_n) = 0$ si $k > n$.
3. Probaremos la afirmación para el caso donde X es un CW-complejo finito. Sea $k < n$ y consideramos la sucesión exacta larga del par (X_{n+1}, X_n)

$$... \longrightarrow H_{k+1}(X_{n+1}, X_n) \longrightarrow H_k(X_n) \longrightarrow H_k(X_{n+1}) \longrightarrow H_k(X_{n+1}, X_n) \longrightarrow ...$$

Como $k < n$, tenemos que $k+1 \neq n+1$ y $k \neq n+1$. Luego, por la parte anterior $H_{k+1}(X_{n+1}, X_n) = 0$ y $H_k(X_{n+1}, X_n) = 0$. Por lo tanto, $H_k(X_n) \simeq H_k(X_{n+1})$ e iterando este argumento obtenemos

$$H_k(X_n) \simeq H_k(X_{n+1}) \simeq H_k(X_{n+2}) \simeq ... \simeq H_k(X_{n+l}) = H_k(X)$$

donde l verifica que $X_{n+l} = X$. Como X tiene dimensión finita, $X = X_{n+l}$ para algún l.

La idea para el caso donde X tiene dimensión infinita es reducirse al caso anterior usando el mapping telescope para construir in CW-complejo al menos localmente de dimensión finita. Para esta demostración nos referimos a [6]. □

A continuación, veremos cómo asignarle un complejo de cadenas a un CW-complejo en términos de una estructura celular dada y probaremos que es independiente de la estructura celular.

Definición 2.1.4. Sea X un CW-complejo. El complejo de cadenas celular $(C_\bullet(X), d_\bullet)$ está dado por

$$C_n(X) := H_n(X_n, X_{n-1})$$

donde $H_n(X_n, X_{n-1})$ es un grupo abeliano libre con una base en biyección con las n-células de X, junto con los morfismos de borde $d_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ definidos por el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & & & H_n(X_{n+1}, X_n) & \\
H_n(X_{n-1}) \arrow[dr] & & H_n(X_{n+1}) \arrow[ur] & & \\
 & H_n(X_n) \arrow[ur, "i_n"] \arrow[dr, "j_n"] & & & \\
H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \arrow[ur, "\partial_{n+1}"] \arrow[rr, "d_{n+1}"] & & H_n(X_n, X_{n-1}) \arrow[rr, "d_n"] \arrow[dr, "\partial_n"] & & H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) \\
 & & & H_{n-1}(X_{n-1}) \arrow[ur, "j_{n-1}"] & \\
 & & H_{n-1}(X_{n-2}) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

donde los complejos de cadenas diagonales están dados por sucesiones exactas largas de pares. En decir,

$$d_n := j_{n-1}\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$$

Notamos que se verifica $d_n d_{n+1} = 0$ pues

$$d_n d_{n+1} = j_{n-1}\partial_n j_n \partial_{n+1} = 0$$

ya que $\partial_n j_n$ es la composición de dos morfismos de borde consecutivos en una sucesión exacta larga y por lo tanto $\partial_n j_n = 0$.

Tenemos entonces, que $(C_\bullet(X), d_\bullet)$ es efectivamente un complejo de cadenas.

Definición 2.1.5. La homología celular $H_*^{CW}(X)$ de un CW-complejo es la homología del complejo de cadenas celular $(C_\bullet(X), d_\bullet)$.

Para probar que el complejo de cadenas celular es independiente de la estructura celular considerada, veremos que la homología celular de un CW-complejo X coincide con la homología singular.

Proposición 2.1.6. *[6] $H_n^{CW}(X)$ y $H_n(X)$ son isomorfos para todo n, donde $H_n(X)$ es la homología singular de X.*

Demostración. Como $H_n(X_{n+1}, X_n) = 0$ y $H_n(X) \simeq H_n(X_{n+1})$, obtenemos del diagrama anterior

$$H_n(X) \simeq H_n(X_n)/\operatorname{Ker}(i_n) \simeq H_n(X_n)/\operatorname{Im}(\partial_{n+1})$$

Además $H_n(X_n) \simeq \operatorname{Im}(j_n) \simeq \operatorname{Ker}(\partial_n) \simeq \operatorname{Ker}(d_n)$. El primer ismorfismo se debe a que j_n es inyectiva, el segundo es consecuancia de la exactitud de la sucesión exacta larga y vale $\operatorname{Ker}(\partial_n) \simeq \operatorname{Ker}(d_n)$ ya que $d_n = j_{n-1}\partial_n$ y j_{n-1} es inyectiva.
Por otro lado, tenemos que $\operatorname{Im}(\partial_{n+1}) \simeq \operatorname{Im}(d_{n+1})$ pues $d_{n+1} = j_n\partial_{n+1}$ y j_n es inyectiva.
Concluimos entonces que

$$H_n(X) \simeq H_n(X_n)/\operatorname{Im}(\partial_{n+1}) \simeq \operatorname{Ker}(d_n)/\operatorname{Im}(d_{n+1}) = H_n^{CW}(X)$$

□

Veremos ahora algunas consecuencias inmediatas

1. Si X no tiene n-células, entonces $C_n = H_n(X_n, X_{n-1}) = 0$. En particular, si X es un CW-complejo de dimensión finita, entonces $C_n = 0$ para todo $n > dim(X)$ y por lo tanto el complejo de cadenas celular asociado a X es de largo finito.

2. Si X es un CW-complejo de esqueleto finito, entonces tiene finitas células en cada dimensión y por lo tanto, $C_n = H_n(X_n, X_{n-1}) = \mathbb{Z}^{\#n-\text{células}}$ es finitamente generado.

3. Si X es un CW-complejo finito, entonces es de dimensión finita y de esqueleto finito. Luego, el complejo de cadenas celular de X es de largo finito y cada C_n es finitamente generado.

2.2. Conjuntos simpliciales y su realización geométrica

2.2.1. La categoría $ de conjuntos simpliciales

En esta sección, veremos la definición categórica de conjunto simplicial y luego veremos una interpretación geométrica.

Definición 2.2.1. Definimos la categoría Δ de los ordenales finitos de la siguiente manera

- los objetos son los conjuntos ordenados $[n] = \{0, 1, 2, ..., n\}$ con $n \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{Obj}(\Delta) = \{[n] : n \in \mathbb{N}\}$$

- los morfismos son las funciones monótonas crecientes:

$$\hom_\Delta([n],[m]) = \{f : [n] \to [m] : f(i) \leq f(j) \ si \ i \leq j\}$$

Definición 2.2.2. Un conjunto simplicial es un funtor contravariante

$$X : \Delta \to Set$$

o, equivalentemente, un funtor covariante $X : \Delta^{op} \to Set$.

Observación 2.2.3. Esta definición se puede generalizar para categorías arbitrarias C, definiendo un objeto simplicial en C como un funtor contravariante $\Delta \to C$.

Definiremos ahora morfismos particulares en la categoría Δ.

Definición 2.2.4. Los morfismos cocara son los endomorfismos de la categoría Δ definidos mediante:

$$d_n^i : [n] \to [n+1],\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0,\ i \in \{0, ..., n\}$$

$$d_n^i(m) = \begin{cases} m & \text{si } m < i \\ m+1 & \text{si } m \geq i \end{cases}$$

Es decir, $d_n^i(\{0, \cdots .n\}) = \{0, \cdots, \hat{i}, \cdots, n\}$, donde $\hat{i}$ significa que omitimos i en $\{0, \cdots, n+1\}$.

Los morfismos codegeneración son los endomorfismos de Δ definidos mediante:

$$s_n^j : [n+1] \to [n],\ n \in \mathbb{Z},\ j \in \{0, ..., n\}$$

$$s_n^j(m) = \begin{cases} m & \text{si } m \leq j \\ m-1 & \text{si } m > j \end{cases}$$

Es decir, $s_n^i(\{0, \cdots .n+1\}) = \{0, \cdots, j, j, \cdots, n\}$.

Ejemplo 2.2.5. Podemos ver los objetos de la categoría Δ como objetos de la categoría Top mediante el funtor covariante $F : \Delta \to Top$ tal que

$$\{0, \cdots, n\} \mapsto |\Delta^n|$$

donde $|\Delta^n|$ es el n-simplex estándar de Top dado por

$$|\Delta^n| = \left\{ (t_0, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \text{ y } t_i \geq 0 \right\}$$

Definimos el morfismo

$$f_* : |\Delta^n| \to |\Delta^m|$$

inducido por $f : \{0, \cdots, n\} \to \{0, \cdots, m\}$ mediante

$$f_*(t_0, \cdots, t_n) = (s_0, \cdots, s_m) \qquad \text{donde } s_j = \sum_{f(i)=j} t_i$$

La función f_* es afín y por lo tanto es continua.

Además, veremos que si $(t_0, \cdots, t_n) \in |\Delta^n|$ entonces $(s_0, \cdots, s_m) \in |\Delta^m|$:

$$\sum_{i=0}^{m} s_i = \sum_{i=0}^{m} \sum_{f(j)=i} t_j = \sum_{j=0}^{n} t_j = 1$$

Tenemos entonces que $F : \Delta \to Top$ es efectivamente un funtor.

Notamos que el morfismo cocara d_*^i manda $|\Delta^n|$ en la i-ésima cara de $|\Delta^{n+1}|$ y que el morfismo codegeneración s_*^j manda $|\Delta^n|$ en $|\Delta^{n-1}|$ pegando los vértices j y $j+1$.

Veremos ahora que cualquier morfismo en la categoría Δ es la composición de morfismos cocara y morfismos de codegeneración, lo que resulta muy útil para describir un conjunto simplicial.

Lema 2.2.6. *[7] En Δ, cualquier morfismo $f : \{0, \cdots, n\} \to \{0, \cdots n'\}$ tiene una única representación de la forma*

$$f = d^{i_k} \cdots d^{i_1} s^{j_1} \cdots s^{j_h} \tag{1}$$

donde los enteros no negativos satisfacen $n + k - h = n'$ y además los supraíndices satisfacen

$$n' \geq i_k > \cdots > i_1 \geq 0 \qquad\qquad 0 \leq j_i < \cdots < j_h \leq n$$

Demostración. Una función monótona creciente f queda completamente determinada por su imagen en $\{0, \cdots, n'\}$ y por los elementos $j \in \{0, \cdots, n-1\}$ donde la función no crece, es decir los j tales que $f(j) = f(j+1)$.

Luego, sean $i_1, \cdots, i_k$ en orden creciente los elementos de $\{0, \cdots, n'\}$ que no están en la imagen de f y sean $j_1, \cdots, j_h$ los elementos de $\{0, \cdots, n\}$ donde f no crece.

Tenemos entonces que $f = d^{i_k} \cdots d^{i_1} s^{j_1} \cdots s^{j_h}$. □

Lema 2.2.7. *Las caras y degeneraciones satisfacen las siguientes relaciones llamadas identidades cosimpliciales:*

$$\begin{aligned}
d^i d^j &= d^{j-1} d^i && \text{si} \quad i \leq j, \\
s^j s^i &= s^i s^{j+1} && \text{si} \quad i \leq j, \\
s^j d^i &= d^i d^{j-1} && \text{si} \quad i < j, \\
s^j d^i &= 1 && \text{si} \quad i = j, j+1, \\
s^j d^i &= d^{i-1} s^j && \text{si} \quad i > j+1
\end{aligned} \tag{2}$$

Demostración. Estas relaciones se verifican directamente a partir de la definición de d^i y de s^i.

Por ejemplo, para la primera, como $i \leq j$, tenemos que

$$d^i d^j([n]) = d^i(\{0, \cdots, \underbrace{i}_{\text{lugar i}}, \cdots, \hat{j}, \cdots, n\}) = \{0, \cdots, \hat{i}, \cdots, \hat{j}, \cdots, n\}$$

$$d^{j-1} d^i([n]) = d^{j-1}(\{0, \cdots, \hat{i}, \cdots, \underbrace{j}_{\text{lugar j-1}}, \cdots, n\}) = \{0, \cdots, \hat{i}, \cdots, \hat{j}, \cdots, n\}$$

□

Proposición 2.2.8. *[7] Los morfismos de la categoría Δ son todas las composiciones de todos los morfismos d^i y s^j sujetas a las identidades simpliciales.*

Demostración. Por el lema 2.2.6, tenemos que todo morfismo en Δ es una composición de morfismos cocara y codegeneración. Además, las relaciones del lema 2.2.7 nos permiten escribir cualquier composición de morfismos cocara y codegeneración en la forma (1). □

Consideremos, ahora, la categoría opuesta Δ^{op}. Recordamos que los objetos de Δ^{op} son los mismos que los objetos de Δ y para cada morfismo $[n] \to [m]$ en Δ, tenemos un morfismo $[m] \to [n]$ en Δ^{op}.

Sea d_i el morfismo correspondiente a d^i en la categoría Δ^{op}, y s_i el morfismo correspondiente a s^i. Llamamos morfismo cara a d_i y morfismo degeneración a s_i.

Como $(-)^{op}$ es un funtor contravariante, las identidades cosimpliciales inducen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
d_j d_i &= d_i d_{j-1} && \text{si} \quad i \leq j, \\
s_i s_j &= s_{j+1} s_i && \text{si} \quad i \leq j, \\
d_i s_j &= s_{j-1} d_i && \text{si} \quad i < j, \\
d_i s_j &= 1 && \text{si} \quad i = j, j+1, \\
d_i s_j &= s_j d_{i-1} && \text{si} \quad i > j+1
\end{aligned} \tag{3}$$

Análogamente a la proposición 2.2.8, tenemos que todos los morfismos de Δ^{op} están generados por composiciones de morfismos cara y degeneración sujetos a las relaciones (3).

Esto nos permite dar una definición más concreta de conjunto simplicial: para dar un conjunto simplicial alcanza con definir conjuntos de n-símplices, morfismos cara y morfismos degeneración.

Si X es un conjunto simplicial, sea $X_n = X(\{0, \cdots, n\})$ y notaremos por d_i a $X(d_i)$ y por s_j a $X(s_j)$.

Proposición 2.2.9. *Un conjunto simplicial X es una colección de conjuntos X_n para cada $n \geq 0$ junto con funciones $d_i : X_n \to X_{n-1}$ y $s_i : X_n \to X_{n+1}$, para todo $0 \leq i \leq n$ y para todo n, que satisfacen las siguientes relaciones:*

$$d_j d_i = d_i d_{j-1} \qquad si \quad i \leq j, \tag{4}$$

$$s_i s_j = s_{j+1} s_i \qquad si \quad i \leq j, \tag{5}$$

$$d_i s_j = s_{j-1} d_i \qquad si \quad i < j, \tag{6}$$

$$d_i s_j = 1 \qquad si \quad i = j, j+1, \tag{7}$$

$$d_i s_j = s_j d_{i-1} \qquad si \quad i > j+1 \tag{8}$$

Llamamos vértices del conjunto simplicial a los elementos de X_0 y símplices a los elementos de todos los X_n. Decimos que un símplice x es degenerado si x es la imagen de algún s_j.

La proposición que veremos ahora muestra que alcanza con identificar los símplices no degenerados de un conjunto simplicial, pues los símplices degenerados son la imagen de símplices no degenerados por composiciones de morfismos s_j.

Proposición 2.2.10. *[8] Un símplice z en un conjunto simlicial X tiene una única representación*

$$z = s_{j_h} \cdots s_{j_1} x$$

donde x es un símplice no degenerado en X y los subíndices satisfacen $j_1 < \cdots < j_h$.

Demostración. Supongamos que z es un símplice degenerado, el caso donde z es no degenerado es obvio.

Entonces por definición, $z = s_{i_1} x_1$ para algún símplice x_1. Si x_1 es degenerado, tenemos que $x_1 = s_{i_2} x_2$ y luego $z = s_{i_1} s_{i_2} x_2$. Continuando con este proceso, obtenemos que $z = s_{i_1} \cdots s_{i_h} x$ para algún símplice no degenerado x.

Para probar que esta representación es única, supongamos que z tiene dos representaciones $z = Sx$ y $z = S'x'$ donde S y S' son composiciones de morfismos degeneración y x y x' son símplices no degenerados.

Si $S = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$, sea $D = d_{i_k} \cdots d_{i_1}$. Por (7), tenemos que $DS = 1$ y por lo tanto $x = DSx = DS'x'$.

Aplicamos (6) sucesivas veces hasta obtener $\tilde{D}$ composición de morfismos cara y $\tilde{S}'$ composición de morfismos degeneración tales que $DS' = \tilde{S}'\tilde{D}$.

Como x es no degenerado y $x = DS'x' = \tilde{S}'\tilde{D}x'$, tenemos que necesariamente $\tilde{S}' = 1$. Obtenemos entonces que $x = \tilde{D}x'$ es una cara de x'.

Análogamente, se ve que x' es una cara de x y por lo tanto $x = x'$.

La unicidad de S y la condición sobre los subíndices es consecuencia de 2.2.6. □

Definición 2.2.11. Un morfismo de conjuntos simpliciales $f : X \to Y$ es una transformación natural de los funtores X e Y.

Observación 2.2.12. Un morfismo simplicial $f : X \to Y$ es una sucesión de morfismos $f_n : X_n \to Y_n$ para $n \geq 0$ tales que $f_{n-1}d_i = d_i f_n$ y $f_{n+1}s_j = s_j f_n$.

De hecho, por definición, si $f : X \to Y$ es una transformación natural entre conjuntos simpliciales, tenemos que existen morfismos f_n y f_{n-1} tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{d_i} & X_{n-1} \\ {\scriptstyle f_n}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} \\ Y_n & \xrightarrow[d_i]{} & Y_{n-1} \end{array}$$

lo que implica que $f_{n-1}d_i = d_i f_n$.

Análogamente, existen morfismos f_{n+1} y f_n tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{s_j} & X_{n+1} \\ {\scriptstyle f_n}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} \\ Y_n & \xrightarrow[s_j]{} & Y_{n+1} \end{array}$$

lo que implica que $f_{n+1}s_j = s_j f_n$

Definición 2.2.13. La categoría $ es la categoría cuyos objetos son los conjuntos simpliciales y cuyos morfismos son las transformaciones naturales.

Definición 2.2.14. Definimos el n-símplice estándar Δ^n en $ como el funtor contravariante

$$\Delta^n := \hom_\Delta(-, [n]) : \Delta \to Set$$

que manda un morfismo $f : [m] \to [m']$ en Δ en un morfismo g dado por

$$g(\sigma'(i)) = \sigma(f(i))$$

donde $\sigma \in \hom_\Delta([m'], [n])$ y $\sigma' \in \hom_\Delta([m], [n])$.

Observación 2.2.15. Aplicando el lema de Yoneda, tenemos que

$$\mathrm{Nat}(\hom_{\Delta^{op}}([n], -), K) = \hom_{\mathbb{S}}(\hom_\Delta(-, [n]), K) = \hom_{\mathbb{S}}(\Delta^n, K)$$

donde $K : \Delta^{op} \to Set$ es un funtor.

Entonces, para todo conjunto simplicial X se cumple que

$$\hom_{\mathbb{S}}(\Delta^n, X) \simeq X_n$$

.

Observación 2.2.16. Alternativamente, podemos definir el n-símplice estándar Δ^n mediante sus símplices,

$$\Delta^n_m = \{(k_0, k_1, \cdots, k_m) : 0 \leq k_0 \leq \cdots \leq k_m \leq n\}$$

sus morfismos cara

$$d_i((k_0, \cdots, k_m]) = (k_0, \cdots, \hat{k_i}, \cdots k_m)$$

y sus morfismos degeneración:

$$s_j((k_0, \cdots, k_m)) = (k_0, \cdots, k_j, k_j, \cdots k_m)$$

Es fácil ver que verifican las relaciones de 2.2.9.

Observamos que Δ^n es lo que obtenemos al considerar el conjunto simplicial más pequeño que contiene a $[n]$ y es cerrado bajo los morfismos cara y degeneración.

Definición 2.2.17. Un subconjunto simplicial de un conjunto simplicial X es un conjunto simplicial Y que satisface $Y_n \subset X_n$ para cada $n \geq 0$, y que hereda los mismos morfismos cara d_i y degeneración s_j.

Definición 2.2.18. Dado un conjunto simplicial X, definimos el n-esqueleto $\mathrm{sk}^n X$ de X como el subconjunto simplicial de X tal que

$$(\mathrm{sk}^n X)_p = \{x \in X_p : \text{existen } s \in \hom_\Delta([p], [q]),\ q \leq n,\ \text{e } y \in X_q \text{ tales que } x = X(s)(y)\}$$

Observación 2.2.19. Notamos que $(\mathrm{sk}^n X)_p = X_p$ si $p \leq n$,

$$\mathrm{sk}^0 X \subseteq \mathrm{sk}^1 X \subseteq \mathrm{sk}^2 X \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{sk}^n X \subseteq \cdots \subseteq X$$

y que

$$X = \mathrm{colim}_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{sk}^n X$$

Definición 2.2.20. La dimensión de un conjunto simplicial X es el mínimo n tal que $\mathrm{sk}^n X = X$. En el caso de que $\mathrm{sk}^n X \neq X$ para todo n decimos que X no tiene dimensión finita.

Definición 2.2.21. Si X es un conjunto simplicial de dimensión n, denominamos contorno de X a $\mathrm{sk}^{n-1}X$ y lo denotamos por ∂X.

Notamos que si X es un conjunto simplicial y σ es un n-símplice, podemos considerar el símplice singular asociado $\tilde{\sigma} : \Delta^n_\sigma \to X$. Como

$$\hom_{\mathbb{S}}(\Delta^n_\sigma, X) \simeq X_n = (\mathrm{sk}^n X)_n \simeq \hom_{\mathbb{S}}(\Delta^n_\sigma, \mathrm{sk}^n X)$$

tenemos que $\tilde{\sigma} : \Delta^n_\sigma \to \mathrm{sk}^n X$.

Proposición 2.2.22. *[3] Sea X un conjunto simplicial. El siguiente diagrama es un pushout*

$$\begin{tikzcd} \coprod_{\sigma\in NX_n} \partial\Delta^n_\sigma \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & \mathrm{sk}^{n-1}X \arrow[d, hook] \\ \coprod_{\sigma\in NX_n} \Delta^n_\sigma \arrow[r, "g"] & \mathrm{sk}^n X \end{tikzcd} \tag{9}$$

donde NX_n es el conjunto de $n-$símplices no degenerados, f es la restricción y g se define como

$$g = \coprod_{\sigma\in NX_n} \tilde{\sigma}$$

Demostración. Para probar que (9) es un pushout alcanza con probar que

$$\begin{tikzcd} \coprod_{\sigma\in NX_n} (\partial\Delta^n_\sigma)_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, hook] & (\mathrm{sk}^{n-1}X)_i \arrow[d, hook] \\ \coprod_{\sigma\in NX_n} (\Delta^n_\sigma)_i \arrow[r, "g_i"'] & (\mathrm{sk}^n X)_i \end{tikzcd} \tag{10}$$

es un pushout para todo $i \leq n$.

Para $i < n$, las inclusiones (10) son igualdades y por lo tanto (10) es un pushout.

Para el caso $i = n$, notamos que el complemento de $(\partial\Delta^n_\sigma)_n$ visto en $(\Delta^n_\sigma)_n)$ es $\mathrm{id}[n]_\sigma$ porque es el único n-símplice no degenerado de Δ^n_σ. Además, tenemos que $\tilde{\sigma_n}(\mathrm{id}[n]) = \sigma$ y por lo tanto g_n es una biyección entre el complemento de $\coprod_{\sigma\in NX_n}(\partial\Delta^n_\sigma)_n$ en $\coprod_{\sigma\in NX_n}(\Delta^n_\sigma)_n$ y el complemento de $(\mathrm{sk}^{n-1}X)_n$ en $(\mathrm{sk}^n X)_n$. Obtenemos entonces que, en este caso, el diagrama (10) también es un pushout. $\square$

2.2.2. El funtor realización geométrica

Los conjuntos simpliciales permiten abstraerse de la geometría y de la topología. Queremos ahora revertir el proceso y convertir un conjunto simplicial en un objeto geométrico/topológico. Esto lo haremos a través de la realización geométrica.

Definiremos la realización geométrica de manera que la realización del n-símplice estándar en $\mathbb{S}$ sea el n-símplice estándar en Top.

Definición 2.2.23. Sea X un conjunto simplicial. Dotamos a cada X_n de la topología discreta y sea $|\Delta^n|$ el n-símplice estándar en $\mathbb{R}^{n+1}$. La realización geométrica |X| de X está dada por

$$|X| = \left(\coprod_{n=0}^{\infty} X_n \times |\Delta^n|\right)\Big/\sim$$

donde le damos a $|X|$ la topología cociente y $\sim$ es la relación de equivalencia defnida por $(x, p) \sim (y, q)$ si

- $d_i x = y$ y $d^i q = p$, o
- $s_j x = y$ y $s^j q = p$

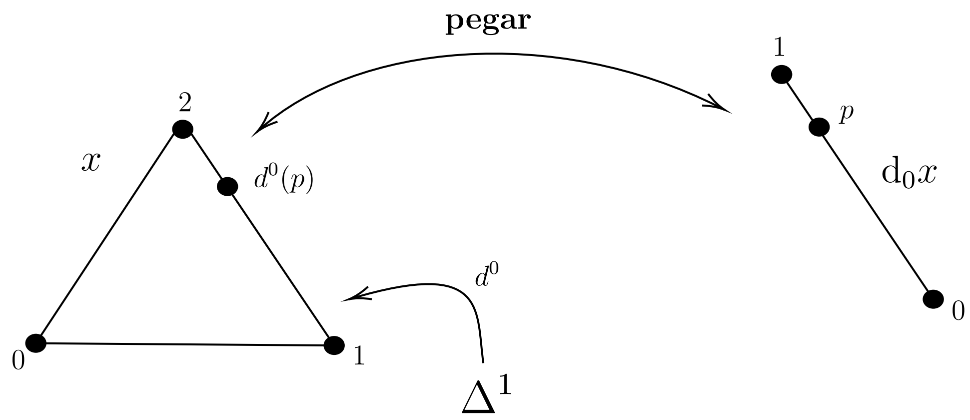
con d^i y s^j los morfismoss cocara y codegeneración inducidos por el funtor $\Delta \to Top$.

Para ver que esta definición tiene sentido, describiremos la acción del funtor realización geométrica.

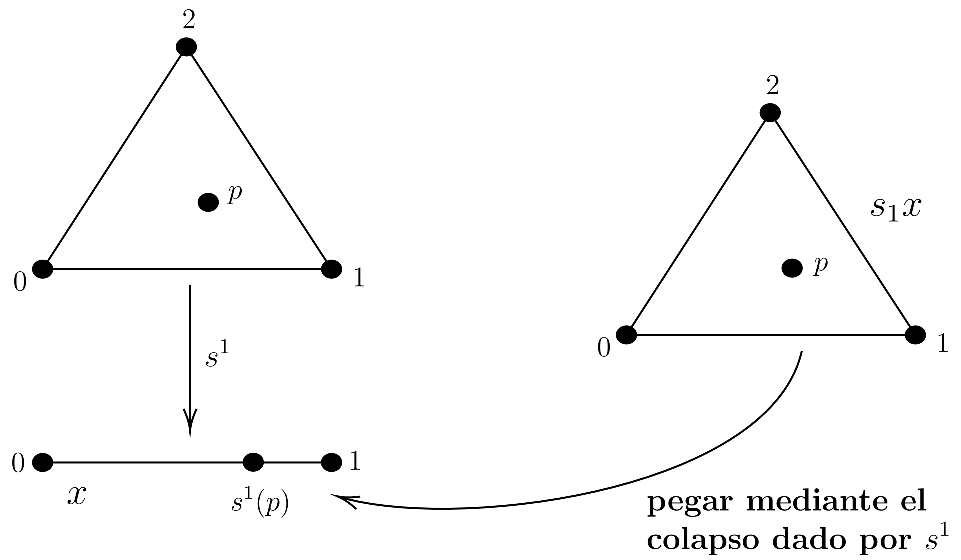
Sea x un n-símplice en un conjunto simplicial y consideraremos la interpretación geométrica de los morfismos cara y degeneración que vimos en el ejemplo 2.2.5.

Intuitivamente, la relación de equivalencia colapsa degeneraciones y pega caras que se corresponden.

Comenzemos con la primera relación: $(x, d^j p) \sim (d_j x, p)$, donde $p \in |\Delta^{n-1}|$. Recordamos que d^j es la inclusión de $|\Delta^{n-1}|$ en la j-ésima cara de $|\Delta^n|$ y que $d_j x$ da la j-ésima cara de x. Luego, la relación de equivalencia pega puntos p en el borde de x a su ubicación correspondiente en la realización $|\Delta^n|$ de x y, por lo tanto, pega las caras de la realización de x a la realización de las caras de x.



Veamos, ahora, la segunda relación: $(x, s^j p) \sim (s_j x, p)$, donde $p \in |\Delta^{n+1}|$. Recordamos que s^j manda $|\Delta^{n+1}|$ en $|\Delta^n|$ pegando los vértices j y $(j+1)-$, y que s_j manda x al $(n+1)$-símplice duplicando el $(j+1)$-ésimo vértice. Luego, la relación de equivalencia permite suprimir los símplices degenerados: un punto p en la realización $|\Delta^{n+1}|$ de $s_j x$ debe ser colapsado vía s^j pues $s_j x$ es un símplice degenerado.



Veremos, a continuación una forma alternativa de definir el funtor realización geométrica.

Sean C, D dos categorías y $\mathrm{Fun}(C, D)$ la categoría cuyos objetos son los funtores $F : C \to D$ y cuyos morfismos son las transformaciones naturales.

Notamos que $\mathbb{S} = \mathrm{Fun}(\Delta^{op}, Set)$.

Definición 2.2.24. Sean $F : C \to D$ un funtor y X un objeto de la categoría D. La categoría coma $F \downarrow X$ es la categoría cuyos objetos son

$$\mathrm{Obj}(F \downarrow X) = \{(c, f) : c \in \mathrm{Obj}(C) \text{ y } f : F(c) \to X\}$$

y un morfismo en $\hom_{F\downarrow X}((c, f), (c', f'))$ es un morfismo $h : c \to c'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} F(c) \arrow[dd, "F(h)"'] \arrow[dr, "f"] & \\ & X \\ F(c') \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

Recordamos que dada una categoría C, definimos el encaje de Yoneda de la siguiente manera:

$$\begin{gathered} \mathscr{Y} : C \to \mathrm{Fun}(C^{op}, Set) \\ c \mapsto \hom_C(-, c), c \in \mathrm{Obj}(C) \\ \alpha \mapsto \hom_C(-, \alpha), \alpha \in \hom_C(a, b) \end{gathered}$$

Definición 2.2.25. Sean X un conjunto simplicial e $\mathscr{Y}$ el funtor de Yoneda para $C = \Delta$. Definimos la categoría simpleja $\Delta \downarrow X$ como la categoría coma $\mathscr{Y} \downarrow X$.

Explícitamente,

- $\mathrm{Obj}(\Delta \downarrow X) = \{([n], \sigma) : n \in \mathbb{N},\ \sigma \in \hom_{\mathbb{S}}(\Delta^n, X)\}$
- $f \in \hom_{\Delta\downarrow X}(([n], \sigma), ([m], \tau))$ si y solamente si $f : [n] \to [m]$ hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} \Delta^n \arrow[rr, "\hom_\Delta(-,f)"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & \Delta^m \arrow[dl, "\tau"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

El siguiente lema nos permite ver un conjunto simplicial como colímite de sus símplices.

Lema 2.2.26. *[7] Sea X un conjunto simplicial. Consideramos el funtor*

$$T_X : \Delta \downarrow X \to \$$$

que definimos de la siguiente manera:

- *a nivel de objetos:* $([n], x) \mapsto \Delta^n$
- *a nivel de morfismos:* $(f : [n] \to [m]) \mapsto (\hom_\Delta(-, f) : \Delta^n \to \Delta^m)$

Si denotamos por $\underset{\Delta \downarrow X}{colim}\, \Delta^k$ *al colímite del funtor* T_X*, entonces*

$$X = \underset{\Delta \downarrow X}{colim}\, \Delta^k$$

Estamos ahora en condiciones de definir la realización geométrica de un conjunto simplicial.

Definición 2.2.27. Sea X un conjunto simplicial. Consideramos el funtor T_X que definimos en el lema anterior. Definimos el funtor $|T_X| : \Delta \downarrow X \to Top$ mediante:

- a nivel de objetos: $|T_X|([n], x) = |\Delta^n|$, donde $|\Delta^n|$ es el n-símplice topológico estándar
- a nivel de morfismos: $|T_X|(f) = f_*$, donde f_* es la función continua que definimos en 2.2.5.

Definición 2.2.28. Definimos la realización geométrica de X como

$$|X| := \mathrm{colim}|T_X|$$

2.2.3. El funtor Sing

Definiremos el funtor Sing que le asigna a cada espacio topológico un conjunto simplicial.

Definición 2.2.29. Definimos el funtor Sing : $Top \to \$$ mediante:

- Si A es un espacio topológico, Sing(A) es el conjunto simplicial dado por:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sing}(A) : \Delta^{op} &\longrightarrow Set \\ [n] &\longmapsto \hom_{Top}(|\Delta^n|, A) \end{aligned}$$

  Es decir, $\mathrm{Sing}(A) = \hom_{Top}(-, A) \circ F$

donde $F : \Delta \to Top$ es el funtor dado por:

$$\begin{aligned} F : \mathrm{Obj}(\Delta) &\to \mathrm{Obj}(Top) \\ [n] &\mapsto |\Delta^n| \\ F : \hom_\Delta([n],[m]) &\to \hom_{Top}(|\Delta^n|, |\Delta^m|) \\ f &\mapsto f_* \end{aligned}$$

- Si $f : A \to B$ es una función continua, entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{Sing}(f) : \mathrm{Sing}(A) &\longrightarrow \mathrm{Sing}(B) \\ (\mathrm{Sing}(f))_n : \hom_{Top}(|\Delta^n|, A) &\longrightarrow \hom_{Top}(|\Delta^n|, B) \\ \alpha &\longmapsto f \circ \alpha \end{aligned}$$

Proposición 2.2.30. *[10] El funtor $|-|$ es adjunto a izquierda del funtor* Sing*, es decir existe un isomorfismo*

$$Hom_{Top}(|X|, Y) \simeq Hom_{\mathbb{S}}(X, \mathrm{Sing}(Y))$$

que es natural en conjuntos simpliciales X y en espacios topológicos Y.

Demostración. Notamos primero que

$$\hom_{Top}(|\Delta^n|, A) = \mathrm{Sing}(A)([n]) \simeq \hom_{\mathbb{S}}(\Delta^n, \mathrm{Sing}(A))$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} \hom_{Top}(|X|, A) &\simeq \hom_{Top}(\mathrm{colim}|T_X|, A) \\ &\simeq \lim \hom_{Top}(|\Delta^n|, A) \\ &\simeq \lim \hom_{\mathbb{S}}(\Delta^n, \mathrm{Sing}(A)) \\ &\simeq \hom_{\mathbb{S}}(\mathrm{colim} T_X, \mathrm{Sing}(A)) \\ &\simeq \hom_{\mathbb{S}}(X, \mathrm{Sing}(A)) \end{aligned}$$

□

Corolario 2.2.31. *El funtor $|-|$ conmuta con los colímites. Es decir, si $F : C \to \mathbb{S}$ es un funtor, entonces*

$$|\mathrm{colim} F| \simeq \mathrm{colim}|F|$$

Demostración. Como $|-|$ tiene adjunto a derecha, por la proposición 1.1.38, tenemos que conmuta con los colímites. □

2.2.4. Homotopía simplicial

En esta sección definiremos homotopía en el contexto de conjuntos simpliciales. Veremos que no necesariamente es una relación de equivalencia y definiremos una condición suficiente para que lo sea.

Definición 2.2.32. Sean $f, g : X \to Y$ dos morfismos simpliciales. Decimos que f es homotópico a g si existe un morfismo simplicial $h : X \times \Delta^1 \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd}
X \times \Delta^0 = X \arrow[d, "1\times d^1"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X \times \Delta^1 \arrow[r, "h"] & Y \\
X \times \Delta^0 = X \arrow[u, "1\times d^0"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Que el diagrama conmute implica que $h(x, 0) = f(x)$ y que $h(x, 1) = g(x)$, para todo símplice $x \in X$. Escribimos $f \simeq g$.

Si A es un subconjunto simplicial, entonces escribimos $f \simeq g$ rel(A) si F es constante en A.

Observación 2.2.33. La relación $\simeq$ de homotopía puede no ser una relación de equivalencia.

Por ejemplo, consideramos $i_o : \Delta^0 \to \Delta^n$ con $n \geq 1$ que manda Δ^0 en el vértice 0 de Δ^n y $i_1 : \Delta^0 \to \Delta^n$ con $n \geq 0$ que manda Δ^0 en el vértice 1 de Δ^n.

El símplice $[0, 1] = \Delta^1$ queda derminado por esos dos vértices y tenemos $\Delta^1 \to \Delta^n$. Por lo tanto $i_0 \xrightarrow{\simeq} i_1$.

Pero no existe un $1-$símplice que nos de una homotopía $i_1 \xrightarrow{\simeq} i_0$ pues $0 < 1$.

Entonces, en este caso, no se verifica la propiedad simétrica.

Definición 2.2.34. El $k-$ésimo cuerno $\Lambda^n_k \subset \Delta^n$ con $n \geq 1$ es el menor subcomplejo de Δ^n que contiene todas las caras $d_i([n])$ excepto por la cara $d_k([n])$.

Podemos representar, por ejemplo, el cuerno Λ^2_0 mediante

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & 0 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
1 & & 2 & \subset & 1 \arrow[rr] & & 2 & = \Delta^2
\end{tikzcd}$$

Definición 2.2.35. Un conjunto simplicial X satisface la condición de extensión de Kan si cualquier morfismo de conjuntos simpliciales $f : \Lambda^n_k \to X$ se puede extender a un morfismo $g : \Delta^n \to X$.

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & X \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Decimos que un conjunto simplicial que satisface la condición de extensión es un complejo de Kan.

Ejemplo 2.2.36*.* Notamos que Δ^1 no satisface la condición de extensión.

Sea $f : \Lambda^2_0 \to \Delta^1$ dado por $f([0,1]) = [0,1]$ y $f([0,2]) = [0,0]$. El morfismo f está bien definido porque lo definimos en todos los símplices no degenerados de Λ^2_0. Tenemos que $f([1]) = f(d_0[0,1]) = d_0 f([0,1]) = [1]$ y $f([2]) = f(d_0[0,2]) = d_0 f([0,2]) = [0]$. Entonces, no podemos extender f pues $g([1,2])$ tendría que ser $[1,0]$ que no es un elemento de Δ^1.

Proposición 2.2.37. *[13] Si X es un espacio topológico, entonces* $\mathrm{Sing}(X)$ *es un complejo de Kan.*

Demostración. Sea $f : \Lambda^n_k \to \mathrm{Sing}(X)$ un morfismo de conjuntos simpliciales.

Como Sing es adjunto a dereccha de $|-|$, el morfismo f se corresponde con una función continua $\tilde{f} : |\Lambda^n_k| \to X$.

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & \mathrm{Sing}(X) \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd} \quad \text{en \$ induce} \quad \begin{tikzcd} \mid \Lambda^n_k \mid \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, hook] & X \\ \mid \Delta^n \mid \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd} \quad \text{en } Top$$

Sea $r : |\Delta^n| \to |\Lambda^n_k|$ el morfismo continuo que retrae la $k-$ésima cara y el interior de $|\Delta^n|$ sobre las otras caras.

Luego, $\tilde{f}r : |\Delta^n| \to X$ es un morfismo continuo que extiende $\tilde{f}$ y por adjunción, se corresponde con un morfismo simplicial $\Delta^n \to \mathrm{Sing}(X)$ que es la extensión que buscamos. $\square$

Lema 2.2.38. *Sean X e Y conjuntos simpliciales tal Y verifica la condición de extensión de Kan. Entonces, todo morfismo de conjuntos simpliciales $F : X \times \Lambda^n_k \to Y$ se puede extender a un morfismo $G : X \times \Delta^n \to Y$.*

Demostración. Aplicamos sucesivamente la condición de extensión de Kan para extender el morfismo F en cada cuerno Λ_l^n que esté en $X \times \Lambda_k^n \subset X \times \Delta^n$. □

Proposición 2.2.39. *[10] Sean X e Y conjuntos simpliciales tal que Y satisface la condición de extensión de Kan. Entonces $\simeq$ es una relación de equivalencia.*

Demostración. Consideramos $f, g, h : X \to Y$ morfismos de conjuntos simpliciales.

Propiedad reflexiva. Sea $F : X \times \Delta^1 \to Y$ dado por $F = f \circ p$ donde $p : X \times \Delta^1 \to X$ es la proyección. Entonces, F es una homotopía y tenemos que $f \simeq f$.

Propiedad simétrica. Sea F una homotopía de f a g. Definimos $F' : X \times \Lambda_1^2 \to Y$ mediante $F'(x, [0,1]) = F(x, \Delta^1)$ y $F'(x, [0,2]) = f(x)$ para todo $x \in X$. El morfismo F' está bien definido pues $F'(x, [0]) = f(x)$ en ambos casos. Por el lema 2.2.38, existe una extensión $G' : X \times \Delta^2 \to Y$ que restringida a $X \times$ [1,2] nos da una homotopía de g a f.

Propiedad transitiva. Sea F una homotopía de f a g y G una homotopía de g a h. Definimos $F' : X \times \Lambda_1^2 \to Y$ que vale F en $X \times [0,1]$ y vale G en $X \times [1,2]$. Por el lema 2.2.38, F' se extiende a un morfismo $G' : X \times \Delta^2 \to Y$ que restringido a $X \times [0,2]$ nos da una homotopía de f a g. □

El lema anterior se puede generalizar para mostrar que homotopía relativa a un subconjunto simplicial también es una relación de equivalencia.

Definiremos ahora los grupos de homotopía simpliciales.

Definición 2.2.40. Dado un complejo de Kan con un punto base $(X, *)$, definimos $\pi_n(X, *)$, para $n > 0$, como el conjunto de clases de equivalencia homotópica de morfismos $(\partial\Delta^{n+1}, *) \to (X, *)$. Tomamos como punto base de $\partial\Delta^{n+1}$ el subconjunto simplicial de Δ^{n+1} generado por el vértice 0, y todas las homotopías son relativas al punto base.

2.2.5. Homología simplicial

Para esta sección, nos referimos a [1].

Comenzaremos considerando un grupo abeliano simplicial G, es decir, una colección de grupos abelianos G_n junto con homomorfismos $d_i : G_n \to G_{n-1}$ y $s_i : G_n \to G_{n+1}$ que satisfacen las identidades simpliciales.

Lema 2.2.41. *Un grupo abeliano simplicial G es un complejo de cadenas con los morfismos de borde $\partial_n : G_n \to G_{n-1}$ dados por*

$$\partial_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i$$

Demostración. Tenemos que ver que se verifica $\partial^2 = 0$.

.

$$\begin{aligned}
\partial_{n-1}\partial_n x &= \sum_{j=0}^{n-1}\left((-1)^j d_j \sum_{i=0}^{n}((-1)^i d_i x)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{j+i} d_j d_i x \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{j<i}(-1)^{j+i} d_j d_i x + \sum_{j>i}(-1)^{j+i} d_j d_i x\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{j<i}(-1)^{j+i} d_j d_i x + \sum_{j>i}(-1)^{i+j} d_i d_{j-1} x\right) && (*) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{j<i}(-1)^{j+i} d_j d_i x + \sum_{j>i}(-1)^{j+i+1} d_i d_j x\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{j<i}(-1)^{j+i} d_j d_i x - \sum_{j<i}(-1)^{j+i} d_i d_j x\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

donde (*) es por la primer identidad simplicial de la proposición 2.2.9. □

Luego, definimos los grupos de homología de este complejo de cadenas como $H_n(G) = \operatorname{Ker}(\partial_n)/\operatorname{Im}(\partial_{n+1})$.

Definición 2.2.42. Definimos el funtor $\mathrm{F}_{\mathrm{ab}} : Set \to Ab$ que manda conjuntos en grupos abelianos libres mediante:

- $\mathrm{F}_{\mathrm{ab}}(S)$ es el grupo abeliano libre generado por el conjunto S
- si $f : S \to T$, entonces $\mathrm{F}_{\mathrm{ab}}(f) : \mathrm{F}_{\mathrm{ab}}(S) \to \mathrm{F}_{\mathrm{ab}}(T)$ está dado por

$$\mathrm{F}_{\mathrm{ab}}(f)(\textstyle\sum_{x\in S} k_x x) = \sum_{x\in S} k_x f(x)$$

Luego, si X es un conjunto simplicial, entonces $\mathrm{F}_{\mathrm{ab}}(X)$ es un grupo abeliano libre simplicial donde $(\mathrm{F}_{\mathrm{ab}}(X))_n$ es un grupo abeliano libre cuyos generadores son los elementos de X_n.

Definición 2.2.43. Sea X un conjunto simplicial. Sus grupos de homología $H_n(X)$ son los grupos de homología $H_n(\mathrm{F}_{\mathrm{ab}}(X))$ con el morfismo de borde $\partial_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i$.

Observación 2.2.44. Dado un espacio topológico Y, los grupos de homología $H_n(\mathrm{Sing}(Y))$ son isomorfos a los grupos de homología singular de Y pues $(\mathrm{F_{ab}}(\mathrm{Sing}(Y)))_n$ es justamente el grupo de n-cadenas singulares.

2.2.6. Vínculo entre $|\mathrm{Sing}(X)|$ y X

Hemos definido dos funtores: Sing de la categoría de espacios topológicos en la categoría de conjuntos simpliciales y $|-|$ de la categoría de conjuntos simpliciales en la categoría de espacios topológicos.

En esta sección veremos qué relación hay entre |Sing(X)| y X.

Veremos primero que la realización geométrica de un conjunto simplicial es un CW-complejo.

Recordamos, primero, que si X es un CW-complejo, su n-esqueleto X_n se obtiene a partir del $(n-1)$-esqueleto X_{n-1}, adjuntándole n-células. Es decir, tenemos el siguiente pushout de espacios topológicos.

$$\begin{tikzcd} \coprod S^{n-1} \arrow[r, "\coprod f_\alpha"] \arrow[d, hook] & X^{n-1} \arrow[d, hook] \\ \coprod D^n \arrow[r, "\coprod g_\alpha"] & X^n \end{tikzcd}$$

Para cada α, $e_\alpha = g_\alpha(D^n)$ es una n-célula de X. El interior de e_α es $e_\alpha^{\mathrm{o}} = g_\alpha((D^n)^{\mathrm{o}})$, f_α es la función de adjunción de la célula y g_α es su función característica que brinda un homeomorfismo entre el interior de la célula y $(D^n)^{\mathrm{o}}$.

Teorema 2.2.45. *[3] Si X es un conjunto simplicial, entonces $|X|$ es un CW-complejo con una n-célula por cada n-símplice no degenerado de X.*

Demostración. Ya vimos en la proposición 2.2.22 que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \coprod_{\sigma \in NX_n} \partial\Delta^n_\sigma \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & \mathrm{sk}^{n-1}X \arrow[d, hook] \\ \coprod_{\sigma \in NX_n} \Delta^n_\sigma \arrow[r, "g"] & \mathrm{sk}^n X \end{tikzcd}$$

es un pushout. Luego, como el funtor $|\ |$ conmuta con colímites, tenemos que el siguiente diagrama también es un pushout:

$$
\begin{tikzcd}
\coprod_{\sigma\in NX_n} |\partial\Delta^n_\sigma| \arrow[r, "|f|"] \arrow[d, hook] & \left|\mathrm{sk}^{n-1}\right| \arrow[d, hook] \\
\coprod_{\sigma\in NX_n} |\Delta^n_\sigma| \arrow[r, "|g|"] & |\mathrm{sk}^n X|
\end{tikzcd}
$$

donde $NX_n \subset X_n$ es el conjunto de símplices no degenerados.

Probaremos que la realización geométrica del contorno de Δ^n es el borde topológico de la realización geométrica de Δ^n. Obtendremos, así, que $(|sk^n X|, \left|\mathrm{sk}^{n-1}X\right|)$ es una adjunción de n-células, una por cada $\sigma \in NX_n$.

Consideramos el funtor $\Delta^{(-)}$ de la categoría de los ordinales en los conjuntos simpliciales.

$$
\begin{aligned}
\Delta^{(-)} : \Delta &\to \$ \\
[n] &\mapsto \Delta^n \\
([n-1] \xrightarrow{\alpha} [n]) &\mapsto (\Delta^{n-1} \xrightarrow{\Delta^{(\alpha)}} \Delta^n)
\end{aligned}
$$

y definimos los siguientes morfismos:

$$
\begin{aligned}
u_j &= \Delta(d^{j-1}_{n-1}) : \Delta^{n-2} \to \Delta^{n-1} \\
v_i &= \Delta(d^{i}_{n-1}) : \Delta^{n-2} \to \Delta^{n-1} \\
p_k &= \Delta(d^{k}_{n}) : \Delta^{n-1} \to \Delta^{n}
\end{aligned}
$$

Observamos, primero, que para $i < j$ tenemos que $p_i u_j = p_j v_i$. De hecho, tenemos que

$$
p_i u_j = \Delta(d^i)\Delta(d^{j-1}) = \Delta(d^i d^{j-1}) = \Delta(d^j d^i) = \Delta(d^j)\Delta(d^i) = p_j v_i
$$

donde la tercera igualdad se debe a la primera igualdad cosimplicial en (2).

Definimos ahora los siguiente morfismos

$$
\begin{aligned}
u &= \coprod_{0\le i<j\le n} u_j \\
v &= \coprod_{0\le i<j\le n} v_i \\
p &= \coprod_{0\le i\le n} p_i
\end{aligned}
$$

Como $p_i u_j = p_j v_i$ si $i < j$ tenemos que $pu = pv$ y obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \coprod_{0\leq i<j\leq n} \Delta^{n-2} \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & \coprod_{0\leq i\leq n} \Delta^{n-1} \arrow[r, "p"] & \Delta^n \end{tikzcd}$$

Como $pu = pv$, podemos considerar $\mathrm{Coeq}(u, v)$ el coegalizador del diagrama $\begin{tikzcd} \coprod_{0\leq i<j\leq n} \Delta^{n-2} \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & \coprod_{0\leq i\leq n} \Delta^{n-1} \end{tikzcd}$. Luego, por la propiedad universal del coegalizador, existe un único morfismo $\phi : \mathrm{Coeq}(u, v) \to \Delta^n$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} \coprod_{0\leq i\leq n} \Delta^{n-1} \arrow[r, "ck"] \arrow[dr, "p"'] & \mathrm{Coeq}(u,v) \arrow[d, dashed] \\ & \Delta^n \end{tikzcd}$$

La imagen de p es el subconjunto simplicial de Δ^n tal que

$$\begin{aligned}(\mathrm{Im}p)_i = \{x \in \Delta^n_i : x = p_k(y) = \Delta(d^k_n)(y) = y \circ^k_n \text{ para algún} \\ y \in \Delta^{n-1}_i \text{ y } k \in \{0, ..., n\}\}\end{aligned}$$

Es decir, si $x \in (\mathrm{Im}p)_i$, entonces se puede factorizar de la siguiente manera

$$\begin{tikzcd} {[i]} \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "y"'] & {[n]} \\ & {[n-1]} \arrow[u, "d^k_n"'] \end{tikzcd}$$

Esta factorización se puede realizar solamente si x no es sobreyectiva. Tenemos los siguientes casos:

- si $i < n$, x no es sobreyectiva para todo $x \in \Delta^n_i$
- si $i = n$, x es sobreyectiva únicamente cuando $X = \mathrm{id}_{[n]}$

Luego

$$\begin{aligned}(\mathrm{Im}p)_i &= \begin{cases} \Delta^n_i & \text{si } i < n, \\ \{x \in \Delta^n_n : x \neq \mathrm{id}_{[n]}\} & \text{si } i = n \end{cases} \\ &= (\mathrm{sk}^{n-1}(\Delta^n))_i \\ &= (\partial\Delta^n)_i\end{aligned}$$

Tenemos entonces que $\mathrm{Im}p = \partial\Delta^n$. Sea φ tal que el diagrama siguiente conmuta.

$$\begin{tikzcd} \coprod\limits_{0\leq i\leq n} \Delta^n_i \arrow[r, "ck"] \arrow[dr, "p"'] & \mathrm{Coeq}(u,v) \\ & \partial\Delta^n \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Luego, por la propiedad universal del coegalizador, $\phi\circ\varphi = id$ por la unicidad de la propiedad universal del cokernel y además tenemos

$$\varphi\circ\phi(p(y)) = \varphi\circ\mathrm{ck}(y) = p(y)$$

y, por lo tanto, $\varphi\circ\phi = \mathrm{id}$. Entonces el siguiente diagrama es un diagrama de coegalizadores.

$$\begin{tikzcd} \coprod\limits_{0\leq i<j\leq n} |\Delta^{n-2}| \arrow[r, shift left, "|u|"] \arrow[r, shift right, "|v|"'] & \coprod\limits_{0\leq i\leq n} |\Delta^{n-1}| \arrow[r, "|p|"] & |\ \partial\Delta^n\ | \end{tikzcd}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} |u_j| &= (d^{j-1}_{n-1})_* & (d^{j-1}_{n-1})_*(t_0,...,t_{n-2}) &= (t_0,...,t_{j-2},0,t_{j-1},...,t_{n-2}) \\ |v_i| &= (d^{i}_{n-1})_* & (d^{i}_{n-1})_*(t_0,...,t_{n-2}) &= (t_0,...,t_{i-1},0,t_{i},...,t_{n-2}) \\ |p_k| &= (d^{k}_{n})_* & (d^{k}_{n})_*(t_0,...,t_{n-1}) &= (t_0,...,t_{k-1},0,t_{k},...,t_{n-1}) \end{aligned}$$

Luego, la imagen de $|p_k|$ corresponde a la k-ésima $n-1$ cara de $|\Delta|$ y $|u_j|$ y $|v_i|$ corresponden a las funciones continuas de pegado de las $n-1$ caras, lo que forma el borde de Δ^n. Por lo tanto $|\partial\Delta^n| \simeq \partial|\Delta^n|$. Obtenemos así el siguiente pushout

$$\begin{tikzcd} \coprod\limits_{\sigma\in NX_n} \partial\,|\Delta^n_\sigma| \arrow[r, "|f|"] \arrow[d, hook] & \left|\mathrm{sk}^{n-1}\right| \arrow[d, hook] \\ \coprod\limits_{\sigma\in NX_n} |\Delta^n_\sigma| \arrow[r, "|g|"] & |\mathrm{sk}^n X| \end{tikzcd}$$

El par $(|\mathrm{sk}^n X|, |\mathrm{sk}^{n-1}X|)$ es, por lo tanto, una adjunción de n-células para todo n. Como $X = \mathrm{colim}_{n\in\mathbb{N}} sk^n X$, se tiene que $|X| = \mathrm{colim}_{n\in\mathbb{N}}|sk^n X|$. Entonces, $|X|$ tiene la topología que inducen las inclusiones $|sk^n X| \hookrightarrow |X|$. Obtenemos así que $|X|$ es un CW-complejo con una n-célula por cada n-símplice no degenerado. $\square$

Concluiremos esta sección con el siguiente resultado que establece una relación entre $|\mathrm{Sing}(X)|$ y X.

Teorema 2.2.46. *[8] Si X es un espacio topológico, entonces el morfismo $|\mathrm{Sing}(X)| \to X$ es una equivalencia débil de homotopía.*

Demostración. Para esta demostración nos referimos a [8]. $\square$

Corolario 2.2.47. *Si X es un CW-complejo, entonces $|\mathrm{Sing}(X)|$ es homotópicamente equivalente a X.*

Demostración. Por el teorema anterior, tenemos que el morfismo $\mathrm{Sing}(X)| \to X$ es una equivalencia débil de homotopía. Luego, como X y $|\mathrm{Sing}(X)|$ son CW-complejos, por el teorema de Whitehead tenemos que $\mathrm{Sing}(X)| \to X$ es una equivalencia de homotopía fuerte. $\square$

Capítulo 3

El grupo K_0

En este capítulo definiremos el grupo $K_0(R)$ de un anillo R. Luego, veremos un elemento partiular de $K_0(R)$: la característica de Euler de un complejo de cadenas de tipo finito de R-módulos proyectivos y probaremos que es constante en las clases de homotopía de complejos de cadenas de tipo finito.

3.1. Módulos proyectivos

Consideraremos módulos a izquierda sobre un anillo con unidad R.

Definición 3.1.1 (Módulo proyectivo)**.** Un R-módulo P es proyectivo si todo R-homomorfismo de módulos sobreyectivo $\alpha : M \to P$ tiene inversa a derecha $\beta : P \to M$, es decir $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_P$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"'] & P \arrow[l, dashed, bend right, "\beta"'] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Veremos primero algunas definiciones equivalentes de módulo proyectivo.

Proposición 3.1.2. *Sea P un R-módulo. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *Todo R-homomorfismo de módulos sobreyectivo $\alpha : M \to P$ tiene inversa a derecha $\beta : P \to M$, i.e. $\alpha \circ \beta = id_P$.*

2. *Si $\varphi : P \to N$ es un homomorfismo de R-módulos y $\psi : M \to N$ es un homomorfismo de R-módulos sobreyectivo, entonces existe un homomorfismo de R-módulos $\theta : P \to M$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists\theta"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\ M \arrow[r, "\psi"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

3. *Existe un R-módulo Q tal que $P \oplus Q$ es un R-módulo libre, es decir P es sumando directo de un R-módulo libre.*

4. *Si $0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de R-módulos, entonces*

$$0 \longrightarrow \hom_R(P, M_0) \longrightarrow \hom_R(P, M_1) \longrightarrow \hom_R(P, M_2) \longrightarrow 0$$

también es exacta.

Demostración. ($1 \iff 2$) Supongamos que todo homomorfismo de R-módulos $\alpha : M \to P$ tiene inversa a derecha β y supongamos que tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\varphi"] & \\ M \arrow[r, "\psi"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde $\psi : M \to N$ es sobreyectivo. Podemos suponer que φ es inyectiva, sino eemplazamos $\psi : M \to N$ con $\psi \oplus id : M \oplus P \to N \oplus P$ y $\varphi : P \to N$ con $(\varphi, \mathrm{id}) : P \to N \oplus P$. Luego reemplazando N por la imágen de φ y M por $\psi^{-1}(\mathrm{Im}\varphi)$, podemos suponer que φ es un isomorfismo. Finalmente, tomamos $\alpha = \varphi^{-1} \circ \psi$, homomorfismo sobreyectivo de M en P, y su inversa a derecha $\beta : P \to M$ completa el diagrama.

Recíprocamente, si tenemos un homomorfismo de R-módulos $\alpha : M \to P$, consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists\theta"'] \arrow[d, "id_P"] & \\ M \arrow[r, "\alpha"'] & p \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

El homomorfismo θ que completa el diagrama verifica que $\alpha \circ \theta = id_P$ y por lo tanto es una inversa a derecha.

($1 \iff 3$) Para probar el directo tomamos un conjunto de generadores de P y consideramos el módulo libre F que tiene por base ese conjunto de generadores. El homomorfismo $\alpha : F \to P$ que manda un generador de F al generador de P correspondiente es sobreyectivo, entonces tiene una inversa a derecha $\beta : P \to F$.Luego la sucesión exacta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Q = \mathrm{Ker}(\alpha) \arrow[r, "i"] & F \arrow[r, "\alpha"'] & P \arrow[l, dashed, bend right, "\beta"'] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

escinde y por lo tanto $F = P \oplus Q$.

Para probar el recíproco, veremos primero que todo módulo libre F es proyectivo. Si tenemos un homomorfismo de R-módulos $\alpha : M \to F$ sobreyectivo, podemos construir una inversa a derecha $\beta : F \to M$ de la siguiente manera: para cada generador x_i de F escogemos un $y_i \in M$ tal que $\alpha(y_i) = x_i$ y definimos β usando la propiedad universal de los módulos libres mediante $\beta(x_i) = y_i$. Ahora suponemos que $F = P \oplus Q$ es un módulo libre y que tenemos un homomorfismo de R-módulos sobreyectivo $\alpha : M \to P$. Entonces $\alpha \oplus id_Q : (M \oplus Q) \to (P \oplus Q) = F$ es un homomorfismo de R-módulos sobreyectivo y por lo tanto tiene inversa a derecha $\tilde{\beta} : F \to (M \oplus Q)$. Restringiendo la inversa a P y componiendo con la proyección sobre M obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, dashed, "\pi\circ\tilde{\beta}"'] \\ M \arrow[r, "\alpha"'] & P \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

Tenemos, entonces, una inversa a derecha de α ya que $\alpha \circ (\pi \circ \tilde{\beta} \circ i) = \mathrm{id}_P$.

($2 \iff 4$) Como el funtor $\mathrm{Hom}(P, -)$ es exacto por izquierda tenemos que $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, M_0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, M_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, M_2)$ es exacta. Luego, falta ver que se cumple la condición de exactitud en

$$\mathrm{Hom}_R(P, M_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, M_2) \longrightarrow 0$$

Es decir, queremos ver que el morfismo $\mathrm{Hom}_R(P, M_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, M_2)$ es sobreyectivo. Sea $f \in \mathrm{Hom}(P, M_2)$. El morfismo $M_1 \xrightarrow{j} M_2$ es sobreyectivo porque $0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta. Entonces existe un morfismo $\theta : P \to M_1$ tal que $f = j \circ \theta$. Tenemos entonces que $\mathrm{Hom}_R(P, M_1) \xrightarrow{j_*} \mathrm{Hom}_R(P, M_2)$ es sobreyectivo.

Recíprocamente, si tenemos un morfismo $P \xrightarrow{\phi} N$ y un morfismo sobreyectivo $M \xrightarrow{\psi} N$, podemos considerar una sucesión exacta de R-módulos $0 \longrightarrow K \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} N \longrightarrow 0$ Luego, como $\mathrm{Hom}(P, -)$ es exacto, tenemos que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(P, K) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P, M) \xrightarrow{\psi_*} \mathrm{Hom}(P, N) \longrightarrow 0$$

es exacta y por lo tanto $\mathrm{Hom}(P,M) \xrightarrow{\psi_*} \mathrm{Hom}(P,N)$ es sobreyectiva. Luego, existe $\theta \in \mathrm{Hom}(P,M)$ tal que $\psi_*(\theta) = \phi$. Es decir, $\phi = \psi \circ \theta$. $\square$

Por la proposición anterior, si un R-módulo proyectivo es finitamente generado entonces P es un sumando directo de R^n, con n un natural, a menos de isomorfismo.

Consideramos la colección de clases de isomorfismo de R-módulos proyectivos finitamente generados, la cual denominamos $\mathrm{Proj}(R)$.

$$\mathrm{Proj}(R) = \{[M] : M \text{ es un } R-\text{ módulo proyectivo finitamente generado}\}$$

$\mathrm{Proj}(R)$ tiene una estructura de monoide abeliano con $\oplus$ como la operación de adición y el 0-módulo como el elemento identidad: la operación $\oplus$ es asociativa, conmutativa y tiene neutro. Pero, en general, $\mathrm{Proj}(R)$ no es un grupo y puede no tener la propiedad cancelativa.

Nos interesaría entonces imponer la estructura de grupo en $\mathrm{Proj}(R)$. La idea para hacer esto es una generalización de la forma a través de la cual construímos $\mathbb{Z}$ a partir del semigrupo aditivo de los enteros positivos y la veremos a continuación.

3.2. Definición del K_0

Teorema 3.2.1 (Completación de Grothendieck)**.** *Dado un semigrupo abeliano S, existe un grupo G (llamado grupo de Grothendieck $G(S)$ de S) y un morfismo $\varphi : S \to G$ de semigrupos tal que si H es un grupo y $\psi : S \to H$ es un morfismo de semigrupos, existe un único morfismo de grupos $\eta : G \to H$ tal que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & G \arrow[d, dashed, "\exists!\eta"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Además tenemos unicidad en el siguiente sentido: si $(G', \psi' : S \to G')$ es otro par con la misma propiedad, entonces existe un isomorfismo $\alpha : G \to G'$ con $\psi' = \alpha \circ \psi$.

Demostración. Definimos G como el conjunto de clases de equivalencia de pares (x,y) con $x,y \in S$ donde la relación de equivalencia es la siguiente:

$$(x,y) \sim (u,v) \Longleftrightarrow \text{existe } t \in S \text{ tal que } x+v+t = u+y+t \text{ en } S$$

Denotamos la clase de equivalencia de (x,y) mediante $[(x,y)]$ y consideramos en G la adición

$$[(x,y)] + [(x',y')] = [(x+x', y+y')]$$

Esta operación es consistente con la relación de equivalencia. De hecho, si tomamos otros representantes (x_1, y_1) de $[(x,y)]$ y (x'_1, y'_1) de $[(x',y')]$, tenemos que existen $t, s \in S$ tales que

$$\begin{aligned} x + y_1 + t &= x_1 + y + t \\ x' + y'_1 + s &= x'_1 + y' + s \end{aligned}$$

Luego, $x + x' + y_1 + y'_1 + t + s = x_1 + x'_1 + y + y' + t + s$ y por lo tanto tenemos que $(x+x', y+y') \sim (x_1 + x'_1, y_1 + y'_1)$. Es también fácil de ver que se cumple la regla asociativa.

Para todo $x, y \in S$, $[(x,x)] = [(y,y)]$ porque $x + y = y + x$. Consideramos $0 = [(x,x)]$. Luego, 0 es un elemento identidad en G pues para todo $x, y, t \in S$ tenemos que $(x+t, y+t) \sim (x,y)$. Además tenemos que $[(x,y)] + [(y,x)] = [(x+y, x+y)] = 0$ y por lo tanto todos los elementos de G tienen inverso.

Concluimos entonces que G es un grupo.

Definimos $\phi : S \to G$ mediante $\phi(x) = [(x+x, x)]$.

Como

$$\begin{aligned} \phi(x+y) &= [(x+y+x+y, x+y)] \\ &= [(x+x,x)] + [(y+y,y)] \\ &= \phi(x) + \phi(y) \end{aligned}$$

tenemos que ϕ es un homomorfismo.

Además tenemos que

$$\begin{aligned} [(x,y)] + \phi(y) &= [(x,y)] + [(y+y,y)] \\ &= [(x+y+y, y+y)] \\ &= [(x+x,x)] \\ &= \phi(x) \end{aligned}$$

Entonces $[(x,y)] = \phi(x) - \phi(y)$ y por lo tanto la imagen de ϕ genera G como grupo.

Dado un grupo H y un morfismo $\psi : S \to H$, el morfismo $\eta : G \to H$ con $\psi = \eta \circ \phi$ está definido por $\eta([(x,y)]) = \psi(x) - \psi(y)$.

Para probar la unicidad, consideramos $\phi' : S \to G'$ con la misma propiedad universal.

Primero, observamos que $\phi'(S)$ debe generar G'. Supongamos por absurdo que no genera G' y sea G'' el subgrupo generado por la imagen de ϕ'. Entonces los morfismos $\eta = (id, 0)$ y $\eta = (id, q)$ donde q es el morfismo cociente hacen que el siguiente diagrama conmute, lo que es absurdo.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\phi'"] \arrow[dr, "(\phi',0)"'] & G' \arrow[d, dashed, "\eta"] \\ & G' \bigoplus G'/G'' \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal para G, tenemos que existe un morfismo $\alpha : G \to G'$ tal que $\phi' = \alpha \circ \phi$, y por la propiedad universal para G' tenemos que existe un morfismo $\beta : G' \to G$ tal que $\phi = \beta \circ \phi'$. Luego, tenemos que $\alpha \circ \beta\phi' = \alpha \circ \phi = \phi'$, entonces $\alpha \circ \beta = id$ en la imagen de ϕ' y por lo tanto en todo G', pues la imagen de ϕ' genera G'. Entonces tenemos que α es inversa a izquierda de β.

Se ve análogamente que $\beta \circ \alpha = id$ en la imagen de ϕ y por lo tanto α es inversa a derecha de β.

Luego, α es un isomorfismo. $\square$

Observación 3.2.2. La asignación $S \rightsquigarrow G(S)$ es un funtor de la categoría de semigrupos abelianos en la categoría de grupos abelianos. Un morfismo de semigrupos $\eta : S \to S'$ induce el siguiente diagrama conmutativo donde la flecha entre $G(S)$ y $G(S')$ queda determinada por la propiedad universal del grupo de Grothendieck.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\phi"] & S' \arrow[d, "\phi'"] \\ G(S) \arrow[r] & G(S') \end{tikzcd}$$

Definición 3.2.3. El K_0 de un anillo R es el grupo de Grothendieck del monoide abeliano $\mathrm{Proj}(R)$ de las clases de isomorfismo de R-módulos projectivos finitamente generados.

$$K_0(R) = G(\mathrm{Proj}(R))$$

Observación 3.2.4. K_0 es un funtor: un morfismo de anillos $\phi : R \to R'$ induce un morfismo $K_0(\phi) = \phi_* : K_0(R) \to K_0(R')$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} Proj(R) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & Proj(R') \arrow[d, "\varphi'"] \\ K_0(R) \arrow[r, "K_0(\phi)"'] & K_0(R') \end{tikzcd}$$

3.3. El K_0 reducido

Recordamos que un dominio de ideales principales (DIP) es un dominio de integridad (anillo sin elementos divisores de cero) en el que todo ideal está generado por un solo elemento.

Teorema 3.3.1. *Si R es un DIP, todo R-módulo proyectivo finitamente generado es isomorfo a R^n para algún n al que llamamos el rango del módulo. El rango induce un isomorfismo $K_0(R) \to \mathbb{Z}$.*

Demostración. Sea M un R-módulo finitamente generado. Podemos asumir que M está encajado en algún R^n. Por inducción en n veremos que $M \simeq R^k$ para algún $k \leq n$.

La base inductiva vale porque es obvio cuando $n = 0$.

Luego, asumimos que vale para valores menores que n. Consideramos $\phi : R^n \to R$ la proyección sobre la n-ésima coordenada. $\phi(M)$ es un R-submódulo de R, entonces es un ideal.

Si $\phi(M) = 0$, entonces M está encajado en $Ker(\phi) \simeq R^{n-1}$ y concluimos aplicando la hipótesis de inducción.

Si no, tenemos que $\phi(M)$ es un ideal no nulo de R. Entonces como R es un DIP, $\phi(M) \simeq R$ como R-módulo. Luego, como R es un R-módulo proyectivo resulta que $\phi(M)$ es proyectivo.

$$\begin{tikzcd} & & \phi(M) \arrow[dl, "\exists\varphi"'] \arrow[d, "id"] & \\ Ker(\phi\big|_M) \arrow[r, hook] & M \arrow[r, "\phi"'] & \phi(M) \simeq R \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Entonces $M \simeq Ker(\phi\big|_M) \oplus R$. Como $Ker(\phi\big|_M)$ está encajado en R^{n-1}, aplicando la hipóesis de inducción tenemos que $Ker(\phi\big|_M) \simeq R^{k'}$ con $k' \leq n-1$. Luego, $M \simeq R^k$ con $k = k'+1 \leq (n-1)+1 = n$.

Finalmente, tenemos que ver que el rango de M está bien definido. Para esto veremos que podemos caracterizar el rango como la dimensión de $F \otimes_R M$ sobre F, donde F es el cuerpo de fracciones de R.

Como F es un cuerpo, cualquier F-módulo finitamente generado, en particular $F \oplus_R M$, es un F- espacio vectorial y, por lo tanto, tiene una base y una dimensión bien definida. Como la dimensión es el único invariante bajo isomorfismos de un F-módulo finitamente generado, obtenemos que $\mathrm{Proj}(F) \cong \mathbb{N}$. Luego, como la completación de $\mathbb{N}$ a un grupo es $\mathbb{Z}$, obtenemos que $K_0(F) \cong \mathbb{Z}$ donde el isomorfismo está inducido por el isomorfismo

$\mathrm{Proj}(F) \to \mathbb{N}$ que a cada elemento de $\mathrm{Proj}(F)$ le asocia su dimensión. Notamos, además que si F' es un cuerpo que es una extensión de F entonces

$$\dim_{F'}(F' \otimes_F P) = \dim_F(P)$$

para cualquier F- espacio vectorial P. Luego, podemos caracterizar el rango de M como $\dim_F(F \otimes_R M)$. $\square$

Para cualquier anillo R con unidad, existe un único morfismo de anillos $i : \mathbb{Z} \to R$ que manda 1 en la identidad de R. Por el teorema anterior, $K_0(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ y, entonces, obtenemos un mapa

$$i_* : \mathbb{Z} \to K_0(R)$$

cuya imagen es el subgrupo de $K_0(R)$ generado por los R-módulos libres finitamente generados.

Definición 3.3.2. El grupo K_0 reducido de R es el cociente

$$\tilde{K_0}(R) = K_0(R)/i_*(\mathbb{Z})$$

3.4. La característica de Euler

Definición 3.4.1 (Característica de Euler)**.** Sea $(C_\bullet, \delta)$ un complejo de cadenas de tipo finito de R-módulos proyectivos. Su característica de Euler es

$$\chi(C_\bullet) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^j [C_j] \in K_0(R)$$

La suma es finita pues $(C_\bullet, \delta)$ es un complejo de cadenas acotado y además $\chi(C_\bullet)$ es un elemento de $K_0(R)$ porque los C_j son R-módulos proyectivos finitamente generados.

Nos interesa en primer lugar probar que χ es constante en las clases de homotopía de complejos de cadenas de tipo finito.

Definición 3.4.2 (Mapping Cone)**.** Sea $f : (C_\bullet, c) \to (D_\bullet, d)$ un morfismo de complejos de cadenas finitos de R-módulos. El mapping cone de f denotado por $\mathrm{cone}_\bullet(f)$ es un nuevo complejo de cadenas

$$... \longrightarrow \mathrm{cone}_{n+1}(f) \xrightarrow{\delta_{n+1}} \mathrm{cone}_n(f) \xrightarrow{\delta_n} \mathrm{cone}_{n-1}(f) \longrightarrow ...$$

donde

$$\text{cone}_n(f) = C_{n-1} \oplus D_n$$

y el morfismo de borde está dado por

$$\delta_n^{cone} = \begin{pmatrix} -c_{n-1} & 0 \\ f_{n-1} & d_n \end{pmatrix} : C_{n-1} \oplus D_n \to C_{n-2} \oplus D_{n-1}$$

es decir, para $(x, y) \in C_{n-1} \oplus D_n$

$$\delta_n^{cone}(x, y) = \begin{pmatrix} -c_{n-1} & 0 \\ f_{n-1} & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-c_{n-1}(x), f_{n-1}(x) + d_n(y))$$

El complejo de cadenas $\text{cone}_\bullet(f)$ tiene la forma

$$... \longrightarrow C_n \oplus D_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} C_{n-1} \oplus D_n \xrightarrow{\delta_n} C_{n-2} \oplus D_{n-1} \longrightarrow ...$$

Verificaremos que es efectivamente un complejo de cadenas:

$$\begin{aligned} \delta_{n-1}^{cone}\delta_n^{cone} &= \begin{pmatrix} -c_{n-2} & 0 \\ f_{n-2} & d_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_{n-1} & 0 \\ f_{n-1} & d_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{n-2}c_{n-1} & 0 \\ d_{n-1}f_{n-1} - f_{n-2}c_{n-1} & d_{n-1}d_n \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ya que, como f es un morfismo de complejos de cadenas, tenemos que $d_{n-1}f_{n-1} - f_{n-2}c_{n-1} = 0$.

Lema 3.4.3. *[2] Un morfismo de complejos de cadenas $f : C_\bullet \to D_\bullet$ es una equivalencia homotópica si y solamente si $cone_\bullet(f)$ es contráctil.*

Demostración. Supongamos primero que $cone_\bullet(f)$ es contráctil y sea $\gamma_\bullet$: $\text{cone}_\bullet(f) \to \text{cone}_\bullet(f)$ una contracción, es decir, una homotopía entre el morfismo identidad y el morfismo nulo.

La contracción $\gamma_\bullet$ está dada por

$$\gamma_n : \text{cone}_n(f) \to \text{cone}_{n+1}(f),\ \gamma_n = \begin{pmatrix} h_{n-1} & g_n \\ l_{n-1} & k_n \end{pmatrix} : C_{n-1} \oplus D_n \to C_n \oplus D_{n+1}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
 & C_{n-1} \oplus D_n \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} -c_{n-1} & 0 \\ f_{n-1} & d_n \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[dl, "\left(\begin{smallmatrix} -h_{n-1} & g_n \\ l_{n-1} & k_n \end{smallmatrix}\right)"'] \arrow[d, "id"] & C_{n-2} \oplus D_{n-1} \arrow[dl, "\left(\begin{smallmatrix} -h_{n-2} & g_{n-1} \\ l_{n-2} & k_{n-1} \end{smallmatrix}\right)"] \\
C_n \oplus D_{n+1} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} -c_n & 0 \\ f_n & d_{n+1} \end{smallmatrix}\right)"'] & C_{n-1} \oplus D_n &
\end{tikzcd}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{pmatrix} -c_n & 0 \\ f_n & d_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{n-1} & g_n \\ l_{n-1} & k_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_{n-2} & g_{n-1} \\ l_{n-2} & k_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_{n-1} & 0 \\ f_{n-1} & d_n \end{pmatrix} = id_{C_{n-1} \oplus D_n}$$

y por lo tanto valen las siguientes igualdades

$$-c_n h_{n-1} - h_{n-2} c_{n-1} + g_{n-1} f_{n-1} = id_{C_{n-1}} \tag{1}$$

$$f_n g_n + d_{n+1} k_n + k_{n-1} d_n = id_{D_n} \tag{2}$$

$$-c_n g_n + g_{n-1} d_n = 0 \tag{3}$$

Por (3) tenemos que los morfismos g_n forman un morfismo de complejo de cadenas $g_\bullet : D_\bullet \to C_\bullet$.

Además tenemos por (1) que los morfismos $h_{n-1} : C_{n-1} \to C_n$ son una homotopía de cadenas de $g \circ f$ a id_C y por (2) que los morfismos $k_n : D_n \to D_{n+1}$ son una homotopía de cadenas de id_D a $f \circ g$.

Concluimos, entonces, que $f : C_\bullet \to D_\bullet$ es una equivalencia homotópica.

Recíprocamente, queremos ver que si f es una equivalencia homotópica entonces $\mathrm{cone}_\bullet(f)$ es contractil. Como f es una equivalencia homotópica existen g su inversa homotópica, morfismos $h_{n-1} : C_{n-1} \to C_n$ que son una homotopía de cadenas de $g \circ f$ a id_C y morfismos $k_n : D_n \to D_{n+1}$ que son una homotopía de cadenas de id_D a $f \circ g$.

Sea $\gamma : \mathrm{cone}_n(f) \to \mathrm{cone}_{n-1}(f)$ el morfismo dado por:

$$\gamma_n = \begin{pmatrix} h_{n-1} & g_n \\ 0 & k_n \end{pmatrix} : C_{n-1} \oplus D_n \to C_n \oplus D_{n+1}$$

Consideramos el morfismo $F_\bullet : \mathrm{cone}_\bullet(f) \to \mathrm{cone}_\bullet(f)$

$$F_n = \begin{pmatrix} id_{C_{n-1}} & 0 \\ f_n h_{n-1} + k_{n-1} f_{n-1} & id_{D_n} \end{pmatrix}$$

Luego tenemos que,

$$\begin{aligned} \delta\gamma + \gamma\delta &= \begin{pmatrix} -c_n & 0 \\ f_n & d_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{n-1} & g_n \\ 0 & k_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_{n-2} & g_{n-1} \\ 0 & k_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_{n-1} & 0 \\ f_{n-1} & d_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} id_{C_{n-1}} & 0 \\ f_n h_{n-1} + k_{n-1} f_{n-1} & id_{D_n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Obtenemos, entonces, que γ es una homotopía de cadenas entre $F_\bullet$ y el morfismo nulo. Luego, $F^{-1} \circ \gamma : \mathrm{cone}_n(f) \to \mathrm{cone}_n(f)$ es una contracción. $\square$

Lema 3.4.4. *[14] Si* $0 \longrightarrow C' \longrightarrow C'' \longrightarrow C \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta corta de complejos de cadenas finitos de R-módulos proyectivos finitamente generados entonces* $\chi(C'') = \chi(C') + \chi(C)$.

Demostración. Tenemos las sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow C'_j \longrightarrow C''_j \xrightarrow{\psi} C_j \longrightarrow 0$$

donde ψ es sobreyectivo. Luego, como C_j es proyectivo, existe φ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} & C_j \arrow[dl, dashed, "\exists\varphi"'] \arrow[d, "id"] \\ C''_j \arrow[r, "\psi"] & C_j \end{tikzcd}$$

Entonces la sucesión exacta corta escinde y por lo tanto $C''_j \simeq C_j \oplus C'_j$. Luego, $[C''_j] = [C_j] + [C'_j]$ y tomando sumas alternadas en j tenemos que $\chi(C'') = \chi(C') + \chi(C)$. □

Lema 3.4.5. *[14] Si* $(C_\bullet, d)$ *es un complejo de cadenas finito de R-módulos proyectivos y todos sus módulos de homología son proyectivos, entonces* $\chi(C_\bullet) = \sum(-1)^j[H_j(C_\bullet)]$

Demostración. Sean $Z_j = Ker(d_j : C_j \to C_{j-1})$ y $B_j = Im(d_{j+1} : C_{j+1} \to C_j)$. Entonces tenemos las siguientes sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow Z_{j+1} \xrightarrow{i} C_{j+1} \xrightarrow{d_{j+1}} B_j \longrightarrow 0 \tag{1}$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B_j \arrow[r, "i"] & Z_j \arrow[r, "q"] & H_j \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ & & & Z_j/B_j & \end{tikzcd} \tag{2}$$

Como H_j es proyectivo, (2) escinde, entonces $Z_j \simeq B_j \oplus H_j$. Luego, como $(C_\bullet)$ es un complejo de tipo finito, podemos reindexarlo de forma que $C_j = 0$ para $j < 0$. Supondremos, entonces, que $C_j = 0$ para $j < 0$. Luego, tenemos que $Z_0 = C_0$ es proyectivo. Entonces, como $Z_0 \simeq B_0 \oplus H_0$, tenemos que B_0 es proyectivo. Por lo tanto, $C_{j+1} \xrightarrow{d_{j+1}} B_j$ escinde en (1) para $j = 0$ y $C_1 \simeq Z_1 \oplus B_0$ de donde deducimos que Z_1 es proyectivo y, como $Z_1 \simeq B_1 \oplus H_1$, B_1 es proyectivo.

Así, por inducción, vemos que B_j y Z_j son proyectivos y las sucesiones exactas cortas escinden. Entonces tenemos las siguientes igualdades

$$[Z_{j+1}] + [B_j] = [C_{j+1}]$$
$$[B_j] + [H_j] = [Z_j]$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\chi(C) &= \sum(-1)^j[C_j] \\
&= \sum(-1)^j([Z_j] + [B_{j-1}]) \\
&= \sum(-1)^j([H_j] + [B_j] + [B_{j-1}]) \\
&= \sum(-1)^j[H_j] + \sum(-1)^j[B_j] - \sum(-1)^j[B_j] \\
&= \sum(-1)^j[H_j]
\end{aligned}$$

□

Estamos ahora en condiciones de probar que $\chi(P_\bullet)$ es un invariante del tipo de homotopía de cadenas de $(P_\bullet)$, y lo veremos en la siguiente proposición.

Proposición 3.4.6. *[14] Si C^1 y C^2 son dos complejos de cadenas finitos de R-módulos proyectivos homotópicamente equivalentes entonces $\chi(C^1) = \chi(C^2)$.*

Demostración. Sea $\varphi : C^1 \to C^2$ una equivalencia homotópica y sea C^3 su mapping cone. Como C^1 y C^2 son finitos y están formados por R-módulos proyectivos finitamente generados, C^3 también.

Entonces, de la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow (C^2_\bullet) \longrightarrow (C^3_\bullet) \longrightarrow (C^1_{\bullet,-1}) \longrightarrow 0$$

obtenemos

$$\chi(C^3) = \chi(C^2) + \chi(C^1_{-1})$$

Pero, $\chi(C^1_{-1}) = -\chi(C^1)$ pues los dos complejos de cadenas tienen los mismos términos y en $\chi(C^1_{-1})$ están corridos en un lugar con respecto a $\chi(C^1)$.

Entonces tenemos

$$\chi(C^3) = \chi(C^2) - \chi(C^1)$$

El complejo de cadenas C^3 es contractible, por ser el mapping cone de una equivalencia homotópica. Luego, sus módulos de homología son 0 y por lo tanto $\chi(C^3) = 0$.

Concluimos que $\chi(C^1) = \chi(C^2)$. □

Capítulo 4

La obstrucción de finitud de Wall

En este capítulo veremos el resultado central de este trabajo: definiremos la obstrucción de finitud de Wall σ como un elemento de $K_0(\mathbb{Z}\pi_1(X))$ y probaremos el siguiente teorema:

Teorema [9] *Sea X un espacio finitamente dominado. Existe un invariante $\sigma(X) \in \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi_1(X,x)])$ tal que X es homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito si y solamente si $\sigma(X) = 0$.*

Adicionalmente, daremos una caracterización de los espacios finitamente dominados que será de mucha utilidad en la prueba el teorema anterior.

En este capítulo notaremos el grupo fundamental de X como $\pi_1(X)$ o simplemente π.

4.1. Planteamiento del problema

Definición 4.1.1. Decimos que un espacio X es dominado por un espacio Y si existen morfismos $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $g \circ f$ es homotópico a id_X, lo que notaremos como $g \circ f \simeq id_X$.

Notamos que esta condición es necesaria pero no suficiente para que f sea una equivalencia homotópica.

Definición 4.1.2. Un espacio X es finitamente dominado si es dominado por un CW-complejo finito.

Es claro que esta condición es necesaria para que X sea homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito. En este capítulo veremos cuándo esta condición es suficiente, es decir ¿cuándo un espacio X finitamente dominado es homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito?

Que un espacio X sea finitamente dominado no implica necesariamente que sea homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito; sin embargo la proposición siguiente implica que $X \times S^1$ si lo es.

Proposición 4.1.3. *[4] Un espacio topológico X es finitamente dominado si y solamente si $X \times S^1$ es homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito.*

Demostración. Si X es finitamente dominado por un CW-complejo K, existen morfismos $X \xrightarrow{i} K \xrightarrow{r} X$ tales que $r \circ i \simeq id_X$.

Luego, tenemos que $X \times S^1 = T(X, id_X)$. Además, como $r \circ i \simeq id_X$, por el lema 1.2.6 tenemos que $T(X, id_X) \simeq T(X, r \circ i)$, y por el lema 1.2.5 tenemos que $T(X, r \circ i) \simeq T(K, i \circ r)$.

Entonces, $X \times S^1$ es homotópicamente equivalente a $T(K, i \circ r)$ que un CW-complejo finito pues K lo es.

Recíprocamente, si $X \times S^1$ es homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito K, tenemos que los morfismos

$s : X \overset{incl.}{\hookrightarrow} X \times S^1 \simeq K$

$d : K \simeq X \times S^1 \overset{proj.}{\rightarrow} X$

verifican $d \circ s \simeq id_X$. Luego, X es finitamente dominado por K. □

En este capítulo daremos primero una caracterización de los espacios finitamente dominados y luego estableceremos una condición necesaria y suficiente para que un espacio finitamente dominado sea homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito.

En tal sentido, el objetivo es probar el siguiente teorema.

Teorema 4.1.4. *[9] Sea X un espacio finitamente dominado. Entonces,*

1. *X es homotópicamente equivalente a un CW-complejo de dimensión finita.*

2. *X es homotópicamente equivalente a un CW-complejo de dimensión infinita con esqueleto finito.*

3. *Existe un invariante $\sigma(X) \in \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi_1(X, x)])$ tal que X es homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito si y solamente si $\sigma(X) = 0$.*

4.2. Caracterización de los espacios finitamente dominados

Un elemento fundamental para la prueba del Teorema 4.1.4 es la siguiente caracterización de los espacios finitamente dominados.

Teorema 4.2.1. *[9] Un espacio conexo X es finitamente dominado si y solamente si valen las siguientes condiciones:*

1. *X es homotópicamente equivalente a un CW-complejo*
2. *$\pi_1(X)$ es finitamente presentado*
3. *El complejo de cadenas singulares del cubrimiento universal, $S(\tilde{X})$, es homotópicamente equivalentes por cadenas como complejo de cadenas de $\mathbb{Z}[\pi]$-módulos a un complejo de cadenas*

$$P_* : \; 0 \longrightarrow P_k \longrightarrow P_{k-1} \longrightarrow ... \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

de $\mathbb{Z}[\pi]$-módulos proyectivos finitamente generados.

Demostración de 1. Ya probamos en la Proposición 4.1.3 que si X es finitamente dominado, entonces $X \times S^1$ es homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito. Entonces $X \times \mathbb{R}$ es homotópicamente equivalente a un CW-complejo ya que $\mathbb{R}$ es el cubrimiento universal de S^1. Luego, como $\mathbb{R}$ se retrae a un punto, X es homotópicamente equivalente a un CW–complejo. □

Definición 4.2.2. Decimos que un grupo H es un retracto de un grupo G si tenemos homomorfismos $j : H \to G$ y $r : G \to H$ tales que $r \circ j = id_H$

Observación 4.2.3. Notamos que si X está finitamente dominado por un CW-complejo K, entonces $\pi_1(X)$ es un retracto de $\pi_1(K)$.

Proposición 4.2.4. *[16] Sea G un grupo finitamente presentado y H un retracto de G. Entonces H es finitamente presentado.*

Demostración. Como H es retracto de G, tenemos morfismos $j : H \to G$ y $r : G \to H$ tales que $r \circ j = id_H$.

Sea $\{g_i : r_i = 1\}$ una representación finita de G donde $\{g_i\}$ son los generadores y $\{r_i\}$ son las relaciones para todo i y sea F el grupo libre de generadores $\{g_i\}$.

Consideramos la proyección $p : F \to G$. Como $j(r(p(g_i))) = jrp(g_i) \in G$ y p es sobreyectiva, existe algún $w_i \in F$ tal que $jrp(g_i) = p(w_i)$.

Veremos que $\{g_i : r_i, g_i^{-1}w_i\}$ es una presentación de H y por lo tanto H es finitamente presentado.

Sea $L = \{g_i : r_i, g_i^{-1}w_i\}$ y $u : G \to L$ la proyección natural que existe pues en L están las relaciones de G.

Aplicaremos el teorema de Van Dyck que afirma que si L es un grupo dado por generadores g_i y ciertas relaciones y hay una colección de elementos h_i de otro grupo H que satisfacen las relaciones de L, entonces existe un homomorfismo $\phi : L \to H$ con $\phi(g_i) = h_i$.

Queremos ver, entonces, que las relaciones del grupo L valen en el grupo H.

Primero tenemos que $rp(r_j) = r(1) = 1$ pues $p(r_j) = r_j = 1$ en G.

Además,

$$\begin{aligned} rp(g_i^{-1}w_i) &= rp(g_i^{-1})rp(w_i) \\ &= rp(g_i^{-1})rjrp(g_i), \text{ pues } p(w_i) = jrp(g_i) \\ &= rp(g_i^{-1})rp(g_i), \text{ pues } rj = id \\ &= rp(g_i)rp(g_i^{-1}) \\ &= rp(g_ig_i^{-1}) \\ &= rp(1) = 1 \end{aligned}$$

Entonces, como en H se verifican las relaciones de L, por el teorema de Van Dyck existe un homomorfismo $v : L \to H$ y además r se factoriza a través de L, es decir $r = vu$.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, bend right, "j"'] & G \arrow[l, bend right, "r"'] \arrow[d, "u"] & F \arrow[l, "p"'] \\ & L \arrow[ul, bend left, "v"] & \end{tikzcd}$$

Luego $vuj = rj = 1$ y, por lo tanto, uj es inyectiva. Además, uj es sobreyectiva pues $ujrp(g_i) = up(w_i) = up(g_i)$ lo que implica que los generadores de L están en la imagen de uj.

Concluimos entonces que v y uj son isomorfismos inversos y tenemos que H es finitamente presentado. $\square$

Si X es finitamente dominado por un CW-complejo K, entonces $\pi_1(K)$ es finitamente presentado por ser K finito y $\pi_1(X)$ es un retracto de $\pi_1(K)$. Entonces, por la proposición anterior, concluimos que $\pi_1(X)$ es finitamente presentado y tenemos probada la parte 2. del teorema 4.2.1.

Antes de comenzar con la prueba de la parte 3. del teorema 4.2.1 veremos el siguiente lema

Definición 4.2.5. Decimos que un complejo de cadenas A_* es finitamente dominado si existe un complejo de cadenas de tipo finito C_* y morfismos de cadenas $i : A_* \to C_*$ y $r : C_* \to A_*$ tales que $r \circ i$ es homotópico a la identidad.

Lema 4.2.6. *[9][11] Sea R un anillo y A_* un complejo de cadenas. Supongamos que A_* es finitamente dominado por un complejo de cadenas de largo finito de R-módulos proyectivos C_*, es decir existen morfismos de cadenas $i : A_* \to C_*$ y $r : C_* \to A_*$ tales que $r \circ i$ es homotópico a la identidad.*

Entonces A_* es homotópicamente equivalente a un complejo de cadenas de largo infinito de módulos proyectivos finitamente generados

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow ... \longrightarrow F_1 \longrightarrow F \xrightarrow{\ p\ } F \xrightarrow{1-p} F \xrightarrow{\ p\ } F \xrightarrow{1-p} ...$$

donde $p : F \to F$ es una proyección.

Demostración. Sea C_*: $0 \longrightarrow C_n \longrightarrow ... \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0$ un complejo de cadenas de cadenas de largo finito de R-módulos proyectivos.

Consideremos una homotopía de cadenas s en A_* entre la identidad y $r \circ i$, es decir tenemos morfismos $s_p : A_p \to A_{p-1}$ tales que $s\partial + \partial s = 1 - ri$.

Sea $F = C_0 \oplus C_1 \oplus ... \oplus C_n$ y definimos $P : F \to F$ mediante

$$P = \begin{pmatrix} ir & \partial & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ isr & 1-ir & -\partial & 0 & 0 & \cdots \\ is^2r & -isr & ir & \partial & 0 & \cdots \\ is^3r & -is^2r & isr & 1-ir & -\partial & \cdots \\ is^4r & -is^3r & is^2r & -isr & ir & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

El morfismo P verifica $P^2 = P$, por lo tanto, es una proyección y $(1 - P) \circ P = 0$.

Sea $F_k = C_k \oplus C_{k+1} \oplus \cdots \oplus C_n$ y definimos morfismos $\partial_i : F_i \to F_{i-1}$ mediante

$$\begin{pmatrix} \partial & 0 & 0 & \cdots \\ 1-ir & -\partial & 0 & \cdots \\ -isr & ir & \partial & \cdots \\ -is^2r & isr & 1-ir & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Estos morfismos verifican $\partial_i \circ \partial_{i+1}$ y por lo tanto obtenemos un complejo de cadenas F_*

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow ... \longrightarrow F_1 \longrightarrow F \xrightarrow{P} F \xrightarrow{1-P} F...$$

Veremos que F_* y A_* son homotópicamente equivalentes.

Para esto, consideramos $I : A_* \to F_*$ definida por

$$I_m = \begin{pmatrix} i \\ is \\ is^2 \\ \vdots \end{pmatrix} : A_m \to F_m$$

y $R : F_* \to A_*$ definida por

$$R_m = (r, 0, 0, \cdots) : F_m \to A_m$$

Tenemos que $R_m \circ I_m = r \circ i$. Entonces como $r \circ i \sim 1_{A_m}$, obtenemos que $R \circ I$ es homotópicamente equivalente a 1_{A_*}, la identidad en A_*.

Para ver que $I \circ R$ es homotópicamente equivalente a la identidad en F_* consideramos las proyecciones $P_m : F_m = C_m \oplus C_{m+1} \oplus \cdots \oplus C_n \to F_{m+1} = C_{m+1} \oplus \cdots \oplus C_n$. Luego, tenemos el siguiente diagrama donde se verifica $P_{m-1}\partial_m + \partial_{m+1}P_m = 1 - I_m R_m$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_{m+1} \arrow[r, "\partial_{m+1}"] \arrow[d] & F_m \arrow[r, "\partial_m"] \arrow[d, "R_m"] \arrow[ddl, "P_m"'] \arrow[dd, bend right, "1"'] & F_{m-1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddl, "P_{m-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A_{m+1} \arrow[d] & A_m \arrow[d, "I_m"] & A_{m-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & F_{m+1} \arrow[r, "\partial_{m+1}"] & F_m \arrow[r, "\partial_m"] & F_{m-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Entonces, $I \circ R$ es homotópicamente equivalente a 1_{F_*} y concluimos que los complejos de cadenas A_* y F_* son homotópicamente equivalentes. □

Observación 4.2.7. El complejo de cadenas

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow ... \longrightarrow F_1 \longrightarrow F \xrightarrow{p} F \xrightarrow{1-p} F \xrightarrow{p} F \xrightarrow{1-p} ...$$

es homotópicamente equivalente al complejo de cadenas de largo finito

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow ... \longrightarrow F_1 \longrightarrow Ker(P) \longrightarrow 0$$

Ahora probaremos la parte 3. del teorema 4.2.1.

Demostración de 3. Como X es finitamente dominado, existen $X \xrightarrow{i} K$ y $K \xrightarrow{r} X$, con K un CW-complejo finito tales que $r \circ i \simeq 1_X$. Como ya probamos que un espacio finitamente dominado es homotópicamente equivalente a un CW-complejo, asumiremos que X es un CW-complejo. Podemos asumir también que i y r preservan el punto base de los grupos fundamentales.

Sea $p = i \circ r : K \to K$. Como $p \circ p = i \circ r \circ i \circ r \simeq i \circ r = p$, $p \circ p$ es homotópica a p.

Queremos que la homotopía $p \circ p \sim p$ preserve, al igual que i y r, el punto base ya que esto nos daría una homotopía $\pi-$equivariante entre $\tilde{p} \circ \tilde{p}$ y $\tilde{p}$. Con este fin, buscamos una homotopía de $r \circ i$ a 1_X que preserva el punto base.

Consideramos una dominación finita particular dada por

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "i"] & X \times S^1 \arrow[l, bend left, "r"] \end{tikzcd} \simeq L$$

La equivalencia homotópica $X \times S^1$ induce isomorfismos entre los grupos de homotopía. Luego, aplicando el teorema de Whitehead podemos obtener una equivalencia homotópica que preserva el punto base y que induce isomorfismos en los grupos de homotopía.

Obtenemos así una homotopía entre $p \circ p$ y p que preserva el punto base y tenemos, por lo tanto, una homotopía $\pi-$equivariante entre $\tilde{p}$ y $\tilde{p} \circ \tilde{p}$.

Tomamos, ahora, el conjunto simplicial $S(\tilde{X})$ y luego su realización geométrica.

Por el corolario 2.2.47 obtenemos una equivalencia homotópica

$$|S(\tilde{X})| \to \tilde{X}$$

pues ambos espacios son CW-complejos, que es equivariante con respecto a la acción del grupo fundamental π.

Luego, tomamos complejos de cadenas celulares en ambos espacios. Por un lado, $C_*|S(\tilde{X})| = S_*(\tilde{X})$ el complejo de cadenas singulares de $\tilde{X}$. Por otro lado, $C_*(\tilde{X})$ es finitamente dominado por $C_*(\tilde{K})$, un complejo de cadenas de largo finito de $\mathbb{Z}[\pi]-$módulos proyectivos finitamente generados.

Obtenemos, entonces, que $S_*(\tilde{X})$ está finitamente dominado por un complejo de cadenas de $\mathbb{Z}[\pi]-$módulos proyectivos.

Finalmente, aplicando, el lema 4.2.6 y luego la observación 4.2.7, concluimos que $S_*(\tilde{X})$ es homotópicamente equivalente a un complejo de cadenas de largo finito de $\mathbb{Z}[\pi]-$módulos proyectivos finitamente generados. $\square$

Para probar el recíproco, veremos los siguientes lemas:

Lema 4.2.8 (Lema de los cinco)**.** *Consideramos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\phi_1"] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\phi_2"] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\phi_3"] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\phi_4"] & A_5 \arrow[d, "\phi_5"] \\
B_1 \arrow[r, "g_1"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & B_3 \arrow[r, "g_3"] & B_4 \arrow[r, "g_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

Si ϕ_1, ϕ_2, ϕ_4 y ϕ_5 son isomorfismos entonces ϕ_3 también es un isomorfismo.

Demostración. Veremos primero que ϕ_3 es sobreyectiva. Sea $b_3 \in B_3$, queremos ver que existe $a_3 \in A_3$ tal que $\phi_3(a_3) = b_3$. Como ϕ_4 es sobreyectiva, existe $a_4 \in A_4$ tal que $\phi_4(a_4) = g_3(b_3)$. Luego, por exactitud en la segunda fila tenemos $g_4 g_3(b_3) = 0$. Entonces,

$$0 = g_4 g_3(b_3) = g_4 \phi_4(a_4) = \phi_5 f_4(a_4)$$

Por lo tanto, como ϕ_5 es inyectiva tenemos que $f_4(a_4) = 0$, es decir $a_4 \in \mathrm{Ker}(f_4)$ y por exactitud en la primera fila obtenemos que $a_4 \in Im(f_3)$. Sea $\bar{a_3} \in A_3$ tal que $f_3(\bar{a_3}) = a_4$. Luego,

$$\begin{aligned}
g_3(b_3 - \phi_3(\bar{a_3}) &= g_3(a_3) - g_3\phi_3(\bar{a_3}) \\
&= \phi_4(a_4) - \phi_4 f_3(\bar{a_3}) \\
&= \phi_4(a_4) - \phi_4(a_4) \\
&= 0
\end{aligned}$$

y por exactitud $b_3 - \phi_3(\bar{a_3}) \in \mathrm{Im}(g_2)$. Sea $b_2 \in B_2$ tal que $g_2(b_2) = b_3 - \phi_3(\bar{a_3})$. Entonces, como ϕ_2 es sobreyectiva, existe $a_2 \in A_2$ tal que $\phi_2(a_2) = b_2$. Obtenemos, entonces, que

$$\begin{aligned}
\phi_3(\bar{a_3} + f_2(a_2)) &= \phi_3(\bar{a_3}) + \phi_3 f_2(a_2) \\
&= \phi_3(\bar{a_3}) + g_2\phi_2(a_2) \\
&= \phi_3(\bar{a_3}) + g_2(b_2) \\
&= \phi_3(\bar{a_3}) + b_3 - \phi_3(\bar{a_3}) \\
&= b_3
\end{aligned}$$

Veremos ahora que ϕ_3 es inyectiva. Sea $a_3 \in A_3$ tal que $\phi_3(a_3) = 0$, queremos ver que $a_3 = 0$. Como $\phi_3(a_3) = 0$, $g_3\phi_3(a_3) = 0$. Luego, por conmutatividad

$$0 = g_3\phi_3(a_3) = \phi_4 f_3(a_3)$$

Entonces, como ϕ_4 es inyectiva, tenemos que $f_3(a_3) = 0$ y por exactitud existe $a_2 \in A_2$ tal que $f_2(a_2) = a_3$. Luego,

$$0 = \phi_3(a_3) = \phi_3 f_2(a_2) = g_2\phi_2(a_2)$$

y por exactitud en la segunda fila, existe $b_1 \in B_1$ tal que $g_1(b_1) = \phi_2(a_2)$. Como ϕ_1 es sobreyectiva, existe $a_1 \in A_1$ tal que $\phi_1(a_1) = b_1$ y obtenemos

$$\phi_2(a_2) = g_1(b_1) = g_1\phi_1(a_1) = \phi_2 f_1(a_1)$$

Por lo tanto, como ϕ_2 es inyectiva, $a_2 = f_1(a_1)$ y

$$a_3 = f_2(a_2) = f_2 f_1(a_1) = 0$$

por exactitud. □

Lema 4.2.9. *Sea* $P_* : \ 0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$ *un complejo de cadenas de* R*-módulos proyectivos finitamente generados. Suponemos que* $H_i(P_*) = 0$ *para* $i \leq k$*. Entonces* P_* *es homotópicamente equivalente a un complejo de cadenas de* R*-módulos proyectivos finitamente generados de la forma* $0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_{k+2} \longrightarrow Q \longrightarrow 0$.

En particular, $H_{k+1}(P_*)$ *es finitamente generado.*

Demostración. Supondremos primero que $k = 0$ y que, por lo tanto,

$$H_0(P_*) = 0 \text{ y } H_1(P_*) \neq 0$$

Tenemos entonces que

$$0 = H_0(P_*) = \mathrm{Ker}(\partial_0)/\mathrm{Im}(\partial_1) = P_0/\mathrm{Im}(\partial_1)$$

y, por lo tanto, $\mathrm{Im}(\partial_1) = P_0$. Luego, $P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0$ es sobreyectiva y como P_0 es proyectivo obtenemos que

$$P_1 = \mathrm{Ker}(\partial_1) \oplus P_0$$

Además, como $\mathrm{Ker}(\partial_1) = \mathrm{Im}(\partial_2) \oplus \mathrm{Ker}(\partial_1)/\mathrm{Im}(\partial_2) = \mathrm{Im}(\partial_2) \oplus H_1(P_*)$, resulta que

$$P_1 = \mathrm{Ker}(\partial_1) \oplus P_0 = \mathrm{Im}(\partial_2) \oplus H_1(P_*) \oplus P_0$$

Por otro lado $P_2 \simeq \mathrm{Im}(\partial_2) \oplus \mathrm{Ker}(\partial_2)$.

Sea $Q = H_1(P_*)$.

Veremos que P_* es homotópicamente equivalente al complejo de cadenas

$$P'_*: \ 0 \longrightarrow P_n \longrightarrow ... \longrightarrow P_2 \longrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

Hasta el elemento P_2, los dos complejos de cadenas son el mismo, luego basta con probar la condición de equivalencia homotópica en los ultimos elementos de las sucesiones exactas.

Para definir una homotopía de cadenas de P_* en P_* consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d] & P_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "p"] \arrow[ddl, "s_1"'] \arrow[dd, bend right, "1"'] & P_0 \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "p"] \arrow[ddl, "s_0"'] \arrow[dd, bend right, "1"'] & 0 \arrow[ddl, "i"] \\
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[d] & H_1(P_*) \arrow[d, "i"] & 0 \arrow[d, "i"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "\partial_2"] & P_1 \arrow[r, "\partial_1"] & P_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde:

- $p_1 : P_1 = \mathrm{Im}(\partial_2) \oplus H_1(P_*) \oplus P_0 \to H_1(P_*)$ y $p_0 : P_0 \to 0$ son las proyecciones

- $i : H_1(P_*) \to P_1 = \mathrm{Im}(\partial_2) \oplus H_1(P_*) \oplus P_0$ y $i : 0 \to P_0$ son las inclusiones

- $s_1 : P_1 = \mathrm{Im}(\partial_2) \oplus H_1(P_*) \oplus P_0 \to P_2 \simeq \mathrm{Im}(\partial_2) \oplus \mathrm{Ker}(\partial_2)$ está dada por $a + b + c \mapsto \partial_2^{-1}(a)$

- $s_0 : P_0 \to P_1 = \mathrm{Im}(\partial_2) \oplus H_1(P_*) \oplus P_0$ es la inclusión

Luego, tenemos que $\partial_2 \circ s_1(a + b + c) = a$, $\partial_1 \circ s_0(a + b + c) = c$ y $i \circ p(a + b + c) = b$. Se verifica entonces que $\partial_2 \circ s_1 + s_0 \circ \partial_1 = 1 - i \circ p$.

Por otro lado, $\partial_1 \circ s_0(c) = c$; además $i \circ \partial_0(c) = 0$ y $p \circ i(c) = 0$. Por lo tanto tenemos que $\partial_1 \circ s_0 + i \circ \partial_0 = 1 - i \circ p$.

Para defininir una homotopía de cadenas de P'_* en P'_* consideramos el siguiente diagrama donde se verifica $\partial s + s\partial = 1 - pi$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & H_1(P_*) \arrow[r] \arrow[d, "i"] \arrow[dl, "0"'] \arrow[dd, bend right, "1"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "i"] \arrow[ddl, "0"'] \arrow[dd, bend right, "1"'] & 0 \arrow[ddl, "i"] \\
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[d] & P_1 \arrow[d, "p"] & 0 \arrow[d, "p"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & H_1(P_*) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Concluimos entonces que los dos complejos de cadenas son homotópicamente equivalentes.

Si $k > 0$, repetimos el argumento hasta encontrar un grupo de homotopía no nulo. $\square$

Ahora probaremos el recíproco del teorema 4.2.1.

Demostración. Empezamos construyendo un 2-complejo K y un morfismo $\phi : K \to X$ que induce isomorfismos en los grupos fundamentales. Para esto, podemos tomar una presentación finita de $\pi_1(X) = \{a_1, \cdots, a_n : b_1, \cdots, b_m\}$ y construimos un CW-complejo K que tenga n 1-células y m 2-células.

Asumiremos que $K \subset X$. Si no, podemos tomar el mapping cylinder de ϕ, es decir consideramos el espacio $M = X \cup_\phi (K \times [0, 1])$.

Sea $\tilde{K}$ el cubrimiento universal de K. Luego, $\tilde{K}$ es 1-conexo y por el teorema de Hurewicz, tenemos que $\pi_1(\tilde{K})$ y $H_1(\tilde{K})$ son isomorfos. Igualmente, tenemos que $\pi_1(\tilde{X})$ y $H_1(\tilde{X})$ son isomorfos.

Consideramos las sucesiones exactas de homotopía y de homología del par $(\tilde{X}, \tilde{K})$.

$$\begin{tikzcd}
... \arrow[r] & \pi_2(\tilde{K}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \pi_2(\tilde{X}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \pi_2(\tilde{X}, \tilde{K}) \arrow[r] & \pi_1(\tilde{K}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \pi_1(\tilde{X}) \arrow[d, "\simeq"] \\
... \arrow[r] & H_2(\tilde{K}) \arrow[r] & H_2(\tilde{X}) \arrow[r] & H_2(\tilde{X}, \tilde{K}) \arrow[r] & H_1(\tilde{K}) \arrow[r] & H_1(\tilde{X})
\end{tikzcd}$$

Entonces, por el lema de los cinco tenemos que $\pi_2(\tilde{X}, \tilde{K}) \to H_2(\tilde{X}, \tilde{K})$ es un isomorfismo.

Por otro lado, tenemos que $H_2(\tilde{X}, \tilde{K}) = H_2(\tilde{X} \cup C\tilde{K})$ y por lo tanto $H_2(\tilde{X}, \tilde{K})$ es la homología del mapping cone de $C_*(\tilde{K}) \to P_*$. Como K es un CW-complejo finito, $C_*(\tilde{K})$ es un complejo de cadenas de largo finito de $\mathbb{Z}[\pi]-$módulos finitamente generados. Luego, el mapping cone de $C_*(\tilde{K}) \to$

P_* es un complejo de cadenas de largo finito de $\mathbb{Z}[\pi]-$módulos proyectivos finitamente generados.

Entonces, por el lema 4.2.9, tenemos que $H_2(\tilde{X}, \tilde{K})$ es finitamente generado y por lo tanto $\pi_2(\tilde{X}, \tilde{K}) \simeq H_2(\tilde{X}, \tilde{K})$ también es finitamente generado.

Queremos pegarle células a K de forma que el morfismo $\phi : K \to X$ sea 2-conexo, es decir de forma que $\pi_2(\tilde{X}, \tilde{K}) = 0$.

Para esto, tomamos un conjunto finito de generadores

$$\alpha_i : (D^2, S^1) \to (X, K)$$

de $\pi_2(X, K)$. Existe un conjunto de generadores finito ya que

$$\pi_2(X, K) \simeq \pi_2(\tilde{X}, \tilde{K}) \simeq H_2(\tilde{X}, \tilde{K})$$

es finitamente generado.

Notamos que $\partial\alpha_i \in \pi_1(K)$ pues

$$\cdots \longrightarrow \pi_2(K) \longrightarrow \pi_2(X) \longrightarrow \pi_2(X, K) \xrightarrow{\partial} \pi_1(K) \longrightarrow cdots$$

$$\alpha_i \longmapsto \partial\alpha_i$$

Sea L el espacio que obtenemos pegándole una 2-célula a K por cada $\partial\alpha_i$ y usamos los morfismos α_i para extender ϕ a un morfismo $\phi : L \to X$.

El CW-complejo L que obtuvimos es finito y además verifica $H_i(\tilde{X}, \tilde{L}) = 0$ para todo $i \leq 2$ y tenemos entonces que ϕ es 2-conexo.

Luego, por el mismo argumento que antes, podemos ver que $H_3(\tilde{X}, \tilde{L})$ es finitamente generado. Entonces tomando un generador finito y repitiendo la misma construcción que antes podemos construir un CW-complejo finito que también llamaremos L tal que $H_i(\tilde{X}, \tilde{L}) = 0$ para todo $i \leq 3$.

Podemos continuar con estos pasos hasta obtener un CW-complejo finito L que verifica $H_i(\tilde{X}, \tilde{L}) = 0$ para todo $i \neq k$ y $H_k(\tilde{X}, \tilde{L}) = P$ es un $\mathbb{Z}[\pi]-$módulo proyectivo.

Consideramos ahora el par $(\widetilde{X \times S^1}, \widetilde{L \times S^1})$. Este par tiene la misma homología que $(\tilde{X}, \tilde{L})$ ya que el cubrimiento universal de S^1 es $\mathbb{R}$, que es contractible.

Tomamos un módulo proyectivo Q tal que $P \oplus Q$ sea libre y consideramos

$$0 \longrightarrow \underbrace{P \otimes \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \oplus Q \otimes \mathbb{Z}[t, t^{-1}]}_{\text{B}} \longrightarrow \underbrace{P \otimes \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \oplus Q \otimes \mathbb{Z}[t, t^{-1}]}_{\text{A}} \longrightarrow P \longrightarrow 0 \tag{1}$$

donde el segundo morfismo es $(1-t)\oplus$ 1 y el tercero es la proyección.

Esta sucesión es exacta corta pues la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[t,t^{-1}] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[t,t^{-1}] \xrightarrow{ev_1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

es exacta corta.

La sucesión exacta corta (1) nos da une representación finita de $P = H_k(\widetilde{X \times S^1}, \widetilde{L \times S^1}) = \pi_k(\widetilde{X \times S^1}, \widetilde{L \times S^1})$ pues A y B son $\mathbb{Z}[\pi][t,t^{-1}]-$módulos finitamente generados.

Entonces, podemos tomar generadores finitos para A y para B y pegarle una $k-$célula a $L \times S^1$ por cada elemento del generador de A y una $(k+1)-$célula por cada elemento del generador de B. También le llamamos $L \times S^1$ al espacio que obtenemos.

El espacio $L \times S^1$ es, entonces, un CW-complejo que verifica

$$H_i(\widetilde{X \times S^1}, \widetilde{L \times S^1}) = 0$$

para todo i. Además, como en cada paso pegamos finitas células, $L \times S^1$ es un CW-complejo finito.

Como $H_i(\widetilde{X \times S^1}, \widetilde{L \times S^1}) = 0$ para todo i, por el teorema de Hurewicz, $\pi_i(\widetilde{X \times S^1}, \widetilde{L \times S^1}) = 0$ para todo i, y por lo tanto $\pi_i(X \times S^1, L \times S^1) = 0$ para todo i. Tenemos, por lo tanto, una equivalencia débil de homotopía entre $X \times S^1$ y $L \times S^1$. Dado que ambos son CW-complejos, por el teorema de Whitehead concluimos que son homotópicamente equivalentes.

Luego, consideramos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "i"] & X \times S^1 \arrow[l, bend left, "p"] \arrow[r, "\simeq"] & L \times S^1 \end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión y r es la proyección.

Obtenemos que X es finitamente dominado por un CW-complejo homotópicamente equivalente a $L \times S^1$.

$\square$

Podemos relacionar espacios finitamente dominados con espacios del tipo de homotopía de CW-complejos de la siguiente manera.

Teorema 4.2.10. *[9] Sea X un espacio finitamente dominado. Entonces,*

1. *X es homotópicamente equivalente a un CW-complejo de dimensión finita.*

2. X es homotópicamente equivalente a un CW-complejo de dimensión infinita con esqueleto finito.

Demostración. Continuando con la construcción que hicimos en la demostración anterior, tenemos un CW-complejo finito L y un morfismo $L \to X$ que induce isomorfismo en los grupos fundamentales. Además, tenemos que $H_l(\tilde{X}, \tilde{L}) = 0$ si $l \neq k$ y que $H_k(\tilde{X}, \tilde{L})$ es un $\mathbb{Z}[\pi]-$módulo proyectivo finitamente generado. Sea $P = H_k(\tilde{X}, \tilde{L})$.

Sea Q un módulo proyectivo finitamente generado tal que $P \oplus Q$ es libre.

Para probar que X es homotópicamente equivalente a un CW-complejo de dimensión finita, consideramos la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow \underbrace{Q \oplus P \oplus Q \oplus P \oplus Q...}_{\text{B}} \longrightarrow \underbrace{P \oplus Q \oplus P \oplus Q \oplus P...}_{\text{A}} \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

donde el primer morfismo es el shift y el segundo la proyección.

Esta sucesión exacta corta da una representación de P.

Como A es libre podemos tomar una base y pegarle una k-célula a L por cada elemento de la base. Igualmente, como B es libre, podemos pegarle una $(k+1)$-célula a L por cada elemento de la base de B. En ambos pasos pegamos infinitas células y obtenemos un CW-complejo de dimensión finita L tal que $H_i(\tilde{X}, \tilde{L}) = 0$ para todo i.

Luego, tenemos que $H_i(\tilde{X}, \tilde{L}) = 0$ y por lo tanto $L \to X$ es una equivalencia débil de homotopía. Como L y X son CW-complejos, por el teorema de Whitehead obtenemos que son homotópicamente equivalentes.

Para probar que X es homotópicamente equivalente a un CW-complejo de dimensión infinita con esqueleto finito consideramos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow P \oplus Q \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

donde el primer morfismo es la inclusión y el segundo la proyección.

Esta sucesión exacta nos da una representación de P. Dado que P es finitamente generado, podemos tomar una base finita de $P \oplus Q$ y pegarle una k-célula a L por cada elemento de la base. Obtenemos un CW-complejo L de dimensión k y con finitas células en cada dimensión tal que $H_{k+1}(\tilde{X}, \tilde{L}) = Q$.

Ahora consideramos la siguiente sucesión exacta corta que da una representación de Q

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow P \oplus Q \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

Al igual que en el paso anterior, le pegamos una $(k+1)$-célula a L por cada elemento de la base finita de $P \oplus Q$ y obtenemos un CW-complejo L de dimensión $k+1$ con finitas células en cada dimensión tal que $H_{k+2}(\tilde{X}, \tilde{L}) = P$.

Si continuamos con este proceso infitamente, obtenemos un CW-complejo L de dimensión infinita pero con finitas células en cada dimensión tal que $H_i(\tilde{X}, \tilde{L}) = 0$ para todo i. Tenemos, entonces, una equivalencia débil entre L y X y por Whitehead concluimos que X es homotópicamente equivalente a L. □

4.3. Definición del invariante $\sigma(X)$

Sea X finitamente dominado. Por la caracterización que vimos en la sección anterior tenemos que $S_*(\tilde{X})$ es homotópicamente equivalente al complejo de cadenas de largo finito $[P_*]$ de $\mathbb{Z}[\pi]-$módulos proyectivos finitamente generados.

Como $[P_*]$ es de tipo finito, tenemos definida su característica de Euler mediante

$$[P_*] = \sum_0^k (-1)^i [P_i] \in K_0(\mathbb{Z}[\pi])$$

Ya probamos, en el capítulo, anterior que es un invariante bien definido del tipo de homotopía de P_* y, por lo tanto, es un invariante bien definido de X. Luego, tiene sentido definir la característica de Euler de X mediante

$$\chi(X) = [P_*]$$

Si tomamos la inclusión $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[\pi]$ y luego la aumentación $\mathbb{Z}[\pi] \to \mathbb{Z}$ tenemos

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right, "id_{\mathbb{Z}}"'] & \mathbb{Z}[\pi] \arrow[r, "\epsilon"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Aplicando el funtor K_0 obtenemos

$$\begin{tikzcd} K_0(\mathbb{Z}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[rr, bend right, "K_0(id_{\mathbb{Z}})"'] & K_0(\mathbb{Z}[\pi]) \arrow[r, "\epsilon_*"] & K_0(\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

Esto nos da un splitting en la sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
K_0(\mathbb{Z}) \arrow[rr, bend right, "i_*"'] \arrow[d, equal] & & K_0(\mathbb{Z}[\pi]) \arrow[ll, bend right, "\epsilon_*"'] \arrow[r] & K_0(\mathbb{Z}(\pi))/i_*(\mathbb{Z}) \arrow[d, equal] \\
\mathbb{Z} & & & \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi])
\end{tikzcd}$$

y, por lo tanto,

$$K_0(\mathbb{Z}[\pi]) = K_0(\mathbb{Z}) \oplus \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi]) = \mathbb{Z} \oplus \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi])$$

Podemos escribir, entonces,

$$[P_*] = (\alpha(X), \sigma(X))$$

, con $\alpha(X) \in \mathbb{Z}$ y $\sigma(X) \in \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi])$.

Definición 4.3.1. El invariante $\sigma(X) \in \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi])$ es la obstrucción de finitud de Wall.

Probaremos en la siguiente sección que si $\sigma(X) = 0$, que X sea finitamente dominado implica que es homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito.

4.4. Demostración del teorema 4.1.4

Dado X finitamente dominado, probaremos ahora una condición necesaria y suficiente sobre $\sigma(X)$ para que X sea homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito.

Teorema 4.4.1. *[9] Sea X un espacio finitamente dominado. Existe, entonces, un invariante $\sigma(X) \in \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi_1(X,x)])$ tal que X es homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito si y solamente si $\sigma(X) = 0$.*

Demostración. Si X es homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito K de dimensión n, entonces $S_*(\tilde{X})$ es homotópicamente equivalente a las cadenas celulares de $\tilde{K}$. Por lo tanto, tenemos que $\chi(X) = \chi(K)$.

El complejo de cadenas de $\tilde{K}$ es

$$0 \longrightarrow C_n(\tilde{K}) \longrightarrow C_{n-1}(\tilde{K}) \longrightarrow ... \longrightarrow C_1(\tilde{K}) \longrightarrow C_0(\tilde{K})$$

y los $C_i(\tilde{K})$ son $\mathbb{Z}[\pi]$-módulos libres finitamente generados. Entonces, $\chi(K) \in \mathbb{Z}$ y, por lo tanto, $\sigma(K) = 0$.

Probamos, entonces, que $\sigma(X) = 0$.

Recíprocamente, queremos ver que si $\sigma(X) = 0$ entonces X es homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito.

Recordamos que el la prueba del recíproco del Teorema 4.2.1 construímos un CW-complejo finito L y un morfismo $l \to X$ que induce isomorfismos en los grupos fundamentales. Además, tenemos que $H_l(\tilde{X}, \tilde{L}) = 0$ si $l \neq k$ y que $H_k(\tilde{X}, \tilde{L})$ es un $\mathbb{Z}[\pi]$-módulo proyectivo finitamente generado. Sea $P = H_k(\tilde{X}, \tilde{L})$.

Veremos primero que $\sigma(X) = \pm[P]$ dependiendo de si k es par o impar.

Consideramos la sucesión exacta del par $(\tilde{X}, \tilde{L})$

$$... \longrightarrow H_{l+1}(\tilde{X}, \tilde{L}) \longrightarrow H_l(\tilde{L}) \longrightarrow H_l(\tilde{X}) \longrightarrow H_l(\tilde{X}, \tilde{L}) \longrightarrow ...$$

Como $H_i(\tilde{X}, \tilde{L}) = 0$ para todo $i \neq k$, tenemos que si $l \neq k, k-1$:

$$0 \longrightarrow H_l(\tilde{L}) \longrightarrow H_l(\tilde{X}) \longrightarrow 0$$

Entonces si $l \neq k, k-1$, $H_l(\tilde{L}) \simeq H_l(\tilde{X})$. Si no, tenemos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_k(\tilde{L}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_k(\tilde{X}) \arrow[r] & H_k(\tilde{X}, \tilde{L}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_{k-1}(\tilde{L}) \arrow[r] & H_{k-1}(\tilde{X}) \\
 & 0 & & P & &
\end{tikzcd}$$

Por construcción de L, tenemos que $H_{k-1}(\tilde{L}) \to H_{k-1}(\tilde{X})$ es un isomorfismo y por lo tanto $H_k(\tilde{X}) \to P$ es un isomorfismo.

Luego,

$$\begin{aligned}
\chi(X) &= \chi(H_*(\tilde{X})) \\
&= \sum (-1)^i [H_i(\tilde{X})] \\
&= \sum (-1)^i [H_i(\tilde{L})] \pm [P]
\end{aligned}$$

según la paridad de k.

$\sum (-1)^i [H_i(\tilde{L})] \in \mathbb{Z}$ porque L es un CW-complejo finito.

Entonces $\sum (-1)^i [H_i(\tilde{L})] = 0$ en $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi])$ y por lo tanto $\chi(X) = \pm[P]$.

Como $\sigma(X) = 0$, tenemos que $[P] = 0 \in \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi])$. La clase del 0 en $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi])$ está representada por un módulo libre finitamente generado F.

Entonces, $[P] = [F]$ y existe un módulo libre y finitamente generado E tal que $P \oplus E = F$.

Consideramos la siguiente sucesión exacta corta que nos da una representación de P:

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\ i\ } F \xrightarrow{\ p\ } P \longrightarrow 0$$

Dado que F y E son libres y finitamente generados podemos tomar una base finita para cada uno. Le pegamos un k-célula a L por cada elemento de la base de F y una $(k+1)$-célula por cada elemento de la base de E.

En ambos pasos pegamos finitas células y obtenemos un CW-complejo finito L tal que $H_i(\tilde{X}, \tilde{L}) = 0$ para todo i. Tenemos, entonces, por el teorema de Hurewicz, que $\pi_i(\tilde{X}, \tilde{L}) = 0$ para todo i. Esto implica que $\pi_i(X) \simeq \pi_i(K)$ y tenemos, por lo tanto, una equivalencia de homotopía débil entre X y L.

Luego, por el teorema de Whitehead, X y L son homotópicamente equivalentes. $\square$

Veremos finalmente que todo elemento de $K_0(\mathbb{Z}[\pi_1(X,x)]$ es la obstrucción de finitud de algún espacio.

Teorema 4.4.2. *[4] Si π es un grupo finitamente presentado, entonces todo elemento $\sigma \in \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi])$ es la obstrucción de finitud de un CW-complejo finitamente dominado X tal que $\pi_1(X) = \pi$.*

Demostración. Consideramos una presentación finita de π y construimos un CW-complejo K pegando una 1-célula por cada generador de π y una 2-célula por cada relación en π. Luego, K es un CW-complejo finito tal que $\dim(K) = 2$ y $\pi_1(K) = \pi$.

Representamos σ por un módulo proyectivo finitamente generado P, es decir, $\sigma = [P] \in \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi])$. Sea Q un módulo proyectivo finitamente generado tal que $P \oplus Q = F$ es libre y sea n el rango de F, es decir, el número de generadores libres.

Tomamos $l > 3$ y definimos el siguiente CW-complejo:

$$L = K \vee \bigvee_{i=1}^{n} S_i^l$$

donde S_i^l es una l-esfera.

Consideramos $r : L \to K$ la retracción de las l-esferas en el punto base de $\pi_1(K)$ e $i : K \to L$ la inclusión. Luego tenemos $r \circ i = \mathrm{id}_K$ y estos dos morfismos inducen en el l-ésimo grupo de homotopía

$$\begin{tikzcd} \pi_l(K) \arrow[r, bend right, "i_*"'] & \pi_l(L) \arrow[l, bend right, "r_*"'] \end{tikzcd} \qquad \text{con } r_* \circ i_* = \mathrm{id}_*$$

Tenemos entonces un splitting en la sucesión exacta de par (L, K)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \pi_l(K) \arrow[r, bend right, "i_*"'] & \pi_l(L) \arrow[l, bend right, "r_*"'] \arrow[r] & \pi_l(L,K) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde $\pi_{l+1}(L, K) = 0$ porque L y K tienen las mismas $l+1$-células y $\pi_{l-1} = 0$ pues K tiene unicamente 1-células y 2-células. Por lo tanto, tenemos que $\pi_l(L) = \pi_l(K) \oplus \pi_l(L, K)$.

Como $\pi_i(\tilde{L}, \tilde{K}) = 0$ si $i < l$, por el teorema de Hurewicz tenemos que $\pi_l(L, K) \simeq \pi_l(\tilde{L}, \tilde{K}) \simeq H_l(\tilde{L}, \tilde{K})$. Además, como $H_l(\tilde{L}, \tilde{K})$ está generado por las l-esferas en L que no están en K, tenemos que $H_l(\tilde{L}, \tilde{K}) \simeq F$ como $\mathbb{Z}\pi$-módulo. Obtenemos, entonces, que

$$\pi_l(L) \simeq \pi_l(K) \oplus F$$

Luego, podemos definir el morfismo $\alpha : L \to L$ tal que $\alpha\big|_K = \text{id}$ y $\alpha_* : \pi_l(L) \to \pi_l(L)$ está dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

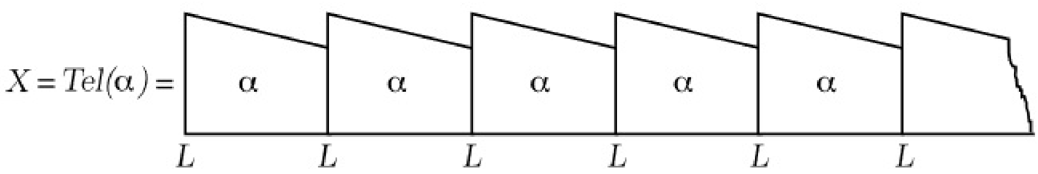
con respecto a la descomposición en suma directa $\pi_l(L) \simeq \pi_l(K) \oplus F$ y donde A es la matriz asociada a la proyección $p : F \to P \hookrightarrow F$.

Como A es una proyección verifica, $A^2 = A$ y, por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Entonces $\alpha_* \circ \alpha_* \sim \alpha_* : \pi_l(L) \to \pi_l(L)$ rel K. Por otro lado, si $i \neq l$, tenemos $\pi_i(L) = \pi_i(K)$ y como $\alpha\big|_K = \text{id}$, tenemos $\alpha_* = \text{id}$. Concluimos entonces que α es un idempotente homotópico, es decir $\alpha_* \circ \alpha_* \sim \alpha_*$ rel K.

Sea X el mapping telescope infinito $Tel(\alpha)$



Sea $d : L \to$ la inclusión de L en $L \times \{0\}$ en el primer mapping cylinder. Definimos $s' : X \to X$ como α en cada $L \times \{0\}$ y extendemos a todo X usando la homotopía $\alpha \circ \alpha \simeq \alpha$

$$\begin{gathered} H : L \times [0,1] \to L \\ H(l,0) = \alpha(l) \\ H(l,1) = \alpha(\alpha(l)) \end{gathered}$$

La extensión de s' está bien definida ya que α es un idempotente homotópico.

Tenemos que $d \circ s' : X \to X$ induce la identidad en los grupos de homotopía de X y, por lo tanto, por el teorema de Whitehead, es una equivalencia homotópica. Sea ϕ una inversa homotópica de $d \circ s'$ y $s = s' \circ \phi$. Luego, $d \circ s = d \circ s' \circ \phi \sim \mathrm{id}$ y obtenemos entonces que X es finitamente dominado por L.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend right, "s"'] & L \arrow[l, bend right, "d"'] \end{tikzcd} \qquad \text{con } d \circ s \sim \mathrm{id}_X$$

Concluiremos viendo que $\sigma(X) = (-1)^l[P]$.

Por construcción de X, tenemos que $H_i(\tilde{X}) = 0$ si $i \neq 1, 2, l$ y además que $H_1(\tilde{X}) \simeq H_1(\tilde{K})$, $H_2(\tilde{X}) \simeq H_2(\tilde{K})$ y $H_l(\tilde{X}) \simeq P$. Luego,

$$\begin{aligned} \chi(X) &= \chi(H_*(\tilde{X})) \\ &= \sum (-1)^i [H_i(\tilde{X})] \\ &= [H_1(\tilde{K})] + [H_2(\tilde{K})] + [H_l(\tilde{X}]) \end{aligned}$$

Dado que K es un CW-complejo finito, se cumple $[H_1(\tilde{K})]+[H_2(\tilde{K})] \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $\sigma(X) = [P]$. Obtuvimos, entonces, un espacio finitamente dominado X tal que $\sigma(X) = \sigma$. $\square$

Bibliografía

[1] E.B. Curtis, Simplicial homotopy theory. *Advances in Math. 6 (1971), 107-209.*

[2] E. Ellis, K-teoría algebraica y conjeturas de isomorfismo. *http://pmu.uy/pmu15/pmu15-0109.pdf*

[3] E. Ellis, K-teoría algebraica y la construcción + de Quillen. *https://www.fing.edu.uy/ eellis/kalgpcon.ps*

[4] S. Ferry and A. Ranicki, A survey of Wall's finiteness obstruction. *Surveys on surgery theory, Vol. 2, 63–79, Ann. of Math. Stud., 149, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2001.*

[5] G. Friedman, An elementary illustrated introduction to simplicial sets *arXiv:0809.422v2, 2011*

[6] A. Hatcher, Algebraic Topology. *Cambridge University Press, 2009*

[7] S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician. *Graduate texts in Mathematics, vol. 5. Springer-Verlag, New York, 1971.*

[8] J. Milnor, The Geometric realization of a Semi-Simplicial Complex *Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 65, No. 2 (1957) pp. 357-362*

[9] E. K. Pedersen, Wall's finiteness obstruction. *J. Pure Appl. Algebra 221 (2017), no. 7, 1691–1698.*

[10] P. Goerss and J. Jardine, Simplicial Homotopy Theory. *Birkhäuser Basel, 2009*

[11] A. Ranicki, The algebraic theory of finiteness obstructions *Mathematica Scandinavica, Vol 57 (1985), 105-126*

[12] E. Riehl, Category Theory in Context. *Dover modern math originals, 2017*

[13] E. Riehl, A leisurely introduction to simplicial sets. *http://www.math.jhu.edu/ eriehl/ssets.pdf*

[14] J. Rosenberg. Algebraic K-theory and its applications. *Graduate texts in Mathematics, vol. 147. Springer-Verlag, New York, 1994.*

[15] R. M. Switzer, Algebraic topology - homology and homotopy. *Reprint of the 1975 edition. Classics in Mathematics. Berlin. Springer. xii, 526, 2002.*

[16] C.T.C. Wall, Finiteness condition for CW-complex. *Ann. of Math. 81 (1965), 56-69.*

[17] C.T.C. Wall, Finiteness condition for CW-complex II. *Proc. Roy. Soc. Ser. A, 295:129-139, 1966*