

TRABAJO MONOGRÁFICO

Teorema de estructura de Rosenlicht para
esquemas en grupos de tipo finito

Leandro Bentancur Rodríguez

2020

Orientador:

Alvaro Rittatore
Centro de Matemática

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Resumen

En esta monografía presentamos algunos resultados sobre esquemas en grupos de tipo finito sobre un cuerpo, principalmente sobre sus acciones y cocientes, para finalmente probar el teorema de estructura de Rosenlicht. Este teorema muestra que todo \mathbb{k} -esquema en grupos de tipo finito G tiene un menor subesquema en grupos normal H tal que el cociente G/H es afín. Más aún, H es liso, conexo y está contenido en el centro de G_0 : en particular H es conmutativo. Además, H es un subesquema en grupos antiafín y es el mayor subesquema en grupos que satisface esa propiedad.

Abstract

In this monograph we present some results for group schemes of finite type over a field, mainly for their actions and quotients, to finally prove the Rosenlicht's structure theorem. This theorem shows that every group schemes of finite type G over a field \mathbb{k} has a smallest normal subgroup scheme H such that the quotient G/H is affine. Moreover, H is smooth, connected and contained in the center of G_0 ; in particular, H is commutative. Also, H is anti-affine and it is the largest subgroup scheme of G satisfying this property.

Índice general

1. Introducción	3
2. Esquemas en grupos	6
2.1. Definiciones y propiedades básicas de esquemas	6
2.2. Definiciones y propiedades básicas de esquemas en grupos	11
2.3. Acciones de esquemas en grupos	14
2.4. Componentes irreducibles de un esquema en grupos de tipo finito	19
3. Torsores y Cocientes	23
3.1. Definiciones y propiedades básicas	23
3.2. Espacios homogéneos y cocientes	26
4. La prueba del teorema	32
4.1. Esquemas en grupos afines de tipo finito	32
4.2. Teorema de afinización	33
4.3. Esquemas en grupos antiafines	39

Introducción

Los grupos algebraicos, y los esquemas en grupos más en general, aparecen en muchas preguntas de la geometría algebraica. En la presente monografía nos centraremos primero en probar propiedades básicas de los esquemas en grupos de tipo finito, para luego finalmente probar el siguiente resultado sobre su estructura:

Teorema 1.0.1. (Teorema de estructura de Rosenlicht) *Todo \mathbb{k} -esquema en grupos de tipo finito G tiene un menor subesquema en grupos normal H tal que el cociente G/H es afín. Además, H es liso, conexo, conmutativo, y está contenido en el centro de G_0 (la componente conexa del neutro de G). También, $\mathcal{O}_H(H) = \mathbb{k}$ y H es el mayor subesquema en grupos que satisface esa propiedad.*

En particular, todo esquema en grupos de tipo finito G puede verse como el centro de una sucesión exacta (ver definición 3.2.5) de la forma

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow G/H \longrightarrow 1$$

tal que G/H es un esquema en grupos de tipo finito afín (equivalentemente lineal) y H es un esquema en grupos antiafín, es decir, con $\mathcal{O}_H(H) = \mathbb{k}$ (ver definición 4.3.1). Las variedades abelianas, que se definen como esquemas en grupos lisos, conexos y propios, son un caso particular de los esquemas en grupo antiafines. Por ejemplo, en el caso donde \mathbb{k} es un cuerpo finito se puede ver que los esquemas en grupos antiafines son precisamente las variedades abelianas (Ver [2, §5.5]).

El Teorema 1.0.1 fue demostrado por Rosenlicht en 1956 para esquemas en grupos de tipo finito conexos y lisos (ver [12, §5]). En [4, III.3.8], Demazure y Gabriel presentan una versión del resultado. En esta versión se basa Brion para desarrollar “Some structure theorems for algebraic groups” (ver [2]), que es el artículo en el que a su vez se basa esta monografía.

Otro teorema sobre la estructura de los esquemas en grupos de tipo finito del mismo estilo que el Teorema 1.0.1 es la descomposición de Chevalley:

Teorema 1.0.2. *Todo \mathbb{k} -esquema en grupos de tipo finito G tiene un menor subesquema en grupos normal N tal que G/N es propio. Además, N es afín y conexo. Si \mathbb{k} es perfecto y G es liso, entonces N es liso también y su formación conmuta con extensiones de cuerpos.*

En particular, si G es liso y conexo sobre un cuerpo perfecto, entonces G/N es una variedad abeliana.

Una utilidad importante de estos dos teoremas es poder obtener más información sobre un \mathbb{k} -esquema en grupos de tipo finito G , a partir del hecho que tanto los esquemas en grupos afines como las variedades abelianas han sido largamente estudiados. Un ejemplo de combinar estos dos mapas cocientes para el caso donde G es liso y conexo se puede encontrar en [2, §5.1].

En esta monografía presentaremos una prueba del Teorema 1.0.1 siguiendo la prueba de M. Brion en [2] de un modo autocontenido, suponiendo del lector o lectora conocimientos de un curso estándar de geometría algebraica y nociones básicas de esquemas y álgebra conmutativa. Para consultar sobre estos tópicos una opción es dirigirse a [14] por geometría algebraica, [1] por álgebra conmutativa o a [7] por teoría de esquemas.

Podemos resumir el trabajo personal realizado como la presentación detallada de un recorrido que permite entender el enunciado y la prueba del Teorema [2, Teorema 1]. En ese sentido, el lector o lectora no encontrará re-elaboraciones mayores de las pruebas presentadas en [2], sino una presentación más detallada de las mismas, y en particular una exposición, autocontenida en la medida de lo posible, de las definiciones y resultados básicos asumidos por M. Brion en su trabajo, que permita acercarse a esta temática.

Los esquemas serán siempre \mathbb{k} -esquemas sobre un cuerpo \mathbb{k} . A menudo omitiremos la mención de \mathbb{k} , y $\bar{\mathbb{k}}$ será la clausura algebraica de \mathbb{k} . Dado un esquema X , diremos que un morfismo de esquemas $x : S \rightarrow X$ es un S -punto y notaremos $x \in X(S)$. Si $S = \text{Spec}(R)$ es un esquema afín, diremos a veces que x es un R -punto de X , notándolo como $x \in X(R)$.

Describimos a continuación el contenido de la monografía.

En el capítulo 2 se dan las definiciones y propiedades básicas de los objetos con los que vamos a trabajar en esta monografía, haciendo énfasis en mostrar varias de las técnicas usadas en el estudio de los esquemas en grupos, ya que en general son asumidas como conocidas en la literatura. Comenzamos con definiciones y notaciones sobre esquemas y vemos un resultado útil sobre las funciones globales del producto de esquemas casi compactos. Continuamos con la definición de esquemas en grupos y la prueba de algunas propiedades de estos. Luego se define la acción de un esquema en grupos en un esquema, se dan las definiciones de algunos subgrupos clásicos adecuadas a este contexto y se prueban propiedades básicas pero importantes sobre las acciones. Finalmente se describen cómo son las componentes conexas de un esquema en grupos de tipo finito, que presenta algunas

diferencias respecto a la que podemos obtener en el caso de los grupos algebraicos.

En el capítulo 3 primero damos las definiciones de torsor, cociente categórico y sucesión exacta corta, probamos que los torsores son cocientes categóricos y caracterizamos las inmersiones cerradas. Después presentamos varios resultados clásicos sobre cocientes y espacios homogéneos, como por ejemplo los teoremas de isomorfismo, adecuados al contexto de esquemas en grupos. Si bien incorporamos algunas construcciones y pruebas que son en general asumidas como conocidas en la literatura especializada, omitiremos algunas pruebas.

En el capítulo 4 comenzamos probando que todo esquema en grupos de tipo afín es lineal, es decir, que es isomorfo a un subesquema en grupos cerrados de GL_n para algún n , y vemos algunas propiedades más sobre esquemas en grupos afines. Seguimos con la construcción de la afinización de un esquema presentando en detalle el functor de afinización y varias de las propiedades del mismo en el contexto de los esquemas en grupos de tipo finito (que son presentadas de modo escueto en la bibliografía de base), para luego presentar el teorema de afinización, siguiendo aquí la prueba de [2, Teorema 3.2.1]. Finalmente definimos los esquemas en grupos antiafines y vemos algunas de sus propiedades relacionadas a su rigidez, en particular, su conmutatividad.

Esquemas en grupos

2.1. Definiciones y propiedades básicas de esquemas

En las definiciones y construcciones básicas de esquemas nos basaremos en [7, §I] y [16].

Definición 2.1.1. Sea R una \mathbb{k} -álgebra sobre un cuerpo \mathbb{k} . Definimos $Spec(R)$ como el conjunto de los ideales primos de R dotado de la topología de Zariski, es decir, que los conjuntos cerrados son aquellos de la forma $V(I) = \{P \in Spec(R) / I \subset P\}$ para algún ideal I en R .

Dado $f \in R$ definimos $U_f = \{P \in Spec(R) : f \notin P\}$. Esta familia de conjuntos es una base de abiertos de la topología. Además verifican que dados $f, g \in R$ entonces $U_f \cap U_g = U_{fg}$, por lo que la asignación $\mathcal{O}_{Spec(R)}(U_f) = R_f$ se puede extender para producir un haz de \mathbb{k} -álgebras.

Llamaremos $Spec(R)$ al espacio anillado $(Spec(R), \mathcal{O}_{Spec(R)})$ (esto es un par con un espacio topológico y un haz de anillos). Diremos que un tal espacio anillado es un esquema afín.

Definición 2.1.2. Un esquema sobre un cuerpo \mathbb{k} es un espacio localmente anillado (X, \mathcal{O}_X) (ver ([16, Def. 4.3.6]) tal que puede cubrirse con esquemas afines. Esto es que existe un cubrimiento por abiertos U_i de X tal que existen \mathbb{k} -álgebras R_i y homeomorfismos $U_i \cong Spec(R_i)$ con $\mathcal{O}_X|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{Spec(R_i)}$.

Definición 2.1.3. Dado un esquema (X, \mathcal{O}_X) diremos que X es el espacio subyacente y \mathcal{O}_X el haz estructural o haz de funciones regulares. La \mathbb{k} -álgebra $\mathcal{O}_X(X)$ es el álgebra de funciones regulares de X o las secciones globales del haz estructural (ver [16, §II]).

Definición 2.1.4. Dados dos \mathbb{k} -esquemas (X, \mathcal{O}_X) e (Y, \mathcal{O}_Y) , un morfismo de esquemas es un morfismo de espacios localmente anillados $(\varphi, \varphi^\#) : X \rightarrow Y$. Esto es un par $(\varphi, \varphi^\#)$ donde $\varphi : X \rightarrow Y$ es una función continua entre los espacios topológicos subyacentes y

$\varphi^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow \varphi_*(\mathcal{O}_X)$ un morfismo de haces de \mathbb{k} -álgebras sobre Y tal que toda vez que $\varphi(x) = y$, el mapa inducido en los anillos locales $\varphi^\# : \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \varphi_*\mathcal{O}_{X,x}$ envía el ideal maximal del primero en el ideal maximal del segundo. Cuando no haya confusión posible, diremos que $\varphi : X \rightarrow Y$ es un morfismo de esquemas.

Observación 2.1.5. Si $(m, m^\#) : R \rightarrow S$ y $(n, n^\#) : S \rightarrow T$ son morfismos de esquemas entonces la composición está dada por $(n \circ m, (n \circ m)^\#) : R \rightarrow T$, con $(n \circ m)^\# = n_*(m^\#) \circ n^\# : \mathcal{O}_T \rightarrow (n \circ m)_*\mathcal{O}_R$. En particular, si consideramos las secciones globales tenemos que $m^\#(S) : \mathcal{O}_S(S) \rightarrow (m_*\mathcal{O}_R)(S) = \mathcal{O}_R(R)$ y $n^\#(T) : \mathcal{O}_T(T) \rightarrow (n_*\mathcal{O}_S)(T) = \mathcal{O}_S(S)$, y nos queda que $(n \circ m)^\#(T) = n_*(m^\#)(S) \circ n^\#(T) : \mathcal{O}_T(T) \rightarrow \mathcal{O}_R(R)$.

Definición 2.1.6. Diremos que un \mathbb{k} -esquema (X, \mathcal{O}_X) es separado sobre \mathbb{k} cuando el morfismo diagonal $\Delta_X : X \rightarrow X \times_{\mathbb{k}} X$, inducido por los mapas identidad $id : X \rightarrow X$ en cada coordenada, es una inmersión cerrada (ver 2.1.8).

A partir de ahora todos los esquemas que mencionemos asumiremos que son separados.

Ejemplo. El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{k})$ puede dotarse de una estructura de esquema (ver [16, 4.5.7]). $\mathbb{P}^n(\mathbb{k})$ no es un espacio afín a menos que $n = 0$.

Proposición 2.1.7. Sean (X, \mathcal{O}_X) e (Y, \mathcal{O}_Y) dos esquemas y $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de X . Consideremos una familia de morfismos de esquemas $(f_i, f_i^\#) : U_i \rightarrow Y$ tal que $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} : U_i \cap U_j \rightarrow Y$ (como morfismos de esquemas). Entonces existe un morfismo de esquemas $(f, f^\#) : X \rightarrow Y$ tal que $f|_{U_i} = f_i$ para todo $i \in I$.

Demostración. Tenemos que definir el par $(f, f^\#)$. Para la función continua entre los espacios topológicos $f : X \rightarrow Y$ es sencillo. Veremos cómo definir $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$.

Sea $U \subset Y$ y $s \in \mathcal{O}_Y(U)$. Entonces $f^{-1}(U) = \cup_i (f^{-1}(U) \cap U_i)$. Definimos $f^\#(s) \in f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ pegando $f_i^\#(s) \in (f_i)_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(f_i^{-1}(U)) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U) \cap U_i)$ en el haz \mathcal{O}_X , para producir una sección de $\mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ (ver [16, Definición 2.2.6]). Efectivamente tenemos que

$$res_{f^{-1}(U) \cap U_i, f^{-1}(U) \cap U_i \cap U_j} (f_i^\#(s)) = res_{f^{-1}(U) \cap U_j, f^{-1}(U) \cap U_i \cap U_j} (f_j^\#(s)),$$

por lo que esto define una única sección en $\mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$. □

Recordamos ahora algunas definiciones de propiedades de esquemas y morfismos de esquemas.

Definición 2.1.8. Sean X e Y dos \mathbb{k} -esquemas y $(\varphi, \varphi^\#) : X \rightarrow Y$ un morfismo de esquemas.

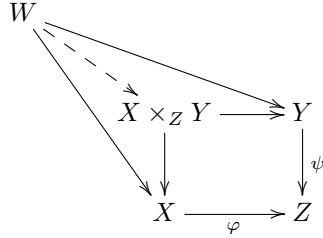
- X es de tipo finito si $\mathcal{O}_X(U)$ es una álgebra de tipo finito sobre \mathbb{k} para todo abierto U de X .
- X es irreducible si su espacio topológico subyacente es irreducible.
- X es reducido si para todo x en X el anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$ es reducido. Esto es equivalente a que $\mathcal{O}(U)$ sea reducido para todo abierto $U \subset X$ (ver [15, 26.12.2]).
- X es geoméricamente reducido si para todo x en X y toda extensión de cuerpos \mathbb{k}' de \mathbb{k} , el anillo local $\mathcal{O}_{X_{\mathbb{k}'},x}$ es reducido (la construcción del esquema $X_{\mathbb{k}'}$ se encuentra a continuación de estas definiciones).
- Diremos que X es liso si el conjunto de puntos singulares es vacío (ver [9, Sección A.h]).
- El esquema X es propio si para todo esquema Z la proyección $X \times Z \rightarrow Z$ es cerrada.
- Diremos que $(\varphi, \varphi^\#)$ es plano si para todo punto x en X el anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$ es plano sobre $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$. Si además φ es sobreyectivo, entonces diremos que $(\varphi, \varphi^\#)$ es fielmente plano.
- $(\varphi, \varphi^\#)$ es una inmersión cerrada si la imagen de φ es un conjunto cerrado de Y y el morfismo de haces $\mathcal{O}_Y \rightarrow \varphi_*\mathcal{O}_X$ es sobreyectivo. En particular, en este caso la imagen esquemática de $(\varphi, \varphi^\#)$ tiene soporte en el cerrado $\varphi(X)$.
- Decimos que el morfismo $(\varphi, \varphi^\#)$ es casi compacto si Y tiene un cubrimiento por abiertos afines tal que sus preimágenes son casi compactas (como espacios topológicos).

Observación 2.1.9. Sean X, Y y Z tres esquemas y $(\varphi, \varphi^\#) : X \rightarrow Z$ y $(\psi, \psi^\#) : Y \rightarrow Z$ dos morfismos de esquemas. Entonces existe un esquema $X \times_Z Y$ y un par de morfismos de esquemas tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 X \times_Z Y & \longrightarrow & Y \\
 \downarrow & & \downarrow \psi \\
 X & \xrightarrow{\varphi} & Z
 \end{array}$$

Además si tenemos otro esquema W y morfismos de W a X e Y que cumplen esta propiedad, entonces existe un único morfismo $W \rightarrow X \times_Z Y$ tal que el siguiente diagrama

conmuta:



Podemos encontrar una prueba de la existencia de este esquema en [16, 9.1.1].

Definición 2.1.10. Con las notaciones de más arriba, llamaremos $X \times_Z Y$ el producto fibrado de X e Y . En los casos que no genere confusiones omitiremos la mención a cuáles son los morfismos de X e Y en Z .

Ejemplo. Sean $X = \text{Spec}(A)$, $Y = \text{Spec}(B)$ y $Z = \text{Spec}(C)$ tres esquemas afines, donde A , B y C son \mathbb{k} -álgebras, y $X \rightarrow Z$ e $Y \rightarrow Z$ morfismos de esquemas inducidos por $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(C)$ y $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(C)$ respectivamente. Entonces el producto fibrado es $\text{Spec}(A \otimes_C B)$ con los morfismos inducidos por los morfismos de álgebras evidentes $A \rightarrow A \otimes_C B$ y $B \rightarrow A \otimes_C B$.

Observación 2.1.11. Supongamos ahora que tenemos un \mathbb{k} -esquema X con morfismo estructural $\pi : X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{k})$ y una extensión de \mathbb{k} -álgebras $\mathbb{k} \rightarrow R$. Tenemos entonces la existencia del producto fibrado y el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X \times_{\text{Spec}(\mathbb{k})} \text{Spec}(R) & \longrightarrow & X \\ \pi_R \downarrow & & \downarrow \pi \\ \text{Spec}(R) & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathbb{k}) \end{array}$$

Definición 2.1.12. Llamaremos al esquema $X \times_{\text{Spec}(\mathbb{k})} \text{Spec}(R)$ la extensión de escalares a R y lo notaremos como X_R . Podemos ver a X_R como un R -esquema, con morfismo estructural π_R .

A continuación demostraremos un lema que describe cuáles son las funciones regulares de un producto de esquemas casi compactos, y nos será de utilidad en varias demostraciones.

Lema 2.1.13. Sean X e Y esquemas casi compactos, entonces las álgebras $\mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathbb{k}} \mathcal{O}_Y(Y)$ y $\mathcal{O}_{X \times Y}(X \times Y)$ son isomorfas. En particular, tenemos un isomorfismo canónico $\mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathbb{k}} R \cong \mathcal{O}_{X_R}(X_R)$.

Demostración. Presentaremos la prueba desarrollada en [2, Lema 2.3.3]. El caso cuando ambos esquemas son afines es sencillo. Supongamos que tenemos X afín e Y cualquiera, entonces podemos elegir un cubrimiento finito $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$ de Y , luego las intersecciones $V_i \cap V_j$ son afines. Tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow \prod_i \mathcal{O}_Y(V_i) \xrightarrow{d_Y} \prod_{i,j} \mathcal{O}_Y(V_i \cap V_j)$$

donde $d_Y((f_i)_i) := (f_i \upharpoonright_{V_i \cap V_j} - f_j \upharpoonright_{V_i \cap V_j})_{i,j}$. Tensorizando con $\mathcal{O}_X(X)$ obtenemos esta otra sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathbb{k}} \mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow \prod_i \mathcal{O}_{X \times V_i}(X \times V_i) \xrightarrow{d_{X,Y}} \prod_{i,j} \mathcal{O}_{X \times (V_i \cap V_j)}(X \times (V_i \cap V_j))$$

donde $d_{X,Y}$ es definida similarmente y usamos que X y los V_i son afines. Como los $X \times V_i$ forman un cubrimiento abierto de $X \times Y$, el núcleo de $d_{X,Y}$ es $\mathcal{O}(X \times Y)$, entonces tenemos probado este caso.

En el caso general tomamos un cubrimiento afín finito $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ de X y utilizando el mismo procedimiento obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathbb{k}} \mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow \prod_i \mathcal{O}_{U_i \times Y}(U_i \times Y) \xrightarrow{d_{X,Y}} \prod_{i,j} \mathcal{O}_{(U_i \cap U_j) \times Y}((U_i \cap U_j) \times Y)$$

El núcleo de $d_{X,Y}$ nos queda $\mathcal{O}(X \times Y)$ por lo que el lema queda demostrado. \square

Observación 2.1.14. Sean X, X', Y e Y' esquemas y $(f, f^\#)$ y $(g, g^\#)$ dos morfismos de esquemas de X en X' y de Y en Y' respectivamente. Por la propiedad universal de $X \times Y$, tenemos entonces un único morfismo de esquemas $(h, h^\#)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} X \times Y & \xrightarrow{p_Y} & Y & & \\ p_X \downarrow & \searrow h & \searrow g & & \\ X & & X' \times Y' & \xrightarrow{p_{Y'}} & Y' \\ & \searrow f & \downarrow p_{X'} & & \downarrow \\ & & X' & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathbb{k}) \end{array}$$

donde $h = f \times g : X \times Y \rightarrow X' \times Y'$, $h(x, y) = (f(x), g(y))$. Recordando la Observación 2.1.5 tenemos que $p_{X'^*}(h^\#)(X') : p_{X'^*}(\mathcal{O}_{X' \times Y'})(X') = \mathcal{O}_{X' \times Y'}(X' \times Y') \rightarrow p_{X'^*}h_*(\mathcal{O}_{X \times Y})(X') = \mathcal{O}_{X \times Y}(X \times Y)$, que es el morfismo de álgebras $h^\#(X' \times Y') : \mathcal{O}_{X' \times Y'}(X' \times Y') \rightarrow h_*(\mathcal{O}_{X \times Y})(X \times Y)$, y lo mismo sucede con $p_{Y'^*}(h^\#)(Y')$. El dia-

grama anterior entonces induce el siguiente diagrama en las álgebras de funciones globales:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{O}_{X \times Y}(X \times Y) & \xleftarrow{p_Y^\#} & \mathcal{O}_Y(Y) & & \\
 \uparrow p_X^\# & \swarrow h^\# & \swarrow g^\# & & \\
 \mathcal{O}_X(X) & & \mathcal{O}_{X' \times Y'}(X' \times Y') & \xleftarrow{p_{Y'}^\#} & \mathcal{O}_{Y'}(Y') \\
 & \swarrow f^\# & \uparrow p_{X'}^\# & & \uparrow \\
 & & \mathcal{O}_{X'}(X') & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{k}
 \end{array}$$

Luego, si tomamos $j \in \mathcal{O}_{X'}(X')$ y $k \in \mathcal{O}_{Y'}(Y')$, tenemos que $p_{X'}^*(h^\#)(p_{X'}^\#(j)) = (p_{X'} \circ h)^\#(j) = (f \circ p_X)^\#(j) = f_*(p_X^\#)(f^\#(j))$ y $p_{Y'}^*(h^\#)(p_{Y'}^\#(k)) = (p_{Y'} \circ h)^\#(k) = (g \circ p_Y)^\#(k) = g_*(p_Y^\#)(g^\#(k))$. Entonces utilizando la correspondencia del Lema 2.1.13, y que esta hace corresponder a $j \otimes k$ con $p_{X'}^\#(j)p_{Y'}^\#(k)$, obtenemos que $h^\#$ es el morfismo de álgebras inducido por $f^\# \otimes g^\# : \mathcal{O}_{X'} \otimes \mathcal{O}_{Y'}(Y') \rightarrow \mathcal{O}_X(X) \otimes \mathcal{O}_Y(Y)$.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}_{X'}(X') \otimes_{\mathbb{k}} \mathcal{O}_{Y'}(Y') & \xrightarrow{f^\# \otimes g^\#} & \mathcal{O}_{X'}(X') \otimes_{\mathbb{k}} \mathcal{O}_{Y'}(Y') \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{O}_{X' \times Y'}(X' \times Y') & \xrightarrow{h^\#} & \mathcal{O}_{X \times Y}(X \times Y)
 \end{array}$$

2.2. Definiciones y propiedades básicas de esquemas en grupos

Definición 2.2.1. Un \mathbb{k} -esquema en grupos es un esquema G sobre \mathbb{k} equipado con morfismos de esquemas $m : G \times G \rightarrow G$, $e : \text{Spec}(\mathbb{k}) \rightarrow G$ e $i : G \rightarrow G$ que cumplen los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc}
 G \times G \times G & \xrightarrow{m \times id_G} & G \times G \\
 id_G \times m \downarrow & & \downarrow m \\
 G \times G & \xrightarrow{m} & G
 \end{array}$$

que representa la asociatividad,

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Spec}(\mathbb{k}) \times G & \xrightarrow{e \times id_G} & G \times G & \xleftarrow{id_G \times e} & G \times \text{Spec}(\mathbb{k}) \\
 & \searrow p_2 & \downarrow m & \swarrow p_1 & \\
 & & G & &
 \end{array}$$

que representa que e es el neutro, y

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{id_G \times i} & G \times G & \xleftarrow{i \times id_G} & G \\ & \searrow c_e & \downarrow m & \swarrow c_e & \\ & & G & & \end{array}$$

que representa que i es el mapa inverso, donde $st_G : G \rightarrow Spec(\mathbb{k})$ denota el morfismo estructural y $c_e = e \circ st_G$ es el morfismo constante e . Usualmente omitiremos la mención al cuerpo \mathbb{k} y diremos simplemente que G es un esquema en grupos.

Observación 2.2.2. La definición de esquemas en grupos puede ser caracterizada en términos del functor de puntos de la siguiente forma.

Dado un esquema X , definimos el functor de puntos h_X como un functor de la categoría de esquemas opuesta, a la que denominaremos Sch^{op} , a la categoría de conjuntos, $Sets$, de la siguiente manera:

- A cada esquema S le corresponde el conjunto de morfismos de S a X , que notamos $X(S)$.
- A cada morfismo de esquemas $f : S \rightarrow T$ le corresponde el mapa $h_X(T) \rightarrow h_X(S)$ que manda a $g \in h_X(T) = X(T)$ a $g \circ f \in h_X(S) = X(S)$.

Decimos que un functor de Sch^{op} a $Sets$ es representable si es de la forma h_X para algún esquema X . Esta construcción nos asigna a cada esquema un functor de Sch^{op} a $Sets$ y se puede probar que cada esquema queda determinado por su functor de puntos (ver [7, VI-2]). En particular, esta construcción nos da una correspondencia entre los esquemas en grupos y los funtores en grupos, es decir, los funtores de Sch^{op} a $Groups$, donde $G(S)$ será entonces un grupo abstracto.

Ejemplo. Si V es un espacio \mathbb{k} -espacio vectorial, podemos verlo como un esquema tomándolo como un functor $Sch^{op} \rightarrow Sets$ (ver Observación 2.2.2). V está definido como $V(Spec(R)) = V \otimes_{\mathbb{k}} R$ y si $f : R \rightarrow R'$ es un morfismo de \mathbb{k} -álgebras, entonces $V(f) = id_V \otimes f : V \otimes_{\mathbb{k}} R \rightarrow V \otimes_{\mathbb{k}} R'$.

Observemos que si $\dim V = n$, entonces $\mathbb{k}[V] \cong S(V^\vee) \cong \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$. Si V es de dimensión infinita y $B = \{e_i : i \in I\}$ es una base, entonces $\mathbb{k}[V] \cong \mathbb{k}[B^\vee]$, donde $B^\vee = \{\delta_i : i \in I\} \subset V^\vee$ está dada por $\delta_i(e_j) = \delta_{ij}$. Para ver esto último, podemos observar que un morfismo de \mathbb{k} -álgebras $\mathbb{k}[B^\vee] \rightarrow R$ está determinado por sus valores en $\mathbb{k}[X]$ para todo subconjunto $X \subset B^\vee$.

Definición 2.2.3. Sea G un esquema en grupos. Un subesquema en grupos de G es un subesquema H localmente cerrado tal que $H(S)$ es un subgrupo de $G(S)$ para cualquier esquema S .

Definición 2.2.4. Si G es un esquema en grupos y H es un subesquema en grupos de G , diremos que H es normal en G si $H(S)$ es un subgrupo normal de $G(S)$ para todo esquema S .

Diremos que un esquema en grupos (G, m, i, e) es de tipo finito si el esquema G es de tipo finito. Más en general, diremos que (G, m, i, e) cumple la propiedad P si el esquema G la cumple (así por ejemplo diremos que (G, m, i, e) es un esquema en grupos afín si G es un esquema afín).

Ejemplo. El grupo aditivo \mathbb{G}_a es el esquema en grupos formado por la recta afín \mathbb{A}^1 equipada con la suma. Tenemos $m : \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a \rightarrow \mathbb{G}_a$ definida por $m(x, y) = x + y$ y $m^\#(f)(x, y) = f(x + y)$, $i : \mathbb{G}_a \rightarrow \mathbb{G}_a$ definida por $i(x) = -x$ y $i^\#(f)(x) = f(-x)$, y $e : \text{Spec}(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{G}_a$ definida por $e = 0$.

Por otro lado, el grupo multiplicativo \mathbb{G}_m es el esquema en grupos formada por $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ equipado con la multiplicación. En este caso los morfismos del esquema en grupo están definidos por $m(x, y) = xy$ y $m^\#(f)(x, y) = f(xy)$, $i(x) = x^{-1}$ y $i^\#(f)(x) = f(1/x)$, y $e = 1$ (recordar que $\mathbb{k}[G_m] = \mathbb{k}[x, x^{-1}]$).

Ejemplo. Dado un espacio vectorial V , el esquema en grupos $GL(V)$ es el functor de grupos que le asigna a cada esquema S el grupo de automorfismos del haz de \mathcal{O}_S -módulos $\mathcal{O}_S \otimes_{\mathbb{k}} V$. Cuando V es un espacio vectorial de dimensión finita n , al elegir una base tenemos una identificación de V con \mathbb{k}^n y de $GL(V)(S)$ con $GL_n(\mathcal{O}_S(S))$, que es el grupo de matrices invertibles de tamaño $n \times n$ con coeficientes en $\mathcal{O}_S(S)$. Por lo tanto podemos representar a $GL(V)$ con el abierto afín del esquema \mathbb{A}^{n^2} que es el complemento del esquema que es el cero del determinante. Este esquema en grupos GL_n es liso, conexo, afín y de tipo finito.

Ejemplo. Las variedades abelianas, que se definen como esquemas en grupos lisos, conexos y propios, son una clase de esquemas en grupos bastante estudiada. Un ejemplo de esto son las curvas elípticas (ver [13, Teorema 4.5.3]).

Definición 2.2.5. Decimos que un esquema en grupos es lineal si es isomorfo a un subesquema en grupos cerrado de GL_n para algún n .

Proposición 2.2.6. Sea G un esquema en grupos localmente de tipo finito y e su neutro. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. G es liso.
2. G es geoméricamente reducido.

3. $G_{\bar{\mathbb{k}}}$ es reducido en e .

Demostración. Presentamos la prueba que se encuentra en [2, Proposición 2.1.12]. Tenemos que (1) implica (2) dado que si G es liso entonces necesariamente los anillos locales para toda extensión y para cualquier punto tienen que ser reducidos, y que (2) implica (3) se desprende de la definición. Queda probar entonces que (3) implica (1) y para esto podemos remplazar G por $G_{\bar{\mathbb{k}}}$ y asumir por lo tanto que \mathbb{k} es algebraicamente cerrado.

Sea $g \in G(\mathbb{k})$ un \mathbb{k} -punto en G . El anillo local $\mathcal{O}_{G,g}$ es isomorfo a $\mathcal{O}_{G,e}$ por el morfismo inducido por la multiplicación a izquierda de g en G , por lo tanto tenemos entonces que $\mathcal{O}_{G,g}$ es reducido, resultando entonces que todo subesquema abierto de tipo finito de G es reducido. Como G es de tipo finito, entonces G es reducido. Entonces G debe contener al menos un punto \mathbb{k} -racional liso g . Utilizando nuevamente el morfismo inducido por la multiplicación a izquierda tenemos que G es liso. \square

2.3. Acciones de esquemas en grupos

En esta sección seguiremos de cerca los enunciados y pruebas de [2, §2.2 y §2.3], exceptuando en el Lema 2.3.3, en donde presentaremos en detalle una construcción que en general es asumida por conocida en la bibliografía especializada.

Definición 2.3.1. Una acción de un esquema en grupos G en un esquema X es un morfismo $a : G \times X \rightarrow X$ tal que el mapa $a(S)$ nos da una acción del grupo $G(S)$ en el conjunto $X(S)$ para cualquier esquema S .

Esta condición es equivalente a que los siguientes diagramas de morfismos de esquemas sean conmutativos:

$$\begin{array}{ccc}
 G \times G \times X & \xrightarrow{m \times id_X} & G \times X \\
 id_G \times a \downarrow & & \downarrow a \\
 G \times X & \xrightarrow{a} & X \\
 \\
 Spec(\mathbb{k}) \times X & \xrightarrow{e \times id_X} & G \times X \\
 & \searrow p_2 & \downarrow a \\
 & & G
 \end{array}$$

Recordemos que dar una acción de un grupo abstracto G en un conjunto X es equivalente a dar un morfismo de grupos $G \rightarrow \text{Biy}(X)$, en el grupo de las biyecciones de X . Para generalizar esta idea al contexto de las acciones de esquemas en grupos en esquemas, necesitamos primero dar la definición del functor de automorfismos de un esquema X .

Definición 2.3.2. Llamaremos functor de automorfismos, y lo notaremos Aut_X , al functor en grupos que le asigna a cada esquema S el grupo de automorfismos del S -esquema $X \times S$ con morfismo estructural $p_2 : X \times S \rightarrow S$. Los S -puntos de Aut_X son los isomorfismos $(f, Id_S) : X \times S \rightarrow X \times S$, donde $f : X \times S \rightarrow X$ es un morfismo de esquemas. Estos pueden ser vistos entonces como una familia de automorfismos de X parametrizada por S .

Lema 2.3.3. *Dar una acción de un esquema en grupos G en un esquema X es equivalente a dar una transformación natural entre los funtores G y Aut_X .*

Demostración. La correspondencia entre las acciones de G en X y las transformaciones naturales entre los funtores G y Aut_X está dada de la siguiente forma:

- Dada una acción a de G en X , definimos $\rho : G \rightarrow Aut_X$ de forma que si $g : S \rightarrow G$ es un S -punto, entonces $\rho(S)(g) : X \times S \rightarrow X \times S$ está dada por $\rho(S)(g)(T)(x, s) = (a(T)(g \circ s, x), s) \in (X \times S)(T)$, donde $(x, s) \in (X \times S)(T)$. Esto nos da un functor en grupos porque dados g y h dos S -puntos tenemos que

$$\begin{aligned} \rho(S)(gh)(T)(x, s) &= (a(T)(gh \circ s, x), s) \\ &= (a(T)(g \circ s, a(T)(h \circ s, x)), s) \\ &= \rho(S)(g)(T)(a(T)(h \circ s, x), s) \\ &= \rho(S)(g)(T)\rho(S)(h)(T)(x, s). \end{aligned}$$

- Por otro lado, dada ρ transformación natural entre los funtores G y Aut_X , podemos definir $a : G \times X \rightarrow X$ por $a(S)(g, x) = p_1 \circ \rho(S)(g)(x, Id_S) : S \rightarrow X$.

□

Definición 2.3.4. Diremos que un esquema X equipado con una acción a de G es un G -esquema. Dados un esquema S , $g \in G(S)$ y $x \in X(S)$, notaremos $a(g, x)$ como $g \cdot x$.

Definición 2.3.5. Sean X e Y dos G -esquemas con acciones a y b . Un morfismo de G -esquemas $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo de esquemas tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{a} & X \\ id_G \times f \downarrow & & \downarrow f \\ G \times Y & \xrightarrow{b} & Y \end{array}$$

En este caso decimos que f es G -equivariante y tenemos $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$. Si la acción b de G en Y es la acción trivial decimos que f es G -invariante.

A continuación daremos versiones de definiciones habituales en el marco de acciones de grupos adecuadas a este contexto.

Definición 2.3.6. Sean X un G -esquema con acción a e Y un subesquema cerrado de X . Utilizando la correspondencia del Lema 2.3.3, podemos extender algunos conceptos usuales en teoría de grupos a este contexto de la siguiente forma:

- El normalizador de Y en G es el functor de grupos $N_G(Y)$ que asocia a cada esquema S el conjunto de los $g \in G(S)$ que inducen un automorfismo de $Y \times S$.
- El centralizador de Y en G es el functor de grupos $C_G(Y)$ que asocia a cada esquema S el conjunto de los $g \in G(S)$ que inducen el automorfismo identidad en $Y \times S$.
- El núcleo de a es el centralizador de X en G , o lo que es lo mismo, el núcleo del correspondiente homomorfismo de functores en grupos.
- La acción de a es fiel si su núcleo es trivial, o equivalentemente, cuando para todo esquema S todo elemento no trivial de $G(S)$ actúa no trivialmente en $X \times S$.
- El functor de puntos fijos de X es el subfunctor X^G que asocia a cada esquema S el conjunto de todos los $x \in X(S)$ tal que para todo S -esquema S' y toda $g \in G(S')$ tenemos $g \cdot x = x$. En esta última ecuación estamos viendo a x como S' -punto vía $x \circ f$ con $f : S' \rightarrow S$.

Ejemplo. Todo esquema en grupos actúa en sí mismo por multiplicación a izquierda por el mapa $\lambda : G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow xy$. También actúa por conjugación por el mapa $Int : G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow xyx^{-1}$. La acción λ es fiel y el núcleo de Int es el centro de $G(S)$, que notaremos $Z(S)$.

Observación 2.3.7. Sea $a : G \times X \rightarrow X$ una acción de un esquema en grupos casi-compacto G en un esquema casi compacto X . Sea $g \in G(S)$ un S -punto, donde $S = Spec(R)$ es un esquema afín. Entonces, deducimos del Lema 2.3.3 que $\rho(S)(g) : X \times S \rightarrow X \times S, \rho(S)(g)(x, s) = (a(T)(g^{-1} \circ s, x), s)$, para todo esquema T y T -puntos $s : T \rightarrow S$ y $x : T \rightarrow X$, es un automorfismo de S -esquemas, que notaremos $(\psi_g, \psi_g^\#)$. Considerando las secciones globales, tenemos un isomorfismo

$$\rho(g) : \mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathbb{k}} R \cong \mathcal{O}_{X \times S}(X \times S) \rightarrow (\psi_g)_* \mathcal{O}_{X \times S}(X \times S) \cong \mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathbb{k}} R.$$

Es fácil ver la familia de morfismos $G(S) \ni g \mapsto \rho(g)$ induce una acción lineal (una representación) de G en el esquema $\mathcal{O}_X(X)$. Si $x \in X$, notaremos $f(g^{-1} \cdot x) = \rho(g)(f)(x) \in \mathcal{O}_{X,x}$.

Entonces, si K es el núcleo de la acción de G en $\mathcal{O}_X(X)$, tenemos $g \in K(R)$ si y solamente si $f(g \cdot x) = f(x)$ para toda $f \in \mathcal{O}_X(X)$ y $x \in X$. En efecto, $\rho(g)(f) = f \in \mathcal{O}_X(X)$ si y solamente si su evaluación en todo $x \in X$ coincide, y $\mathcal{O}_X(X) \otimes 1$ genera $\mathcal{O}_X(X) \otimes R$ como R -módulo.

Proposición 2.3.8. *Sea G un esquema en grupos de tipo finito actuando en un esquema de tipo finito X por una acción a .*

1. *Si $x \in X(\mathbb{k})$ es un \mathbb{k} -punto cerrado de X , entonces la imagen del mapa de órbita $a_x : G \rightarrow X$, $a_x(g) = g \cdot x$, es localmente cerrada.*
2. *Si \mathbb{k} es algebraicamente cerrado y G es liso, entonces existe un \mathbb{k} -punto $x \in X$ tal que la imagen de a_x es cerrada.*

Demostración. 1. Sea $\pi : X_{\overline{\mathbb{k}}} \rightarrow X$ el mapa natural. Dado que π es abierto, fielmente plano y casi compacto, alcanza con probar solamente que $\pi^{-1}(a_x(G))$ es localmente cerrado (se puede ver en [8, IV.2.3.12]). Como $\pi^{-1}(a_x(G))$ es la imagen de $(a_x)_{\overline{\mathbb{k}}}$, podemos asumir que \mathbb{k} es algebraicamente cerrado.

Como $a_x(G)$ es constructible por el Teorema de Chevalley (ver [7, Teorema V-1]), contiene un abierto denso U de su clausura. Luego el pull-back $a_x^{-1}(U)$ es un conjunto abierto no vacío del espacio topológico subyacente a G , y como los \mathbb{k} -puntos son densos, tomando la familia $ga_x^{-1}(U)$ con $g \in G(\mathbb{k})$ cubrimos este conjunto. Esto implica que $a_x(G)$ es cubierto por la familia gU y por lo tanto es abierto en su clausura.

2. Sea $Y \subset X$ un subesquema cerrado G -estable de dimensión mínima y $x \in Y(\mathbb{k})$. Si $a_x(G)$ no es cerrado, entonces sea $Z = \overline{a_x(G)} \setminus a_x(G)$ equipada con la estructura de subesquema reducido. Entonces Z es un subesquema cerrado de Y y es estable por $G(\mathbb{k})$. Como el normalizador de Z es representable y $G(\mathbb{k})$ es denso en G , Z es estable por G . Luego tenemos $\dim(Z) < \dim(a_x(G)) \leq \dim(Y)$, lo que es una contradicción.

□

Proposición 2.3.9. *Sea G un esquema en grupos de tipo finito y X un G -esquema de tipo finito. Entonces el G -módulo $\mathcal{O}_G(X)$, con la acción de la Observación 2.3.7, es la unión de sus G -submódulos de dimensión finita.*

Demostración. La acción de G en X nos da un homomorfismo de álgebras $a^\#(X) : \mathcal{O}_X(X) \rightarrow a_*(\mathcal{O}_{G \times X})(X) = \mathcal{O}_{G \times X}(G \times X) \cong \mathcal{O}_G(G) \otimes_{\mathbb{k}} \mathcal{O}_X(X)$ (por 2.1.13). Eligiendo una base (ψ_i) del espacio vectorial $\mathcal{O}_G(G)$ tenemos que para todo $f \in \mathcal{O}_X(X)$, existe

una familia (f_i) de elementos de $\mathcal{O}(X)$ tal que $f_i \neq 0$ para una cantidad finita de índices y $a^\#(f) = \sum_i \varphi_i \otimes f_i$. Dado un esquema S y $g \in G(S)$, tenemos el automorfismo $\rho(g)$ de la \mathcal{O}_S -álgebra $\mathcal{O}_S \otimes_{\mathbb{k}} \mathcal{O}_X(X)$ dado por $\rho(g)(f) = f \circ a(g^{-1})$, por lo que $\rho(g)(f) = \sum_i \psi_i(g^{-1})f_i$.

Ahora aplicamos esto a la acción de G en sí mismo por multiplicación a izquierda. En este caso tenemos $m^\#(\varphi_i) = \varphi_i \circ m = \sum_j \gamma_{ij} \otimes \psi_{ij}$ para dos familias $(\gamma_{ij}), (\psi_{ij}) \subset \mathcal{O}_G(G)$. Nos queda entonces $\varphi_i(h^{-1}g^{-1}) = \sum_i \gamma_{ij}(g^{-1}) \otimes \psi_{ij}(h^{-1})$, por lo que $\rho(g)\rho(h)(f) = \sum_{i,j} \gamma_{ij}(g^{-1})\psi_{ij}(h^{-1})f_i$. Por lo tanto el espacio generado por la familia f_i en $\mathcal{O}_G(G)$ es un G -submódulo de dimensión finita que contiene a f , ya que $f = \sum_i \varphi_i(e)f_i$. \square

Observación 2.3.10. Supongamos ahora X un esquema de tipo finito afín y G un esquema en grupos de tipo finito afín actuando en X . Entonces el álgebra $\mathbb{k}[G]$ es un álgebra de Hopf con las operaciones inducidas por los morfismos que hacen que G sea un esquema en grupos. A su vez, $\mathbb{k}[X]$ es un $\mathbb{k}[G]$ -comódulo a izquierda con el morfismo $\mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}[G \times X] \cong \mathbb{k}[G] \otimes \mathbb{k}[X]$ inducido por la acción de G en X .

Si G es un esquema en grupos de tipo finito, tenemos que $m^\#(G) : \mathcal{O}_G(G) \rightarrow \mathcal{O}_{G \times G}(G \times G) \cong \mathcal{O}_G(G) \otimes \mathcal{O}_G(G)$ es un coproducto y es fácil ver que $\mathcal{O}_G(G)$ es un álgebra de Hopf. Luego, la Proposición 2.3.9 se deduce del resultado que todo comódulo sobre un álgebra de Hopf es racional (ver [3, Corolario 2.2.9]).

De la proposición 2.3.9 podemos deducir el siguiente resultado de linealización de acciones:

Proposición 2.3.11. *Sea G un esquema en grupos de tipo finito y X un G -esquema afín de tipo finito. Existe un G -módulo V de dimensión finita y una inmersión cerrada G -equivariante $i : X \rightarrow V$.*

Demostración. Podemos elegir una cantidad finita de generadores f_1, \dots, f_n del álgebra $\mathcal{O}(X)$. Por la proposición 2.3.9 cada f_i está contenida en algún G -submódulo $W_i \subset \mathcal{O}(X)$ de dimensión finita. Ahora si tomamos W la suma de estos W_i es un G -submódulo de $\mathcal{O}(X)$ de dimensión finita el cual genera el álgebra $\mathcal{O}(X)$. Esto define un homomorfismo sobreyectivo de álgebras $Sym(W) \rightarrow \mathcal{O}(X)$, donde $Sym(W)$ es el álgebra simétrica generada por W , que es equivariante para la acción natural de G en $Sym(W)$. Esto nos da un correspondiente morfismo G -equivariante de X en $Sym(W)$ que es una inmersión cerrada. \square

2.4. Componentes irreducibles de un esquema en grupos de tipo finito

En el caso de los grupos algebraicos las componentes conexas son irreducibles e isomorfas entre sí. La prueba clásica para el caso \mathbb{k} algebraicamente cerrado de que las componentes conexas son irreducibles utiliza que los puntos cerrados son \mathbb{k} -puntos. A continuación estudiaremos que sucede respecto a esto en el caso de los esquemas en grupos de tipo finito.

Definición 2.4.1. Decimos que un esquema X es étale (sobre $\text{Spec}(\mathbb{k})$) si y solo si su espacio topológico subyacente es discreto y los anillos locales son extensiones separables finitas de \mathbb{k} . Se observa entonces que todo esquema étale es localmente de tipo finito.

Teorema 2.4.2. *Sea X un esquema localmente de tipo finito. Existe un esquema étale $\pi_0(X)$ y un morfismo $\gamma_X : X \rightarrow \pi_0(X)$ tal que para todo Y esquema étale y todo morfismo de esquemas $f : X \rightarrow Y$, f factoriza únicamente a través de γ_X . Además tenemos que γ es fielmente plano y sus fibras son exactamente las componentes conexas de X .*

Demostración. Se puede encontrar una prueba de este teorema en [4, I.4.6.5]. □

Definición 2.4.3. Al esquema $\pi_0(X)$ del teorema anterior lo llamaremos esquema de las componentes conexas de X .

Observación 2.4.4. 1. La formación de $\pi_0(X)$ conmuta con extensiones de cuerpos (ver [4, I.4.6.7]).

2. Una consecuencia del Teorema 2.4.2 es que dado un morfismo de esquemas $f : X \rightarrow Y$, donde X e Y son localmente de tipo finito para que valga lo anterior, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \gamma_X \downarrow & & \downarrow \gamma_Y \\ \pi_0(X) & \xrightarrow{\pi_0(f)} & \pi_0(Y) \end{array}$$

donde $\pi_0(f)$ está únicamente determinada. Aplicando esto a las proyecciones de un producto de esquemas obtenemos un isomorfismo entre $\pi_0(X \times Y)$ y $\pi_0(X) \times \pi_0(Y)$.

3. Algunas de las propiedades antes mencionadas se resumen en que π_0 es un functor de la categoría de esquemas de tipo finito a la de los esquemas étale.

4. Dado un esquema en grupos G localmente de tipo finito existe una única estructura de esquema en grupos en $\pi_0(G)$ de forma que γ sea un homomorfismo. Incluso dada una acción de G en un esquema en grupos X de tipo finito también tendremos una acción compatible de $\pi_0(G)$ en $\pi_0(X)$.

Antes de enunciar y probar el teorema acerca de las componentes conexas de G veremos el siguiente lema que nos será de utilidad.

Lema 2.4.5. *Sean X e Y dos esquemas en grupo de tipo finito y $f : X \rightarrow Y$ un morfismo de esquemas. Si f es finito y fielmente plano, entonces es abierto y cerrado.*

Demostración. Primero vamos a probar que el hecho de que f sea finito implica que es cerrado. Como alcanza probarlo localmente podemos asumir que X e Y son afines, es decir, que los esquemas son de la forma $X = \text{Spec}(A)$ e $Y = \text{Spec}(B)$.

Tomemos $Z \subset X$, $Z = V(I)$ para un ideal $I \subset A$. Simplificamos del caso $B \rightarrow A$, tomando el cociente $A \rightarrow A/I$, que es equivalente a la inclusión de Z en X . Luego tomamos cociente de B por $\text{Ker}(B \rightarrow A)$, lo que equivale a restringirnos a la clausura de la imagen en Y , por lo que podemos considerar a B una subálgebra de A , con A integral sobre B . Por [1, 5.10] tenemos todo ideal primo de B proviene de intersectar un ideal primo de A con B . Entonces f es un morfismo cerrado.

Resta ver que f es abierto, pero al ser f cerrado y fielmente plano también es abierto. □

Teorema 2.4.6. *Sea G un esquema en grupos localmente de tipo finito y G_0 la componente conexa de e en G . Entonces:*

1. G_0 es el núcleo de $\gamma_G : G \rightarrow \pi_0(G)$.
2. La formación de G_0 conmuta con extensiones de cuerpos.
3. G_0 es un esquema en grupos de tipo finito geoméricamente irreducible.
4. Las componentes conexas de G son irreducibles, de tipo finito y de la misma dimensión.

Demostración. Presentamos la prueba que se encuentra en [2, Teorema 2.4.1], utilizando el Lema 2.4.5.

1. Se deduce de que las fibras de γ_G son las componentes conexas de X y el núcleo es la fibra de γ_G en el neutro.
2. Se desprende de que la formación de γ_G conmuta con extensiones de cuerpos.

3. Veamos primero qué pasa con \mathbb{k} algebraicamente cerrado. En este caso dado que G_{red}^0 es reducido en e , tenemos que G_{red}^0 es liso por la Proposición 2.2.6 y por lo tanto localmente irreducible. Pero como G_{red}^0 es conexo esto quiere decir que efectivamente es irreducible. Ahora el caso con un cuerpo \mathbb{k} arbitrario. Dado que la formación de G_{red}^0 conmuta con extensiones de cuerpo, por el mismo argumento previo obtenemos que G_{red}^0 es geoméricamente irreducible. Nos queda ver que G_{red}^0 es de tipo finito. Tomemos un subesquema abierto de tipo finito no vacío $U \subset G^0$, luego U es denso en G^0 porque ya vimos que es irreducible. Ahora vamos a probar que el pull-back de la multiplicación en G^0 , $n : U \times U \rightarrow G^0$, es un mapa fielmente plano. Para ver que n es plano, recordamos que dada una acción a de un esquema en grupos G en un esquema X , tenemos el esquema conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{u} & G \times X \\ & \searrow a & \downarrow p_2 \\ & & X \end{array}$$

con $u(g, x) := (g, a(g, x))$, siendo u un automorfismo. De este diagrama deducimos que a siempre es fielmente plana, en particular la multiplicación lo es, y por lo tanto n es plano. Para ver que es fielmente plano precisamos ver que n es sobreyectivo. Tomamos $g \in G^0(K)$ para K alguna extensión de cuerpos de \mathbb{k} . Luego $U_K \cap g_i(K)$ es no vacía dado que G_K^0 es irreducible y U_K denso. Entonces existe una extensión de cuerpos L de \mathbb{k} y $x, y \in U_L$ tal que $g = xy^{-1}$. Esto concluye la demostración de que n es fielmente plano. Observando esto y que $U \times U$ es casi-compacto, tenemos que G^0 es casi-compacto también, y como también es localmente de tipo finito nos queda que es de tipo finito.

4. Sea X una componente conexa de G . Como G es localmente de tipo finito, podemos tomar un punto cerrado x en X y su cuerpo de residuos $\kappa(x)$ es una extensión finita de \mathbb{k} . Ahora tomamos K una extensión finita de $\kappa(X)$ que sea estable bajo $Aut_{\mathbb{k}}(\kappa(x))$. El mapa estructural $\pi : X_K \rightarrow X$ es finito y fielmente plano, por lo tanto, es abierto y cerrado. Además, dado $x' \in \pi^{-1}(x)$ tenemos que $\kappa(x')$ es un cuerpo cociente de $K \otimes_{\mathbb{k}} \kappa(x)$, por lo que x' es un punto K -racional. Tenemos $\gamma_{G_K} : X_K \rightarrow \pi_0(X_K)$ y $x^{-1} \gamma_{G_K}^{-1} \gamma_{G_K}(x')$ es una componente conexa de G_K y contiene al neutro, entonces la fibra de γ_{G_K} en x' es el trasladado $x'G_K^0$, por lo tanto $\pi(x'G_K^0)$ es irreducible, abierto y cerrado en G y contiene a x , esto es $\pi(x'G_K^0) = X$. Con esto probamos que X es irreducible y que $\dim(X) = \dim(G^0)$; resta ver solamente que es de tipo finito. Sabemos que X_K es de tipo finito porque la fibra de x por π es finita y X_K es la unión de los trasladados de G_K^0 por esos elementos, luego se puede

ver que X también es de tipo finito aplicando teoría del descenso (ver [8, IV.2.7.1]).

□

Torsores y Cocientes

En esta sección primero desarrollaremos las definiciones y propiedades básicas sobre torsores y cocientes. Luego veremos algunos resultados clásicos de espacios homogéneos y cocientes en el contexto de los esquemas en grupo de tipo finito.

3.1. Definiciones y propiedades básicas

En esta subsección seguiremos de cerca [2, §2.6 y §2.7], salvo en la Proposición 3.1.6 donde detallamos algunas partes de la demostración.

Definición 3.1.1. Sea G un esquema en grupos de tipo finito actuando en un esquema X de tipo finito por la acción a , Sea Y un esquema de tipo finito y $f : X \rightarrow Y$ un morfismo de esquemas G -invariante. Decimos que f es un G -torsor sobre Y si satisface las siguientes condiciones:

1. f es fielmente plano y casi compacto.
2. El siguiente cuadrado es cartesiano:

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{a} & X \\ p_2 \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Observación 3.1.2. 1. La segunda condición puede ser sustituida por lo siguiente:

Para cualquier esquema S y cualquier par de puntos $x, y \in X(S)$ tenemos $f(x) = f(y)$ si y sólo si existe $g \in G(S)$ tal que $y = g \cdot x$, y además, g es único. Esta es una especie de versión en esquemas de la noción de fibrados principales en topología.

2. Se puede probar que si $f : X \rightarrow Y$ es un G -torsor, entonces la topología de Y es la topología cociente (ver [8, IV.2.3.12]). En particular, si $U \subset X$ es un abierto saturado (es decir, un abierto G -estable), entonces $f(U)$ es abierto.

Definición 3.1.3. Sea G un esquema en grupos actuando en un esquema X . Un morfismo de esquemas $f : X \rightarrow Y$ es un cociente categórico de X por G si f es G -invariante, y dado un morfismo de esquemas G -invariante $h : X \rightarrow Z$, existe un único morfismo G -invariante $\hat{h} : Y \rightarrow Z$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Z \\ f \downarrow & \nearrow \hat{h} & \\ Y & & \end{array}$$

Proposición 3.1.4. Sea G un esquema en grupos de tipo finito y $f : X \rightarrow Y$ un G -torsor. Entonces f es un cociente categórico por G .

Demostración. Consideremos un morfismo de esquemas G -invariante $h : X \rightarrow Z$. Primero vamos a reducir el problema al caso afín. Para todo abierto U de Z , $h^{-1}(U)$ es un subesquema abierto G -estable porque h es G -invariante. Podemos restringir f a un G -torsor $f_U : h^{-1}(U) \rightarrow V$ para el subesquema abierto $V = f(h^{-1}(U))$ en Y que depende de U (recordar que la imagen por f de abiertos saturados es abierta). Para ver que h se factoriza de forma única a través de f alcanza con ver que $h_U : h^{-1}(U) \rightarrow U$ se factoriza únicamente a través de f_U para todo abierto afín U . Asumimos que Z es afín, entonces h se corresponde a un homomorfismo de $\mathcal{O}_Z(Z)$ en $\mathcal{O}_X(X)$, que al ser G -invariante, puede verse como un homomorfismo de $\mathcal{O}_Z(Z)$ en $\mathcal{O}_X(X)^G$. Es suficiente entonces ver que el mapa $f^\# : \mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow f_*(\mathcal{O}_X(X))^G$ es un isomorfismo. Como f es fielmente plano, alcanza con ver que el mapa inducido $f^*(\mathcal{O}_Y) \rightarrow f^*(f_*(\mathcal{O}_X)^G)$ es un isomorfismo.

Tenemos que

$$f^*(f_*(\mathcal{O}_X)) \cong p_{2*}(a^*(\mathcal{O}_X)) \cong p_{2*}(\mathcal{O}_{G \times X}) \cong \mathcal{O}_G \otimes_{\mathbb{k}} \mathcal{O}_X.$$

El primer isomorfismo se deduce del cuadrado cartesiano que define el torsor y de que f es fielmente plano de nuevo. A su vez la composición de estos isomorfismos identifica la acción de G en $f^*(f_*(\mathcal{O}_X(X)))$ con la acción de G por multiplicación a izquierda en $\mathcal{O}_G(G)$. Por lo tanto, tomando G -invariantes tenemos el isomorfismo entre $\mathcal{O}_X(X) \cong f^*(\mathcal{O}_Y(Y))$ y $f^*(f_*(\mathcal{O}_X(X))^G)$. \square

Proposición 3.1.5. Sea $f : X \rightarrow Y$ un G -torsor. Entonces f es finito/afín/propio/de presentación finita si y sólo si el esquema G lo es.

Demostración. Esto se prueba a partir de teoría del descenso y la prueba la podemos encontrar en [8, IV.2.7.1]. \square

La siguiente proposición fue probada por Perrin en [11, V.3.4] en el contexto de esquemas en grupos casi compactos. Presentamos aquí la prueba para el caso de esquemas en grupos de tipo finito que se encuentra en [2, Prop. 2.7.1].

Proposición 3.1.6. *Sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo de esquemas en grupos de tipo finito. Entonces tenemos que el conjunto imagen de f es cerrado y que f es una inmersión cerrada si y sólo si el núcleo es trivial.*

Demostración. Para la prueba podemos asumir que \mathbb{k} es algebraicamente cerrado utilizando la misma técnica que en la prueba de 2.3.8, tomando el mapa natural $\pi : X_{\bar{\mathbb{k}}} \rightarrow X$ y observando que un subesquema Z es cerrado si $\pi^{-1}(Z) = Z_{\bar{\mathbb{k}}}$ lo es.

Primero vamos a ver que la imagen de f es cerrada. La acción de H en si mismo por multiplicación a izquierda induce una acción a a través de f dada por $g \cdot h = f(g)h$. En el lema 2.3.8 vimos que existe un elemento $h \in H(\mathbb{k})$ tal que el mapa de órbita es un mapa cerrado, pero tenemos que $a_h(G) = a_e(G)h$, entonces $f(G) = a_e(G)$ es cerrado.

Si f es una inmersión el núcleo tiene que ser trivial, ahora, si el núcleo de f es trivial tenemos que la fibra de f en cualquier $x \in X$ es un punto, por lo tanto es casi finito. El Teorema Principal de Zariski (ver [8, IV 18.12.13]) nos dice en este contexto que f factoriza por una inmersión cerrada seguida de un morfismo finito. Entonces existe un abierto U de $f(G)$ tal que la restricción $f^{-1}(U) \rightarrow U$ es finita, pero podemos trasladar $U_{\bar{\mathbb{k}}}$ por $G(\bar{\mathbb{k}})$ para cubrir $f(G_{\bar{\mathbb{k}}})$, por lo tanto $f_{\bar{\mathbb{k}}}$ y consecuentemente f son finitos.

Vamos a probar que $f^\# : \mathcal{O}_H \rightarrow \mathcal{O}_G$ es sobreyectiva. Tomamos un abierto afín V de $f(G)$, luego $f^{-1}(V)$ es un afín y $\mathcal{O}(f^{-1}(V))$ es un módulo finito sobre $\mathcal{O}(V)$. Entonces tenemos que el mapa inducido

$$\frac{\mathcal{O}(V)}{J\mathcal{O}(V)} \rightarrow \frac{\mathcal{O}(f^{-1}(V))}{J\mathcal{O}(f^{-1}(V))} = \mathcal{O}\left(f^{-1}\left(\text{Spec}\frac{\mathcal{O}(V)}{J\mathcal{O}(V)}\right)\right)$$

es un isomorfismo para cualquier J ideal maximal de $\mathcal{O}(V)$. Luego por [1, 3.9] tenemos que

$$\left(\frac{\mathcal{O}(V)}{J\mathcal{O}(V)}\right)_J \rightarrow \left(\frac{\mathcal{O}(f^{-1}(V))}{J\mathcal{O}(f^{-1}(V))}\right)_J$$

es sobreyectivo, por lo que

$$\frac{\mathcal{O}(V)_J}{J\mathcal{O}(V)_J} \rightarrow \frac{\mathcal{O}(f^{-1}(V))_J}{J\mathcal{O}(f^{-1}(V))_J}$$

también es sobreyectivo. Luego por el Lema de Nakayama (ver [15, 10.19.1])

$$\mathcal{O}(V)_J \rightarrow \mathcal{O}(f^{-1}(V))_J$$

es sobreyectivo. Finalmente utilizando [1, 3.9] nuevamente obtenemos que $f^\#(V)$ es sobreyectiva, y por lo tanto f una inmersión. \square

Corolario 3.1.7. *Todo subesquema en grupos de un esquema en grupos de tipo finito es cerrado.*

Demostración. Se deduce de la Proposición 3.1.6 y de que la inclusión es una inmersión cerrada. \square

3.2. Espacios homogéneos y cocientes

Teorema 3.2.1. *Sea G un esquema en grupos de tipo finito y $H \subset G$ un subesquema en grupos (necesariamente cerrado por la observación 3.1.7).*

1. *Existe un G -esquema G/H equipado con un morfismo G -equivariante $q : G \rightarrow G/H$ que es un H -torsor para la acción de H en G por multiplicación a derecha.*
2. *El esquema G/H es de tipo finito y además es liso en caso de que G sea liso.*
3. *Si H es normal en G , entonces G/H tiene una única estructura de grupo algebraico tal que q es un homomorfismo.*

Demostración. Se puede ver la prueba en [6, VIA.3.2]. \square

Observación 3.2.2. Por la la Proposición 3.1.4 tenemos que q es el cociente categórico de G por H . En particular, por la propiedad universal del cociente categórico, el homomorfismo de álgebras $q^\# : \mathcal{O}(G/H) \rightarrow \mathcal{O}(G)^H \subset q_*(\mathcal{O}_G)(G/H) = \mathcal{O}_G(G)$ es un isomorfismo.

Veamos como se puede adaptar la propiedad universal del cociente al contexto de esquemas en grupos de tipo finito.

Proposición 3.2.3. *Sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo de esquemas en grupos de tipo finito, $N = \text{Ker}(f)$ y $q : G \rightarrow G/N$ el mapa cociente. Entonces existe un único morfismo de esquemas en grupos $h : G/N \rightarrow H$ tal que el triángulo conmuta.*

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{f} & H \\
 q \downarrow & \nearrow h & \\
 G/N & &
 \end{array}$$

Demostración. Presentaremos la prueba que se encuentra en [2, 2.7.4].

Es fácil observar que f es N -invariante por lo que podemos obtener un único morfismo $h : G/N \rightarrow H$ que haga conmutar el diagrama, resta ver que es morfismo de esquemas en grupos.

Si $x, y \in (G/N)(S)$, existen morfismos de esquemas fielmente planos casi compactos $t_U : U \rightarrow S$ y $t_V : V \rightarrow S$ con puntos $x_U \in G(U)$ e $y_V \in G(V)$ tal que $q \circ x_U = x \circ t$ y $q \circ y_V = y \circ t$. Podemos tomar el producto fibrado $S' = U \times_S V$ obtenemos un morfismo fielmente plano cuasi compacto $t : S' \rightarrow S$ y puntos $x', y' \in G(S')$ con $q \circ x' = x \circ t_U$ y $q \circ y' = y \circ t_V$, luego $q \circ (x'y') = (x \circ t)(y \circ t)$. Como $f \circ (x'y') = (f \circ x')(f \circ y')$, nos queda $h \circ (x \circ t)(y \circ t) = (h \circ x \circ t)(h \circ y \circ t)$. Como t es un fielmente plano entonces es un epimorfismo (ver [17, Teorema 11]), por lo que $h \circ (xy) = (h \circ x)(h \circ y)$. Además se puede verificar que el núcleo de h es trivial. \square

Proposición 3.2.4. Sean G un esquema en grupos de tipo finito, X un G -esquema de tipo finito y $x \in X(\mathbb{k})$. Entonces el mapa de órbita $a_x : G \rightarrow X$ que manda g a $g \cdot x$ se factoriza a través de una única inmersión $j_x : G/C_G(x) \rightarrow X$ (donde $C_G(x)$ es el centralizador de x en G dado en la definición 2.3.6).

Demostración. La prueba de esta proposición se puede encontrar en [4, III.3.5.2]. \square

Definición 3.2.5. Sean $j : N \rightarrow G$ y $q : G \rightarrow Q$ dos morfismos de esquemas en grupos de tipo finito. Decimos que tenemos una sucesión exacta

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{j} G \xrightarrow{q} Q \longrightarrow 1$$

si se cumplen las siguientes condiciones:

1. j induce un isomorfismo entre N y $\text{Ker}(q)$.
2. q es fielmente plano y de presentación finita.

En este caso decimos que G es una extensión de Q por N y en el caso de q sea finito decimos que es una isogenia.

Observación 3.2.6. 1. Lo primero a observar es que la primer condición es equivalente a que para todo esquema S la siguiente sucesión de grupos sea exacta:

$$1 \longrightarrow N(S) \xrightarrow{j(S)} G(S) \xrightarrow{q(S)} Q(S)$$

2. La segunda condición de la definición se puede escribir de forma más general como: para cada esquema S y cualquier $y \in Q(S)$ existe un morfismo fielmente plano

$f : S' \rightarrow S$ de presentación finita y $x \in G(S')$ tal que $q(x) = y$. Esta se cumple en el caso de que q sea fielmente plano de presentación finita porque dado un esquema S y un punto $y \in Y(S)$, podemos ver a y como un morfismo $S \rightarrow Y$, tomar $S' = X \times_Y S$, y tenemos $\varphi = p_2$ y $x = p_1$.

$$\begin{array}{ccc} S' = X \times_Y S & \xrightarrow{f=p_2} & S \\ \downarrow x=p_1 & & \downarrow y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

3. Consideremos ahora G un esquema en grupos de tipo finito y N un subesquema en grupos normal. Por Teorema 3.2.1 y las anteriores observaciones tenemos que la siguiente sucesión es exacta

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{j} G \xrightarrow{q} G/N \longrightarrow 1$$

Recíprocamente, si tenemos una sucesión exacta de esquemas en grupos de tipo finito como la de la definición, j es una inmersión cerrada y q factoriza a través de una inmersión cerrada $i : G/N \rightarrow Q$ que tiene que ser un isomorfismo porque q es sobreyectiva. Esto nos da una identificación entre las dos sucesiones exactas.

Ejemplo. Tomemos $\mathbb{R} = \text{Spec}(\mathbb{R}[x])$ y consideremos $\mathbb{R}^* = \text{Spec}(\mathbb{R}[x, x^{-1}])$. El morfismo $q : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ definido por $x \mapsto x^2$ es un morfismo de esquemas en grupos con núcleo $\{1, -1\}$. Más precisamente, es el morfismo $(q, q^\#)$, $(x \mapsto x^2, p(x, x^{-1}) \mapsto p(x^2, x^{-2}))$. Claramente no es sobreyectivo, es decir, no existe un \mathbb{R} -punto cuya imagen sea -1 . Sin embargo si tomamos $-1 : \text{Spec}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ y $f : \text{Spec}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{R})$ dado por la inclusión de \mathbb{R} en \mathbb{C} (que es fielmente plano y de presentación finita), entonces tenemos $x : \text{Spec}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ tal que $q \circ x = -1 \circ f$. Para esto tomamos $x : \text{Spec}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ dado por $\mathbb{R}[x, x^{-1}] \rightarrow \mathbb{C}[x, x^{-1}] \rightarrow \mathbb{C}[x, x^{-1}]/(x - i)$.

En lo que sigue se presentarán algunos de los teoremas clásicos de isomorfismos de grupos abstractos en el contexto de esquemas en grupos.

Proposición 3.2.7. *Sea G un esquema en grupos de tipo finito y N un subesquema en grupos normal, con cociente $q : G \rightarrow G/N$. La asignación que a cada subesquema en grupos H le asigna el subesquema en grupos $H/N = q(H)$ es una correspondencia entre los subesquemas en grupos de G que contienen a N y los subesquemas en grupos de G/N . La inversa de esta correspondencia es el pull-back del morfismo cociente, que asigna a cada subesquema en grupos $K \subset G/N$ el subgrupo de G canónicamente isomorfo a $G \times_{G/N} K$. Además esta correspondencia preserva la propiedad de ser normal.*

Demostración. Dado K subgrupo de G/N , el morfismo cociente de G en G/N y la inclusión de K en G/N , tenemos el producto fibrado $G \times_{G/N} K$ que es un esquema en grupos y el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} G \times_{G/N} K & \longrightarrow & K \\ f \downarrow & & \downarrow i \\ G & \xrightarrow{q} & G/N \end{array}$$

Veamos primero que f es una inmersión cerrada. Para esto por Proposición 3.1.6 basta ver que el núcleo es trivial. Si $f(S)(g(s), k(s)) = e \in G(S)$, entonces $i(S)(k(s)) = e \in G/N(S)$, por lo que $k(s) = e \in K(S)$ porque i es una inmersión. Para ver que $N \subset G \times_{G/N} K$, dado $n(s) \in G/N(S)$ basta tomar $(n(s), e) \in (G \times_{G/N} K)(S)$.

Tenemos entonces la correspondencia que buscamos. Veamos ahora que preserva la propiedad de ser normal.

Sea H es un subesquema en grupos normal en G , $N \subset H$, y $a : G \times H \rightarrow H$ la acción por conjugación de G en H . Si componemos con el morfismo cociente, tenemos $q \circ a : G \times H \rightarrow q(H)$, que se factoriza en $(G/N) \times (H/N) = (G \times H)/(N \times N)$, entonces $q(H)$ es normal.

Sea K un subesquema en grupos normal de G/N . Si $g \in G(S)$, $h \in q^{-1}(K)(S) = (G \times_{G/N} K)(S) \subset G(S)$. Tomando q tenemos que $(q \circ g) \in G/N(S)$, $q \circ h \in K(S)$, entonces el producto $(q \circ g)(q \circ h)(q \circ g^{-1})$ es un S -punto de K . Por lo tanto $q \circ (ghg^{-1}) \in K(S)$ porque q es morfismo de grupos. Tenemos entonces que ghg^{-1} pertenece a $(G \times_{G/N} K)(S)$. \square

Lema 3.2.8. Sean G y G' dos esquemas en grupos de tipo finito. Si H y N dos subesquemas en grupos de G y G' respectivamente, entonces $H \times N$ es un subgrupo de $G \times G'$ y $(G \times G')/(H \times N) \cong G/H \times G'/N$.

Demostración. Si $(h_1, n_1), (h_2, n_2) \in (H \times N)(S)$ con $h_1, h_2 \in H(S)$ y $n_1, n_2 \in N(S)$, tenemos que $h_1 h_2 \in H(S)$ y $n_1 n_2 \in N(S)$, entonces $(h_1, n_1)(h_2, n_2) = (h_1 h_2, n_1 n_2) \in (H \times N)(S)$. Entonces $H \times N$ es un subesquema en grupos de $G \times G'$.

Sea $a : (G \times G') \times (G/H \times G'/N) \rightarrow G/H \times G'/N$ dada por $(G \times (G/H) \rightarrow G/H) \times (G' \times (G'/N) \rightarrow G'/N)$ el producto de las acciones. Se verifica fácilmente que esto es una acción, y la isotropía de $(e_{G/H}, e_{G'/N})$ es $H \times N$. Entonces por la Proposición 3.2.4, tenemos una inmersión cerrada $j : (G \times G')/(H \times N) \rightarrow G/H \times G'/N$. Luego observando que los mapas de órbita de los neutros $G \rightarrow G/H$ y $G' \rightarrow G'/N$ son sobreyectivos por Teorema 3.2.1, deducimos que j también lo es. \square

Proposición 3.2.9. Sea G un esquema en grupos de tipo finito y $N \subset H \subset G$ subesquemas en grupos con mapas cocientes $q_N : G \rightarrow G/N$ y $q_H : G \rightarrow G/H$.

1. Existe un único morfismo $f : G/N \rightarrow G/H$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{q_H} & G/H \\ q_N \downarrow & \nearrow f & \\ G/N & & \end{array}$$

Además, la fibra de f en el punto base de G/H es el espacio homogéneo H/N , y f es G -equivariante y fielmente plano de presentación finita.

2. Si N es normal en H , entonces la acción de H en G por multiplicación a derecha factoriza a través de la acción de H/N en G/N que centraliza la acción de G . Además, f es un H/N -torsor.

3. Si H y N son normales en G , entonces tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$1 \rightarrow H/N \rightarrow G/N \xrightarrow{f} G/H \rightarrow 1$$

Demostración. Seguimos la prueba presentada en [2, 2.8.4].

1. El hecho de que q_N sea un cociente categórico nos garantiza la existencia de f . Resta ver que sea G -equivariante, es decir, la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G \times G/N & \xrightarrow{a_{G/N}} & G/N \\ \text{Id}_G \times f \downarrow & & \downarrow f \\ G \times G/H & \xrightarrow{a_{G/H}} & G/H \end{array}$$

donde $a_{G/N}$ y $a_{G/H}$ son las acciones inducidas en los cocientes por el morfismo de multiplicación m_G en G . Sea S un esquema, $g \in G(S)$ e $y \in (G/N)(S)$. Entonces existe un morfismo fielmente plano casi compacto $t : S' \rightarrow S$, e $y' \in G(S')$ tal que $q_N(y') = y \circ t$. Llamemos \bar{y} y \bar{g} a $y \circ t \in (G/N)(S')$ y $g \circ t \in G(S')$ respectivamente. Entonces $f(\bar{g} \cdot \bar{y}) = f(\bar{g} \cdot q_N(y')) = f(q_N(\bar{g} \cdot y')) = q_H(\bar{g}y') = \bar{g} \cdot q_H(y') = \bar{g} \cdot f(q_N(y')) = \bar{g} \cdot f(\bar{y})$. Entonces como t es un epimorfismo tenemos que $f(g \cdot y) = g \cdot f(y)$. Por otro lado, si $f(y) = e$ entonces $e = f \circ q_N(y') = q_H(y')$, por lo que $y' \in H(S')$, entonces $y \in (H/N)(S)$.

Veamos que la multiplicación $G \times H \rightarrow G$ induce un morfismo $r : G \times H/N \rightarrow G/N$. Vamos a ver que el siguiente diagrama es cartesiano y de allí deducir que f es fielmente plano de presentación finita.

$$\begin{array}{ccc} G \times H/N & \xrightarrow{r} & G/N \\ p_1 \downarrow & & \downarrow f \\ G & \xrightarrow{q_H} & G/H \end{array}$$

La conmutatividad del diagrama se deduce fácilmente. Sea S un esquema y $g \in G(S)$, $y \in (G/N)(S)$. Entonces $q_H(g) = f(y)$ si y sólo si $f(g^{-1} \cdot y) = q_H(e)$, es decir $g^{-1}y \in (H/N)(S)$. De esto deducimos que el mapa $G \times H/N \rightarrow G \times_{G/H} G/N$ es biyectivo en los S -puntos. Entonces el mapa es cartesiano, q_H y p_1 son morfismos fielmente planos de presentación finita, por lo que f también lo es.

2. De la propiedad universal del cociente $G \times H \rightarrow (G \times H)/(N \times N) \cong G/N \times H/N$ deducimos la existencia de la acción $G/N \times H/N \rightarrow G/N$. De forma similar a la parte anterior podemos ver que esta acción centraliza la acción de G . A su vez del diagrama cartesiano de esa parte deducimos que f es un G -torsor.
3. De la primera parte tenemos que f es fielmente plano de presentación finita. Del Teorema 3.2.3 sabemos que el morfismo entre H/N y $\text{Ker}(f)$ es un isomorfismo.

□

La prueba del teorema

4.1. Esquemas en grupos afines de tipo finito

Veremos ahora algunas propiedades relacionadas con los esquemas en grupo de tipo finito afines. Veremos algunas propiedades que utilizaremos en la prueba de la descomposición de Rosenlicht (Teorema 1.0.1), y también probaremos tanto la versión adaptada a este contexto del clásico resultado de que los grupos algebraicos afines son grupos lineales, como un resultado de interés en la estructura de los esquemas en grupo de tipo finito pero en la dirección de la descomposición de Chevalley (Teorema 1.0.2). Para esto seguiremos de cerca la presentación de [2, §3.1].

Proposición 4.1.1. *Todo esquema en grupos de tipo finito afín es lineal (definición 2.2.5).*

Demostración. Sea G un esquema en grupo de tipo finito afín y consideremos la acción de G en sí mismo por multiplicación a izquierda. La Proposición 2.3.9 nos dice que existe un G -módulo V de dimensión finita y una inmersión cerrada G -equivariante $i: G \hookrightarrow V$. Como la acción es fiel en G , la G -acción en V también lo es. Por lo tanto, el homomorfismo $\rho: G \rightarrow GL(V)$ tiene núcleo cero, que por la Proposición 3.1.6 es equivalente a que ρ sea una inmersión cerrada. \square

Proposición 4.1.2. *Sea G un esquema en grupos de tipo finito y H un subesquema en grupos de G .*

1. *Si H y G/H son afines entonces G también lo es.*
2. *Si G es afín entonces H es afín. Si además H es normal en G , entonces G/H es un esquema en grupos afín.*

Demostración. 1. Como H es afín entonces $q: G \rightarrow G/H$ (que es H -torsor por la Proposición 3.2.1) es un morfismo afín por la Proposición 3.1.5, y por lo tanto G es afín.

2. La primer afirmación resulta del hecho de que H es cerrado en G por la Proposición 3.1.6 y un cerrado en un afín también es afín. Una prueba de la segunda afirmación se puede ver por ejemplo en [9, 5.18].

□

Lema 4.1.3 (Existencia de radical afín). *Sea G un esquema en grupos de tipo finito.*

1. G tiene un mayor subgrupo en esquemas afín, liso, normal y conexo, al cual notamos $L(G)$.
2. $L(G/L(G))$ es trivial.

Demostración. 1. Sean L_1 y L_2 dos subesquemas en grupos cerrados afines, lisos, normales y conexos. Como $L_1 \cdot L_2 \subset G$ es normal y es cociente de $L_1 \times L_2$ entonces es suave y conexo. Por otro lado observando que $(L_1 \cdot L_2)/L_1 \cong L_1/(L_1 \cap L_2)$, utilizando la proposición anterior tenemos que $L_1 \cdot L_2$ es afín. Luego si consideramos L_1 de máxima dimensión con estas propiedades, tenemos que $L_1 \cdot L_2$ contiene a L_1 , por lo que $\dim(L_1 \cdot L_2) = \dim(L_1)$ y por lo tanto $\dim((L_1 \cdot L_2)/L_1) = 0$. Como $(L_1 \cdot L_2)/L_1$ es liso y conexa entonces es $\text{Spec}(\mathbb{k})$, y tenemos $L_2 \subset L_1$.

2. Tomemos $M \subset G$ el pull-back de $L(G/L(G))$ por el mapa cociente $G \rightarrow G/L(G)$. Por la correspondencia entre subgrupos que nos da el cociente, M es un subesquema en grupos normal de G que contiene a $L(G)$. Además por Proposición 4.1.2, M es afín, liso y conexo, porque $L(G)$ y $M/L(G)$ lo son. Por lo tanto tenemos que $M = L(G)$.

□

Observación 4.1.4. 1. El Lema 4.1.3 es parte de la prueba de la descomposición de Chevalley (Teorema 1.0.2) desarrollada en [2, §4].

2. Se puede probar además que la formación de $L(G)$ conmuta con extensiones algebraicas separables de cuerpos. Una prueba de esto se puede encontrar en [2, 3.1.4].

4.2. Teorema de afinización

Dado un esquema X tenemos asociado un morfismo canónico a un esquema afín $\eta_X : X \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$. Definimos este morfismo en los subesquemas abiertos afines de la siguiente forma: dado U un subesquema abierto afín de X entonces $\eta_X|_U$ es el morfismo $U \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$ asociado con el homomorfismo de restricción $\mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$.

Luego si tenemos $U = \text{Spec}(\mathcal{O}_X(U))$ y $V = \text{Spec}(\mathcal{O}_X(V))$ dos subesquemas abiertos afines de X , dada $f \in \mathcal{O}_X(X)$ tenemos que $(f|_U)|_{U \cap V} = (f|_V)|_{U \cap V}$.

Definición 4.2.1. Dado X un esquema, esta construcción define un único morfismo de esquemas $\eta_X : X \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$ al que llamamos morfismo de afinización y notaremos a $\text{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$ como $\text{Aff}(X)$ (ver Proposición 2.1.7).

Observación 4.2.2. 1. Si X es un esquema afín, entonces $\text{Aff}(X) = X$ y $\eta_X = \text{Id}_X$.

2. Que el esquema X sea de tipo finito no nos garantiza que $\text{Aff}(X)$ lo sea (podemos encontrar un ejemplo de esto en [2, 3.2.3]). En el caso de que X sea un esquema en grupos de tipo finito esto sí se cumple (ver Teorema 4.2.9 más adelante).

Ejemplo. Sea A una variedad abeliana y H un esquema en grupos afín. Ambos esquemas en grupos son casi compactos, por lo que $\mathcal{O}_{A \times H}(A \times H) = \mathbb{k} \otimes \mathcal{O}_H(H)$, y el morfismo de afinización es la proyección en la segunda componente, en particular, $\text{Aff}(A \times H) = H$.

Proposición 4.2.3. Sea X un esquema y $f : X \rightarrow Y$ un morfismo de esquemas a un esquema afín Y . Entonces existe un único morfismo de esquemas $\tilde{f} : \text{Aff}(X) \rightarrow Y$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \eta_X \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ \text{Aff}(X) & & \end{array}$$

Demostración. Como $\text{Aff}(X)$ e Y son afines, alcanza con definir el morfismo de álgebras asociado. Por lo tanto, definimos a \tilde{f} como el morfismo de esquemas asociado al morfismo de álgebras $f^\#(Y) : \mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow f_*(\mathcal{O}_X)(Y) = \mathcal{O}_X(X)$. Este es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y(Y) & \xrightarrow{f^\#} & \mathcal{O}_X(X) \\ & \searrow & \uparrow \text{Id} \\ & & \mathbb{k}[\text{Aff}(X)] = \mathbb{k}[X] \end{array}$$

Por lo que la proposición queda demostrada. □

Corolario 4.2.4. Dados dos esquemas X e Y y un morfismo de esquemas $f : X \rightarrow Y$, existe un único morfismo de esquemas $\text{Aff}(f) : \text{Aff}(X) \rightarrow \text{Aff}(Y)$ tal que el siguiente

diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \eta_X \downarrow & & \downarrow \eta_Y \\
 \text{Aff}(X) & \xrightarrow{\text{Aff}(f)} & \text{Aff}(Y)
 \end{array}$$

Demostración. Se deduce de aplicar la Proposición 4.2.3 al morfismo $\eta_Y \circ f$. El morfismo $\text{Aff}(f)$ es el morfismo de esquemas afines asociado al morfismo de álgebras $f^\# : \mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$. \square

Observación 4.2.5. A partir del Corolario 4.2.4, es fácil ver que si $g : Y \rightarrow Z$, entonces $\text{Aff}(g \circ f) = \text{Aff}(g) \circ \text{Aff}(f)$, y que $\text{Aff}(id_G) = id_{\text{Aff}(G)}$. Hemos entonces construido un functor Aff de la categoría de esquemas a la categoría de esquemas afines, que es adjunto a izquierda de la inclusión de la categoría de esquemas afines en la categoría de esquemas. El morfismo de afinización es la unidad de esta adjunción.

Proposición 4.2.6. Si G es un esquema en grupos casi compacto, entonces $\text{Aff}(G)$ es un esquema en grupos afín con los morfismos inducidos y η_X es un morfismo de esquemas en grupos.

Demostración. Observemos primero el siguiente diagrama donde f es el morfismo de la Proposición 4.2.3:

$$\begin{array}{ccc}
 G \times G & \xrightarrow{\eta_G \times \eta_G} & \text{Aff}(G) \times \text{Aff}(G) \\
 \eta_{G \times G} \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\
 \text{Aff}(G \times G) & &
 \end{array}$$

Si U y V son dos abiertos afines de G , entonces $\eta_G|_U : U \rightarrow \text{Aff}(G)$ y $\eta_G|_V : V \rightarrow \text{Aff}(G)$ son los morfismos inducidos por las restricciones de $\mathcal{O}_G(G)$ a $\mathcal{O}_G(U)$ y $\mathcal{O}_G(V)$ respectivamente. Como G es casi compacto, tenemos entonces $\eta_G \times \eta_G|_{U \times V} : U \times V \rightarrow \text{Aff}(G) \times \text{Aff}(G)$ está inducida por el producto tensorial de las restricciones $\mathcal{O}_G(G) \otimes \mathcal{O}_G(G) \rightarrow \mathcal{O}_G(U) \otimes \mathcal{O}_G(V)$ (ver Observación 2.1.14). Esto produce el siguiente diagrama conmutativo, donde los morfismos verticales son los de la Proposición 2.1.13.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}_{\text{Aff}(G)}(\text{Aff}(G)) \otimes_{\mathbb{k}} \mathcal{O}_{\text{Aff}(G)}(\text{Aff}(G)) & \xrightarrow{\eta_G^\# \otimes \eta_G^\#} & \mathcal{O}_G(U) \otimes_{\mathbb{k}} \mathcal{O}_G(V) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{O}_{\text{Aff}(G) \times \text{Aff}(G)}(\text{Aff}(G) \times \text{Aff}(G)) & \xrightarrow{(\eta_G \times \eta_G)^\#} & \mathcal{O}_{G \times G}(U \times V)
 \end{array}$$

Por otro lado, $\eta_{G \times G}|_{U \times V} : U \times V \rightarrow \text{Aff}(G \times G)$ está dado por la restricción de $\mathcal{O}_{G \times G}(G \times G)$ a $\mathcal{O}_{G \times G}(U \times V)$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo, donde los morfismos verticales son los inversos de la Proposición 2.1.13.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{G \times G}(G \times G) & \xrightarrow{(\eta_{G \times G})^\#} & \mathcal{O}_{G \times G}(U \times V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_G(G) \otimes_{\mathbb{k}} \mathcal{O}_G(G) & \xrightarrow{\eta_G^\# \otimes \eta_G^\#} & \mathcal{O}_G(U) \otimes_{\mathbb{k}} \mathcal{O}_G(V) \end{array}$$

Deducimos entonces que el $f^\#$ es un isomorfismo y por lo tanto f también.

Utilizando esta identificación entre $\text{Aff}(G) \times \text{Aff}(G)$ y $\text{Aff}(G \times G)$, definimos la estructura de grupo en $\text{Aff}(G)$ inducida por el morfismo multiplicación $\text{Aff}(m_G)$. Tenemos entonces que

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{m_G} & G \\ \eta_G \times \eta_G \downarrow & & \downarrow \eta_G \\ \text{Aff}(G) \times \text{Aff}(G) & \xrightarrow{m_{\text{Aff}(G)}} & \text{Aff}(G) \end{array}$$

Los morfismos del neutro e inverso son directamente los inducidos por los de G . Luego los diagramas de la definición de esquemas en grupos se deducen de los de G y los que inducen los morfismos. \square

Observación 4.2.7. 1. El functor Aff induce un functor de la categoría de esquemas en grupos casi compactos a la categoría de esquemas en grupos afines. Notaremos también a este functor como Aff . En esta situación, Aff sigue siendo una adjunción de la inclusión respectiva.

2. Análogamente, si G actúa por a en un esquema X casi-compacto, $\text{Aff}(a)$ es una acción de $\text{Aff}(G)$ en $\text{Aff}(X)$ compatible con a .

Lema 4.2.8. *Sea G esquema en grupos de tipo finito, $\eta_G : G \rightarrow \text{Aff}(G)$ el morfismo de afinización y $H = \text{Ker}(\eta_G)$. Entonces H es el núcleo de la acción de G en $\mathcal{O}(G)$ por multiplicación a izquierda. Si llamamos a ese núcleo K veremos que para toda álgebra nos queda $H(R) = K(R)$.*

Demostración. Veamos primero que, en las notaciones de la Observación 2.3.7, tenemos que $H(R)$ son los $x \in G(R)$ tal que $f(x) = f(e)$ para toda $f \in \mathcal{O}_G(G)$. Si $x \in G(R)$, consideremos el isomorfismo de R -esquemas $\psi_x : G/H \times \text{Spec}(R) \rightarrow G/H \times \text{Spec}(R)$ dado por

$$\psi_x(\text{Spec}(R'))(z, s) = (z\eta_G(x \circ s), s)$$

donde $s : \text{Spec}(R') \rightarrow \text{Spec}(R)$, $z : \text{Spec}(R') \rightarrow G/H$ y $x : \text{Spec}(R') \rightarrow X$ son R' -puntos (con R' una R -álgebra). Razonando como en la Observación 2.3.7, tenemos que ψ_x induce un automorfismo $\psi^\# : \mathcal{O}(G) \otimes_{\mathbb{k}} R \rightarrow \mathcal{O}(G) \otimes_{\mathbb{k}} R$. Como ψ_x es la identidad si y solamente si $x \in H(R)$, tenemos que $x \in H(R)$ si y solamente si $f(x) = f(e)$ para todo $f \in \mathcal{O}_G(G) = \mathcal{O}_{G/H}(G/H)$. En efecto, si ese es el caso entonces tenemos que

$$f(zx) = \rho(z)f(x) = \rho(z)f(e) = f(z)$$

para todo $z \in G/H(R)$, donde consideramos la acción de G/H en sí mismo por multiplicación, y f es visto como un elemento de $\mathcal{O}(G/H)$, de donde $\psi^\#(f \otimes 1) = f \otimes 1$.

Por otro lado, con la misma notación, tenemos que $K(R)$ consiste en los $x \in G(R)$ tal que $f(xy) = f(y)$ para todo $x, y \in G(R)$, en particular, $f(x) = f(e) \forall f \in \mathcal{O}(G)$, entonces $K(R) \subset H(R)$.

Para la otra inclusión, $H(R) \subset K(R)$, presentamos la prueba que se encuentra incluida en la prueba de [2, Teorema 3.2.1]. Sea $(\eta_i)_{i \in I}$ una base del \mathbb{k} -espacio vectorial $\mathcal{O}(G)$, luego $\mathcal{O}(G \times \text{Spec}(R')) (= \mathcal{O}(G) \otimes_{\mathbb{k}} R')$ es libre con la misma base como R' -módulo. Entonces para cualquier $f \in \mathcal{O}(G) \otimes_{\mathbb{k}} R'$ existe una única familia $(\psi_i)_{i \in I}$ en $\mathcal{O}(G) \otimes_{\mathbb{k}} R'$ tal que $f(xy) = \sum_{i \in I} \psi_i(x)\varphi_i(y)$. Entonces las igualdades $f(xy) = f(y)$ para todo $y \in G(R')$ son equivalentes a $\sum_i (\psi_i(x) - \psi_i(e))\varphi_i(y) = 0$ para todo $y \in G(R')$. Como estas igualdades valen para todo $x \in H(R)$ nos queda la otra inclusión. \square

A continuación veremos el siguiente teorema de afinización que demuestra gran parte del Teorema 1.0.1, restando luego solamente algunas propiedades que provienen del hecho de que $\mathcal{O}_H(H) = \mathbb{k}$ y se verán en la sección 4.3. Presentamos la prueba que expone Brion en [2, Teorema 3.2.1].

Teorema 4.2.9. *Sea G esquema en grupos de tipo finito, $\eta_G : G \rightarrow \text{Aff}(G)$ el morfismo de afinización y $H = \text{Ker}(\eta_G)$. Entonces H es el subgrupo normal más pequeño de G tal que G/H es afín. Además, $\mathcal{O}_G(H) = \mathcal{O}_H(H) = \mathbb{k}$ y $\text{Aff}(G) = G/H$. En particular, $\mathcal{O}_G(G) = \mathcal{O}_{G/H}(G/H)$, por lo tanto, $\mathcal{O}_G(G)$ es finitamente generado, es decir, $\text{Aff}(G)$ es de tipo finito.*

Demostración. Vamos a dividir la demostración por partes:

1. Veamos que si N es un subesquema en grupos normal tal que G/N es afín entonces $H \subset N$, es decir, que H es el subgrupo más pequeño que cumple eso. Tomamos tal

N y tenemos el siguiente diagrama con $\eta_{G/N}$ el morfismo identidad.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{q} & G/N \\ \downarrow \eta_G & & \downarrow \eta_{G/N} \\ \text{Aff}(G) & \xrightarrow{\text{Aff}(q)} & \text{Aff}(G/N) \end{array}$$

Como H es la fibra del neutro de G necesariamente $H \subset N$.

2. Queremos ver que G/H es afín. Como el G -módulo $\mathcal{O}_G(G)$ es unión de sus submódulos de dimensión finita existe una colección $(V_i)_{i \in I}$ creciente de G -submódulos finitos dimensionales de $\mathcal{O}_G(G)$ tal que la unión es $\mathcal{O}_G(G)$. Por el Lema 4.2.8 tenemos que el núcleo de la acción de G en $\mathcal{O}_G(G)$ es H , luego si llamamos K_i al kernel del homomorfismo $G \rightarrow GL(V_i)$, tenemos que H es la intersección de los K_i . Como el espacio topológico asociado a G es noetheriano y los K_i son cerrados, existe $i \in I$ tal que $H = K_i$. Luego G/H es afín. Observemos que como G/H es de tipo finito entonces tenemos que $\mathcal{O}_{G/H}(G/H)$ es finitamente generado.
3. Queremos ver $\text{Aff}(G) = G/H$. El morfismo de afinización η_G se factoriza a través de un único morfismo de esquemas afines $i : G/H \rightarrow \text{Aff}(G)$.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\eta_G} & \text{Aff}(G) \\ \downarrow q & \nearrow i & \\ G/H & & \end{array}$$

Tenemos que i es una inmersión cerrada por 3.1.6. Luego tomando secciones globales obtenemos que el homomorfismo asociado $i^\# : \mathcal{O}_{\text{Aff}(G)}(\text{Aff}(G)) = \mathcal{O}_G(G) \rightarrow \mathcal{O}_{G/H}(G/H) = \mathcal{O}_G(G)^H$ es inyectivo, por lo que concluimos que i es un isomorfismo.

4. Queremos probar $\mathcal{O}_G(H) = \mathbb{k}$. Sea N el núcleo de η_H , tenemos que N es normal en H y que $H/N = \text{Aff}(H)$ es afín. Como $G/H = \text{Aff}(G)$ es afín y $G/H \cong \frac{G/N}{H/N}$, el espacio homogéneo G/N es afín por Proposición 4.1.2. Tenemos entonces que el morfismo cociente $G \rightarrow G/N$ se factoriza a través de un único morfismo $\tilde{q} : \text{Aff}(G) \rightarrow G/N$.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{q} & G/N \\ \downarrow \eta_G & \nearrow \tilde{q} & \\ \text{Aff}(G) & & \end{array}$$

Tenemos que $\text{Ker}(\eta_G) = N$ y $\eta_G(H) = e_{\text{Aff}(G)}$, por lo que $H \subset N$, entonces $H = N$. Finalmente, cuando actuamos con H en $\mathcal{O}_G(H)$ a partir de la multiplicación a izquierda en H , los puntos fijos son el cuerpo \mathbb{k} , entonces $\mathcal{O}_G(H) = \mathbb{k}$.

□

Ejemplo. Si consideramos en producto $A \times G$ con A antiafín y G afín, entonces $(A \times G)_{ant} = A \times \{1\}$. En efecto, cualquier subgrupo antiafín H que contenga a $A \times \{1\}$ es tal que $p_2(H) \subset G$ es un subgrupo antiafín de G , por lo que es $\{1\}$.

4.3. Esquemas en grupos antiafines

En esta subsección presentaremos algunas propiedades que cumplen los esquemas en grupos antiafines siguiendo a [2, §3.3].

Definición 4.3.1. Un esquema en grupos de tipo finito G sobre \mathbb{k} es antiafín si $\mathcal{O}_G(G) = \mathbb{k}$.

Ejemplo. Las variedades abelianas son un ejemplo de esquemas antiafines.

Observación 4.3.2. Como $\mathcal{O}(X) \otimes_{\mathbb{k}} R = \mathcal{O}(X_R)$, G es antiafín si y sólo si lo es para alguna extensión de \mathbb{k} .

Lema 4.3.3. *Todo esquema en grupos de tipo finito antiafín es liso y conexo.*

Demostración. Sea G un esquema en grupos de tipo finito. Tenemos el esquema de componentes conexas de G , $\phi_0 = G/G^0$ que es finito y étale. Por la propiedad universal del cociente categórico sabemos que $q^\# : \mathcal{O}(G/H) \rightarrow \mathcal{O}(G)^H$ es un isomorfismo, entonces $\mathcal{O}(\phi_0(G)) \cong \mathcal{O}(G)^{G^0}$. Si G es antiafín, $\mathcal{O}(\phi_0(G)) = \mathbb{k}$, luego $\phi_0(G)$ es trivial, es decir, G es conexo.

La prueba de que G sea liso la podemos reducir al caso algebraicamente cerrado por la Proposición 2.2.6. En este caso, G_{red} es un subesquemas en grupos de G y $(G/G_{red})(\bar{\mathbb{k}}) = G(\bar{\mathbb{k}})/G_{red}(\bar{\mathbb{k}})$, por lo que G/G_{red} tiene un solo $\bar{\mathbb{k}}$ -punto racional y por lo tanto es finito. Luego podemos seguir el mismo razonamiento que el que hicimos para ver que G es conexo y ver deducir que $G/G_{red} = \text{Spec}(\mathbb{k})$ es un punto. □

A continuación veremos una versión para esquemas en grupos antiafines del “Lema de Rigidez” de las variedades abelianas (ver [10, página 43]).

Lema 4.3.4. *Sean X, Y, Z esquemas con X casi compacto, $\mathcal{O}(X) = \mathbb{k}$ e Y irreducible y localmente noetheriano, y $f : X \times Y \rightarrow Z$ un morfismo de esquemas. Si existen puntos \mathbb{k} -racionales $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ tal que $f(x_0, y_0) = f(x, y_0)$ para todo x punto \mathbb{k} -racional, entonces $f(x, y) = f(x_0, y)$.*

Demostración. Tomamos el punto \mathbb{k} -racional $z_0 := f(x_0, y_0)$ y los entornos infinitesimales $z_{0,n} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{Z,z_0}/m_{z_0}^{n+1})$ y $y_{0,n} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y_0}/m_{y_0}^{n+1})$ con n natural. Esto nos da una cadena creciente de subesquemas de Z donde $X \times y_{0,n}$ está contenida en la fibra de f en $z_{0,n}$, es decir, que podemos restringir f a morfismos $f_n : X \times y_{0,n} \rightarrow z_{0,n}$, a los que les corresponden los homomorfismos de álgebras $f_n^\# : \mathcal{O}(z_{0,n}) \rightarrow \mathcal{O}(X \times y_{0,n}) = \mathcal{O}(X) \otimes_{\mathbb{k}} \mathcal{O}(y_{0,n}) = \mathcal{O}(y_{0,n})$ porque X es antiafín. Por construcción $z_{0,n}$ es afín, entonces f_n se factoriza por un morfismo $g_n : y_{0,n} \rightarrow z_{0,n} \subset Z$, por lo tanto tenemos que $f_n(x, y) = g_n(y)$, lo que nos deja $f(x, y) = f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$ cuando nos restringimos a $X \times y_{0,n}$.

Ahora queremos extender esto a todo $X \times Y$. Consideremos W el subesquema cerrado más grande para el cual se cumple la igualdad. Primero observemos que W contiene a $X \times y_{0,n}$ para todo n , luego alcanza con ver que la unión de $y_{0,n}$ es densa en Y . Como Y es localmente noetheriano e irreducible, basta probar que es densa en un entorno afín y noetheriano. Sea $U \subset Y$ abierto afín, con $\mathcal{O}_Y(U)$ noetheriano y U denso en Y . Tenemos $\mathcal{O}_Y(U) \subset \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}/m^n$. Luego, $\text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y}/m^n) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_Y(U)) = U$, donde este último morfismo es dominante. Tenemos entonces que $\bigcup_n \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y}) \subset \text{Spec}(\mathcal{O}_Y(U))$. Finalmente,

$$\bigcup_n \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y}) = \bigcup V(m^n) = V(\bigcap m^n) = V(0) = \mathcal{O}_{Y,y},$$

donde $V(\bigcap m^n) = V(0)$ se deduce utilizando el teorema de Krull (ver [1, 10.18]). Entonces la unión de los $X \times y_{0,n}$ es densa en $X \times Y$ y por lo tanto $W = X \times Y$. \square

El hecho de que un grupo antiafín sea conmutativo se prueba de forma similar a la prueba de que las variedades abelianas son conmutativas (ver [Mumford, Sección II, Corolario 2]). Esto no es de extrañar dado que los esquemas en grupos antiafines son una generalización de estas, y verifican un resultado de rigidez (Lema 4.3.4), que es clave para la prueba de la conmutatividad.

Proposición 4.3.5. *Sean H y G esquemas en grupos de tipo finito con H antiafín y $f : H \rightarrow G$ un morfismo de esquemas con $f(e_H) = e_G$. Entonces f es un morfismo de esquemas en grupos que factoriza a través del centro de G^0 . En particular, si un grupo es antiafín entonces es conmutativo.*

Demostración. Como H es antiafín, es conexo, por lo tanto factoriza por G^0 y podemos suponer G conexo. Veamos el morfismo $h : H \times H \rightarrow G$ tal que $(x, y) \rightarrow f(xy)f(y)^{-1}f(x)^{-1}$: si h es constante entonces f es un homomorfismo. Para esto podemos usar el Lema 4.3.4, tenemos que observar que H es liso y conexo, por lo tanto irreducible, y se cumple la condición de que $h(x, e_H) = e_G = h(e_H, e_H)$, entonces concluimos que es un morfismo de esquemas en grupos.

Para ver que f factoriza por el centro de G podemos utilizar el mismo argumento pero con el morfismo $g : H \times G \rightarrow G$ tal que $g(x, y) = f(x)yf(x)^{-1}y^{-1}$. \square

Proposición 4.3.6. *Sea G un esquema en grupos de tipo finito y $H = \text{Ker}(\eta_G)$.*

1. H está contenido en el centro de G^0 .
2. H es el mayor subesquema en grupos antiafín de G .

Demostración.

Ya vimos en Teorema 4.2.9 que H es antiafín. Luego por la proposición anterior tenemos que la inclusión se factoriza por el centro de G^0 por lo tanto está contenido.

Supongamos que tenemos otro subesquema en grupos antiafín N . Luego el cociente $N/N \cap H$ es antiafín pero también es afín porque es isomorfo a un subesquema en grupos cerrado de G/H que es afín, entonces nos queda trivial lo que implica que $N \subset H$. \square

Notación. Dado un esquema en grupos G , llamamos $G_{ant} := \text{Ker}(\eta_G)$.

Recordamos que una variedad abeliana es un esquema liso, conexo y propio. Finalizaremos este trabajo caracterizando los esquemas en grupos de tipo finito cuando G_{ant} es una variedad abeliana.

Lema 4.3.7. *Sea G un esquema en grupos de tipo finito y $N \triangleleft G$ un subesquema en grupos normal. Entonces el cociente $G \rightarrow G/N$ induce un isomorfismo $G_{ant}/(G_{ant} \cap N) \xrightarrow{\sim} (G/N)_{ant}$.*

Demostración. Por la proposición 3.2.3 hay una inmersión cerrada de esquemas en grupos $G_{ant}/(G_{ant} \cap N) \rightarrow G/N$; donde el primero es antiafín porque es el cociente de un antiafín, por lo tanto nos queda una inmersión cerrada de esquemas en grupos conmutativos de tipo finito $h : G_{ant}/(G_{ant} \cap N) \rightarrow (G/N)_{ant}$. Para que sea un isomorfismo resta ver que el cokernel $C = (G/N)_{ant}/h(G_{ant}/G_{ant} \cap N)$ sea trivial. C es antiafín porque es cociente de un antiafín y también es afín porque lo podemos ver como subgrupo de $(G/N)/(G_{ant}/G_{ant} \cap N)$, entonces C es trivial, lo que implica que h es un isomorfismo. \square

Proposición 4.3.8. *Sea G un esquema en grupos de tipo finito. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. G es propio (ver Definición 2.1.8).
2. G_{ant} es una variedad abeliana y G/G_{ant} es finito.

En este caso tenemos entonces que $G_{ant} = G_{red}^0$, y en particular, que G_{red}^0 es un subesquema en grupos liso y conexo.

Demostración. Como G_{ant} es liso, conexo y propio, entonces es una variedad abeliana. Además, si G es propio, G/G_{ant} es propio y afín, y por lo tanto es finito. El recíproco se deduce de la misma forma que la Proposición 4.1.2.

Finalmente, si se cumplen estas condiciones, observamos que G^0/G_{ant} es finito y afín, por lo tanto es infinitesimal. Tenemos entonces que el álgebra $\mathcal{O}_{G^0/G_{ant}}(G^0/G_{ant})$ es local con cuerpo de residuos \mathbb{k} , por lo que $(G^0/G_{ant})_{red}$ es trivial y $G_{red}^0 \subset G_{ant}$. \square

Bibliografía

- [1] Atiyah, M. F., Macdonald, I. G. (1969). *Introduction to commutative algebra*, AddisonWesley. Reading, MA.
- [2] Brion, M. (2017). *Some structure theorems for algebraic groups*. In Proc. Symp. Pure Math (Vol. 94, pp. 53-125).
- [3] Dascalescu, S., Nastasescu, C., Raianu, S. (2000). *Hopf algebra: An introduction*. CRC Press.
- [4] Demazure, M., Gabriel, P. (1970). *Groupes algébriques (Vol. 1)*, Masson et Cie, Paris.
- [5] Ferrer, W., Rittatore, A. (2017). *Actions and invariants of algebraic groups*. CRC press.
- [6] Grothendieck, A., Demazure, M. (1962). *Schemas en groupes I*. Lect. Notes Math, 151.
- [7] Eisenbud, D., Harris, J. (2000). *The geometry of schemes*, Springer, New York.
- [8] Grothendieck, A. (1965). *Éléments de géométrie algébrique: IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Seconde partie*. Publications Mathématiques de l'IHÉS, 24, 5-231
- [9] Milne, J. S. (2017). *Algebraic groups: The theory of group schemes of finite type over a field (Vol. 170)*. Cambridge University Press.
- [10] Mumford, D., Ramanujam, C. P., Manin, I. I. (1974). *Abelian varieties (Vol. 2)*. Oxford: Oxford university press.
- [11] Perrin, D. (1975). *Schémas en groupes quasi-compacts sur un corps et groupes henséliens (Vol. 165)*. Université Paris XI, UER Mathématique.
- [12] Rosenlicht, M. (1956). *Some basic theorems on algebraic groups*. American Journal of Mathematics, 78(2), 401-443.

- [13] Silverman, J. *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves*. Springer-Verlag, 1994.
- [14] Shafarevich, I. R., Reid, M. (1994). *Basic algebraic geometry (Vol. 2)*. Berlin: Springer-verlag.
- [15] The Stacks Project (2020). Columbia University. Recuperado de <https://stacks.math.columbia.edu/>
- [16] Vakil, R. *The Rising Sea. Foundations of Algebraic Geometry*, <http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/FOAGnov1817public.pdf> (actualizado el 18 de noviembre de 2017).
- [17] Youcis, A. (12 de Marzo 2014). *Flat morphisms and flatness*. [Mensaje en un blog]. Recuperado de <https://ayoucis.wordpress.com/2014/03/12/flat-morphisms-and-flatness/>