

TRABAJO MONOGRÁFICO

Curvas pseudoholomorfas y aplicaciones

Por: Joaquín Lema

Orientador: Prof. Ezequiel Maderna



**UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY**

Licenciatura en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Uruguay

Resumen

El objetivo de este trabajo es introducir las herramientas básicas para el desarrollo de la teoría de las curvas pseudoholomorfas, y mostrar el rol crucial que ha jugado esta teoría en el estudio de las variedades simplécticas. Luego de presentar los fundamentos, damos una prueba autocontenida del célebre teorema "non-squeezing" de Gromov. Como corolario vamos a obtener la rigidez C^0 de los grupos de simplectomorfismos.

Abstract

The objective of this monograph is to introduce the basic tools in the theory of pseudoholomorphic curves and its role in the study of symplectic manifolds. After we present the general theory, we will be able to give a self contained proof of the celebrated non-squeezing theorem by Gromov. As a corollary we are going to obtain the C^0 rigidity result for the group of symplectomorphisms.

Índice

1	Introducción	4
2	Las estructuras subyacentes.	7
2.1	Un poco de álgebra lineal	7
2.2	Estructuras complejas	9
2.3	Estructura simpléctica	10
2.4	Revisitando las ecuaciones de Cauchy-Riemann	14
2.5	Breve introducción a las variedades complejas	18
2.6	Fibrados holomorfos	21
2.7	Operadores de Cauchy-Riemann	24
2.8	Breve introducción a las variedades mínimas	30
3	Nociones básicas sobre Curvas Pseudoholomorfas	35
3.1	Regularidad	36
3.2	Algunas propiedades locales	41
3.2.1	Continuación única	43
3.2.2	Puntos críticos	44
3.2.3	Intersecciones de curvas	45
3.2.4	Reparametrizaciones de Curvas	46
3.3	La identidad de energía	48
4	Espacios de Moduli	50
4.1	La linealización de $\bar{\partial}_J$	50
4.2	La transversalidad	53
4.3	Dependencia respecto a J	58
5	Compacidad	59
6	Aplicaciones	69
6.1	El teorema de "Non-squeezing"	69
6.2	Capacidades simplécticas y rigidez	73
7	Apéndices	76
7.1	Espacios de Sobolev	76
7.2	Análisis no lineal	80
7.2.1	Variedades de Banach	80
7.2.2	Operadores de Fredholm	85
7.2.3	El teorema de Sard-Smale	88
7.3	Breve introducción a las clases de Chern	89
7.4	El dual de Hodge	93
7.5	Algunas cuentas en variedades casi complejas	94

1 Introducción

La definición clásica de geometría refiere al estudio cuantitativo de la forma (*geo* significa tierra y *metria* medida). Quizas la más popular de las geometrías sea la Riemanniana, donde la noción de medida proviene de la *longitud*. El objeto de esta tesis se enmarca en el estudio de otra geometría llamada la geometría simpléctica que describiremos a continuación.

Supongamos que estamos en \mathbb{R}^{2n} , veamos a los elementos de éste como $(q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ los pares de “posición” y “momento”, estos nombres serán explicados en breve.

Supongamos que tenemos una curva $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ y consideremos los planos como en la figura. Denotemos γ_i a la proyección de la curva en el plano (q_i, p_i) , entonces definamos la acción simpléctica como:

$$A(\gamma) = \sum_{i=1}^n A(\gamma_i),$$

donde $A(\gamma_i)$ es el área que encierra la curva. Notar que la naturaleza de esta medida es 2-dimensional (al contrario de la longitud que es 1-dimensional). Un simplectomorfismo es una transformación $\phi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ tal que $A(\phi(\gamma)) = A(\gamma)$ para todas las curvas cerradas.

Esta definición no es caprichosa, Poincaré y Cartan ya conocían que ésta era una propiedad de los flujos Hamiltonianos provenientes de la física. Abstraigamos un poco esta definición, recordemos que el área encerrada por una curva en \mathbb{R}^2 es $\int_{\gamma} qdp$, por lo tanto tenemos que:

$$A(\gamma) = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} q_i dp_i = \int_{\gamma} \sum_{i=1}^n q_i dp_i.$$

Definamos como $\lambda = \sum_{i=1}^n q_i dp_i$ a la forma que estamos integrando. Por nuestra definición de simplectomorfismo, notemos que si ϕ lo es:

$$\phi^* \lambda = \lambda + df,$$

Para cierta f . Por lo tanto si $d\lambda = \omega_0$ obtenemos que el simplectomorfismo deja invariante a ω_0 . Resulta que esta 2-forma codifica toda la geometría que describimos. Notemos que $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ y la podemos reescribir como:

$$\omega_0(v, w) = \langle J_0 v, w \rangle,$$

donde J_0 es la matriz que proviene de ver la multiplicación por i en \mathbb{C}^n como transformación lineal de \mathbb{R}^{2n} . Supongamos que tenemos un camino de simplectomorfismos ϕ_t arrancando en la identidad ($\phi_0 = Id$) entonces $\phi_t^* \omega_0 = \omega_0$ por lo tanto si definimos $X = \frac{d}{dt} \big|_{t=0} \phi_t$ entonces derivando en t :

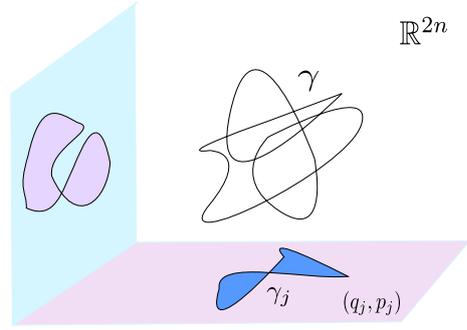


Figura 1: Interpretación geométrica del invariante

$$\mathcal{L}_X \omega_0 = d\iota_X \omega_0 = 0$$

Donde usamos la identidad de Cartan $\mathcal{L}_X \omega_0 = d\iota_X \omega_0 + \iota_X d\omega_0$ y que ω_0 es cerrada. Concluimos que la forma $\iota_X \omega_0$ es cerrada y por el lema de Poincaré $\iota_X \omega_0 = dH$ para cierta $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, a esta H se la llama el Hamiltoniano. Notemos que ahora podemos reescribir a X en términos de H de la siguiente forma:

$$\iota_X \omega_0(v) = \langle J_0 X, v \rangle = dH(v) = \langle \nabla H, v \rangle .$$

Por lo tanto $X = -J_0 \nabla H$, este es el gradiente con respecto a la forma simpléctica de la función H . Si denotamos a $\phi_t(q, p) = (q(t), p(t))$ entonces las trayectorias $q(t), p(t)$ satisfacen las ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) \end{cases}$$

Supongamos que queremos generalizar esto a una variedad diferenciable M , voy a definirlo como lo hace Arnold en sus escritos:

Definición 1.1. Una variedad simpléctica (M, ω) es una variedad equipada con una 2-forma ω tal que existe un cubrimiento por entornos coordinados donde si $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ es una carta, $\phi^* \omega_0 = \omega$.

Observar que como ω_0 no degenera entonces ω tampoco, por lo tanto tenemos la noción de gradiente simpléctico igual que antes. Tomemos $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable (Hamiltoniano) entonces definimos el campo X_H como $\iota_{X_H} \omega = dH$. Además notar que ω es cerrada, esto nos permite concluir con la misma cuenta de antes que los ϕ_t generados por el flujo de X_H son simplectomorfismos (en el sentido $\phi_t^* \omega = \omega$).

La definición usual de forma simpléctica ω es una 2-forma cerrada y no degenerada, un teorema clásico de Darboux nos dice que esta definición es equivalente a la que dimos nosotros, las cartas que nos da nuestra definición se llaman cartas de Darboux. Tampoco la definición de variedad simpléctica es caprichosa, dentro de la matemática estas estructuras surgen naturalmente a modo de ejemplo en las variedades de Kähler que presentamos en 2.3. Esta familia es enorme, por ejemplo toda variedad algebraica compleja proyectiva suave es Kähler.

El teorema de Darboux es un problema ya que nos dice que en esta geometría no tenemos invariantes locales (al contrario de la geometría Riemanniana). Por lo tanto si esta geometría es interesante debe tener algo que la caracterice. Los primeros indicios de que la naturaleza simpléctica tiene algo distintivo nace con el intento de generalizar el teorema de Poincaré-Birkhoff. Este teorema nos dice que un difeomorfismo del anillo que preserva área y “tuerce los bordes para lados distintos” tiene al menos 2 puntos fijos. Uno pensaría que esto nos está diciendo cosas acerca de las transformaciones que preservan volumen sin embargo la dimensión 2 es engañosa ya que ser simpléctica en dimensión 2 coincide con preservar área, en dimensión más alta esto no es verdad aunque ser simpléctica implica preservar volumen. Con el paso del tiempo la gente se dio cuenta que esto no era característico de las transformaciones que preservan volumen sino de las simplécticas, el primero en conjeturarlo fue Arnold (vease su survey [Arn86]).

Ya de lo anterior surge naturalmente una posible pregunta, ¿cómo podemos formular la condición de que las transformaciones simplécticas no pueden cumplir ninguna propiedad más que las que preservan volúmen? Eliashberg conjetura:

¿Toda transformación preservando volúmen puede ser aproximada en la topología C^0 por simplectomorfismos?

Si la respuesta fuera positiva nos dice que desde el punto de vista topológico los simplectomorfismos son esencialmente transformaciones preservando volúmen y nada más. La respuesta a esta pregunta es negativa y vamos a verlo en el capítulo 6:

Teorema 1.1 (Eliashberg, Gromov). *Supongamos que $f_k : (M, \omega_M) \rightarrow (N, \omega_N)$ difeomorfismos simplécticos tal que $f_k \rightarrow f \in \text{Diff}(M, N)$ donde la convergencia es en la topología C^0 , entonces f es un difeomorfismo simpléctico*

¿Cómo podemos estudiar las variedades simplécticas? Aquí es donde entra la brillantez de Gromov. Es bien conocido (y lo probamos en la sección 2.2) que dada ω una forma simpléctica en M entonces existe lo que se llama una estructura casi compleja J y una métrica g tal que $\omega(v, w) = g(Jv, w)$ y $J^* = -J$. Una estructura casi compleja es un endomorfismo $J : TM \rightarrow TM$ tal que $J^2 = -Id$, esto nos induce naturalmente en $T_p M$ una estructura de \mathbb{C} -espacio vectorial, lo que tenemos que pensar es que si tenemos una variedad compleja entonces la multiplicación por i nos induce a nivel de tangentes una J como arriba. La idea de Gromov fue cambiar el foco del estudio de (M, ω) a (M, J) y estudiar esta última como si fuera una variedad compleja.

Clásicamente para estudiar variedades complejas se estudian las curvas holomorfas dentro de ella, esta es esencialmente la teoría que Gromov desarrolla en su paper fundacional [Gro85]. ¿Qué es una curva holomorfa en este contexto? Es simplemente un mapa diferenciable $u : \Sigma \rightarrow M$ tal que el diferencial es lineal complejo con las estructuras de \mathbb{C} -espacio vectorial natural en los tangentes.

El plan para esta monografía es el siguiente: en el segundo capítulo vamos a hacer un panorama general de varias estructuras que rodean al mundo simpléctico, se recomienda al lector comenzar con el capítulo 3 y volver al 2 cuando se necesiten los prerrequisitos. En el capítulo 3 la moraleja va a ser que localmente estas curvas heredan muchas de las propiedades del caso holomorfo y por lo tanto vamos a intentar rescatar algunos teoremas de este contexto, el final de esta sección también toca la muy importante identidad de energía. En el capítulo 4 vamos por fin a estudiar el espacio de curvas pseudoholomorfas en una variedad, probaremos que genéricamente éstas son variedades de dimensión finita (como en el caso clásico) y cómo varían éstos con la elección de la J que realizamos anteriormente. El capítulo 5 nos va a decir cuándo las variedades que encontramos antes son también compactas. Por último en 6 usamos esta maquinaria para probar:

Teorema 1.2 (Non-squeezing, Gromov). *Supongamos que $\iota : B_r^{2n} \rightarrow D_R \times \mathbb{C}^{n-1}$ es un encaje simpléctico con las formas simplécticas estandar entonces $r \leq R$.*

Este es el primer invariante global que existe en el área que nos dá una corolarios interesantes.

2 Las estructuras subyacentes.

En esta sección vamos a hacer una breve introducción a las estructuras que van a aparecer a lo largo de la monografía.

Primero vamos a concentrarnos en las estructuras complejas y simplécticas, vamos a ganar intuición de las mismas haciendo en una primera instancia álgebra lineal para luego trabajar en fibrados. Luego vamos a estudiar los llamados operadores de Cauchy-Riemann que van a jugar un rol fundamental en el capítulo 4. Por último hacemos una breve mención a las variedades mínimas y algunos nexos con el mundo simpléctico, probaremos por ejemplo que una subvariedad compleja de una variedad de Kähler es mínima, además van a aparecer en la prueba del Non-Squeezing en el capítulo 6.

2.1 Un poco de álgebra lineal

Vamos a trabajar con la identificación $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ dada por $(q, p) \in \mathbb{R}^{2n} \leftrightarrow (q_1 + ip_1, \dots, q_n + ip_n) \in \mathbb{C}^n$. Uno u otro enfoque nos va a simplificar alguna cuenta.

Sea V un espacio vectorial, vamos a denotar $\Lambda^k V$ al k -ésimo producto exterior del espacio vectorial. Una forma simpléctica en V es una $\omega \in \Lambda^2 V^*$ que es no degenerada. Al par (V, ω) le vamos a llamar espacio vectorial simpléctico.

El ejemplo importante en el cual hay que pensar es el siguiente:

Ejemplo. En \mathbb{C}^n tenemos la forma hermitiana estándar $h_0 = \sum_{k=1}^n dz_k \otimes d\bar{z}_k$ donde $dz_k = dq_k + idp_k$ y $d\bar{z}_k = dq_k - idp_k$, desarrollando la expresión tenemos que:

$$h_0 = \left(\sum_{k=1}^n dq_k \otimes dq_k + dp_k \otimes dp_k \right) - i \left(\sum_{k=1}^n dq_k \wedge dp_k \right)$$

Donde la parte real es el producto interno en \mathbb{R}^{2n} estándar g_0 y $\sum dq_k \wedge dp_k := \omega_0$ es lo que llamamos la forma simpléctica estándar en \mathbb{R}^{2n} .

La matriz asociada a ω_0 en la base canónica es: $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix}$, que es la matriz asociada a la multiplicación compleja en \mathbb{C}^n vista en \mathbb{R}^{2n} , es decir $\omega_0(v, w) = g_0(J_0 v, w)$.

Se define el grupo de las matrices simplécticas $Sp(2n) = \{A \in Gl_{2n}(\mathbb{R}) : A^* \omega_0 = \omega_0\}$. Con esta notación tenemos que:

$$Sp(2n) \cap O(2n) = Gl_n(\mathbb{C}) \cap O(2n) = Gl_n(\mathbb{C}) \cap Sp(2n) = U(n)$$

Aquí $O(2n)$ es el grupo ortogonal, $U(n)$ es el grupo unitario (es decir que preservan el producto interno usual y el hermitiano respectivamente) y vemos a $Gl_n(\mathbb{C})$ dentro de $Gl_{2n}(\mathbb{R})$ como aquellas matrices que conmutan con J_0 . La moraleja es que como $h_0 = g_0 - i\omega_0$ preservando dos estructuras se preserva la tercera.

La otra estructura que ya se deja ver en el ejemplo anterior es la siguiente: sea $J \in End(\mathbb{R}^{2n})$ tal que $J^2 = -Id$. Esto nos define en \mathbb{R}^{2n} una estructura de espacio vectorial complejo vía $(a + ib)v = av + bJv$. A estas J le llamaremos

estructuras complejas en \mathbb{R}^{2n} y al conjunto de las mismas las denotamos como $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$.

La relación entre ambas estructuras es la siguiente:

Proposición 2.1. *Sea ω una forma simpléctica en \mathbb{R}^{2n} entonces existe J estructura compleja y g producto interno tal que $\omega(v, w) = g(Jv, w)$. Además en esta métrica $J^* = J^t = -J$.*

Demostración. Escencialmente la prueba es la descomposición polar. Notemos que por ser no degenerada $\omega(v, w) = g_0(Av, w)$ para $A \in Gl_{2n}(\mathbb{R})$ y por ser alternada $A^t = -A$. Notemos entonces que $-A^t A$ es autoadjunto y positivo, tiene una raíz cuadrada P , entonces $A = UP$ para cierta U donde U cumple que: $U^2 = AP^{-1}AP^{-1}$, pero notar que P conmuta con A entonces $U^2 = A^2P^{-2} = A^2(-A^{-2}) = -Id$ por lo tanto tomando $g(v, w) = g_0(Pv, w)$ estamos. La última propiedad es una cuenta directa. □

En particular notemos que para la J anterior tenemos que $\omega(Jv, Jw) = \omega(v, w)$. A tales estructuras complejas las vamos a llamar compatibles con ω y al conjunto de las mismas lo denotamos como $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$.

Por lo tanto dada una ω y g como en la proposición anterior tenemos que $h = g - i\omega$ define una forma hermitiana. Tomando una base h ortonormal compleja $\{e_1, \dots, e_n\}$ tenemos que $A^*h = h_0$ como arriba. Por eso en espacios vectoriales el ejemplo visto anteriormente es el único ejemplo. En la base $\{e_1, Je_1, \dots, e_n, Je_n\}$ tenemos que ω y J toman la forma estandar. Concluimos:

Proposición 2.2. *Todo espacio vectorial simpléctico (V, ω) es isomorfo a $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ vía $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ donde $\Phi^*\omega_0 = \omega$.*

El espacio $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$

Notemos que $Gl_{2n}(\mathbb{R})$ actúa en $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$ vía la conjugación, esta acción cumple que:

- $Stab(J_0) = Gl_n(\mathbb{C})$ (por definición éstas son las matrices invertibles que conmutan con J_0).
- La acción es transitiva.

Esto es porque dada J podemos encontrar una base donde $[J]_{\mathcal{B}} = J_0$. Para verlo basta tomar una \mathbb{C} -base de \mathbb{R}^{2n} con la estructura que nos da J , digamos $\{v_1, \dots, v_n\}$. Ahora tomemos la base de \mathbb{R}^{2n} (como \mathbb{R} espacio vectorial) $\mathcal{B} = \{v_1, Jv_1, \dots, v_n, Jv_n\}$.

Por lo tanto $Gl_{2n}(\mathbb{R})/Gl_n(\mathbb{C}) \cong \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$ y como $Gl_n(\mathbb{C})$ tiene índice 2 en $Gl_{2n}(\mathbb{R})$ tenemos que $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$ es un espacio homogéneo de dimensión $2n^2$.

Calculemos ahora su espacio tangente: sea $J(t)$ una curva con $J(0) = J$, entonces si $\frac{d}{dt}|_{t=0}J(t) = A$ obtenemos derivando la expresión $J(t)^2 = -Id$ que $AJ = -JA$. Concluimos que:

$$T_J\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}) = \overline{End}_J(\mathbb{R}^{2n}) := \{A \in End(\mathbb{R}^{2n}) : JA = -AJ\}$$

Son las matrices antilineales complejas con la estructura J .

Definamos ahora cartas en $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$ que usaremos más adelante. Tomemos $J \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$ y sea $A \in \overline{End}_J(\mathbb{R}^{2n}) = T_J\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$ en un entorno del 0 entonces definamos el mapa $\tilde{\phi}(A) = (Id + A)J(Id + A)^{-1}$. Haciendo la cuenta tenemos que $\frac{d}{dt}|_{t=0}\tilde{\phi}(tA) = -2JA$. Por lo tanto arreglando un poco el mapa anterior tenemos que el mapa $\phi(A) = (Id + 1/2J_0A)J_0(Id + 1/2J_0A)^{-1}$ cumple que $d_0\phi = Id$ y por lo tanto es un difeomorfismo local.

2.2 Estructuras complejas

Fijemos a partir de ahora las siguientes notaciones: M será una variedad diferenciable y $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial de dimensión par. $\phi_U = (Id, g_U) : E|_U = \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^{2n}$ son las trivializaciones y $g_{UV} = g_U^{-1} \circ g_V : U \cap V \rightarrow Gl_{2n}(\mathbb{R}^{2n})$ los mapas de transición.

Al espacio de secciones de E lo vamos a denotar $\Gamma(E)$ y se asume con la topología C_{loc}^∞ (si $\{s_n\}$ son secciones del respectivo fibrado, $s_n \rightarrow s$ si todas las derivadas de s_n convergen uniformemente a las de s en compactos de E).

Definición 2.1. Sea $\pi : E \rightarrow M$ como arriba, una estructura compleja en E es una sección del fibrado $End(E)$ tal que $J^2 = -Id$. Al conjunto de éstas las denotamos como $\mathcal{J}(E)$.

Como en alguna base toda J es como J_0 estándar tenemos que siempre existen trivializaciones $\phi_U : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^{2n}$ tal que $g_U \circ J = J_0 \circ g_U$ y que dada dos trivializaciones como arriba el cambio de cartas queda lineal complejo (es decir $g_{UV} \circ J_0 = J_0 \circ g_{UV}$). Esto significa que J define en E una estructura de \mathbb{C} fibrado vectorial.

Observación. No todo fibrado admite una estructura compleja. Como vimos arriba los E que admiten estructuras son naturalmente \mathbb{C} fibrados y éstos son orientables.

Definición 2.2. A un par (M, J) donde J es una estructura compleja en TM vamos a llamarle una variedad casi compleja.

Ejemplos. • Variedades complejas (vease 2.5)

Decimos que (M, J) es integrable si J proviene de la multiplicación por i para una estructura compleja en M .

- Una estructura casi compleja no integrable:
Sea $\mathbb{O} = \mathbb{R}^8$ los octoniones, consideremos $S^6 \subset im\mathbb{O}$ la esfera imaginaria. Dado $p \in S^6$ tenemos que $T_p S^6 = \langle p \rangle^\perp$. Podemos chequear que la multiplicación por p define una estructura compleja en $T_p S^6$, pero como los octoniones no son asociativos esta estructura no puede ser integrable.

Observación. Notar que el hecho de que existan estructuras no integrables no contradice el hecho de que localmente siempre existan trivializaciones $\tau = (Id, \phi_U) : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^n$ tal que $g_U \circ J = J_0 \circ g_U$.

Un resultado bien conocido permite saber cuándo una $J \in \mathcal{J}(M)$ es integrable, una prueba de este resultado puede encontrarse en el capítulo 5 del clásico libro de Hörmander [Hor90].

Teorema 2.3 (Newlander-Nirenberg). (M, J) es integrable si y solamente si el tensor de Nijenhuis $N_J = 0$ donde:

$$N_J(X, Y) = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY] \quad (1)$$

En 2.5 vamos a dar una intuición de por qué este resultado es verdad.

2.3 Estructura simpléctica

Dado E un fibrado vectorial vamos a denotar como $\Lambda^k E$ el k -ésimo producto exterior.

Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial de dimensión par sobre M variedad diferenciable. Una forma simpléctica en E es una sección $\omega \in \Gamma(\Lambda^2 E^*)$ tal que ω_p es no degenerada $\forall p \in M$.

Denotemos como $\mathcal{M}(E)$ al conjunto de métricas en E , el cual nunca es vacío por el argumento clásico con particiones de la unidad.

Proposición 2.4. Dada ω una estructura simpléctica en el fibrado vectorial, existe $g \in \mathcal{M}(E)$ y $J \in \mathcal{J}(E)$ tal que $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$ y $J^* = -J$.

Demostración. Notemos que todas las operaciones en la demostración de la proposición 2.1 son diferenciables, entonces comenzando con una $g \in \mathcal{M}(E)$ obtenemos lo deseado. \square

Notemos que las J estructuras como en la proposición cumplen que $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$. Tales estructuras complejas se dice que son compatibles con ω y al conjunto de estas se lo denota como $\mathcal{J}(E, \omega)$.

Teorema 2.5. $\mathcal{J}(E, \omega)$ es no vacío y contráctil.

Demostración. Notemos que el espacio $\mathcal{M}(E)$ es contráctil ya que es convexo.

Consideremos el mapa $\phi : \mathcal{J}(E, \omega) \rightarrow \mathcal{M}(E)$ $\phi(J) = g_J := \omega(J, \cdot)$, por la observación anterior este mapa es homotópicamente nulo.

Por otro lado si $g \in \mathcal{M}(E)$ entonces $\omega(X, Y) = g(AX, Y)$ donde $A \in \text{Aut}(E)$ y $A^* = -A$ por la misma observación de la proposición 2.1. El mapa $\psi : \mathcal{M}(E) \rightarrow \mathcal{J}(E, \omega)$ definido como $\psi(g) = A\sqrt{-A^*A}^{-1}$ queda diferenciable y además $\psi \circ \phi(J) = J$.

Como ϕ es homotópicamente nula entonces tenemos que $\text{Id} : \mathcal{J}(E, \omega) \rightarrow \mathcal{J}(E, \omega)$ es homotópicamente nula obteniendo lo deseado. \square

En particular $\mathcal{J}(E, \omega)$ es conexo por caminos que es algo que vamos a usar frecuentemente.

Definición 2.3. Decimos que (M, ω) es una variedad simpléctica si ω es una forma simpléctica en TM que además es cerrada.

Observación. No hay que confundirse la noción de forma simpléctica en una variedad y en un fibrado, acá tenemos una condición extra que es geométrica ($d\omega = 0$).

Vamos a denotar $\mathcal{J}(M, \omega) := \mathcal{J}(TM, \omega)$ a las J -estructuras compatibles.

Ejemplos. • Los fibrados cotangentes:

Ésta es una familia importante de ejemplos e históricamente los primeros. Sea M una variedad cualquiera y $\pi : T^*M \rightarrow M$ la proyección del fibrado cotangente, vamos a definir una $\lambda \in \Omega^1(T^*M)$ como:

$$\lambda_{(q,p)}(V) = p_q(d\pi_{(q,p)}(V)), \quad V \in T_{(q,p)}T^*M$$

Ésta se llama la 1-forma tautológica o de Liouville. En coordenadas podemos ver que $\lambda_{(p,q)} = \sum p^i dq_i$ entonces $d\lambda = \omega$ es no degenerada (viendo la expresión) y como es exacta debe ser simpléctica.

Este ejemplo cubre el caso de $\mathbb{R}^{2n} \cong T^*\mathbb{R}^n$ (a menos de un signo por la elección que hicimos en 2.1).

- Las formas de área en superficies son formas simplécticas.
- El toro \mathbb{T}^{2n} tiene la estructura simpléctica que baja de \mathbb{R}^{2n} (viendo $\mathbb{T}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$).
- Los espacios proyectivos $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$:

Si tomamos el mapa $\phi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^{2n+1}$ definido como $\phi(z) = (\frac{z_0}{|z|}, \dots, \frac{z_n}{|z|})$, entonces si hacemos $\phi^*\omega_0 = \rho_{FS}$ nos da:

$$\rho_{FS} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{|z|^2} \left(\sum_{i=1}^n dz_i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^n d\bar{z}_j \right) - \frac{1}{|z|^4} \left(\sum_{i=1}^n \bar{z}_i dz_i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^n z_j d\bar{z}_j \right) \right)$$

Notar que esta expresión queda invariante por el producto por escalares complejos, entonces baja a una forma ω_{FS} en $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ que se llama la forma de Fubini-Study.

Esta forma es no degenerada ya que en S^{2n+1} coincide con la estándar y es cerrada ya que la forma:

$$\alpha_{FS} = \frac{i}{4|z|^2} \left(\sum_{i=1}^n z_i d\bar{z}_i - \bar{z}_i dz_i \right)$$

Cumple que $d\alpha_{FS} = \rho_{FS}$ y por lo tanto es cerrada.

- Variedades de Kähler:

Una variedad de Kähler es una variedad compleja M junto con una métrica hermitiana h tal que $-Im(h) = \omega$ es una forma cerrada. Un ejemplo de esto es $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ como antes ya que podríamos haber hecho el pullback de la forma hermitiana.

Una pregunta natural es si toda variedad simpléctica compleja es de Kähler, la respuesta es que no, el ejemplo clásico son algunos fibrados de superficies de Riemann por superficies de Riemann (variedades de Kodaira-Thurston). Esto es en parte porque las Kähler tienen obstrucciones fuertes en la topología de la variedad, por ejemplo los números de Betti son todos pares.

Observación. Supongamos que estamos en el caso de M variedad cerrada, entonces:

1. ω^n no puede anularse nunca porque ω es no degenerada. Por lo tanto tenemos que $[\omega^n] \in H_{deR}^{2n}(M)$ no es trivial.

De hecho podemos calcularla explícitamente: supongamos que tomamos $g_J = \omega(J\cdot, \cdot)$ y sea $h_J = g_J - i\omega$ la métrica hermitiana asociada. Tomemos e_1, \dots, e_n es una base h_J ortonormal de T_pM , entonces $e_1, Je_1, \dots, e_n, Je_n$ una base simpléctica de T_pM y ortonormal para g_J . Si $dx_1, dy_1, \dots, dx_n, dy_n$ es la base dual tenemos que:

$$\omega_p = \frac{i}{2} \sum_i dz_i \wedge d\bar{z}_i$$

Donde $dz_j = dx_j + idy_j$ y $d\bar{z}_j$ análogo. Entonces $\omega_p^n = n!(\frac{i}{2})^n dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$ y como $\frac{i}{2} dz_j \wedge d\bar{z}_j = dx_j \wedge dy_j$ tenemos que $\frac{\omega^n}{n!} = dv_J$ donde dv_J es la forma de volumen inducida por g_J .

En el caso Kähler esta relación es bien conocida.

2. Como corolario de lo anterior podemos descartar una familia grande de variedades que no pueden ser simplécticas. Supongamos que $H^{2k}(M, \mathbb{Z}) = 0$ para algún $k < n$ entonces tendríamos que $\omega^k = d\alpha$ para $\alpha \in \Omega^{2k-1}(M)$ y:

$$\omega^n = d\alpha \wedge \omega^{n-k} = d(\alpha \wedge \omega^{n-k})$$

Y por lo tanto $\int \omega^n = 0$ lo cual es absurdo.

Esto nos da una cantidad de variedades que no pueden ser simplécticas, por ejemplo S^{2k} con $k \geq 2$.

Los morfismos en la categoría de variedades simplécticas son los $f : (M, \omega_M) \rightarrow (N, \omega_N)$ suaves tal que $f^*\omega_N = \omega_M$. A estos los llamamos simplectomorfismos.

Observación. Notar que por lo visto anteriormente si tenemos $f : (M, \omega) \rightarrow (M, \omega)$ simplectomorfismo entonces preserva la medida inducida por dv_J .

Ejemplo. Sea $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, definamos un campo de vectores X_H vía la ecuación $\iota_{X_H}\omega = dH$ donde ι es la contracción (acá usamos que ω es no degenerada). Por lo tanto X_H nos define el flujo $\phi_t : M \rightarrow M$ que llamamos el flujo Hamiltoniano, veamos que cada ϕ_t es un simplectomorfismo. Notar que:

$$\frac{d}{dt} \phi_t^* \omega = \phi_t^* (\mathcal{L}_{X_H} \omega).$$

Por la fórmula de Cartan $\mathcal{L}_{X_H} \omega = d\iota_{X_H} \omega + \iota_{X_H} d\omega$ y usando que ω es cerrada tenemos que $\frac{d}{dt} \phi_t^* \omega = 0$ por lo tanto $\phi_t^* \omega = \omega$.

En particular si ponemos J una estructura casi compleja en M compatible con ω , y g la métrica Riemanniana tal que $g(X, Y) = \omega(JX, Y)$ entonces $\omega(X_H, Y) = -g(JX_H, Y) = dH(Y) = g(\nabla H, Y)$ y como esto pasa $\forall Y$ tenemos que $JX_H = -\nabla H$. Es decir concluimos que $X_H = J\nabla H$. En el caso de

$(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ donde $J = J_0$ obtenemos entonces las conocidas ecuaciones de Hamilton: si $z = (q, p)$ entonces la ecuación diferencial $\dot{z} = X_H(z)$ satisface:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) \end{cases}$$

Intentemos definir ahora el concepto de acción simpléctica mencionado en la introducción. El problema es que lo definimos como la integral en curvas de una primitiva de ω , pero en general esto no tiene sentido (por ejemplo en variedades compactas).

Sin embargo localmente siempre tiene sentido hablar de acción simpléctica. Una de las formas es con el teorema de Darboux, pero usemos otro enfoque más geométrico. Acá M es una variedad compacta, equipémosla con $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$ y g_J la métrica asociada. Supongamos que γ es una curva cerrada en M con $l(\gamma)$ menor que el radio de inyectividad de la variedad, por lo tanto γ queda contenida en una bola geodésica B en M de radio a lo sumo la mitad que el radio de inyectividad. γ queda contractible y por lo tanto si denotamos $D \subset \mathbb{C}$ al disco unitario, podemos extender γ a un mapa $v_\gamma : D \rightarrow B$ tal que $v_\gamma|_{S^1} = \gamma$. Definamos la acción simpléctica:

$$A(\gamma) = - \int_D v_\gamma^* \omega$$

Esto está bien definido porque dadas dos extensiones éstas son homotópicas rel S^1 .

Nos va a ser útil en el capítulo 5 la siguiente desigualdad:

Teorema 2.6 (Desigualdad isoperimétrica). *Sea (M, ω) una variedad simpléctica compacta y $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$ entonces existe $\delta > 0$ y un $C > 0$ tal que si γ es una curva cerrada en M con $l(\gamma) \leq \delta$ entonces:*

$$|A(\gamma)| \leq Cl(\gamma)^2$$

Demostración. Tomemos δ el radio de inyectividad como antes entonces podemos definir una extensión $v_\gamma : D \rightarrow M$ como:

$$v_\gamma(re^{i\theta}) = \exp_{\gamma(0)}(r\xi(\theta))$$

Donde $\xi(\theta) \in T_{\gamma(0)}M$ queda determinado por $\gamma(e^{i\theta}) = \exp_{\gamma(0)}\xi(\theta)$, entonces:

$$\|\partial_r v_\gamma\| = \|\xi(\theta)\| = d(\gamma(0), \gamma(e^{i\theta})) \leq l(\gamma)$$

Por otro lado:

$$\|\partial_\theta v_\gamma\| \leq c_1 \|\dot{\xi}(\theta)\| \leq c_2 \|\dot{\gamma}(e^{i\theta})\|$$

Donde las constantes c_1, c_2 dependen de la métrica. Entonces:

$$|A(\gamma)| \leq \int_0^{2\pi} \int_0^1 |\omega(\partial_r v_\gamma, \partial_\theta v_\gamma)| dr d\theta \leq c_3 l(\gamma)^2$$

□

En [MS04, Capítulo 4] se prueba una versión mucho más refinada de este Teorema cuya prueba es muy similar a la desigualdad isoperimétrica en \mathbb{R}^2 usando series de Fourier.

2.4 Revisitando las ecuaciones de Cauchy-Riemann

El lector que no conoce los espacios de Sobolev puede dirigirse a 7.1.

En esta sección voy a denotar a $W^{k,p}(D, \mathbb{C}) = W^{k,p}(D)$ donde $D \subset \mathbb{C}$ es el disco unitario. El teorema clásico que voy a tratar de bosquejar es el siguiente:

Teorema 2.7. *Sea $p \in (1, \infty)$, el operador $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} : W^{1,p}(D) \rightarrow L^p(D)$ es sobreyectivo y tiene una inversa a derecha T continua.*

Un teorema clásico que nos va a dar nuestro candidato a inversa es el siguiente:

Teorema 2.8 (Cauchy-Pompeiu). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ dominio tal que $\partial\Omega$ es suave y $f \in C^1(\Omega)$ entonces tenemos para $a \in \Omega$ ($z = x + iy$) :*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-a} dz + \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}{z-a} dx dy$$

Demostración. Consideremos la 1-forma $\omega = \frac{f(z)}{z-a} dz$. Integremos $d\omega = \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}{z-a} d\bar{z} \wedge dz$ en $\Omega \setminus D(a, \varepsilon)$ con $D(a, \varepsilon) \subset \Omega$.

Entonces tenemos por el teorema de Stokes:

$$\int_{\Omega \setminus D(a, \varepsilon)} \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}{z-a} d\bar{z} \wedge dz = \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-a} dz - \int_{\partial D(a, \varepsilon)} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Notemos por un lado que:

$$\int_{\partial D(a, \varepsilon)} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(a + \varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}} i \varepsilon e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} f(a + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta,$$

y esto cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ tiende a $2\pi i f(a)$.

Despejando y usando que $-\frac{1}{2i} d\bar{z} \wedge dz = dx \wedge dy$ tenemos lo deseado. \square

Esto nos dice entonces que $Tf(z) = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(w)}{w-z} dx dy$ (donde $w = x + iy$) es la inversa a derecha al menos cuando f tiene soporte compacto en D .

A partir de ahora denotemos al espacio de las funciones test $\mathcal{D}(D) := C_{comp}^\infty(D)$. En este espacio si derivamos la integral obtenemos que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \circ T = T \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = Id$ (los detalles están hechos en [HZ94, Apéndice 4]). Esto nos dice justamente que T es la inversa en el sentido de las distribuciones.

El objetivo ahora es extender $T : L^p(D) \rightarrow W^{1,p}(D)$, para esto por un argumento de densidad basta controlar las normas para funciones $\mathcal{D}(D)$. Para calcular la norma $W^{1,p}$ de Tf hay que calcular la norma p de Tf , $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} Tf$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} Tf$, esta última es fácil ya que por lo que dijimos antes es simplemente f . La primera de las anteriores también es un caso que se puede hacer a mano pero en la segunda hay problemas porque:

$$\frac{\partial}{\partial z} Tf = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dx dy$$

Y notar que $\frac{1}{(w-z)^2} \notin L_{loc}^1(\mathbb{D})$, es lo que se llama una integral singular. Sin embargo está en L^p y es consecuencia del altamente no trivial teorema de Calderón-Zygmund.

Teorema 2.9 (Calderón-Zygmund). *Dado $p \in (1, \infty)$ existe $C > 0$ tal que $\forall f \in \mathcal{D}(D)$*

$$\|Tf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} Tf \right\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$$

Esto implica el Teorema enunciado al comienzo.

Comentario. No vamos a probar el Teorema de Calderón-Zygmund. Una buena exposición del teorema en un caso muy general se encuentra en [SS11, Capítulo 3]. También en [MS04, Apéndice B] hay una prueba de esto para el caso de la solución fundamental para el Laplaciano, ellos consiguen los mismos resultados que nosotros explotando la relación entre las ecuaciones de Cauchy-Riemann y el Laplaciano.

Este teorema va a ser explotado a lo largo de la tesis de diversas formas, pero en un principio podemos ver cómo este tipo de estimativas implican resultados de regularidad en el operador:

Teorema 2.10. *Dado $p \in (1, \infty)$, si $f \in W^{1,p}(D)$ es tal que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f \in W^{k,p}(D)$ con $k \geq 1$ entonces $\forall r < 1$ tenemos que $f \in W^{k+1,p}(D_r)$ y además existe $C > 0$ (que depende solo de r y p) tal que:*

$$\|f\|_{W^{k+1,p}(D_r)} \leq C \left(\|f\|_{W^{1,p}(D)} + \left\| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f \right\|_{W^{k,p}(D)} \right)$$

Demostración. Afirimo que basta ver para el caso $k = 1$. Esto es simplemente porque si ∂_I denota cierta derivada mixta con $I = (n, m)$ un multiíndice entonces $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \circ \partial_I = \partial_I \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Vamos a ver que las derivadas parciales están en $W^{1,p}(D_r)$, el argumento que vamos a hacer es simétrico para ambas derivadas entonces sin pérdida de generalidad miremos para la primera. Consideremos los cocientes incrementales:

$$f^h(x, y) = \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

Es fácil probar que $f^h \rightarrow \partial_x f$ en L^p cuando $h \rightarrow 0$, además notar que $f^h \in W^{1,p}(D)$.

Sea ρ una “bump function” que vale 1 en D_r y de soporte compacto en D , entonces podemos usar las estimativas de antes para ρf^h :

$$\|f^h\|_{W^{1,p}(D_r)} \leq \|\rho f^h\|_{W^{1,p}(D)} \leq C \left\| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\rho f^h) \right\|_{L^p(D)}$$

Y usando la regla del producto tenemos:

$$\|f^h\|_{W^{1,p}(D_r)} \leq C' \left(\left\| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f \right\|_{L^p(D)}^h + \|f^h\|_{L^p(D)} \right)$$

Donde en la constante C' absorbí derivadas de ρ . Sea $g = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f$, como $g \in W^{1,p}(D)$ tenemos en particular que $g^h \rightarrow \partial_x g$ en L^p como antes, entonces:

$$\|f^h\|_{W^{1,p}(D_r)} \leq C' (\|\partial_x g\|_{L^p(D)} + \|\partial_x f\|_{L^p(D)})$$

Entonces tenemos que $\{f^h\}_{h \in (0, \varepsilon)}$ está acotada en norma $W^{1,p}(D_r)$. Entonces tiene una subsucesión que converge débilmente por el Teorema de Banach-

Alaoglu. Pero notemos que f^h ya converge (fuertemente) en $L^p(D)$ a $\partial_x f$ entonces el límite débil debe coincidir, concluimos $\partial_x f \in W^{1,p}(D_r)$ y las cotas anteriores nos dan las acotaciones deseadas. \square

Con este resultado podemos probar una extensión del teorema 2.7:

Teorema 2.11. *Consideremos el operador $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} : W^{k,p}(D) \rightarrow W^{k-1,p}(D)$ con $p \in (1, \infty)$. Entonces éste tiene una inversa a derecha $T : W^{k-1,p}(D) \rightarrow W^{k,p}(D)$ acotada.*

Demostración. Procedamos por inducción, sabemos que vale para $k = 0$. Asumamos para $k - 1$, tomemos $R > 1$ y consideremos un operador de extensión $i : W^{k-1,p}(D) \hookrightarrow W^{k-1,p}(D_R)$ acotado que manda $f \mapsto \hat{f}$ donde $\hat{f}|_D = f$. Por hipótesis de inducción existe:

$$T_R : W^{k-2,p}(D_R) \rightarrow W^{k-1,p}(D_R)$$

Una inversa acotada de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ en $W^{k-1,p}(D_R)$. Sea $u = T_R \hat{f} \in W^{k-1,p}(D_R)$, tenemos entonces que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} u = \hat{f} \in W^{k-1,p}(D_R)$ entonces por el Teorema anterior tenemos que $u|_D$ está en $W^{k,p}(D)$ y además:

$$\|u\|_{W^{k,p}(D)} \leq C \left(\|u\|_{W^{k-1,p}(D_R)} + \|\hat{f}\|_{D_R} \right)$$

Pero $\|u\|_{W^{k-1,p}(D_R)} \leq c_1 \|\hat{f}\|_{W^{k-2,p}(D_R)}$ y $\|\hat{f}\|_{W^{k-1,p}(D_R)} \leq c_2 \|f\|_{W^{k-1,p}(D)}$ por lo tanto tenemos:

$$\|u\|_{W^{k,p}(D)} \leq C' \|f\|_{W^{k-1,p}(D)}$$

Entonces tenemos que si $r : W^{k,p}(D_R) \rightarrow W^{k,p}(D)$ es el operador de restricción: $r \circ T_R \circ i = T$ es la inversa buscada. \square

Queremos probar ahora:

Teorema 2.12 (Regularidad elíptica). *Supongamos que $f \in W^{k,p}(D)$ para algún $p \in (1, \infty)$ y $u \in L^1(D)$ es una solución débil de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} u = f$ entonces $u \in W^{k+1,p}(D_r) \forall r < 1$.*

Comentario. Le llamo de esa forma al teorema anterior porque $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ es un operador elíptico, esencialmente esto significa que tenemos estimativas del tipo Calderón-Zygmund. Siempre que tenemos operadores elípticos estos enunciados de regularidad son estándares.

Antes de probar esto necesitamos:

Lema 2.13 (Weil). *Sea $u \in L^1(D)$ una solución débil de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} u = 0$ entonces $u \in C^\infty(D)$.*

Demostración. Notemos que si $v = \text{Re}(u)$ ésta es una solución débil de $\Delta v = 0$ y lo mismo para $\text{Im}(u)$. Tomemos ρ una bump function en D que vale 1 en un entorno de 0 y definamos $\rho_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^2} \rho(\varepsilon z)$ entonces por resultados estándar para convoluciones $v_\varepsilon := \rho_\varepsilon * v$ es una función C^∞ , $v_\varepsilon \rightarrow_{\varepsilon \rightarrow 0} v$ en $L^1(D)$ y además

como $\Delta v_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \Delta v = 0$ tenemos que es armónica, entonces por la propiedad del valor medio:

$$v_\varepsilon(z) = \frac{1}{\pi\delta^2} \int_{D(z,\delta)} v_\varepsilon(x,y) dx dy.$$

Entonces por convergencia en L_1 cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ esto converge a la función $z \mapsto \frac{1}{\pi\delta^2} \int_{D(z,\delta)} v(x,y) dx dy$ que es continua y debe ser igual a v en casi todo punto. Entonces v es continua y satisface la propiedad del valor medio y por lo tanto es armónica. \square

Demostración de regularidad elíptica. Tomemos $v \in W^{k+1,p}(D)$ una solución de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} v = f$ que existe por la proposición 2.11. Por lo tanto $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u - v) = 0$ entonces $u - v \in C^\infty(D)$ por el lema de Weil, en particular está en $W^{k+1,p}(D_r)$ $\forall r < 1$ entonces $u \in W^{k+1,p}(D_r)$. \square

Otra filosofía que es importante tener en mente es que si tenemos un operador con inversa a derecha y lo perturbamos por otro operador lineal entonces el operador perturbado sigue teniendo inversa a derecha si la perturbación es pequeña, esto nos da por ejemplo:

Proposición 2.14. Sea $p \in (2, \infty)$ y $A \in L^p(D, \text{End}_{2n}(\mathbb{R}))$ entonces el problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} v + A(z)v(z) = 0 \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

Tiene solución para $v \in W^{1,p}(D_\varepsilon, \mathbb{C})$ para algún $\varepsilon > 0$.

Demostración. Tomemos el operador: $S = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \times \text{eval}_0 : W^{1,p}(D) \rightarrow L^p(D) \times \mathbb{C}$, esto tiene sentido porque $W^{1,p}(D) \hookrightarrow C^0(D)$.

Notemos que si $T : L^p(D) \rightarrow W^{1,p}(D)$ es la inversa de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ entonces una inversa del operador S viene dada por $(f, v_0) \mapsto Tf - Tf(0) + v_0$.

Tomemos ahora χ_ε la función característica de D_ε y consideremos $S_\varepsilon = S + (\chi_\varepsilon A, 0) : W^{1,p}(D) \rightarrow L^p(D) \times \mathbb{C}$, este operador es continuo porque:

$$\|Av\|_{L^p(D)} \leq \|A\|_{L^p(D)} \|v\|_{C^0(D)} \leq C \|A\|_{L^p(D)} \|v\|_{W^{1,p}(D)}$$

El último paso es por el encaje de Sobolev $W^{1,p}(D) \hookrightarrow C^0(D)$. Entonces tenemos por la misma cuenta que:

$$\|S_\varepsilon - S\| \leq C \|A\|_{L^p(D_\varepsilon)}$$

Donde la norma es la de operadores. Esto significa $S_\varepsilon \rightarrow S$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Ahora, como los operadores con inversa forman un abierto tenemos que S_ε es invertible si ε es suficientemente chico; y denotemos T_ε a su inversa. Basta tomar $T_\varepsilon(0, v_0)$ para tener soluciones al sistema con condición inicial fija. \square

2.5 Breve introducción a las variedades complejas

Definición 2.4. Sea M una variedad topológica, decimos que (M, \mathcal{A}) con \mathcal{A} un atlas maximal es una variedad compleja de dimensión n si dadas $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ y $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}^n$ en el atlas entonces $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$ es holomorfa.

Observación. 1. Toda variedad compleja es una variedad real (suave) de dimensión $2n$. Denotemos como TM su tangente usual (vamos a querer distinguirlo de otro espacio tangente).

2. Vía las trivializaciones alrededor de un $p \in M$ podemos hacer la identificación $T_p M \cong \mathbb{C}^n$ y con esta identificación traducir la multiplicación por J_0 a $T_p M$ obteniendo un $J : T_p M \rightarrow T_p M$ tal que $J^2 = -Id$. Esto no depende de la trivialización ya que los cambios de carta son holomorfos. Por este motivo las variedades complejas son casos particulares de variedades casi complejas como en la sección 2.2.

Cuando hacemos análisis complejo tenemos una forma distinta de derivar (pensar en $\frac{\partial}{\partial z}$) por lo tanto queremos una construcción del espacio tangente que tome esto en cuenta: consideremos el espacio de gérmenes en $p \in M$

$$\mathcal{O}_p = \{f : U_f \rightarrow \mathbb{C} : U_f \text{ entorno de } p, f \text{ holomorfa}\} / \sim$$

Donde $f \sim g$ si existe $V \subset U_f \cap U_g$ entorno de p tal que $f|_V = g|_V$. Esto es naturalmente un \mathbb{C} espacio vectorial.

Decimos que $\beta : \mathcal{O}_p \rightarrow \mathbb{C}$ lineal compleja es una derivación si satisface la regla de Leibnitz:

$$\beta(fg) = f(p)\beta(g) + g(p)\beta(f)$$

Notar que tiene sentido evaluar gérmenes en el punto p . Al espacio de derivaciones en p le llamamos el espacio tangente holomorfo $T_p^{\mathbb{C}} M$.

Se puede probar al igual que se hace en el caso de variedades reales que si elegimos (z_1, \dots, z_n) una carta local, $T_p^{\mathbb{C}} M = \text{span}\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\}$ donde

$$\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - i \frac{\partial}{\partial y_i} \right)$$

En coordenadas ésta es la derivada de análisis complejo. $T^{\mathbb{C}} M$ es entonces un fibrado complejo y por construcción es holomorfo en el sentido descrito en ??.

Notemos entonces que $T^{\mathbb{C}} M$ vive naturalmente dentro del fibrado $TM \otimes \mathbb{C}$. Es fácil ver que el espectro de J es $\{i, -i\}$ y que J diagonaliza en $TM \otimes \mathbb{C}$ con subespacios propios $T^{1,0} M := \{v - iJv : v \in TM\}$ y $T^{0,1} M := \{v + iJv : v \in TM\}$ asociados a i y a $-i$ respectivamente, concluimos:

Proposición 2.15. Sea (M, J) una variedad compleja, entonces su fibrado tangente holomorfo $T^{\mathbb{C}} M$ es isomorfo al subfibrado $T^{1,0} M \subset TM \otimes \mathbb{C}$.

La descomposición:

$$TM \otimes \mathbb{C} = T^{1,0} M \oplus T^{0,1} M,$$

le da mas riqueza algebraica al espacio de \mathbb{C} -formas en la variedad. Si $v \in T_z^{1,0} M$ entonces su elemento dual v^* cumple que $v^* \circ J = iv^*$ ya que v es vector

propio de J asociado a i . Análogamente si $v \in T_z^{0,1}M$ entonces $v^* \circ J = -iv^*$. Esto significa que tenemos la descomposición:

$$\Lambda^1 T^* M \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{1,0} T^* M \oplus \Lambda^{0,1} T^* M$$

Donde denotamos a $\Lambda^{1,0} T^* M$, $\Lambda^{0,1} T^* M$ al espacio de las formas lineales complejas y antilineales complejas respectivamente.

Observación. En coordenadas tenemos que:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right)^* = dz_j = dx_j + idy_j, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right)^* = d\bar{z}_j = dx_j - idy_j,$$

generan los espacios $\Lambda^{1,0} T^* M$ y $\Lambda^{0,1} T^* M$ repectivamente (localmente). Aquí $\left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right\}_{j=1, \dots, n}$ con $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = 1/2 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$ es base de $T^{0,1} M$.

Esta descomposición nos da:

$$\bigwedge^k T^* M \otimes \mathbb{C} = \sum_{p+q=k} \Lambda^{p,q} T^* M$$

Donde $\Lambda^{p,q} T^* M = \bigwedge^p \Lambda^{1,0} T^* M \otimes \bigwedge^q \Lambda^{0,1} T^* M$. Los espacios $\Lambda^{p,q} T^* M$ están generados en coordenadas por los elementos de la forma $dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$ con $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ y $1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n$.

Denotemos al espacio de secciones de estos fibrados como $\Omega^{p,q}(M)$ y a $\Omega^k(M, \mathbb{C})$ las secciones de $\Lambda^k T^* M \otimes \mathbb{C}$. En $\Omega^k(M, \mathbb{C})$ seguimos teniendo el operador derivada exterior $d : \Omega^k(M, \mathbb{C}) \rightarrow \Omega^{k+1}(M, \mathbb{C})$. En coordenadas, si $\alpha = \sum_{I,J} \alpha_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J$ (con la notación usual de multiíndices) entonces:

$$d\alpha = \sum_{I,J} d\alpha_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

Y el operador d en $f \in \Omega^0(M, \mathbb{C})$ (funciones diferenciables con valores complejos) está definido como

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i$$

Notar en particular que $d : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p+1,q}(M) \oplus \Omega^{p,q+1}(M)$. Esto nos permite definir los *operadores de Dolbeault* $\partial : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p+1,q}(M)$ y $\bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(M)$ como las proyecciones de d en la primer y segunda componente de la suma anterior. Éstos se extienden naturalmente a $\Omega^k(M, \mathbb{C})$

Algunas propiedades de estos operadores son:

Proposición 2.16. 1. ∂ *satisface la regla de Leibniz:*

$$\partial(\alpha \wedge \beta) = \partial\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge \partial\beta$$

Y análogamente para $\bar{\partial}$.

2. $\partial^2 = 0, \partial \circ \bar{\partial} + \bar{\partial} \circ \partial = 0, \bar{\partial}^2 = 0$ (notar que no puedo poner que todas son iguales al mismo 0 porque tienen distinto tipo).

- Demostración.* 1. Una se deduce de la otra ya que $\bar{\partial}\alpha = \overline{\partial\alpha}$. Para probar la relación basta ver $\alpha \in \Omega^{p,q}(M)$ y $\beta \in \Omega^{p',q'}(M)$ entonces proyectando $d(\alpha \wedge \beta)$ en las $(p + p' + 1, q + q')$ obtenemos lo deseado para ∂ ya que d cumple Leibniz.
2. Esto es porque $d = \partial + \bar{\partial}$ y como $d^2 = 0$, si $\alpha \in \Omega^{p,q}(M)$ proyectando en las formas de tipo $(p + 2, q)$, $(p + 1, q + 1)$ y $(p, q + 2)$ tenemos las tres igualdades respectivamente. \square

Observación. • Notemos que si estamos en (M, J) variedad casi compleja, podemos definir $T^{1,0}M$ y $T^{0,1}M$ como antes, es decir como los subespacios propios de J asociados a i y $-i$ en $TM \otimes \mathbb{C}$. El problema es que los mapas de transición del fibrado no quedan holomorfos, por lo tanto si definimos " $\frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{\partial}{\partial x_j} - iJ \frac{\partial}{\partial x_j}$ " y dz_j su elemento dual, cuando cambiamos de coordenadas $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (w_1, \dots, w_n)$ en el pullback de dz_i van a aparecer términos en $d\bar{w}_i$. Esto nos impide tener los operadores $\partial, \bar{\partial}$ bien definidos. Esta cuestión es crucial en la siguiente sección.

- De hecho podemos leer la integrabilidad de J en el fibrado $T^{1,0}M$ (o $T^{0,1}M$). Extendamos el corchete de Lie para campos en $T^{1,0}M$ como siendo lineal complejo, es una cuenta sencilla chequear que si (M, J) es integrable entonces:

$$[\Gamma(T^{1,0}M), \Gamma(T^{1,0}M)] \subseteq \Gamma(T^{1,0}M). \quad (2)$$

Se puede probar como corolario del teorema de integrabilidad de Frobenius (vease 2.2.3 de [Voi02]) que si M es una variedad C^ω (analítica real) entonces 2 implica la existencia de un atlas holomorfo en M compatible con J .

- Toda sección en $\Gamma(T^{1,0}M)$ es de la forma $X - iJX$ para cierto $X \in \Gamma(TM)$. Supongamos que en M se cumple la condición 2 entonces:

$$[X - iJX, Y - iJY] = [X, Y] - [JX, JY] - i([JX, Y] + [X, JY]).$$

Pero como $[X - iJX, Y - iJY] \in T^{1,0}M$ debe cumplirse que:

$$J([X, Y] - [JX, JY]) = [JX, Y] + [X, JY].$$

Multiplicando por J y despejando:

$$N_J(X, Y) = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY] = 0 \quad (3)$$

Donde $N_J(X, Y)$ es el tensor de Nijenhuis presentado en 1. El teorema de Newlander-Nirenberg es por lo tanto equivalente a la condición 2. La parte no trivial de este teorema es ver que toda (M, J) satisfaciendo esta condición acepta un atlas real analítico. La dificultad de esto radica en un resultado de regularidad para cierta ecuación en derivadas parciales elíptica, luego se aplica el teorema de Frobenius como arriba.

- Definamos el siguiente mapa bilineal:

$$B : T^{1,0}M \times T^{0,1}M \rightarrow TM \otimes \mathbb{C}/T^{1,0}M$$

$$B(X, Y) = \overline{[X, Y]}.$$

Por lo visto anteriormente $B = 0$ implica que J es integrable. Por la regla de Leibnitz B es tensorial ($B(fX, Y) = B(X, fY) = fB(X, Y)$), además es antisimétrica. En particular si $\dim_{\mathbb{C}} M = 1$ entonces $\dim T^{1,0}M = 1$, pero no hay formas bilineales antisimétricas no nulas en dimensión 1. Concluimos que en dimensión compleja 1 todas las variedades casi complejas son complejas.

2.6 Fibrados holomorfos

Definición 2.5. Sea M una variedad compleja y $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial complejo. Decimos que E tiene una estructura holomorfa si dadas $\phi_U : E|_U \cong U \times \mathbb{C}^n$ y $\phi_V : E|_V \cong V \times \mathbb{C}^n$ dos trivializaciones entonces $g_{UV} : U \cap V \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ es holomorfo.

Ejemplo. Los fibrados $T^{1,0}M$, $T^{0,1}M$ y los espacios de formas $\Lambda^{p,q}T^*M$, etc. tienen todos una estructura holomorfa natural.

En estos fibrados decimos que $\xi \in \Gamma(E)$ es holomorfa si dada $E|_U \cong U \times \mathbb{C}^n$ trivialización, entonces viendo a $\xi : U \subset M \rightarrow \mathbb{C}^n$ es holomorfa. Esto no depende de la elección de la trivialización ya que los mapas de transición quedan holomorfos.

Observación. Por los resultados clásicos de análisis complejo podemos deducir muchas propiedades deseables sobre estas secciones. A modo de ejemplo, si los ceros de una sección holomorfa acumulan entonces es la sección nula.

Supongamos ahora que tenemos una trivialización $E|_V \cong V \times \mathbb{C}^n$, entonces toda sección localmente la podemos ver como $\xi : V \rightarrow \mathbb{C}^n$. Al igual que definiámos la derivada exterior en coordenadas locales acá tiene sentido definir:

$$\bar{\partial}_V \xi = (\bar{\partial} \xi^1, \dots, \bar{\partial} \xi^n)$$

Si esta definición no dependiera de las coordenadas, esto nos define un $\bar{\partial}_E : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(\Lambda^{0,1}T^*M \otimes E)$

Lema 2.17. *El operador $\bar{\partial}_E$ está bien definido.*

Demostración. Hay que ver que si cambiamos de trivialización la definición no cambia. Sean $\phi_U : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^n$ y $\phi_V : E|_V \rightarrow V \times \mathbb{C}^n$ dos trivializaciones y ξ_U, ξ_V la sección en cada una de ellas respectivamente, éstas se relacionan por $\xi_U = g_{UV} \xi_V$. Queremos ver que $\bar{\partial}_U \xi_U = g_{UV} \circ \bar{\partial}_V \xi_V$, sabemos que:

$$\bar{\partial}_U \xi_U = (\bar{\partial}(\xi_V^1 g_{UV}(e_1)), \dots, \bar{\partial}(\xi_V^n g_{UV}(e_n)))$$

Donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ es la base canónica de \mathbb{C}^n . Pero por la regla de Leibniz tenemos que $\bar{\partial}(\xi_V^k g_{UV}(e_k)) = (\bar{\partial} g_{UV}(e_k)) \xi_V^k + g_{UV}(e_k) (\bar{\partial} \xi_V^k)$ pero como g_{UV} es holomorfa tenemos que el primer término es 0 y obtenemos lo deseado. \square

De hecho con la misma prueba quedan definidos los operadores $\bar{\partial}_E : \Omega^{0,q}(M, E) \rightarrow \Omega^{0,q+1}(M, E)$ donde $\Omega^{0,q}(M, E) = \Gamma(\Lambda^{0,q}T^*M \otimes E)$.

Observación. Las siguientes propiedades son automáticas de la proposición 2.16:

- El operador $\bar{\partial}_E$ satisface la regla de Leibniz:

$$\bar{\partial}_E(\alpha \wedge \beta) = \bar{\partial}_E(\alpha) \wedge \beta + (-1)^q \alpha \wedge \bar{\partial}_E(\beta)$$

Donde $\alpha \in \Omega^{0,q}(M, E)$ y $\beta \in \Omega^{0,p}(M, E)$.

- $\bar{\partial}_E^2 = 0$. Esto nos dice que $(\Omega^{0,*}(M, E), \bar{\partial}_E)$ es un complejo de cadenas llamado el complejo de Dolbeault. Se puede ver (por ejemplo en [Voi02]) que si denotamos como \mathcal{E}_U al conjunto de secciones holomorfas de E en un abierto U , entonces \mathcal{E} es un ház y la cohomología de M con coeficientes en \mathcal{E} es justamente:

$$H^k(M, \mathcal{E}) = \ker(\bar{\partial}_E : \Omega^{0,k}(M, E) \rightarrow \Omega^{0,k+1}) / \text{im}(\bar{\partial}_E : \Omega^{0,k-1} \rightarrow \Omega^{0,k})$$

No usaremos este resultado, pero clásicamente el teorema de Riemann-Roch, el cual veremos posteriormente, se enuncia en el contexto de la cohomología de haces.

A partir de ahora vamos a suponer que E es un fibrado holomorfo con una métrica hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y que M es compacta con una métrica μ .

Notación. Solamente en esta sección y la siguiente denotaremos como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a las métricas *hermitianas*. En el resto del texto esta notación estará reservada para las métricas *Riemannianas*.

Veamos que podemos extender la $*$ de Hodge (ver el apéndice 7.4) a este contexto de forma sencilla.

Observación. Si consideramos M equipada con la métrica Riemanniana $Re\langle \cdot, \cdot \rangle$ tenemos la estrella de Hodge definida para esta métrica. Extendamos $*$ a $\Lambda^k T^*M \otimes \mathbb{C}$ como siendo \mathbb{C} -lineal y a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $\Lambda^k T^*M$ a una métrica hermitiana en $\Lambda^k T^*M \otimes \mathbb{C}$. Es sencillo chequear que si $\alpha_x, \beta_x \in \Lambda^k T^*M \otimes \mathbb{C}$ tenemos que:

$$\langle \alpha_x, \beta_x \rangle dv_\mu = \alpha_x \wedge \overline{* \beta_x}$$

Esto nos induce en los espacios $\Lambda^{p,q} T^*M$ una métrica hermitiana simplemente restringiendo la anterior. Notar que cometimos un pequeño abuso de notación pero va a quedar claro qué métrica estamos usando dependiendo del contexto.

Entonces E y $\Lambda^{p,q} T^*M$ tienen métricas hermitianas, pongámselas al producto tensorial $F^{p,q} := \Lambda^{p,q} T^*M \otimes E$ la métrica producto y denotémosla como $\langle \cdot, \cdot \rangle_{F^{p,q}}$.

Observación. Esto nos da un producto hermitiano en $\Omega^{p,q}(M, E)$ vía:

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{L^2} = \int_M (\alpha, \beta) dv_\mu, \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega^{p,q}(M, E)$$

Ahora si extendemos \wedge como:

$$\begin{aligned} \wedge : \Lambda^{0,q}T^*M \otimes E \times \Lambda^{n,n-q}T^*M \otimes E^* &\rightarrow \Lambda^{n,n}T^*M \cong \\ (\alpha \otimes \xi) \wedge (\beta \otimes \eta^*) &= \eta^*(\xi)\alpha \wedge \beta. \end{aligned}$$

Y definimos:

$$\begin{aligned} *_E : \Lambda^{0,q}T^*M \otimes E &\rightarrow \Lambda^{n,n-q}T^*M \otimes E \\ *_E(\alpha \otimes \xi) &= *\bar{\alpha} \otimes \flat\xi \end{aligned}$$

Donde $\flat : E \rightarrow E^*$ es el isomorfismo antilineal bemol que nos dá la métrica Hermitiana:

$$\begin{aligned} \flat : E &\rightarrow E^* \\ \flat(\xi) &= \langle \cdot, \xi \rangle \end{aligned}$$

Esto es una extensión de la estrella de Hodge en el sentido que:

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{F^{0,q}} dv_\mu = \alpha \wedge *_E \beta.$$

Usemos este operador para ver quién es el adjunto de $\bar{\partial}_E$ en la métrica hermitiana en L^2 que genera $\langle \cdot, \cdot \rangle_{F^{0,q}}$.

Definición 2.6. Al fibrado $\Lambda^{n,0}T^*M = K_M$ (que tiene dimensión 1) se le llama usualmente el fibrado canónico de M .

Con esta notación tenemos que $*_E : \Lambda^{0,q}T^*M \otimes E \rightarrow \Lambda^{0,n-q}T^*M \otimes (K_M \otimes E)$.

Proposición 2.18. *El operador $\bar{\partial}_E^* := (-1)^q *_E^{-1} \circ \bar{\partial}_{K_M \otimes E^*} \circ *_E : \Omega^{0,q}(M, E) \rightarrow \Omega^{0,q-1}(M, E)$ es el adjunto formal de $\bar{\partial}_E$. Es decir tenemos:*

$$\langle \bar{\partial}_E \alpha, \beta \rangle_{L^2} = \langle \alpha, \bar{\partial}_E^* \beta \rangle_{L^2}, \quad \forall \alpha \in \Omega^{0,q-1}(M, E), \beta \in \Omega^{0,q}(M, E).$$

Demostración. Sean α y β como arriba, notemos que $\bar{\partial}_E(\alpha \wedge *_E \beta) = 0$ (ya que son las formas de rango máximo).

Usando la regla de Leibniz tenemos que

$$\bar{\partial}_E \alpha \wedge *_E \beta + (-1)^{q-1} \alpha \wedge \bar{\partial}_{K_M \otimes E^*} \circ *_E \beta = 0$$

Por lo tanto integrando:

$$\int \langle \bar{\partial}_E \alpha, \beta \rangle dv_\mu = - \int \alpha \wedge (-1)^{q-1} \bar{\partial}_{K_M \otimes E^*} \circ *_E \beta$$

Que es justamente lo deseado. □

2.7 Operadores de Cauchy-Riemann

De ahora en más vamos a trabajar en superficies de Riemann Σ , es decir variedades complejas con $\dim_{\mathbb{C}} \Sigma = 1$. Hacemos esto en parte porque así aparecen en la tesis, pero además la teoría es radicalmente distinta para dimensión más grande como veremos en breves.

Si abstraemos las propiedades de $\bar{\partial}_E : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^{0,1}(\Sigma, E)$ obtenemos:

Definición 2.7. 1. Sea $\pi : E \rightarrow \Sigma$ un fibrado complejo sobre una superficie de Riemann Σ . Un operador de Cauchy Riemann es un $D : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^{0,1}(\Sigma, E)$ lineal (como \mathbb{C} -espacios vectoriales) tal que cumple la regla de Leibniz:

$$D(f\xi) = (\bar{\partial}f)\xi + f(D\xi)$$

Donde $f \in C^\infty(\Sigma, \mathbb{C})$ y $\xi \in \Gamma(E)$.

2. Vamos a decir entonces que una $\xi \in \Gamma(E)$ es holomorfa si $D\xi = 0$

Observación. Notar que en la definición anterior E no tiene una estructura holomorfa a priori. Si E tiene una entonces $\bar{\partial}_E$ es un ejemplo de operador de Cauchy Riemann. Enseguida vamos a ver que estos son todos los ejemplos.

Por definición los operadores de Cauchy Riemann son conexiones en E , la siguiente observación nos habla de la existencia de los símbolos de Christoffel:

Observación. 1. Sean D, D' dos operadores de Cauchy Riemann complejos, entonces $A = D - D'$ es un tensor por la regla de Leibnitz (esto significa $A(f\xi) = fA\xi$ con $f \in C^\infty(\Sigma, \mathbb{R})$). En particular $A \in \Gamma(\text{End}(E, \Lambda^{0,1}T^*\Sigma \otimes E))$ es lineal complejo en el sentido que $A(J\xi) = J \circ A\xi$.

2. Como localmente siempre podemos definir un $\bar{\partial}_U$ la observación de antes nos dice que viendo a ξ en trivializaciones tenemos que existe $A : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^n)$ diferenciable donde:

$$D\xi(w) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \bar{z}}(w) + A(w)\xi \right) d\bar{z}$$

Teorema 2.19. *Supongamos que tenemos $D : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^{0,1}(M, E)$ un operador de Cauchy Riemann, entonces existe una estructura holomorfa en E tal que $D = \bar{\partial}_E$.*

Demostración.

Afirmación. Basta probar que $\forall z_0 \in \Sigma$ existe un entorno U y s_1, \dots, s_n secciones holomorfas en U (según D) que son una \mathbb{C} -base de E .

Esto es porque si $\xi \in \Gamma(E)$ tenemos $\xi|_U = \sum_{i=1}^n \lambda_i(z)s_i(z)$ para ciertos $\lambda_i : U \rightarrow \mathbb{C}$ suaves entonces:

$$D\xi|_U = \sum_{i=1}^n \bar{\partial}\lambda_i s_i + \lambda_i Ds_i$$

Pero el segundo término es 0 porque s_i es holomorfa $\forall i$. Por lo tanto si construimos trivializaciones $E|_U \cong U \times \mathbb{C}^n$ mandando s_1, \dots, s_n a la base canónica, es fácil verificar que los cambios de trivializaciones quedan holomorfos.

El problema ahora se volvió local, a menos de tomar cartas suponemos $z_0 = 0$, $U = D_\varepsilon$ y por la observación anterior las secciones holomorfas satisfacen la ecuación diferencial:

$$\partial_x s_i + J_0 \partial_y s_i + A s_i = 0,$$

para cierta $A \in C^\infty(D_\varepsilon, \text{End}(\mathbb{C}^n))$. Pero nosotros ya vimos en la proposición 2.14 que si fijamos $s_i(0)$ entonces existe una solución. Tomando s_i para que en 0 sean la base canónica terminamos porque en un entorno de 0 sigue siendo base por continuidad (s_i son continuas por regularidad elíptica). \square

Notemos entonces que la noción de ser holomorfa si $D\xi = 0$ coincide con la de ser holomorfa para la estructura holomorfa en E dada por el teorema.

Supongamos por el resto de la discusión que E tiene una métrica hermitiana \langle, \rangle . Una conexión hermitiana en E es una conexión ∇ tal que:

$$\nabla \langle \xi, \eta \rangle = \langle \nabla \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla \eta \rangle, \quad \forall \xi, \eta \in \Gamma(E)$$

Observación. J es paralela para la conexión ∇ . Para ver esto notar que:

$$\begin{aligned} \nabla \langle J\xi, \eta \rangle &= \langle \nabla(J\xi), \eta \rangle + \langle J\xi, \nabla \eta \rangle \\ &= \langle (\nabla J)\xi, \eta \rangle + \langle J\nabla \xi, \eta \rangle + \langle J\xi, \nabla \eta \rangle \\ &= \langle (\nabla J)\xi, \eta \rangle + i(\langle \nabla \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla \eta \rangle). \end{aligned}$$

Pero como $\langle J\xi, \eta \rangle = i\langle \xi, \eta \rangle$, despejando tenemos que $\langle (\nabla J)\xi, \eta \rangle = 0$ para secciones arbitrarias. Concluimos que $\nabla J = 0$.

Es fácil chequear que si ∇ es una conexión donde J es paralela entonces $\bar{\partial}_\nabla = \frac{1}{2}(\nabla + J \circ \nabla \circ j)$ es un operador de Cauchy Riemann complejo.

Proposición 2.20. *Sea $\pi : E \rightarrow \Sigma$ un fibrado complejo con una métrica hermitiana y $D : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^{0,1}(\Sigma, E)$ un operador de Cauchy Riemann complejo. Entonces existe una única conexión hermitiana ∇ tal que $\bar{\partial}_\nabla = D$. A tal conexión le llamamos la conexión de Chern.*

Demostración. Supongamos que tenemos una conexión ∇ cumpliendo lo deseado. Tomando $\partial_\nabla = \frac{1}{2}(\nabla - J \circ \nabla \circ j)$ y $\partial, \bar{\partial}$ las proyecciones de la derivada exterior en la primera y segunda componente de $\Lambda^1 T^* \Sigma \otimes \mathbb{C} \cong \Lambda^{1,0} T^* \Sigma \oplus \Lambda^{0,1} T^* \Sigma$, es sencillo chequear:

$$\begin{aligned} \partial \langle \xi, \eta \rangle &= \langle \bar{\partial}_\nabla \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \bar{\partial}_\nabla \eta \rangle \\ \bar{\partial} \langle \xi, \eta \rangle &= \langle \partial_\nabla \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \partial_\nabla \eta \rangle. \end{aligned}$$

Entonces como $\bar{\partial}_\nabla = D$, ∂_∇ queda únicamente determinada por la ecuación:

$$\langle \partial_\nabla \xi, \eta \rangle = \bar{\partial} \langle \xi, \eta \rangle - \langle \xi, D\eta \rangle$$

Tomando esta como la definición de ∂_{∇} y definiendo $\nabla = \partial_{\nabla} + D$ podemos chequear que cumple lo deseado. \square

Observación. Esto nos permite tener algunas intuiciones de por qué lo que hicimos no funciona en dimensión más alta como se mencionó anteriormente. Supongamos que tenemos ∇ una conexión Hermitiana en E \mathbb{C} -fibrado sobre una variedad compleja M de dimensión arbitraria. Entonces $\bar{\partial}_{\nabla}$ es un “operador de Cauchy Riemann” (generalizando la definición para variedades complejas de dimensión arbitraria).

Por todo lo visto anteriormente, si $\dim_{\mathbb{C}} M = 1$, dar cualquiera de los siguientes tres objetos nos determina *únicamente* los otros dos:

- Una estructura holomorfa en E .
- Un operador de Cauchy Riemann complejo en E .
- Una conexión Hermitiana ∇ .

Los dos últimos items es fácil ver que se siguen determinando. Lo fuerte es decir que entonces ∇ determina una estructura holomorfa en E . Si $\bar{\partial}_{\nabla}$ viniera de un $\bar{\partial}_E$ para cierta estructura compleja, necesariamente:

$$\bar{\partial}_{\nabla} \circ \bar{\partial}_{\nabla} : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^{0,2}(M, E),$$

sería nulo. Por lo tanto $\bar{\partial}_{\nabla} \circ \bar{\partial}_{\nabla} = 0$ es una condición necesaria. También se puede ver que es suficiente, esto implica que existen (localmente) bases de secciones con $\bar{\partial}_{\nabla}\xi = 0$ (es una especie de teorema de Frobenius), es fácil pensar esta condición en geometría Riemanniana cuando teníamos que la curvatura se anula, es decir $d_{\nabla} \circ d_{\nabla} = 0$ si y solo si existe una base de secciones flat. En $\dim_{\mathbb{C}} M = 1$ esta condición es automáticamente satisfecha ya que $\Omega^{0,2}(M, E) = 0$. Todo lo que dije se puede ver en el capítulo 2 de [DK90].

Estudiando las curvas pseudoholomorfas nos van a aparecer una clase más general de operadores (vease ??):

Definición 2.8. Sea $\pi : E \rightarrow \Sigma$ un fibrado complejo sobre una superficie de Riemann. Un operador de Cauchy Riemann lineal real es un $D : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^{0,1}(M, E)$ satisfaciendo la regla de Leibnitz:

$$D(f\xi) = (\bar{\partial}f)\xi + fD\xi$$

Donde $f \in C^{\infty}(\Sigma, \mathbb{R})$ y $\xi \in \Gamma(E)$.

Observación. Notar que acá ya no pedimos la condición de ser lineal complejo y que aunque $f \in C^{\infty}(\Sigma, \mathbb{R})$ sigue teniendo sentido definir $\bar{\partial}f \in \Omega^{0,1}(\Sigma, \mathbb{C})$.

Nuevamente tenemos la observación de la existencia de los simbolos de Christoffel:

Observación. 1. Si tenemos D, D' dos operadores de Cauchy Riemann reales entonces $A = D - D'$ es un tensor, $A \in \Gamma(\text{End}(E, \Lambda^{0,1}T^*M \otimes E))$.

2. Si tomamos una trivialización y vemos a $\xi : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ entonces por la observación anterior aplicada a $D - \bar{\partial}_U$ existe $A : U \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^{2n})$ tal que:

$$D\xi(w) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \bar{z}}(w) + A(w)\xi \right) d\bar{z}$$

En particular si $D\xi = 0$ entonces $\frac{\partial \xi}{\partial \bar{z}}(w) = -A(w)\xi$ donde A es suave, por lo tanto los resultados de regularidad que obtuvimos antes para la ecuación de Cauchy- Riemann clásica nos dicen que ξ es diferenciable.

Clásicamente el teorema de Riemann-Roch nos dice que el espacio de secciones holomorfas de un fibrado holomorfo sobre una superficie de Riemann tiene dimensión finita, de hecho calcula la misma explícitamente. Esta es simplemente el teorema clásico formulado en los términos que nos aparecerán luego. Asumimos que el lector está familiarizado con los contenidos de 7.1 y 7.1.

Teorema 2.21 (Riemann-Roch). *Sea $\pi : E \rightarrow \Sigma$ un fibrado complejo sobre una superficie de Riemann Σ cerrada y sea D un operador de Cauchy Riemann real. Entonces extendiendo D a las completaciones $W^{k,p}$ con $kp > 2$, $D : W^{k,p}(E) \rightarrow W^{k-1,p}(\Lambda^{0,1}T^*\Sigma \otimes E)$ tenemos que:*

1. D es Fredholm
2. $\ker D$ y $\text{coker} D$ no dependen de k y p .
3. El índice de D es:

$$\text{índ} D = n\chi(\Sigma) + 2\langle c_1(E), [\Sigma] \rangle.$$

Aquí $c_1(E) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ es la clase de Chern introducida en el apéndice 7.3.

Bosquejo de Riemann-Roch:

En lo que queda de la sección vamos a bosquejar este resultado de una forma no estandar siguiendo las líneas de [Tau96].

Primero probemos que el operador es Fredholm y más adelante calculemos su índice. Lo que hay detrás de esta parte de la prueba son las estimativas de Calderón-Zygmund que comentamos en 2.4.

Lema 2.22. $\exists C > 0$ tal que vale la estimativa:

$$\|\xi\|_{W^{k,p}} \leq C (\|D\xi\|_{W^{k-1,p}} + \|\xi\|_{W^{k-1,p}}), \quad \forall \xi \in W^{k,p}(E).$$

Gracias a esto, el teorema 7.10 nos dice que $\ker D$ tiene dimensión finita e $\text{im} D$ es cerrado (ya que la inclusión $\iota : W^{k,p}(E) \rightarrow W^{k-1,p}(E)$ es compacta).

Demostración. Para deducir esta cota notemos que a menos de tomar una partición de la unidad asociada a un cubrimiento por entornos coordenados donde E trivializa estamos en el caso $\xi : D_\varepsilon \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ con soporte compacto en D . Pero entonces basta ver que si $\eta = \frac{\partial \xi}{\partial \bar{z}} + A(z)\xi$ se cumple la cota $\|\xi\|_{W^{k,p}(\mathbb{D})} \leq C (\|\eta\|_{W^{k-1,p}(D)} + \|\xi\|_{W^{k-1,p}(D)})$.

Notar que:

$$\|\xi\|_{W^{k,p}(D)} \leq c \left\| \frac{\partial \xi}{\partial \bar{z}} \right\|_{W^{k-1,p}(D)} = c \|\eta - A\xi\|_{W^{k-1,p}(D)},$$

por Calderón Zygmund (notar que ξ tiene soporte compacto). Por otro lado:

$$\|\xi\|_{W^{k,p}(D)} \leq c' \|\xi\|_{W^{k-1,p}(D)},$$

ya que la inclusión es continua. Juntando ambas cosas:

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{W^{k,p}(D)} &\leq C (\|\eta - A\xi\|_{W^{k-1,p}(D)} + \|\xi\|_{W^{k-1,p}(D)}) \\ &\leq C' (\|\eta\|_{W^{k-1,p}(D)} + \|\xi\|_{W^{k-1,p}(D)}) \end{aligned}$$

Donde usamos $\|A\xi\|_{W^{k-1,p}(D)} \leq \|A\|_\infty \|\xi\|_{W^{k-1,p}(D)}$ por ser A suave de soporte compacto y la desigualdad triangular. Esto es lo que queríamos. \square

Ahora querríamos ver que $\text{coker} D$ también tiene que ser de dimensión finita. Para esto vamos a encontrar un candidato a “operador adjunto” D^* con la esperanza que $\text{coker} D \cong \ker D^*$.

Denotemos $F = \Lambda^{0,1} T^* \Sigma \otimes E$, equipemos a E con una métrica Hermitiana y a Σ con una métrica Riemanniana compatible con su estructura compleja. Por lo visto en ??, F hereda una métrica Hermitiana. Recordar también que entonces las secciones tienen el producto interno:

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{L^2(F)} = \int_{\Sigma} \langle \alpha, \beta \rangle_F dv_{\Sigma},$$

Y análogamente en $\Gamma(E)$. Vamos a encontrar un *adjunto formal* con esta métrica, esto es un $D^* : \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(E)$ tal que:

$$\langle \lambda, D\eta \rangle_{L^2(F)} = \langle D^* \lambda, \eta \rangle_{L^2(E)}, \quad \forall \lambda \in \Gamma(F), \eta \in \Gamma(E).$$

Se le dice formal porque no lo vamos a ver como el adjunto a un operador no acotado en un espacio de Hilbert. Elijamos una conexión hermitiana ∇ (es sencillo observar que hay muchas) y por lo visto anteriormente su parte antilineal compleja $\bar{\partial}_{\nabla}$ es un operador de Cauchy-Riemann. Además por el teorema 2.19 tenemos que $\bar{\partial}_{\nabla} = \bar{\partial}_E$ para cierta estructura holomorfa en E .

Por las observaciones anteriores tenemos que $D = \bar{\partial}_E + A$ donde $A \in \Gamma(\text{Hom}(E, F))$. Notar que entonces simplemente por álgebra lineal existe $A^* \in \Gamma(\text{Hom}(F, E))$ un operador adjunto, es decir si $\eta \in E_z$ y $\langle \in F_z$:

$$\langle \lambda, A\eta \rangle_F = \langle A^* \lambda, \eta \rangle_E$$

Si recordamos de la sección anterior el operador adjunto $\bar{\partial}_E^*$, concluimos que:

$$D^* := \bar{\partial}_E^* + A,$$

Es el operador adjunto de D en el sentido descrito anteriormente. Notar que si conjugamos por $*_E$:

$$\begin{array}{ccc}
\Omega^0(\Sigma, K_M \otimes E^*) & \xrightarrow{D'} & \Omega^{0,1}(\Sigma, K_M \otimes E^*) \\
\downarrow \downarrow_{*E}^{-1} & & \downarrow \downarrow_{*E}^{-1} \\
\Omega^{0,1}(\Sigma, E) & \xrightarrow{D^*} & \Omega^0(\Sigma, E),
\end{array}$$

entonces $D' = \bar{\partial}_{K_M \otimes E^*} + A'$ para cierto tensor A' . Este operador D' es un operador de Cauchy-Riemann real. Acabamos de probar:

Lema 2.23. *El adjunto formal $D^* : \Omega^{0,1}(\Sigma, E) \rightarrow \Gamma(E)$ es conjugado mediante isomorfismos lineales suaves a un operador de Cauchy-Riemann $D' : \Gamma(\tilde{E}) \rightarrow \Omega^{0,1}(\Sigma, \tilde{E})$ donde $\tilde{E} = K_M \otimes E^*$.*

Observación. Si $\lambda \in \ker D^*$ entonces es suave por ser conjugado a un operador de Cauchy-Riemann donde sabíamos que esto pasaba.

Extendamos D^* a la clausura Sobolev obteniendo $D^* : W^{k,p}(\Lambda^{0,1}T^*\Sigma \otimes E) \rightarrow W^{k-1,p}(E)$.

Proposición 2.24. *Usando la inclusión natural $W^{k,p} \hookrightarrow W^{k-1,p}$ tenemos que:*

$$\begin{aligned}
W^{k-1,p}(\Lambda^{0,1}T^*\Sigma, E) &= \text{im}D \oplus \ker D^* \\
W^{k-1,p}(E) &= \text{im}D^* \oplus \ker D
\end{aligned}$$

En particular tenemos los isomorfismos $\ker D \cong \text{coker}D^$ y $\text{coker}D^* \cong \ker D^*$. Por los resultados de regularidad como $\ker D$ y $\ker D^*$ son suaves estos subespacios no dependen de k, p .*

Demostración. Probemos sólo que $W^{k-1,p}(\Lambda^{0,1}T^*\Sigma, E) = \text{im}D \oplus \ker D^*$, ya que el resto es análogo. Observemos primero que $\text{im}D \cap \ker D^* = \{0\}$ ya que si $D^*\alpha = 0$ y además $\alpha = D\beta$ entonces:

$$0 = \langle D^*\alpha, \beta \rangle_{L^2(E)} = \langle \alpha, \alpha \rangle_{L^2(F)},$$

por lo tanto $\alpha = 0$. Veamos ahora que $\text{im}D + \ker D^* = W^{k-1,p}(\Lambda^{0,1}T^*\Sigma \otimes E)$.

- Caso $k = 1$:

Notemos que el subespacio $\text{im}D + \ker D^*$ es cerrado ya que es la suma de un subespacio cerrado con uno de dimensión finita. Basta ver entonces que el subespacio no es denso, supongamos que no entonces por Hahn-Banach existe un $\beta \in L^q(F)$ no nulo, donde $1/p + 1/q = 1$ tal que

$$\begin{aligned}
\langle \beta, D\xi \rangle_{L^2(F)} &= 0, \quad \forall \xi \in W^{1,p}(E) \text{ y} \\
\langle \beta, \alpha \rangle_{L^2(F)} &= 0, \quad \forall \alpha \in \ker D^*.
\end{aligned}$$

En particular la primera ecuación vale $\forall \xi \in \Gamma(E)$ por lo tanto β es una solución débil para $D^*\beta = 0$ y por los resultados de regularidad β es suave y $D^*\beta = 0$. Entonces $\langle \beta, \beta \rangle_{L^2(F)} = 0$ por la segunda condición, pero esto nos dice $\beta = 0$ lo cual es absurdo.

- Caso general:

Supongamos que tenemos $\alpha \in W^{k-1,p}(F)$, en particular $\alpha \in L^p(F)$, la parte anterior nos dice que existe $\xi \in W^{1,p}(E)$ y $\beta \in L^p(F)$ tal que $\alpha = D\xi + \beta$, en particular:

$$D\xi = \alpha - \beta \in L^p(F),$$

entonces, por los resultados de regularidad obtenidos anteriormente $\xi \in W^{2,p}(E)$ y por lo tanto $\beta \in W^{1,p}$. Pero entonces $D\xi \in W^{1,p}(E)$ lo cual implica que $\beta \in W^{2,p}, \dots$ pero entonces $D\xi \in W^{3,p}(E)$ y este proceso se puede repetir hasta que $D\xi \in W^{k-1,p}(F)$ y concluimos $\xi \in W^{k,p}(F)$.

□

Con esto concluimos la prueba de las dos primeras partes del teorema de Riemann-Roch. Nos falta el calculo del índice del operador.

2.8 Breve introducción a las variedades mínimas

Así como cuando comenzamos en geometría Riemanniana buscábamos la primera variación de la longitud de las curvas para encontrar geodésicas nos podemos preguntar lo mismo en dimensión más alta: ¿qué pasa si variamos el volúmen de subvariedades?

Tomemos (\bar{M}, \bar{g}) una variedad Riemanniana y consideremos $M \subset \bar{M}$ una subvariedad con la métrica g inducida por \bar{g} . Recordemos que la conexión de Levi-Civita para M es $\nabla = (\bar{\nabla})^T$ la proyección de la conexión de Levi-Civita de \bar{M} a TM . Acá tenemos definida la segunda forma fundamental:

$$\Pi(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^N$$

Que es la componente normal de la derivada covariante. La traza de este operador es la curvatura media, si tenemos E_1, \dots, E_n una base ortonormal en un punto $x \in M$ entonces:

$$H = \sum_{i=1}^n \Pi(E_i, E_i)$$

Esto tiene sentido porque Π es tensorial. El teorema que queremos probar es:

Teorema 2.25 (Fórmula de la primera variación). *Sea $M \subset \bar{M}$ una subvariedad compacta de \bar{M} y $\phi_t : M \rightarrow \bar{M}$ una familia a un parámetro de inmersiones con $\phi_0 = Id$ y $\phi_t|_{\partial M} = Id$, denotemos a $X = \frac{d}{dt}|_{t=0} \phi_t$ entonces:*

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \text{vol}(\phi_t M) = - \int_M \langle H, X \rangle dv_g$$

Donde dv_g es la forma de volúmen de M .

Observación. Definamos a la divergencia de un campo X como

$$\mathcal{L}_X dv_g = \text{div}_g X dv_g$$

Que por la fórmula de Cartan esto coincide con $d\iota_X dv_g$. Por lo tanto el Teorema de Stokes nos dice que $\int_M \text{div}_g X dv_g = \int_{\partial M} \iota_X dv_g$.

Veamos una expresión en coordenadas supongamos que ϕ_t localmente satisfacen $\frac{d}{dt}|_{t=0} \phi_t = X$ y tomemos E_1, \dots, E_n es un frame ortonormal en un punto p entonces en este punto tenemos:

$$\phi_t^* dv_g = \det(\langle E_i(\phi_t), E_j \rangle) dv_g$$

Por lo tanto derivando esta expresión:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|_{t=0} \phi_t^* dv_g &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}|_{t=0} \langle E_i(\phi_t), E_i \rangle \right) dv_g \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle \right) dv_g \end{aligned}$$

Concluimos $\text{div}_g X = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle$ donde E_1, \dots, E_n es una base ortonormal en p .

Demostración. Por la misma cuenta que la observación anterior tenemos que si E_1, \dots, E_n es una base ortonormal de M en un punto x entonces:

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \phi_t^* dv_g = \left(\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} X, E_i \rangle \right) dv_g$$

Esto difiere de lo anterior porque en vez de la conexión ∇ aparece $\bar{\nabla}$, esto es porque nos escapamos de M . Separemos $X = X^T + X^N$ la parte tangencial y normal entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} X, E_i \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} X^T, E_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} X^N, E_i \rangle \\ &= \text{div}_g X^T + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle X, N_j \rangle \langle \nabla_{E_i} N_j, E_i \rangle \end{aligned}$$

Donde N_1, \dots, N_m es un frame que es una base ortonormal del complemento ortogonal a $T_x M$. Como $\langle \nabla_{E_i} N_j, E_i \rangle = - \langle N_j, \nabla_{E_i} E_i \rangle$ y N_j está en el ortogonal concluimos $\langle N_j, \nabla_{E_i} E_i \rangle = - \langle N_j, \Pi(E_i, E_i) \rangle$. Reagrupando todo nos dá:

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} X, E_i \rangle = \text{div}_g X^T - \langle X^N, H \rangle$$

Pero $\langle X^N, H \rangle = \langle X, H \rangle$ ya que H es ortogonal a TM . Usando el teorema de Stokes como en la observación y notando que $X|_{\partial M} = 0$ tenemos lo deseado. □

Motivados por esto definimos:

Definición 2.9. Decimos que $M \subset \bar{M}$ como arriba es una variedad mínima si $H = 0$.

Esto nos dice que las variedades mínimas son puntos críticos del funcional de volúmen.

Hay una familia importante de variedades mínimas que nos vamos a encontrar a lo largo de la tesis y viene dada por esta proposición:

Proposición 2.26. *Tomemos (\bar{M}, J, ω) una variedad de Kahler y supongamos que M es una subvariedad compleja (es decir $J(TM) = TM$) entonces Σ es mínima.*

Demostración. Se puede ver (esta hecho en 7.5) que si \bar{M} es Kahler entonces J es paralela para Levi-Civita de g_J , esto implica que:

$$\Pi(JX, Y) = \Pi(X, JY) = J(\Pi(X, Y))$$

En particular $\Pi(JX, JY) = -\Pi(X, Y)$ por lo tanto si $\{E_1, \dots, E_n\}$ es una \mathbb{C} -base ortonormal para $h = g_J - i\omega$ entonces $\{E_1, \dots, E_n, JE_1, \dots, JE_n\}$ es una base ortonormal para g_J y por la cuenta anterior tenemos que la traza de Π es nula. □

De hecho podemos decir mucho más:

Teorema 2.27 (Desigualdad de Wirtinger). *1. Sea (V, h) un espacio vectorial complejo con una forma hermitiana $h = g - i\omega$ entonces si $W \subset V$ es un subespacio de dimensión $2k$ y $\{w_1, \dots, w_{2k}\}$ es base de V tenemos:*

$$|\omega^k(w_1, \dots, w_{2k})| \leq k! dv(w_1, \dots, w_{2k})$$

Donde dv es la forma de volúmen de g en W . La desigualdad es igualdad si y solo si W es un subespacio complejo.

2. Sea M una subvariedad compleja de (\bar{M}, J, ω) variedad de Kahler y sea M' una subvariedad real homóloga a M , entonces:

$$vol(M) \leq vol(M')$$

Con igualdad si y solo si M' es compleja.

Demostración. 1. Primero observemos que si cambiamos a w_i por Aw_i con $A \in GL_{2k}(\mathbb{R})$ entonces sale $|\det A|$ en ambos lados de la desigualdad por lo tanto basta hacerlo para una base preferida.

Notemos para el caso $k = 1$, si $\{w_1, w_2\}$ es una base g ortonormal de W entonces:

$$|\omega(w_1, w_2)| = |g(Jw_1, w_2)| \leq \|Jw_1\| \|w_2\| = 1$$

Donde usamos Cauchy-Schwarz, la igualdad se da si y solo si $Je = \pm f$, es decir el subespacio es complejo.

Para el caso general notar que $\omega|_W(v, w) = \langle Av, w \rangle$ para cierto $A \in \text{End}(W)$ antisimétrico. Por el teorema espectral esta se diagonaliza en una base h ortonormal y como es antisimétrica sus valores propios son imaginarios. Por la forma de Jordan real concluimos que existe w_1, \dots, w_{2k} base ortonormal y reales μ_1, \dots, μ_k tal que:

$$A(w_{2j-1}) = \mu_j w_{2j}, \quad A(w_{2j}) = -\mu_j w_{2j-1}$$

Usando Cauchy-Schwarz con $\omega(w_{2j-1}, w_{2j})$ como arriba obtenemos que $|\mu_j| \leq 1$ con igualdad si y solo si $Aw_{2j-1} = \pm Jw_{2j}$ por lo tanto:

$$\omega^k(w_1, \dots, w_{2k}) = k! |\mu_1 \dots \mu_k| \leq k! = k! dv(w_1, \dots, w_{2k})$$

2. Si tengo una variedad con una métrica Hermitiana, vimos en 2.3 que la forma de volúmen era $\frac{\omega^k}{k!}$ por lo tanto $\text{vol}(M) = \int_M \frac{\omega^k}{k!}$, pero tenemos $\int_M \frac{\omega^k}{k!} = \int_{M'} \frac{\omega^k}{k!}$ porque M, M' son homólogas. Entonces por la desigualdad anterior notar que $\frac{\omega^k}{k!} \leq dv$ la forma de volúmen de M' , y con esto concluimos $\text{vol}(M) \leq \text{vol}(M')$. □

Una aplicación de la fórmula de la primera variación que nos va a ser muy útil es:

Teorema 2.28 (Principio de monotonía). *Sea $M^n \subset \mathbb{R}^N$ una variedad mínima entonces $\forall p \in M$ tenemos:*

$$\text{vol}(B(p, r) \cap M) \geq \omega_n r^n$$

Donde ω_n es el volúmen de la bola de la esfera n dimensional.

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $p = 0$ y definamos la función $V(r) = \text{vol}(M \cap B_r)$. El objetivo es estudiar $V'(r)$, una buena idea es usar la fórmula de la primera variación con el vector radial $X(x) = x$ en \mathbb{R}^N (que es la dirección normal a las bolas), el problema es que este campo no se anula en el borde.

Supongamos que tomamos el vector radial $X(x) = f(\|x\|)x$ anulándose en $\partial(B_r \cap M)$, entonces por 2.25 tenemos:

$$\int_{M \cap B_r} \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} X, E_i \rangle dv_g = 0$$

Pero notar que:

$$\bar{\nabla}_{E_i}(f(\|x\|)x) = f'(\|x\|) \frac{\langle x, E_i \rangle}{\|x\|} x + f(\|x\|) E_i$$

Y por lo tanto la ecuación anterior queda:

$$\int_{M \cap B_r} f'(\|x\|) \frac{\|x^T\|^2}{\|x\|} + f(\|x\|) n dv_g = 0$$

En particular tomando f lineal a trozos con $f(t) = 1$ si $t \leq r - \varepsilon$ y $f(t) = 0$ si $t \geq r$ tenemos $f'(t) = -\frac{1}{\varepsilon}$ si $t \in (r - \varepsilon, r)$ y 0 de otra forma. Por lo tanto la fórmula anterior nos dá:

$$nV(r - \varepsilon) \leq \int_{M \cap (B_r \setminus B_{r-\varepsilon})} \frac{1}{\varepsilon} \|x\| dv_g \leq \frac{r}{\varepsilon} \text{vol}(M \cap (B_r \setminus B_{r-\varepsilon}))$$

Haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ nos dá justamente:

$$nV(r) \leq rV'(r)$$

Esto es equivalente a $(r^{-n}V(r))' \geq 0$ por lo tanto $V(r) \geq Cr^n$ para cierto C . Por último basta comparar a $V(r)$ con el volúmen de una bola en T_0M para obtener que $C = \omega_n$.

□

Observación. En particular notar que no hay variedades mínimas en \mathbb{R}^N compactas.

3 Nociones básicas sobre Curvas Pseudoholomorfas

Durante toda nuestra discusión vamos a estar en el contexto (M, ω) variedad simpléctica. Por lo discutido en el capítulo anterior a (M, ω) le podemos dar estructura de variedad casi compleja con una $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$. En este contexto M tiene naturalmente la métrica asociada $\langle v, w \rangle := g_J(v, w) := \omega(Jv, w)$, siempre que aparezcan conexiones va a ser Levi-Civita con esa métrica (a no ser que lo explicito).

Definición 3.1. Sea (Σ, j) una superficie de Riemann con su estructura compleja. Una curva pseudoholomorfa (o J -holomorfa) en (M, J) es un mapa diferenciable $u : \Sigma \rightarrow M$ tal que el diferencial es lineal complejo respecto a las estructuras, es decir $du \circ j = J \circ du$

Observación. • En el capítulo anterior mencionamos que en dimensión 2, toda variedad casi-compleja es de hecho compleja. Por lo tanto bastaba decir que (Σ, j) era una superficie equipada con una estructura casi-compleja.

- Definamos como X a la preimágen de los puntos críticos, es decir el conjunto:

$$X = u^{-1}\{u(z) : z \in \Sigma, d_z u = 0\}.$$

Entonces $u|_{\Sigma \setminus X}$ es una inmersión, por lo tanto su imagen $C \subset M$ es una subvariedad inmersa y la condición $du \circ j = J \circ du$ nos dice que $J(TC) = TC$. Es decir TC es un subfibrado complejo de TM , pero es sencillo ver que un subfibrado complejo de dimensión 1 (compleja) cumple que $\omega|_{TC}$ es una forma simpléctica.

- Inspirados por la observación anterior, decimos que una subvariedad $C \subset M$ es simpléctica si ω se restringe a una forma simpléctica en C . Vimos que si tenemos una curva pseudoholomorfa inmersa entonces su imagen es simpléctica, de hecho es sencillo chequear el recíproco, si tenemos una subvariedad simpléctica de dimensión 2 (real) entonces existe una estructura casi-compleja J compatible con ω tal que C es la imagen de una curva pseudoholomorfa.

Vamos a reformular esta definición usando el lenguaje introducido en el capítulo anterior. Como tenemos una estructura casi compleja el espacio $\Omega^1(\Sigma, u^*TM)$ se descompone naturalmente como $\Omega^{1,0}(\Sigma, u^*TM) \oplus \Omega^{0,1}(\Sigma, u^*TM)$ y en particular tenemos que $du = \partial_J u + \bar{\partial}_J u$ donde:

$$\partial_J u = 1/2(du - J \circ du \circ j), \quad \bar{\partial}_J u = 1/2(du + J \circ du \circ j)$$

Son las proyecciones en $\Omega^{1,0}(\Sigma, u^*TM)$ y $\Omega^{0,1}(\Sigma, u^*TM)$ respectivamente.

Con estas definiciones tenemos que $u \in C^\infty(\Sigma, M)$ es pseudoholomorfa si y solamente si $\bar{\partial}_J u = 0$. Lo importante de este operador es que su linearización es un operador de Cauchy- Riemann real como veremos más adelante.

La expresión de $\bar{\partial}_J u$ en coordenadas $z = x + iy$ es:

$$\bar{\partial}_J u = \frac{1}{2}(\partial_x u + J(u)\partial_y u)dx - \frac{1}{2}J(u)(\partial_x u - J(u)\partial_y u)dy \quad (4)$$

Entonces en coordenadas la ecuación que satisface una curva pseudoholomorfa es: $\partial_x u + J(u)\partial_y u = 0$, la intuición que tenemos que tener es que esto es una “perturbación” de la ecuación de Cauchy Riemann clásica ($\frac{\partial}{\partial \bar{z}} u = 0$).

3.1 Regularidad

Esta sección es técnica y se recomienda evitar las demostraciones en una primera lectura sobre el tema. Vamos a usar las herramientas de espacios de Sobolev probadas en 7.1.

Las curvas pseudoholomorfas son soluciones de $\bar{\partial}_J u = 0$ con $u \in C^\infty(\Sigma, M)$, el problema es que este espacio no tiene una topología agradable para buscar soluciones (es una variedad de Frechet). A estas soluciones las vamos a buscar en espacios más flexibles como $W^{k,p}(\Sigma, M)$ y nos gustaría que $\bar{\partial}_J u = 0$ implicara en este espacio que u es regular como queríamos originalmente, éste es uno de los objetivos de esta sección.

De hecho vamos a conseguir mucho más, no sólo las soluciones están en C^∞ sino que la topología que induce $W^{k,p}(\Sigma, M)$ en $\bar{\partial}_J^{-1}(0)$ es la misma que la inducida por $C^\infty(\Sigma, M)$.

Como la pregunta es local a menos de tomar cartas tenemos $u : D \rightarrow B^{2n}$ J -holomorfa para cierta $J \in \mathcal{J}^l(B^{2n})$ (estructuras casi complejas C^l en la bola, si no escribo la l es porque la estructura es suave). Notar que siempre podemos elegir las cartas para que $J(0) = J_0$ y $u(0) = 0$.

Por la ecuación 4 tenemos que u satisface:

$$\partial_x u + J(u)\partial_y u = 0.$$

A partir de ahora denotemos a los espacios $W^{k,p}(D) := W^{k,p}(D, B^{2n})$. Diremos que $u \in W^{k,p}(D)$ es pseudoholomorfa para cierta $J \in \mathcal{J}^l(B^{2n})$ si satisface la ecuación anterior en un sentido débil.

Teorema 3.1. *Sea $p \in (2, \infty)$ y $J \in \mathcal{J}^l(B^{2n})$ con $J(0) = J_0$ y $u \in W^{1,p}(D)$ pseudoholomorfa con $u(0) = 0$ entonces u es de clase $W_{loc}^{l+1}(D)$.*

Prueba del caso $l=1$. Definamos los cocientes incrementales para cualquier $f : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ como $f^h(x, y) = \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$, notar que estos satisfacen que $(fg)^h = f^h g + f g^h$.

Por la misma prueba que en el teorema 2.10 basta ver que existe $\varepsilon > 0$ y $C > 0$ tal que:

$$\|u^h\|_{W^{1,p}(D_\varepsilon)} \leq C.$$

Tomemos ρ una función chichon con $\rho|_{D_{\frac{1}{2}}} = 1$ y con soporte en D , definamos $\rho_\varepsilon(z) = \rho(\frac{z}{\varepsilon})$. Tenemos por las estimativas de Calderon-Zygmund que:

$$\|u^h\|_{W^{1,p}(D_\varepsilon)} \leq \|\rho_\varepsilon u^h\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})} \leq C \left\| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\rho u^h) \right\|_{L^p(D_{2\varepsilon})}.$$

Entonces notemos que:

$$2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\rho u^h) = \partial_x (\rho u^h) + J(u)\partial_y (\rho u^h) + (J_0 - J(u))\partial_y (\rho_\varepsilon u^h).$$

El último término lo acotamos como:

$$\|(J_0 - J(u))\partial_y(\rho_\varepsilon u^h)\|_{L^p(D_{2\varepsilon})} \leq \|J_0 - J(u)\|_{C^0(D_{2\varepsilon})} \|\rho_\varepsilon u^h\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})}.$$

Pero $\|J_0 - J(u)\|_{C^0(D_{2\varepsilon})} = C_1(\varepsilon)$ que tiende a 0 cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ ya que $J(0) = J_0$.

Por otro lado tenemos:

$$\begin{aligned} \partial_x(\rho u^h) + J(u)\partial_y(\rho u^h) &= 2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rho_\varepsilon \right) u^h + (J(u) - J_0)(\partial_y \rho_\varepsilon) u^h + \rho_\varepsilon (\partial_x u^h + J(u)\partial_y u^h) \\ &= 2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rho_\varepsilon \right) u^h + (J(u) - J_0)(\partial_y \rho_\varepsilon) u^h + \rho_\varepsilon ((\partial_x u + J(u)\partial_y u)^h \\ &\quad - J(u)^h \partial_y u) \\ &= 2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rho_\varepsilon \right) u^h + (J(u) - J_0)(\partial_y \rho_\varepsilon) u^h - \rho_\varepsilon J(u)^h \partial_y u \end{aligned}$$

Notemos que los primeros dos términos $\|2(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rho_\varepsilon) u^h\|_{L^p(D_{2\varepsilon})}$ y $\|(J(u) - J_0)(\partial_y \rho_\varepsilon) u^h\|_{L^p(D_{2\varepsilon})}$ están uniformemente acotados cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ porque $u^h \rightarrow \partial_x u$ en L^p cuando $h \rightarrow 0$.

Por otro lado $|\varepsilon J(u)^h| \leq \|J\|_{C^1(D_{2\varepsilon})} |u^h|$ entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \|\rho_\varepsilon J(u)^h \partial_y u\|_{L^p(D_{2\varepsilon})} &\leq \|J\|_{C^1(D_{2\varepsilon})} \|\rho_\varepsilon u^h\|_{C^0(D_{2\varepsilon})} \|\partial_y u\|_{L^p(D_{2\varepsilon})} \\ &\leq C_2(\varepsilon) \|\rho_\varepsilon u^h\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})} \end{aligned}$$

Donde en el último paso usamos el encaje de Sobolev $W^{1,p}(D_{2\varepsilon}) \hookrightarrow C^0(D_{2\varepsilon})$ y absorbimos a $\|u\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})}$ en la constante. $C_2(\varepsilon)$ es directamente proporcional a $\|u\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})}$ por lo tanto $C_2(\varepsilon) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Concluimos de todo esto que:

$$\|\rho_\varepsilon u^h\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})} \leq C' + C'(\varepsilon) \|\rho_\varepsilon u^h\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})}$$

Donde $C'(\varepsilon) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ y por lo tanto en algún momento es menor que 1 y podemos despejar:

$$\|\rho_\varepsilon u^h\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})} \leq \frac{C'}{1 - C'(\varepsilon)}$$

Como queríamos. □

Observación. El paso inductivo lo vamos a hacer observando que el 1-jet de una curva pseudoholomorfa lo podemos considerar una curva pseudoholomorfa para cierta \hat{J} en $D \times B^{2n} \times \mathbb{C}^n$. Solo vamos a ver esto localmente pero globalmente sigue siendo cierto como se explica en el anexo del segundo capítulo de [AL94].

Denotemos a $\xi = \partial_x u$ y $\eta = \partial_y u$, derivando respecto a x la expresión $\xi + J(u)\eta = 0$ obtenemos:

$$\partial_x \xi + d_u J(\xi) \circ J\xi + J(u)\partial_y \xi = 0$$

Y haciendo lo mismo para η obtenemos que:

$$\partial_x \eta + d_u J(\eta) \eta + J(u) \partial_y \eta = 0$$

Definamos la estructura \hat{J} en $D \times B^{2n} \times \mathbb{C}^n$ como:

$$\hat{J}(z, p, X) = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & J(p) & 0 \\ A(p, X) & 0 & J(p) \end{pmatrix},$$

donde $A(p, X) = (d_u J(X) X d_u J(X) JX)$. Entonces tomando el mapa $\hat{u}_x(z) = (z, u(z), \partial_x u)$ es sencillo ver que cumple la ecuación $\partial_x \hat{u}_x + \hat{J}(\hat{u}_x) \partial_y \hat{u}_x = 0$ y lo mismo para $\hat{u}_y(z) = (z, u(z), \partial_y u(z))$. Notar que si J es de clase C^l entonces \hat{J} es de clase C^{l-1} .

Final de la prueba. Ya probamos el caso $l = 1$, asumiendo que el teorema es válido para J estructuras de clase C^{l-1} , entonces si $J \in \mathcal{J}^l(B^{2n})$ tenemos que toda curva J -holomorfa es de clase $W_{loc}^{l,p}$.

Por la observación anterior sabemos que \hat{u}_x como antes es pseudoholomorfa para la estructura \hat{J} que es de clase C^{l-1} entonces por inducción sabemos que \hat{u}_x es de clase $W_{loc}^{l,p}$. Haciendo lo mismo para \hat{u}_y tenemos que u es de clase $W_{loc}^{l+1,p}$ como queríamos. \square

Concluimos entonces que si J es C^l , por el teorema de encaje de Sobolev toda curva J -holomorfa es de clase C^l . El siguiente teorema nos va a decir que la topología C^l inducida en el espacio de curvas pseudoholomorfas coincide con la topología inducida por $W^{1,p}$.

Teorema 3.2. *Sea $J_k \in \mathcal{J}^l(B^{2n})$ sucesión tal que $J_k \rightarrow J \in \mathcal{J}^l(B^{2n})$ en la topología C^l y sean u_k curvas J_k -holomorfas tal que $u_k \rightarrow u$ en la topología en $W^{1,p}(D)$ con $p \in (2, \infty)$ entonces u_k convergen $W_{loc}^{l+1,p}$ a u .*

Demostración. Probemos primero para $l = 1$, las ideas de la prueba son similares a las del caso anterior. Sabemos que u_k y u son de clase $W^{2,p}$ y sea ρ_ε como antes, entonces:

$$\|u - u_k\|_{W^{2,p}(D_\varepsilon)} \leq \|\rho_\varepsilon(u - u_k)\|_{W^{2,p}(D_{2\varepsilon})} \leq C_1 \left\| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\rho_\varepsilon(u - u_k)) \right\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})}.$$

Tratemos de estimar el último término, tenemos que:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\rho_\varepsilon u_k) &= \partial_x (\rho_\varepsilon u_k) + J_k(u_k) \partial_y (\rho_\varepsilon u_k) + (J_0 - J_k(u_k)) \partial_y (\rho_\varepsilon u_k) \\ &= 2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rho_\varepsilon \right) u_k + (J_k(u_k) - J_0) \partial_y \rho_\varepsilon u_k + (J_0 - J_k(u_k)) \partial_y (\rho_\varepsilon u_k) \end{aligned}$$

Donde acá usamos que $\partial_x u_k + J_k(u_k) \partial_y u_k = 0$. Notar que tenemos la misma expresión para $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} u$ (sacando las k de todos lados) entonces:

$$\begin{aligned}
2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\rho_\varepsilon u - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\rho_\varepsilon u_k)) &= 2(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\rho_\varepsilon)(u_k - u) + (J(u) - J_0)\partial_y \rho_\varepsilon u \\
&\quad + (J_0 - J_k(u_k))\partial_y \rho_\varepsilon u_k + (J_0 - J(u))\partial_y(\rho_\varepsilon u) \\
&\quad + (J_k(u_k) - J_0)\partial_y(\rho_\varepsilon u_k) \\
&= 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\rho_\varepsilon(u_k - u) + (J(u) - J_0)\partial_y \rho_\varepsilon(u - u_k) \\
&\quad + (J(u) - J_k(u_k))\partial_y \rho_\varepsilon u_k + (J_k(u_k) - J(u))\partial_y(\rho_\varepsilon u) \\
&\quad + (J_k(u_k) - J_0)\partial_y(\rho_\varepsilon(u_k - u))
\end{aligned}$$

Tomando norma $W^{1,p}(D_{2\varepsilon})$ es fácil ver que los dos primeros términos se van a 0 para cada $\varepsilon > 0$ fijo porque $u_k \rightarrow u$ en la norma $W^{1,p}$. Para el tercer término notar que como J es C^1 entonces $J_k(u_k) \rightarrow J(u)$ en norma $W^{1,p}$, entonces el tercer término también va a 0. El cuarto término se acota de manera similar notando que $\|\partial_y(\rho_\varepsilon u)\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})} \leq \|\rho_\varepsilon u\|_{W^{2,p}(D_{2\varepsilon})}$ si ε es suficientemente chico por el Teorema anterior.

Ver que el último término va a 0 termina con la prueba. Notemos que:

$$\begin{aligned}
\|(J_k(u_k) - J_0)\partial_y(\rho_\varepsilon(u_k - u))\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})} &= \|(J_k(u_k) - J_0)\partial_y(\rho_\varepsilon(u_k - u))\|_{L^p(D_{2\varepsilon})} \\
&\quad + \|dJ_k \circ du(\partial_y(\rho_\varepsilon(u_k - u)))\|_{L^p(D_{2\varepsilon})} \\
&\quad + \|(J_k(u_k) - J_0)d(\partial_y(\rho_\varepsilon(u_k - u)))\|_{L^p(D_{2\varepsilon})}
\end{aligned}$$

Fijemos un $\varepsilon > 0$ lo suficientemente chico para que si k es suficientemente grande entonces:

$$\|J_0 - J_k(u_k)\|_{C^0(D_{2\varepsilon})} \leq \frac{1}{3C_1}$$

Entonces el primer término queda acotado por:

$$\|(J_k(u_k) - J_0)\partial_y(\rho_\varepsilon(u_k - u))\|_{L^p(D_{2\varepsilon})} \leq \frac{1}{3C_1}\|\rho_\varepsilon(u_k - u)\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})}$$

Que tiende a 0 con k .

El último termino cumple que:

$$\|(J_k(u_k) - J_0)d(\partial_y(\rho_\varepsilon(u_k - u)))\|_{L^p(D_{2\varepsilon})} \leq \frac{1}{C_3}\|\rho_\varepsilon u - \rho_\varepsilon u_k\|_{W^{2,p}(D_{2\varepsilon})}$$

Y el segundo:

$$\begin{aligned}
\|dJ_k \circ du(\partial_y(\rho_\varepsilon(u_k - u)))\|_{L^p(D_{2\varepsilon})} &\leq \|J\|_{C^1(D_{2\varepsilon})}\|du\|_{C^0(D_{2\varepsilon})}\|\partial_y(\rho_\varepsilon(u_k - u))\|_{C^0(D_{2\varepsilon})} \\
&\leq C_2\|J\|_{C^1(D_{2\varepsilon})}\|u\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})}\|\rho_\varepsilon(u_k - u)\|_{W^{2,p}(D_{2\varepsilon})}
\end{aligned}$$

Donde usamos los encajes de Sobolev. Ahora, achicando ε si fuese necesario, podemos asumir que:

$$\|u\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})} < \frac{1}{3C_1C_2\|J\|_{C^1(B^{2n})}}$$

Entonces concluimos de todo lo dicho que:

$$\|\rho_\varepsilon(u - u_k)\|_{W^{2,p}(D_{2\varepsilon})} \leq f(\|u - u_k\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})}) + \frac{2}{3}\|\rho_\varepsilon(u - u_k)\|_{W^{2,p}(D_{2\varepsilon})}$$

Y de acá concluimos lo deseado. \square

Observación. Notemos que podemos definir el espacio de moduli universal local (el porque del nombre va a quedar claro en el capítulo 4) como:

$$\mathcal{M}^{1,p}(B^{2n}; \mathcal{J}^l) = \{(u, J) \in W^{1,p}(D) \times \mathcal{J}^l(B^{2n}) : \partial_x u + J(u)\partial_y u = 0\}.$$

Esto hereda de $W^{1,p}(D) \times \mathcal{J}^l(B^{2n})$ una topología, pero por el primer teorema de la sección todo elemento acá está en el espacio:

$$\mathcal{M}_r^{1,p}(B^{2n}; \mathcal{J}^l) = \{(u, J) \in \mathcal{M}^{1,p}(B^{2n}; \mathcal{J}^l) : u|_{D_r} \in W^{l+1,p}(D_r)\},$$

donde $r < 1$. Pongámosle a este espacio la norma $\|u\| = \|u\|_{W^{1,p}(D)} + \|u|_{D_r}\|_{W^{l+1,p}(D_r)}$. El segundo teorema nos dice entonces que la inclusión $\mathcal{M}_r^{1,p}(B^{2n}; \mathcal{J}^l) \hookrightarrow \mathcal{M}^{1,p}(B^{2n}; \mathcal{J}^l)$ es un homeomorfismo con las topologías mencionadas.

El siguiente corolario es fundamental en la teoría y lo vamos a explotar en el resto de la tesis, especialmente en el capítulo 5. Básicamente nos dice que cotas de gradiente nos dan cotas C^∞ .

Corolario 3.2.1. Sean $p \in (2, \infty)$, $J_k \in \mathcal{J}^l(B^{2n})$ tal que $J_k \rightarrow J \in \mathcal{J}^l(B^{2n})$ en la topología C^l , y $\{u_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \subset W^{1,p}(D)$ curvas J_k -holomorfas tal que $\|u_k\|_{W^{1,p}} \leq C \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. En estas condiciones u_k tiene una subsucesión convergiendo $W_{loc}^{l+1,p}$ a una curva J -holomorfa u .

Demostración. Como el encaje $W^{1,p}(D) \hookrightarrow C^0(D)$ es compacto entonces tenemos que u_k tiene una subsucesión (que la vamos a seguir denotando u_k) convergiendo C^0 a cierta $u \in C^0(D)$, a menos de cambiar las coordenadas asumamos que $u(0) = 0$ y $J(0) = J_0$.

Veamos que en verdad podemos conseguir cotas en $W_{loc}^{l+1,p}$, esto es porque la inclusión antes mencionada $\mathcal{M}_r^{1,p}(B^{2n}; \mathcal{J}^l) \hookrightarrow \mathcal{M}^{1,p}(B^{2n}; \mathcal{J}^l)$ es un homeomorfismo. Entonces para que esté acotada en $\mathcal{M}_r^{1,p}(B^{2n}; \mathcal{J}^l)$ basta que esté cerca del 0 en $\mathcal{M}^{1,p}(B^{2n}; \mathcal{J}^l)$. Notemos que si definimos $u_k^\varepsilon(z) = u_k(\varepsilon z)$ entonces:

$$\|u_k^\varepsilon\|_{L^p(D)}^p = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{D_\varepsilon} |u|^p dx dy \leq \pi \|u\|_{C^0(D_\varepsilon)}^p.$$

Además:

$$\|du_k^\varepsilon\|_{L^p(D)}^p = \varepsilon^p \int_D |du(\varepsilon z)|^p dx dy = \varepsilon^{p-2} \int_{D_\varepsilon} |du|^p dx dy \leq \varepsilon^{p-2} \|du\|_{L^p(D_\varepsilon)}^p.$$

Notar que ambas normas van a 0 cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por lo tanto, si $\varepsilon > 0$ es suficientemente chico tenemos que la sucesión está en un entorno de $(J, 0)$ y por lo tanto vale la cota $\|u_k^\varepsilon\|_{W^{l+1,p}(D_r)} \leq C$ para cierta constante C , como queríamos. Esto implica que $\|u_k\|_{W^{l+1,p}(D_\delta)} \leq C$ para cierta $\delta > 0$.

Pero entonces como $\|u_k\|_{W^{l+1,p}(D_\delta)} \leq C$ y el encaje $W^{l+1,p}(D_\delta) \hookrightarrow W^{l,p}(D_\delta)$ es compacto tenemos que u_k tiene una subsucesión convergiendo en $W^{l,p}$ a cierta \tilde{u} , y como esta \tilde{u} es continua tiene que coincidir con la u anterior. Ahora, por el teorema anterior, la convergencia tiene que ser en $W^{l+1,p}$ como queríamos. \square

3.2 Algunas propiedades locales

Anteriormente hicimos el comentario de que la ecuación $\partial_x u + J(u)\partial_y u = 0$ en algún sentido es una “perturbación” de la ecuación de Cauchy-Riemann clásica $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} u = 0$, lo primero que vamos a hacer es formalizar de alguna forma este comentario y el resto será esencialmente un corolario.

Queremos entender lo que está pasando localmente, por lo tanto, al igual que en la sección anterior, basta ver a $u : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ y asumir que en algún entorno del $0 \in \mathbb{C}^n$ hay una J estructura casi compleja con $J(0) = J_0$ tal que u es J -holomorfa.

El teorema fundamental es:

Teorema 3.3 (Carleman). Sean $p \in (2, \infty)$, $\bar{J} \in W^{1,p}(D, Gl_{2n}(\mathbb{R}))$ con $\bar{J}(0) = J_0$, $A \in L^p(D, End(\mathbb{R}^{2n}))$ y $u \in W^{1,p}(D)$ con $u(0) = 0$ satisfaciendo:

$$\partial_x u(z) + \bar{J}(z)\partial_y u(z) + A(z)u(z) = 0.$$

Entonces existen $\varepsilon > 0$, $\Phi \in W^{1,p}(D_\varepsilon, Gl_{2n}(\mathbb{R}))$ con $\Phi(0) = Id$ y $f : D_\varepsilon \rightarrow \mathbb{C}^n$ holomorfa tal que $\bar{J} \circ \Phi = \Phi \circ J_0$ y $u(z) = \Phi(z)f(z)$.

Observación. • En nuestro contexto, como $J \in \mathcal{J}(B^{2n})$ es suave y $u \in W^{1,p}(D)$, entonces $\bar{J}(z) := J(u(z))$ cae en las hipótesis de arriba.

- Geométricamente lo que está pasando lo podemos ver en el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} (D \times \mathbb{C}^n, \bar{J}) & \xrightarrow{Id \times \Phi} & (D \times \mathbb{C}^n, J_0) \\ u \uparrow & & f \uparrow \\ D & \xrightarrow{Id} & D \end{array}$$

Pensemos a $D \times \mathbb{C}^n$ como un fibrado vectorial con su estructura compleja \bar{J} , entonces el Teorema nos da un Φ que nos endereza el fibrado y manda las secciones u satisfaciendo la ecuación de arriba a secciones holomorfas (al menos localmente).

Demostración Paso 1 La parte difícil del Teorema es la siguiente:

Afirmación. El Teorema es válido cuando $\bar{J} = J_0$ y $A \in L^p(D, End(\mathbb{R}^{2n}))$ es lineal complejo (es decir $A \circ J_0 = J_0 \circ A$).

Para ver la afirmación estudiemos el problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} v + A(z)v(z) = 0 \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

Que por la proposición 2.14 tiene solución para $\varepsilon > 0$ pequeño. Siguiendo la motivación geométrica, construyamos una base local holomorfa del fibrado y con esto la transformación lineal Φ . Tomemos v_1, \dots, v_n soluciones como arriba definidas en D_ε para algún $\varepsilon > 0$ tal que $\{v_i(0)\}_i$ sea la base canónica de \mathbb{C}^n . Entonces definiendo $\Phi : D_\varepsilon \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^{2n})$ donde en cada $z \in D$ $\Phi(z)$ es la transformación lineal mandando la base canónica (compleja) a $v_1(z), \dots, v_n(z)$.

Tenemos que $\Phi \in W^{1,p}(D_\varepsilon, \text{End}(\mathbb{R}^{2n}))$ en particular es continua y como Φ es invertible en 0, también lo es en un entorno de este, por lo tanto a menos de achicar ε tenemos que Φ es invertible. Por construcción Φ es lineal compleja y satisface $\partial_x \Phi + J_0 \partial_y \Phi + A\Phi = 0$ (acá usamos que A es lineal compleja).

Ahora definamos $f \in W^{1,p}(D_\varepsilon)$ como $u(z) = \Phi(z)f(z)$, veamos que ecuación diferencial satisface:

$$\begin{aligned} \partial_x(\Phi f) + J_0 \partial_y(\Phi f) + (A\Phi)f &= 0 \\ \Phi(\partial_x f) + J_0 \Phi(\partial_y f) + (\partial_x \Phi)f + (J_0 \partial_y \Phi)f + (A\Phi)f &= 0 \end{aligned}$$

Pero por las ecuaciones que satisface Φ tenemos que:

$$\Phi(\partial_x f + J_0 \partial_y f) = 0$$

Y como Φ es invertible concluimos que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$ como queríamos.

A partir de ahora veamos que a menos de componer por transformaciones lineales invertibles estamos en estas hipótesis.

Paso 2 Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\bar{J} = J_0$

Por álgebra lineal tenemos que existe $P : D \rightarrow \text{Gl}_{2n}(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1} \circ \bar{J} \circ P = J_0$ y además viendo la construcción de tal P se puede observar que es tan regular como \bar{J} . Definiendo $v : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ por la ecuación $P(z)v(z) = u(z)$ y hacemos la misma cuenta que el paso anterior llegamos a que v satisface:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} v + \tilde{A}(z)v(z) = 0$$

Donde $\tilde{A} = P^{-1}(\partial_x P + J_0 \partial_y P + A \circ P)$ y como $P \in W^{1,p}$ es fácil ver que $\tilde{A} \in L^p$.

Paso 3 Sin pérdida de generalidad podemos asumir que A es lineal compleja.

Descompongamos la matriz A como su parte lineal compleja y antilineal compleja $A = A^{cl} + A^{ca}$, la idea es cambiar A por $\tilde{A} = A^{cl} + A^{ca} B$ donde

$B \in L^\infty(D, \text{End}(\mathbb{R}^{2n}))$ es antilineal compleja y $Bu(z) = u(z)$. Entonces que $\tilde{A} \in L^p(D, \text{End}(\mathbb{R}^{2n}))$ y es lineal compleja.

Podemos elegir tal B como:

$$B(z)v = \begin{cases} \frac{1}{|u(z)|^2} u(z) h_0(u(z), v), & u(z) \neq 0 \\ 0, & u(z) = 0 \end{cases}$$

Donde h_0 es la forma hermitiana estandar de \mathbb{C}^n . □

En lo que resta de esta sección vamos a usar este resultado para rescatar teoremas del Análisis complejo.

3.2.1 Continuación única

Una función $w : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ decimos que se anula con orden ∞ en 0 si:

$$\int_{D_\varepsilon} |w(x, y)| dx dy = O(\varepsilon^k), \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$$

En particular observemos que si w es de clase C^∞ entonces se anula con orden ∞ en 0 si y solo si su serie de Taylor en 0 es nula. Uno de los resultados interesantes de análisis complejo es que si w es holomorfa y se anula con orden ∞ en 0 entonces es nula. Esto también vale para los mapas pseudoholomorfos.

Teorema 3.4 (Continuación única). *Sea $J \in \mathcal{J}^l(B^{2n})$ con $l \geq 1$. Tomemos $u, v : D \rightarrow B^{2n}$ J -holomorfas tal que $u - v$ se anula en 0 con orden $\infty \implies u = v$.*

Demostración. Notar que por el Teorema de regularidad en estas condiciones $u, v \in W^{2,p}(D_r) \forall r < 1$. Denotemos como $w := u - v$ entonces notemos que restando las ecuaciones $\partial_x u + J(u)\partial_y u = 0$ y la respectiva para v obtenemos:

$$\partial_x w + J(u)\partial_y w + (J(u) - J(v))\partial_y v = 0$$

Pero notar que:

$$(J(u) - J(v))\partial_y v = \left(\int_0^1 dJ_{u+tw}(w) dt \right) \partial_y v = C(w)$$

Donde el mapa $C \in L^p(D_r, \text{End}(\mathbb{R}^{2n}))$ se define como $C(z)\xi = \left(\int_0^1 dJ_{u(z)+tw(z)}(\xi) dt \right) \partial_y v(z)$ que es continuo ya que $u, v, \partial_y v$ y dJ son continuos.

Por el principio de similitud de Carleman tenemos $\varepsilon > 0, \Phi \in W^{1,p}(D_\varepsilon, \text{Gl}_{2n}(\mathbb{R}))$ y $f : \mathbb{D}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{C}^n$ holomorfa tal que $w(z) = \Phi(z)f(z)$.

Consideremos el conjunto: $A = \{z \in D : w \text{ se anula con orden } \infty\}$, notemos que:

- A es abierto:

Sea $z_0 \in A$, entonces a menos de hacer una traslación $z_0 = 0$ y podemos conseguir Φ, f como arriba. Φ es continua y w se anula con orden infinito en 0 por lo tanto f se anula con orden infinito en 0 y al ser holomorfa tenemos que $f = 0$. Por lo tanto $w = 0$ en un entorno de z_0 .

- A es cerrado

Sea $z_n \in A \rightarrow z_0$ entonces a menos de trasladar $z_0 = 0$, tomando Φ, f como arriba tenemos que f tiene una sucesión que acumula en 0, pero como es holomorfa $f = 0$.

□

Tomando cartas obtenemos:

Corolario 3.4.1. *Sea $J \in \mathcal{J}(M)$, Σ una superficie de Riemann conexa y $u, v : \Sigma \rightarrow M$ curvas J -holomorfas tal que todas las derivadas en un punto coinciden entonces $u = v$.*

3.2.2 Puntos críticos

Sea $u : \Sigma \rightarrow M$ una curva J -holomorfa para cierta J , decimos que un $z \in \Sigma$ va a ser un punto crítico si $d_z u = 0$, si el punto no es crítico le decimos que es regular.

Teorema 3.5. *Sea Σ una superficie de Riemann cerrada, $J \in \mathcal{J}^1(M)$ con $l \geq 1$ y $u : \Sigma \rightarrow M$ J -holomorfa no constante entonces:*

1. $\forall x \in M$ tenemos que $u^{-1}(x)$ es un conjunto finito.
2. El conjunto:

$$X = u^{-1}\{x \in M : x = u(z) \text{ con } d_z u = 0\}$$

(La preimágen de los valores críticos) es un conjunto finito.

Demostración. 1. Como la variedad es compacta basta ver que $u^{-1}(x)$ no tiene puntos de acumulación. Supongamos que si tiene y tomemos z punto de acumulación. Tomemos cartas alrededor de z y x de tal modo que podemos ver localmente a $u : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ J -holomorfa para cierta estructura C^l con $u(0) = 0$. El principio de similitud de Carleman se aplica claramente a u entonces $u(z) = \Phi(z)f(z)$ para $z \in D_\varepsilon$ con $f : D_\varepsilon \rightarrow \mathbb{C}^n$ holomorfa. Por hipótesis existe $z_n \rightarrow 0$ tal que $u(z_n) = 0$ pero como Φ es invertible esto implica que $f = 0$ ya que los ceros de f acumulan, concluimos entonces que $u = 0$ constate en D_ε por lo tanto por el Corolario final de la sección anterior $u(z) = x$ constante.

2. Veamos nuevamente que X no puede acumular, supongamos que lo hacen entonces sea $z \in X$ el punto de acumulación y tomemos cartas alrededor de z y $u(z)$ para ver a $u : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ como arriba, notar que por los resultados de regularidad $u \in W^{2,p}(D_r) \forall r < 1$. Definamos $\xi = \partial_x u \in W^{1,p}$ entonces derivando la ecuación que satisface u concluimos que ξ satisface:

$$\partial_x \xi + J(u)\partial_y \xi + d_u J(\xi)(J(u)\xi) = 0$$

Entonces el principio de Similitud de Carleman se aplica para ξ y tenemos que los ceros de ξ no pueden acumular ya que sino $du = 0$ en ese entorno, entonces es localmente constante que nuevamente es un absurdo.

□

3.2.3 Intersecciones de curvas

Notemos que si tenemos una curva regular en un punto entonces tenemos una forma local como en Análisis complejo.

Lema 3.6. *Sea $J \in \mathcal{J}^l(M)$ con $l \geq 2$ y $u : D \rightarrow M$ una curva J -holomorfa con $d_0u \neq 0$. En estas condiciones existen cartas C^{l-1} alrededor de $u(0)$, $\psi : U \subset M \rightarrow \mathbb{C}^n$ tal que $\psi \circ u(z) = (z, \dots, 0)$ y $d_u\psi \circ J(u) = J_0 \circ d_u\psi$.*

Demostración. Tomando cartas podemos suponer que $u : D \rightarrow \mathbb{C}^n$, $u(0) = 0$ curva J -holomorfa con $J \in \mathcal{J}(V)$ donde V entorno del 0. Sean Z_1, \dots, Z_n una base (compleja) del fibrado u^*TM con $Z_1 = \partial_x u$ (esto lo podemos lograr a menos de tomar un disco más chico), consideremos el mapa:

$$\phi(w_1, \dots, w_n) = \exp_{u(w_1)} \left(\sum_{j=1}^n x_j Z_j(w_1) + y_j J(u(w_1)) Z_j(w_1) \right)$$

En un entorno del 0 es un difeomorfismo C^{l-1} ya que u es de clase C^{l-1} por el encaje de Sobolev. Además satisface:

$$\partial_{x_j} \phi + J(\phi) \partial_{y_j} \phi = 0$$

Con $j \geq 2$ en los puntos $(z, \dots, 0)$. El mapa deseado es entonces ϕ^{-1} . □

Supongamos que tenemos dos curvas $u, v : \Sigma \rightarrow M$ con $u(z_0) = v(z_0)$, por lo tanto a menos de tomar estas cartas $u(z) = (z, \dots, 0)$ y $v(z) = (v_1(z), \tilde{v}(z))$. Veamos que $\tilde{v}(z)$ satisface las condiciones del teorema de Carleman, esto nos dá:

Proposición 3.7. *Sean $u, v : D \rightarrow M$ curvas J -holomorfas con $J \in \mathcal{J}^l(M)$, $u(0) = v(0)$ y $d_0u \neq 0$. Asumamos que existen $\{z_n\}, \{w_n\}$ sucesiones de $D \setminus \{0\}$ con $z_n, w_n \rightarrow 0$ tal que $u(z_n) = v(w_n) \forall n$ entonces existe $\phi : D_\varepsilon \rightarrow D$ tal que $v(z) = \phi \circ u(z)$.*

Demostración. Tomando cartas como en el lema anterior conseguimos que $u, v : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ son J -holomorfas para $J \in \mathcal{J}^{l-1}(U)$ donde $U \subset \mathbb{C}^n$ entorno del 0, $u(z) = (z, \dots, 0)$ y $v(z) = (v_1(z), \tilde{v}(z)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$. Notar que perdimos regularidad en J porque el cambio de coordenadas es solo C^{l-1} . Ahora reescribamos la ecuación de v $\partial_x v + J(v) \partial_y v = 0$ como:

$$\partial_x v + J_0 \partial_y v + (J(u) - J_0) \partial_y v = 0$$

Pero notar que $J_0 = J((v_1, 0))$ por la elección de las coordenadas, entonces:

$$(J(u) - J_0) \partial_y v = \left(\int_0^1 d_{(v_1, t\tilde{v})} J(0, \tilde{v}) dt \right) \partial_y v$$

Como queremos una ecuación para \tilde{v} , tomemos $\pi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ la proyección en la segunda coordenada y compngamos la ecuación anterior con π . Entonces si definimos $C(z)\xi = \pi \circ \left(\int_0^1 d_{(v_1(z), t\tilde{v}(z))} J(0, \xi) dt \right) \partial_y v(z)$ tenemos

que es continua y por lo tanto en compactos está en L^p , entonces \tilde{v} satisface $\partial_x \tilde{v} + J_0 \partial_y \tilde{v} + C \tilde{v} = 0$ y por lo tanto vale el principio de similitud para \tilde{v} .

Notar que por hipótesis tenemos que los ceros de \tilde{v} acumulan, pero por el principio de similitud de Carleman y los argumentos vistos anteriormente esto solo puede pasar si $\tilde{v} = 0$. Concluimos en que D_ε tenemos que $u(z) = (z, \dots, 0)$ y $v(z) = (v_1(z), \dots, 0)$ por lo tanto $v_1 : D_\varepsilon \rightarrow D$ satisface las condiciones del teorema. □

Jugando un poco con el teorema anterior logramos el resultado aparentemente más fuerte:

Teorema 3.8. *Sea $J \in \mathcal{J}^l$ con $l \geq 2$, $u : \Sigma_1 \rightarrow M$ una curva J -holomorfa no constante y $v : \Sigma_2 \rightarrow M$ J -holomorfa tal que $u(\Sigma_1) \neq v(\Sigma_2)$. Entonces tenemos que el conjunto $u^{-1}(v(\Sigma_2))$ es a lo sumo numerable y acumula solamente en X_1 los puntos críticos de u .*

Demostración. Si v es constante el teorema ya lo concluimos anteriormente entonces supongamos que no lo es. Notemos que si $z_0 \in \Sigma_1 \setminus X_1$ entonces son equivalentes:

1. Existe U entorno de z_0 tal que $u(U) \subset v(\Sigma_2)$.
2. Existe $\{z_n\} \in u^{-1}(v(\Sigma_2))$ con $z_n \rightarrow_n z_0$.

La equivalencia de estas dos propiedades viene de la proposición anterior tomando cartas. Pero entonces si consideramos el conjunto de los $z_0 \in \Sigma_1 \setminus X_1$ tal que se cumple cualquiera de las condiciones anteriores, tenemos que es abierto por la primera propiedad y cerrado por la segunda, por lo tanto este conjunto o bien es vacío o es $\Sigma_1 \setminus X_1$ (notar que acá usamos que X_1 es finito). Suponiendo que no es vacío tendríamos $u(\Sigma_1 \setminus X_1) \subset v(\Sigma_2)$ y por continuidad $u(\Sigma_1) \subset v(\Sigma_2)$, pero si volvemos a hacer el argumento con v en vez de con u obtenemos $v(\Sigma_2) \subset u(\Sigma_1)$ que es absurdo por hipótesis. □

3.2.4 Reparametrizaciones de Curvas

Si $u : \Sigma \rightarrow M$ es una curva J -holomorfa, vamos a llamar a $u(\Sigma) \subset M$ la curva sin parametrización, notar que fuera de los puntos críticos esta es una variedad inmersa en M .

Observación. Si $\phi : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ es un cubrimiento ramificado holomorfo entonces $v = u \circ \phi$ es una curva J -holomorfa tal que $v(\Sigma) = u(\Sigma)$.

Supongamos ahora que nos dan una curva sin parametrización, ¿podemos encontrar una parametrización de esta sin redundancias? Motivados por la observación anterior una pregunta posible es, ¿existe un $z \in \Sigma$ tal que $d_z u \neq 0$ y $u^{-1}(u(z)) = \{z\}$? A tales puntos les vamos a llamar los puntos inyectivos.

Definición 3.2. Vamos a decir que $u : \Sigma \rightarrow M$ curva J -holomorfa es *simple* si dadas $\phi : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ cubrimiento ramificado holomorfo y $v : \Sigma' \rightarrow M$ curva J -holomorfa tal que $u = v \circ \phi$ entonces $\deg \phi = 1$.

Observación. En particular observar que si tenemos que $u_*[\Sigma] \in H_2(M, \mathbb{Z})$ es indivisible en el sentido de que no existe $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$ y $n \in \mathbb{Z}$ tal que $nA = u_*[\Sigma]$ entonces es simple. Esto es porque si no lo fuera, existe una factorización $u = v \circ \phi$ con $\deg \phi > 1$ entonces $u_*[\Sigma] = \deg \phi v_*[\Sigma']$.

Vamos a probar ahora que:

Teorema 3.9. *Sea $J \in \mathcal{J}^l(M)$ con $l \geq 2$ y $u : \Sigma \rightarrow M$ una curva J -holomorfa simple entonces tiene puntos inyectivos. Es más, si $Z(u)$ es el complemento de estos:*

$$Z(u) = \{z \in \Sigma : d_z u = 0 \text{ o } u^{-1}(u(z)) \geq 2\}$$

Entonces $Z(u)$ es a lo sumo numerable y acumula en los puntos críticos de u .

Vamos a conseguir algo más fuerte, dada $u : \Sigma \rightarrow M$ pseudoholomorfa existe una $v : \Sigma' \rightarrow M$ simple tal que $u = v \circ \phi$ donde $\phi : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ es un cubrimiento ramificado.

Demostración. Sea $u : \Sigma \rightarrow M$ la curva y denotemos como X al conjunto de los puntos críticos que sabemos que es finito. Tenemos que $u(\Sigma \setminus X)$ está inmersa en M , ahora veamos que a menos de sacarle una cantidad finita de puntos es un encaje.

Definamos el conjunto $Y \subset \Sigma \setminus X$ como: $z \in Y \Leftrightarrow$ existe $z' \in u^{-1}(u(z))$ y V, V' entornos de z y z' respectivamente tal que $u(V) \neq u(V')$. Por los resultados de la sección anterior tenemos que el conjunto Y es discreto en $\Sigma \setminus X$. Notemos que $u|_{\Sigma \setminus (X \cup Y)}$ es un encaje, $u(\Sigma \setminus (X \cup Y))$ es cierta superficie de Riemann Γ .

Denotemos a la restricción de antes como $p : \Sigma \setminus (X \cup Y) \rightarrow \Gamma$. Extendamos este mapa a $\Sigma \setminus X$, tomemos $y \in Y$ y bolas (para cierta métrica en Σ) $B(y)$ lo suficientemente chicas para que $u(B(y)) \cap u(B(y')) = \{u(y)\}$ para $y, y' \in Y$. Entonces peguemos vía el mapa $u|_{B(y)}$ a Γ para conseguir cierta superficie de Riemann Γ' . Entonces p se extiende a $p : \Sigma \setminus X \rightarrow \Gamma'$ y tenemos $v : \Gamma' \rightarrow M$ que colapsa los puntos nuevos conseguidos de Γ . (poner dibujos)

Ahora tenemos que $\Sigma \setminus X$ es de tipo finito (esto es que $\pi_1(\Sigma \setminus X)$ es finitamente generado) y $\Sigma \setminus X$ tanto como esta recubre a Γ' tenemos que Γ' también tiene tipo finito y por lo tanto es homeomorfa a una superficie de Riemann compacta Σ' sin una cantidad finita de puntos.

Concluimos entonces que existe K en Γ' tal que $\Gamma' \setminus K$ es una cantidad finita de anillos topológicos disjuntos $\Gamma' \setminus K = \bigcup_{i=1}^n A_i$. Consideremos entonces $\Sigma \setminus p^{-1}(K) = \bigcup_{j=1}^m U_j$ las componentes conexas entonces notar que p se restringe al cubrimiento holomorfo:

$$p : U_j \setminus (U_j \cap X) \rightarrow A_i$$

Para ciertos i, j , de acá concluimos que en cada U_j debe haber un elemento de X digamos x_j y que $U_j \setminus \{x_j\} \cong A_j$ son discos pinchados. Concluimos entonces que si vemos a $\Gamma' \hookrightarrow \Sigma'$ entonces este tiene una única estructura conforme para extender a $p : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ cubrimiento holomorfo. Por último para ver como definir $v : \Sigma' \rightarrow M$ hay que hacer corresponder la imagen de cada punto crítico. \square

3.3 La identidad de energía

Una de las propiedades geométricas interesantes que tienen las curvas holomorfas es la armonicidad. Veamos si eso continua valiendo para curvas psuedoholomorfas.

Observación. El fibrado $\Lambda^1 T^* \Sigma$ tiene naturalmente la métrica μ^* inducida por μ en el dual (esto es un caso particular de 7.4). Por lo tanto como $u^* TM$ y $\Lambda^1 T^* \Sigma$ tienen métricas podemos equipar al producto tensorial con la métrica producto $g_J \otimes \mu^*$. Vamos a abusar de notación y denotar a la norma de esta métrica en $\Lambda^1 T^* \Sigma \otimes u^* TM$ como $\|\cdot\|$.

Habiendo hecho esta acotación. Consideremos la energía de Dirichlet como:

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \|du\|^2 dv_{\mu}$$

Donde dv_{μ} es la forma de volúmen en Σ . Calculemos esta expresión en coordenadas. Supongamos que $\mu = \lambda^2(dx^2 + dy^2)$, hagamos algunas cuentas:

1. Veamos como queda la expresión para $\|du\|^2$ donde $u \in C^{\infty}(\Sigma, M)$ en coordenadas locales. Como $du = \partial_x u dx + \partial_y u dy$ entonces tenemos que:

$$\|du\|^2 = \|\partial_x u\|^2 \lambda^{-2} + \|\partial_y u\|^2 \lambda^{-2}$$

Ya que dx, dy es una base ortonormal con la métrica μ^* y su norma es λ^{-2} . Por lo tanto como $dv_{\mu} = \lambda^2 dx \wedge dy$ tenemos que $\|du\|^2 dv_{\mu} = (\|\partial_x u\|^2 + \|\partial_y u\|^2) dx \wedge dy$. Notar que esta expresión no depende de la μ elegida en la clase conforme de j .

2. Ahora hagamos lo mismo para $\|\bar{\partial}_J u\|$, usando las expresiones en coordenadas 4 tenemos:

$$4\|\bar{\partial}_J u\|^2 = 2\|\partial_x u + J(u)\partial_y u\|_J^2 \lambda^{-2}$$

Acá usamos que J es isometría para g_J (porque J es compatible con ω), desarrollando la expresión y notando que $g_J(\partial_x u, J\partial_y u) = -\omega(\partial_x u, \partial_y u)$ tenemos que:

$$4\|\bar{\partial}_J u\|^2 = 2(\|\partial_x u\|_J^2 + \|\partial_y u\|_J^2) \lambda^{-2} - 4u^* \omega(\partial_x, \partial_y) \lambda^{-2}$$

De los dos cálculos anteriores llegamos a la muy importante:

Proposición 3.10 (Fórmula de energía). *Sea $u : \Sigma \rightarrow M$ diferenciable entonces:*

$$E(u) = \int_{\Sigma} \|\bar{\partial}_J u\|^2 + \int_{\Sigma} u^* \omega$$

Observación. 1. En una curva pseudoholomorfa, $E(u) = \int_{\Sigma} u^* \omega$ pero esto solo depende de la clase de homología $A = u_*[\Sigma] \in H_2(M, \mathbb{Z})$. Por lo tanto la energía de la curva es un invariante topológico.

2. Por el comentario anterior tenemos que las curvas pseudoholomorfas minimizan la energía de Dirichlet dentro de su clase de homología.
3. Por la desigualdad de Wirtinger 2.27 tenemos que $\int_{\Sigma} u^* \omega = \int_{u(\Sigma)} \omega = \int_{u(\Sigma)} dV|_{u(\Sigma)}$, por lo tanto si $\tilde{\Sigma}$ es homóloga a $u(\Sigma)$ tenemos que:

$$\int_{\tilde{\Sigma}} dV|_{\tilde{\Sigma}} \geq \int_{\tilde{\Sigma}} \omega = \int_{u(\Sigma)} \omega = \int_{u(\Sigma)} dV|_{u(\Sigma)}$$

Entonces concluimos que las curvas pseudoholomorfas minimizan el área en su clase de homología (aunque pueden no ser mínimas).

4. Si $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$ no nula satisface que $\langle \omega, A \rangle = 0$ entonces no pueden existir curvas pseudoholomorfa con $u_*[\Sigma] = A$, y si $A = 0$ entonces u solo puede ser constante.

4 Espacios de Moduli

En esta sección Σ es una superficie de Riemann y (M, ω) una variedad simpléctica, ambas cerradas.

Tomemos $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$ una clase de homología y $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$. En esta sección vamos a estudiar los *espacios de moduli*:

$$\mathcal{M}(A, \Sigma; J) = \{u \in C^\infty(\Sigma, M) : \bar{\partial}_J u = 0, u_*[\Sigma] = A\}.$$

En otras palabras, $\mathcal{M}(A, \Sigma; J)$ es el conjunto de todas las curvas pseudoholomorfas representando a la clase de homología A .

La idea para estudiar estos espacios nace en la siguiente observación: definamos $\mathcal{B} = \{u \in C^\infty(\Sigma, M) : u_*[\Sigma] = A\}$, este espacio es una “variedad” en un sentido amplio (es modelado en un espacio de Frechet, vease el apéndice 7.2.1), su tangente es $T_u\mathcal{B} = \Gamma(u^*TM)$ (los campos a lo largo de $u(\Sigma)$). Tomemos por otro lado \mathcal{E} un fibrado sobre \mathcal{B} cuyas fibras son $\mathcal{E}_u = \Omega^{0,1}(\Sigma, u^*TM)$. Con estas notaciones observar que $\bar{\partial}_J : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ es una sección de este fibrado, además $\mathcal{M}(A, \Sigma; J) = \bar{\partial}_J^{-1}(0)$.

En dimensión finita si quisieramos que $\bar{\partial}_J^{-1}(0)$ sea una variedad necesitaríamos que $\bar{\partial}_J$ sea transversal a la sección nula de \mathcal{E} . El problema es que en estos espacios no podemos formalizar esta idea, sin embargo en variedades de Banach ese argumento si funciona. Por los resultados de regularidad que conseguimos en 3.1, si trabajáramos en la completación Sobolev de \mathcal{B} y \mathcal{E} , $\bar{\partial}_J^{-1}(0) \subseteq \mathcal{B}$ por lo tanto no ganamos soluciones nuevas, además estos espacios si son variedades de Banach (vease 7.8) y podemos usar el argumento anterior.

En este capítulo haremos tres cosas. Primero estudiaremos la linealización del operador $\bar{\partial}_J$ para estudiar la transversalidad discutida anteriormente. Luego vamos a probar que bajo ciertas condiciones, $\mathcal{M}(A, \Sigma; J)$ es una variedad de dimensión finita para el caso de un J “genérico”. Por último vamos a explotar la prueba anterior para probar resultados análogos para el espacio:

$$\mathcal{W}(A, \Sigma, \gamma) = \{(t, u) : u \in \mathcal{M}(A, \Sigma; \gamma(t))\},$$

donde γ es un camino en $\mathcal{J}(M, \omega)$ entre J_0, J_1 fijas. Nuevamente para alcanzar la transversalidad vamos a tener imponer condiciones extra. Esto nos va a decir como se relacionan los moduli para distintas estructuras casi complejas.

4.1 La linealización de $\bar{\partial}_J$

Sean \mathcal{B}, \mathcal{E} como arriba y $u \in \bar{\partial}_J^{-1}(0)$, notemos que $d_u\bar{\partial}_J : T_u\mathcal{B} \rightarrow T_{(u,0)}\mathcal{E} = T_u\mathcal{B} \oplus \mathcal{E}_u$ ya que en la sección nula el tangente se descompone naturalmente. Sea $\pi_u : T_{(u,0)}\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_u$ la proyección, definamos $D_u = \pi_u \circ d_u\bar{\partial}_J$. Ser transversal a la sección nula es equivalente a que D_u sea sobreyectivo. Decimos que D_u es el *diferencial vertical*.

Notar que para definir D_u usamos fuertemente el hecho de que $T_{(u,0)}\mathcal{E}$ se descompone naturalmente como un espacio vertical y uno horizontal, por lo tanto el diferencial vertical solo tiene sentido en $\bar{\partial}_J^{-1}(0)$. Busquemos una expresión para D usando una conexión, esta nos descompone $T_{(u,\bar{\partial}_u)}\mathcal{E}$ en un espacio vertical y horizontal $\forall u \in \mathcal{B}$ y en las secciones de $\bar{\partial}_J^{-1}(0)$ el espacio vertical coincide con el anterior.

Sea ∇ la conexión de Levi-Civita para la métrica determinada por ω y J , observar J no es necesariamente paralela con esta conexión (de hecho por las cuentas de apéndice 7.5 esto solo pasa cuando (M, ω, J) es Kahler). Por lo tanto el fibrado $\Omega^{0,1}(\Sigma, u^*TM)$ no queda invariante por el transporte paralelo. Para solucionar esto hay que cambiar a ∇ por una conexión donde J sea paralela.

Proposición 4.1. *Sea ∇ una conexión en TM entonces:*

$$\tilde{\nabla}_Y X = \nabla_Y X - \frac{1}{2}J(\nabla_Y J)X. \quad (5)$$

Es una conexión donde J es paralela ($\tilde{\nabla}J = 0$ o equivalentemente $\tilde{\nabla}(JX) = J\tilde{\nabla}X$).

Demostración. Derivando la expresión $J^2 = -Id$ obtenemos que $\nabla J \circ J = -J \circ \nabla J$. Por otro lado como $\nabla(JX) = (\nabla J)X + J\nabla X$:

$$\nabla(JX) - \frac{1}{2}J(\nabla J)JX = J(\nabla X - \frac{1}{2}J(\nabla J)X),$$

donde usamos la primera propiedad que deducimos. Esto es justamente la igualdad deseada. \square

Observación. Notar que $\tilde{\nabla}$ pierde propiedades con respecto a ∇ , por ejemplo no es simétrica (recordar que ∇ es simétrica si $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$). Por eso en los cálculos vamos a escribir $\tilde{\nabla}$ en función de ∇ para operar y luego volver a $\tilde{\nabla}$.

Supongamos que queremos derivar en la dirección de $\xi \in \Gamma(u^*TM) = T_u\mathcal{B}$, entonces tomemos la variación de u dada por $u_s(z) = \exp_{u(z)}(s\xi)$. Denotemos por $\Phi_u(\xi) : u^*TM \rightarrow (\exp_u\xi)^*TM$ al transporte paralelo respecto a $\tilde{\nabla}$ por las geodésicas $s \rightarrow \exp_{u(z)}s\xi(z)$. Notar que $\Phi_u(\xi)$ es un isomorfismo entre fibrados que por la proposición anterior es lineal complejo ($\Phi_u(\xi) \circ J = J \circ \Phi_u(\xi)$).

Definamos el mapa:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_u : T_u\mathcal{B} &\rightarrow \Omega^{0,1}(\Sigma, u^*TM) \\ \mathcal{F}_u(\xi) &= \Phi_u(\xi)^{-1}\tilde{\partial}_J(\exp_u\xi), \end{aligned}$$

el diferencial de este mapa en 0 es justamente la componente vertical de $d_u\tilde{\partial}_J$. En particular si $u \in \tilde{\partial}_J^{-1}(0)$ entonces $d_0\mathcal{F}_u = D_u$.

Tenemos entonces que:

$$D_u(\xi) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{F}_u(t\xi) = \tilde{\nabla}_t \tilde{\partial}_J(u_t)|_{t=0}.$$

Calculemos esta expresión en coordenadas, si $z = x + iy$ ya vimos en la ecuación 4 que:

$$\tilde{\partial}_J u = (\partial_x u + J(u)\partial_y u)dx - J(u)(\partial_x u + J(u)\partial_y u)dy. \quad (6)$$

Por lo tanto basta derivar la expresión $\partial_x u_t + J(u_t)\partial_y u_t$, como J es paralela para $\tilde{\nabla}$ tenemos:

$$\tilde{\nabla}_t(\partial_x u_t + J(u_t)\partial_y u_t)|_{t=0} = \tilde{\nabla}_t \partial_x u_t|_{t=0} + J(u)\tilde{\nabla}_t \partial_y u_t|_{t=0}.$$

Pero:

$$\tilde{\nabla}_t \partial_x u_t|_{t=0} = \nabla_t \partial_x u_t|_{t=0} - \frac{1}{2} J(\nabla_\xi J) \partial_x u = \nabla_x \xi - \frac{1}{2} J(\nabla_\xi J) \partial_x u,$$

por la simetría de ∇ . La misma cuenta para $\tilde{\nabla}_t \partial_y u_t$ nos permite concluir que:

$$\tilde{\nabla}_t (\partial_x u + J(u) \partial_y u)|_{t=0} = \nabla_x \xi + J(u) \nabla_y \xi - \frac{1}{2} J(\nabla_\xi J) \partial_x u + \frac{1}{2} (\nabla_\xi J) \partial_y u.$$

Poniendo todo nuevamente en términos de $\tilde{\nabla}$ obtenemos que la expresión de arriba nos da:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_t (\partial_x u_t + J(u_t) \partial_y u_t)|_{t=0} &= \tilde{\nabla}_x \xi + J \tilde{\nabla}_y \xi \\ &\quad - \frac{1}{2} (J(\nabla_\xi J) \partial_x u - (\nabla_\xi J) \partial_y u + J(\nabla_x J) \xi - (\nabla_y J) \xi). \end{aligned}$$

Notemos que:

$$J(\nabla_\xi J) \partial_x u - (\nabla_\xi J) \partial_y u = J(\nabla_\xi J) (\partial_x u - J \partial_y u) = 2J(\nabla_\xi J) \partial_J u,$$

donde usamos $J^2 = -Id$ y que J y ∇J anticonmutan. Además:

Teorema 4.2. *Supongamos que (M, ω) es una variedad simpléctica y $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$. Tomemos $\langle \cdot, \cdot \rangle_J = \omega(J \cdot, \cdot)$ y ∇ la conexión de Levi-Civita. En estas condiciones tenemos que $J(\nabla_{JX} Y) = \nabla_X Y$ y el tensor de Nijenhuis se puede calcular con la ecuación:*

$$N_J(X, Y) = 2(J(\nabla_Y J)X - J(\nabla_X J)Y)$$

Demostración. Es el teorema 7.23 del apéndice 7.5. □

Por lo tanto $J(\nabla_x J) \xi - (\nabla_y J) \xi = 2\nabla_{\partial_J u} \xi$. Usando la formula para el tensor de Nijenhuis del teorema concluimos:

$$\tilde{\nabla}_t (\partial_x u_t + J(u_t) \partial_y u_t)|_{t=0} = \tilde{\nabla}_x \xi + J \tilde{\nabla}_y \xi - \frac{1}{2} N_J(\partial_J u, \xi)$$

Incertando esta ecuación en 6 obtenemos:

$$D_u \xi = \tilde{\nabla}^{0,1} \xi + \frac{1}{4} N_J(\xi, \partial_J u) \quad (7)$$

Donde N_J es el tensor de Nijenhuis.

Observación. El operador D_u es una perturbación del operador de Cauchy-Riemann complejo $\tilde{\nabla}^{0,1}$ por un término (de orden 0) antilineal complejo. En particular es un operador de Cauchy-Riemann real (vease 2.7) y por lo tanto vale el teorema de Riemann-Roch.

Pasando a las completaciones $W^{k,p}$ (con $kp > 2$) de los espacios $\Gamma(u^*TM)$ y $\Omega^{0,1}(\Sigma, u^*TM)$ obtenemos:

Teorema 4.3. *El mapa $\mathcal{F}_u : W^{k,p}(\Sigma, u^*TM) \rightarrow W^{k-1,p}(\Sigma, \Lambda^{0,1}T\Sigma \otimes u^*TM)$ es diferenciable (de hecho es tan suave como J) y $D_u = d_0\mathcal{F}_u$ es un operador de Cauchy-Riemann real, por lo tanto es Fredholm de índice:*

$$\text{ind}(D_u) = n\chi(\Sigma) + 2c_1(u_*[\Sigma])$$

4.2 La transversalidad

Definamos el espacio:

$$\mathcal{M}^*(A, \Sigma; J) := \{u \in \mathcal{M}(A, \Sigma; J) : u \text{ es simple}\},$$

la definición de simple se introdujo en la sección 3.2.4. Para nuestros motivos solamente nos interesa que en estas curvas existe un abierto denso de $z \in \Sigma$ tal que $d_z u \neq 0$ y $u^{-1}(u(z)) = \{z\}$.

Definición 4.1. Sea $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$, decimos que esta estructura es *regular* para $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$ y Σ si D_u es sobreyectiva $\forall u \in \mathcal{M}^*(A, \Sigma; J)$. Denotemos el conjunto de las J regulares como $\mathcal{J}_{reg}(A, \Sigma)$.

El resultado fundamental que vamos a probar en esta sección es:

Teorema 4.4. *1. Si $J \in \mathcal{J}_{reg}(A, \Sigma)$ entonces el espacio $\mathcal{M}^*(A, \Sigma; J)$ es una variedad diferenciable de dimensión:*

$$\dim \mathcal{M}^*(A, \Sigma; J) = n\chi(\Sigma) + 2c_1(A).$$

2. $\mathcal{J}_{reg}(A, \Sigma) \subset \mathcal{J}(M, \omega)$ es un residual con la topología C_{loc}^∞ .

Una de las dificultades de probar el Teorema es que la topología C^∞ en el espacio $\mathcal{J}(M, \omega)$ nos dificulta el uso de herramientas típicas de espacios de Banach. Por eso lo que vamos a hacer es trabajar en principio con $\mathcal{J}^l(M, \omega) =: \mathcal{J}^l$ las J estructuras compatibles de clase C^l y mediante un truco (debido a Taubes) concluir el caso C^∞ .

Observación. Vamos a usar el teorema de Baire con el espacio $\mathcal{J}(M, \omega)$. Esto está justificado porque es una variedad de Frechet paracompacta, como es de Frechet localmente la podemos metrizar y la condición de paracompacta nos permite pegar las métricas locales para obtener una métrica en todo el espacio. Luego es sencillo ver que como localmente estamos modelados en un espacio completo, la métrica que obtuvimos es completa. La condición de paracompacta se puede ver (por ejemplo) si encajamos la variedad en algún \mathbb{R}^N y aquí $\mathcal{J}(M, \omega)$ son simplemente mapas C^∞ de un abierto de \mathbb{R}^N a un espacio euclideo que sabemos es un conjunto separable.

Veamos la primera parte del Teorema, básicamente definimos las estructuras regulares para que esto suceda.

Primera parte del teorema. Sea $\mathcal{F}_u : W^{k,p}(u^*TM) \rightarrow W^{k-1,p}(\Lambda^{0,1}T^*\Sigma \otimes u^*TM)$ el mapa definido en la sección anterior, como $d_0\mathcal{F}_u = D_u$ es sobreyectivo por el teorema de la función implícita (como en el apéndice 7.2) tenemos que $\mathcal{F}^{-1}(0)$

en un entorno de 0 es una subvariedad suave de dimensión $n\chi(\Sigma) + 2c_1(A)$ por el teorema de Riemann- Roch. La imagen de este entorno por la exponencial coincide con un entorno de u en $\mathcal{M}^*(A, \Sigma; J)$ por los resultados de regularidad para las curvas pseudoholomorfas. Observemos que las cartas que obtuvimos son independientes de k, p . □

Definamos el espacio de moduli universal:

$$\mathcal{M}^*(A, \Sigma; \mathcal{J}^l) := \{(u, J) : u \in \mathcal{M}^*(A, \Sigma; J), J \in \mathcal{J}^l\}$$

Sea k, p con $kp > 2$ y $k \in \{1, \dots, l\}$ denotemos a $\mathcal{B}^{k,p} := \{u \in W^{k,p}(\Sigma, M) : u_*[\Sigma] = A\}$, esto es un abierto de $W^{k,p}(\Sigma, M)$ por el encaje $W^{k,p}(\Sigma, M) \hookrightarrow C^0(\Sigma, M)$. Entonces $\mathcal{M}^*(A, \Sigma; \mathcal{J}^l) \subset \mathcal{B}^{k,p} \times \mathcal{J}^l$ es una variedad de Banach separable ya que \mathcal{J}^l es una variedad de Banach separable como veremos abajo y $W^{k,p}(\Sigma, M)$ también (vease 7.8).

Observación. 1. Supongamos que tenemos $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ donde ω es una forma simpléctica, notemos entonces que el espacio tangente a $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ es:

$$T_J \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}, \omega) = \{A \in \text{End}(\mathbb{R}^{2n}) : AJ = -JA, \omega(Av, w) + \omega(v, Aw) = 0\}$$

La primera condición sale de las cuentas hechas en 2.1, la segunda sale de que $\omega(Jv, Jw) = \omega(v, w)$. La segunda condición se puede reformular como $A = A^* = JAJ$ donde el adjunto se tomó respecto a la métrica g_J .

2. Volviendo al contexto (M, ω) variedad simpléctica, si $J \in \mathcal{J}^l$ definamos:

$$\text{End}_{C^l}(TM, J, \omega) = \{A \in C^l(M, \text{End}(TM)) : AJ = -JA, A = A^* = JAJ\}$$

Es sencillo ver que este es un espacio de Banach con la norma C^l . Esto nos dan parametrizaciones de \mathcal{J}^l vía las cartas que definimos en 2.1:

$$A \mapsto \left(Id + \frac{1}{2}JA \right) J \left(Id + \frac{1}{2}JA \right)^{-1}$$

Que en un entorno del 0 en $\text{End}_{C^l}(TM, J, \omega)$ es biyectivo.

Proposición 4.5. *Dada $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$ y $l \geq 2$, $k \in \{1, \dots, l\}$ entonces $\mathcal{M}^*(A, \Sigma; \mathcal{J}^l)$ es una subvariedad de Banach de $\mathcal{B}^{k,p} \times \mathcal{J}^l$ de clase C^{l-k} separable.*

Demostración. Veamos $\mathcal{M}^*(A, \Sigma; \mathcal{J}^l)$ como los ceros de una sección de cierto fibrado.

Definamos el fibrado de Banach $\mathcal{E}^{k-1,p} \rightarrow \mathcal{B}^{k,p} \times \mathcal{J}^l$ cuyas fibras son $\mathcal{E}_{(u,J)}^{k-1,p} = W^{k-1,p}(\Lambda^{0,1}T^*\Sigma \otimes_J u^*TM)$ donde \otimes_J significa que tomamos las formas antilineales según J .

Afirmación. $\mathcal{E}^{k-1,p}$ es un fibrado de Banach de clase C^{l-k} .

Demostración. Sea $\mathcal{N}(u)$ un entorno coordenado de u , esto identifica un entorno del 0 en $W^{k,p}(u^*TM)$ vía el mapa exponencial $\xi \in u^*TM \rightarrow \exp_u(\xi) \in \mathcal{N}(u)$. Ahora si $\tilde{\nabla}$ es la métrica de la sección anterior tenemos que nos trivializa vía el transporte paralelo el entorno $\mathcal{N}(u) \times \{J\}$, pero como J es C^l entonces $\tilde{\nabla}$ y su transporte paralelo son de clase C^{l-1} por lo tanto si derivamos $l - k$ veces los mapas de transición el resultado sigue estando en $W^{k-1,p}$.

Ahora fijemos u y trivialicemos un $\{u\} \times \mathcal{N}(J)$ con $\mathcal{N}(J)$ un entorno de J suficientemente pequeño para que:

$$\begin{aligned} \Lambda^{0,1}T^*\Sigma \otimes_J u^*TM &\rightarrow \Lambda^{0,1}T^*\Sigma \otimes_{J'} u^*TM \\ \alpha &\rightarrow \frac{1}{2}(\alpha + J' \circ \alpha \circ j) \end{aligned}$$

Sean isomorfismos con $J' \in \mathcal{N}(u)$. Notar que esto es simplemente la proyección antilineal según J' de un α . Ahora extendamos esta trivialización a un entorno $\mathcal{N}(u) \times \mathcal{N}(J)$ simplemente trivializando cada $\mathcal{N}(u) \times \{J'\}$ y luego usando la última trivialización. □

Ahora que tenemos este detalle técnico definamos la sección:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \mathcal{B}^{k,p} \times \mathcal{J}^l &\rightarrow \mathcal{E}^{k-1,p} \\ \mathcal{S}(u, J) &= \bar{\partial}_J u \end{aligned}$$

Sea $(u, J) \in \mathcal{M}^*(A, \Sigma; \mathcal{J}^l)$ calculemos el diferencial vertical $D_{(u,J)} : W^{k,p}(u^*TM) \times T_J \mathcal{J}^l \rightarrow \mathcal{E}_{(u,J)}^{k-1,p}$. Este es simplemente:

$$D_{(u,J)}(\xi, Y) = D_u \xi + \frac{1}{2} Y \circ du \circ j$$

Como D_u es Fredholm tenemos que $im D_{(u,J)}$ es cerrada, basta ver que es densa para ver que $D_{(u,J)}$ es sobreyectiva y concluir lo deseado.

Hagamoslo para el caso $k = 1$, supongamos que no es densa por lo tanto existe $\eta \in L^q(\Lambda^{0,1}T^*\Sigma \otimes E)$ con q el exponente conjugado de tal que p tal que:

$$\int (\eta, D_u \xi) dv_\mu = 0$$

Para todo $\xi \in W^{1,p}(u^*TM)$ y además:

$$\int (\eta, Y(u) \circ du \circ j) d_\mu = 0$$

Para todo $Y \in T_J \mathcal{J}^l$. De la primera condición tenemos que η es una solución débil para $D_u^* \eta = 0$ (donde el operador adjunto es como en la sección ??). Pero por regularidad elíptica esto implica que $\eta \in W^{1,p}$ y $D_u^* \eta = 0$.

Ahora veamos que $\eta = 0$. Supongamos que en un z_0 inyectivo (con $du(z_0) \neq 0$ y $u^{-1}(u(z_0)) = \{z_0\}$) tenemos $\eta(z_0) \neq 0$. Entonces si vemos que $(\eta(z_0), Y(u(z_0)) \circ du \circ j) \neq 0$ para algún $Y \in T_J \mathcal{J}^l$ por un argumento típico con funciones chichón tenemos lo deseado.

Lema 4.6. $T_J \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ actúa transitivamente en \mathbb{R}^{2n} .

Vamos a probar esto luego de la proposición, pero en particular notemos que existe $Y \in T_J \mathcal{J}^l$ tal que:

$$(\eta(z_0), Y(u(z_0)) \circ du \circ j \rangle) > 0$$

Tomemos U entorno de z_0 tal que la función de arriba es positiva. Como z_0 es un punto inyectivo concluimos que $u(\Sigma \setminus U)$ es un compacto que no contiene a $u(z_0)$. Por lo tanto tomando V un entorno de $u(z_0)$ que no corte $u(\Sigma \setminus U)$ y tomando $\beta : V \rightarrow [0, 1]$ una función chichón adentro de V , tenemos que si cambiamos Y por βY entonces:

$$\int (\eta, \beta(u)Y(u) \circ du \circ j) dv_\mu > 0$$

Lo cual es absurdo. Por lo tanto alrededor de cada punto inyectivo $\eta = 0$ pero como estos son densos y η en particular es continua por la regularidad que vimos anteriormente, $\eta = 0$.

Veamos ahora para el caso general en k . Queremos ver que para cualquier $\eta \in W^{k-1,p}(\Lambda^{0,1}T^*\Sigma \otimes u^*\Sigma)$ existe $(\xi, J) \in W^{k,p}(u^*TM) \times C^l(\text{End}(T_J \mathcal{J}^l))$ tal que $D_{(u,J)}(\xi, J) = D_u \xi + \frac{1}{2}Y(u) \circ du \circ j = \eta$. En particular:

$$D_u \xi = \eta - \frac{1}{2}Y(u) \circ du \circ j \in W^{k-1,p}$$

Por lo tanto $\xi \in W^{k,p}(u^*TM)$ por regularidad elíptica y obtenemos lo deseado. □

Demostración del Lema. Sean $v, w \in \mathbb{R}^{2n}$ veamos que existe un $A \in T_J \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ que manda $Av = w$. Notar que basta hacerlo para $\omega = \omega_0$ y $J = J_0$ (a menos de cambiar coordenadas).

Para ver esto comencemos con una transformación que trivialmente lleve v a w , digamos $A_1(x) = \frac{1}{|v|^2} w \langle v, x \rangle$, pero notemos que queremos que la matriz sea simétrica y que $J_0 A J_0 = A$. Simetrizando la transformación A_1 obtenemos $A_2(x) = \frac{1}{|v|^2} (w \langle v, x \rangle + v \langle w, x \rangle)$, y para cumplir la otra condición llegamos a

$$A_3(x) = \frac{1}{|v|^2} (w \langle v, x \rangle + v \langle w, x \rangle + J_0(w \langle v, x \rangle + v \langle w, x \rangle) J_0)$$

Entonces $A_3 \in T_J \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$. El problema es que $A_3 v \neq w$, pero estudiando la expresión de $A_3 v$ no es difícil llegar a que la transformación correcta es:

$$\begin{aligned} A(x) = & A_3(x) - \frac{1}{|v|^4} (\langle w, v \rangle (v \langle v, x \rangle + J_0 v \langle v, x \rangle J_0 \\ & - \langle w, J_0 v \rangle (J_0 v \langle v, x \rangle - v \langle v, J_0 w \rangle)) \end{aligned}$$

□

El siguiente Lema lo podemos encontrar en el apéndice 7.2 (más específico).

Lema 4.7. Sean X, Y y Z espacios de Banach. $D : X \rightarrow Y$ es un operador Fredholm y $L : Z \rightarrow Y$ lineal acotado tal que $D \oplus L$ es sobreyectivo, entonces este tiene inversa a derecha. Además $\pi : \ker(D \oplus L) \rightarrow Z$ es Fredholm y $\ker \pi \cong \ker D$ y $\text{coker} \pi \cong \text{coker} D$.

Esto nos vá a permitir probar:

Proposición 4.8. Existe l_0 tal que si $l \geq l_0$ entonces $\mathcal{J}_{reg}^l := \{J \in \mathcal{J}^l : D_u \text{ sobreyectivo}\}$ es un residual de \mathcal{J}^l en la topología C^l .

Demostración. Tenemos que la proyección $\pi : \mathcal{M}^*(A, \Sigma; \mathcal{J}^l) \rightarrow \mathcal{J}^l$ es un mapa C^{l-1} por la proposición anterior y además notar que es Fredholm por el lema y $d\pi_{(u, J)}$ es sobreyectivo sii D_u es sobreyectivo.

Por lo tanto los valores regulares de π son justamente \mathcal{J}_{reg}^l . Por el Teorema de Sard- Smale si $l - 2 \geq n\chi(\Sigma) + 2c_1(A)$ este conjunto es un residual. \square

Segunda parte del Teorema. Consideremos el conjunto $\mathcal{J}_{reg, K} \subset \mathcal{J}(M, \omega)$ a las J tal que si u es J holomorfa con $u_*[\Sigma] = A$ cumpliendo:

1. $\|du\|_{L^\infty} \leq K$
2. Existe un punto $z \in \Sigma$ tal que $\inf_{z \neq w} \frac{d(u(z), u(w))}{d(z, w)} \geq \frac{1}{K}$.

Entonces D_u es sobreyectivo. Es claro que si u cumple estas dos propiedades entonces u es simple. Recíprocamente si u es simple por lo visto en el capítulo anterior, u cumple las condiciones anteriores para algún K . Concluimos de esto que:

$$\mathcal{J}_{reg}(A, \Sigma) = \bigcap_{K > 0} \mathcal{J}_{reg, K}$$

Entonces si probamos que $\mathcal{J}_{reg, K}$ es un abierto denso $\forall K > 0$ entonces usando el Teorema de Baire terminamos.

Veamos primero que es abierto. Supongamos que $J_n \notin \mathcal{J}_{reg, K}$ tal que $J_n \rightarrow_n J$. Por definición significa que existen u_n satisfaciendo los $\|du_n\| \leq K$ y la condición 2 para algún z_n tal que D_{u_n} no es sobreyectiva. Por el teorema ?? u_n tiene una subsucesión convergente a u pseudoholomorfa. Supongamos además que z_n converge a un z entonces u satisface las condiciones anteriores. Ahora como D_{u_n} no es sobreyectivo entonces D_u tampoco puede serlo entonces $J \notin \mathcal{J}_{reg, K}$.

Veamos ahora que es denso. Notemos que $\mathcal{J}_{reg, K} = \mathcal{J}_{reg, K}^l \cap \mathcal{J}(M, \omega)$ donde $\mathcal{J}_{reg, K}^l$ es la misma definición pero las u pseudoholomorfas le pedimos simplemente ser de clase C^l . Tenemos que $\mathcal{J}_{reg, K}^l$ es abierto por el argumento de antes y es denso por lo visto anteriormente si l es suficientemente grande.

Tomemos $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$ entonces como $\mathcal{J}_{reg, K}^l$ es abierto y denso existe ε_l tal que si $J' \in \mathcal{J}^l(M, \omega)$ y $\|J - J'\|_{C^l} < \varepsilon_l \implies J' \in \mathcal{J}_{reg, K}^l$. En particular tomando $J_l \in \mathcal{J}(M, \omega)$ como arriba tal que:

$$\|J - J_l\|_{C^l} < \min\{\varepsilon_l, 2^{-l}\}$$

Obtenemos entonces una sucesión $\{J_l\}$ tal que $J_l \rightarrow J$ como queríamos. \square

El esquema de prueba fue básicamente:

1. Probamos que $\mathcal{M}(A, \Sigma; \mathcal{J}^l) \subset \mathcal{B}^{k,p} \times \mathcal{J}^l$ es una subvariedad de Fredholm separable.
2. Vimos por el lema de "álgebra lineal en dimensión infinita" que los valores regulares de la proyección $\pi : \mathcal{M}(A, \Sigma; \mathcal{J}^l) \rightarrow \mathcal{J}^l$ corresponde a los $J \in \mathcal{J}_{reg}^l$.
3. Por el Teorema de Sard- Smale probamos que estos son un residual en la topología C^l para un l suficientemente grande
4. Usamos el argumento de Taubes para conseguir el resultado deseado en la topología C^∞ .

Comentario. Estas pruebas se repiten en distintos contextos en la teoría y en variaciones de la misma. En el caso de hacer teoría en perturbaciones de la curva pseudoholomorfa usualmente el paso delicado es el primero ya que acá usamos fuertemente los resultados de curvas pseudoholomorfas simples.

4.3 Dependencia respecto a J

Veamos ahora que todas las variedades $\mathcal{M}^*(A, \Sigma; J)$ para $J \in \mathcal{J}_{reg}(A, \Sigma)$ son cobordantes entre ellas. Esto va a ser fundamental en el Non-Squeezing.

Supongamos que $J_0, J_1 \in \mathcal{J}_{reg}(A, \Sigma)$ y denotemos $\mathcal{J}(J_0, J_1) = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{J}(M, \omega) : \gamma(0) = J_0, \gamma(1) = J_1\}$. Denotemos entonces al espacio:

$$\mathcal{W}(A, \Sigma; \gamma) = \{(t, u) : 0 \leq t \leq 1, u \in \mathcal{M}(A, \Sigma; \gamma(t))\}$$

La siguiente definición es la que nos garantiza que si una γ es "regular" entonces los espacios anteriores son variedades:

Definición 4.2. Decimos que una curva $\gamma \in \mathcal{J}(J_0, J_1)$ es regular para A y Σ si:

$$\Omega^{0,1}(\Sigma, u^*TM) = imD_{(\gamma(t), u_t)} + \mathbb{R}v_t$$

$\forall (t, u) \in \mathcal{W}(A, \Sigma; \gamma)$ donde $v_t = \dot{\gamma}(t) \circ du \circ j$. Al espacio de curvas regulares las denotamos como $\mathcal{J}_{reg}(A, \Sigma; J_0, J_1)$.

El Teorema análogo al anterior es:

Teorema 4.9. Sean A, Σ y $J_0, J_1 \in \mathcal{J}_{reg}(A, \Sigma)$ como arriba entonces:

1. Si $\gamma \in \mathcal{J}_{reg}(A, \Sigma; J_0, J_1)$ entonces $\mathcal{W}(A, \Sigma; \gamma)$ es una variedad diferenciable con borde y

$$\partial\mathcal{W}(A, \Sigma; \gamma) = \mathcal{M}(A, \Sigma; J_1) \cup \mathcal{M}(A, \Sigma; J_0)$$

2. El conjunto $\mathcal{J}_{reg}(A, \Sigma; J_0, J_1)$ es un conjunto de Baire en el espacio de curvas $\mathcal{J}(J_0, J_1)$.

5 Compacidad

En esta sección las superficies de Riemann (Σ, j) y las variedades simplécticas (M, ω) serán cerradas. A M la vamos a equipar con la métrica g_J determinada por J y ω (donde J va a quedar claro en el contexto) y a Σ con una métrica μ en la clase conforme de j (esto significa que j es una isometría para μ).

En la sección anterior probamos que a menos de perturbar nuestra J -estructura los espacios de moduli se comportan bien, en particular tenemos resultados de existencia de curvas una vez prefijada la clase de homología. Como veremos en la sección siguiente, la existencia de curvas pseudoholomorfas satisfaciendo ciertas condiciones geométricas nos dan información sobre nuestra variedad simpléctica. La cuestión ahora es cómo conseguir la existencia de estas curvas sin perturbar la J -estructura. Una forma natural de hacerlo es establecer la existencia para un conjunto denso de estructuras (con las herramientas del capítulo anterior), por lo tanto existe $J_n \in \mathcal{J}(M, \omega)$ tal que $J_n \rightarrow_n J$ y u_n curvas J_n -holomorfas satisfaciendo nuestra propiedad geométrica. Si la propiedad que nos interesa fuera preservada, por ejemplo tomando límites C^0 entonces nos gustaría sacar una subsucesión convergente de $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ para obtener una J -curva satisfaciendo la propiedad deseada.

Ejemplos 1. Para ser conscientes de que tipo de resultados buscar, veamos un par de casos donde no obtenemos la compacidad deseada.

1. Los espacios de moduli $\mathcal{M}^*(A, S^2; J)$ son en general no compactos, el problema es que $\text{Aut}(S^2) = \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ no es compacto. Tomemos $u \in \mathcal{M}^*(A, S^2; J)$ y $\phi_n \in \text{Aut}(S^2)$ sin subsucesión convergente, entonces $u_n = u \circ \phi_n \in \mathcal{M}^*(A, \Sigma; J)$ y las únicas subsucesiones convergentes de estas curvas son funciones constantes, que no están en el moduli.
2. El ejemplo anterior muestra que la compacidad falla por una razón “interna”, que solo depende de la superficie de Riemann Σ . Ahora presentemos un ejemplo mas geométrico de por qué puede fallar la compacidad.

Consideremos la curva compleja:

$$C_\varepsilon := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2 : x_0x_1 = \varepsilon x_2^2\} = \mathcal{V}(x_0x_1 - \varepsilon x_2^2) \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2,$$

donde vamos a usar la notación de geometría algebraica $\mathcal{V}(P)$ para denotar al conjunto de puntos que anulan al polinomio homogéneo P . Esta es una curva holomorfa sin parametrización, una posible parametrización es:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \\ u_\varepsilon(x_0 : x_1) &= (\varepsilon x_0^2 : x_1^2 : x_0x_1). \end{aligned}$$

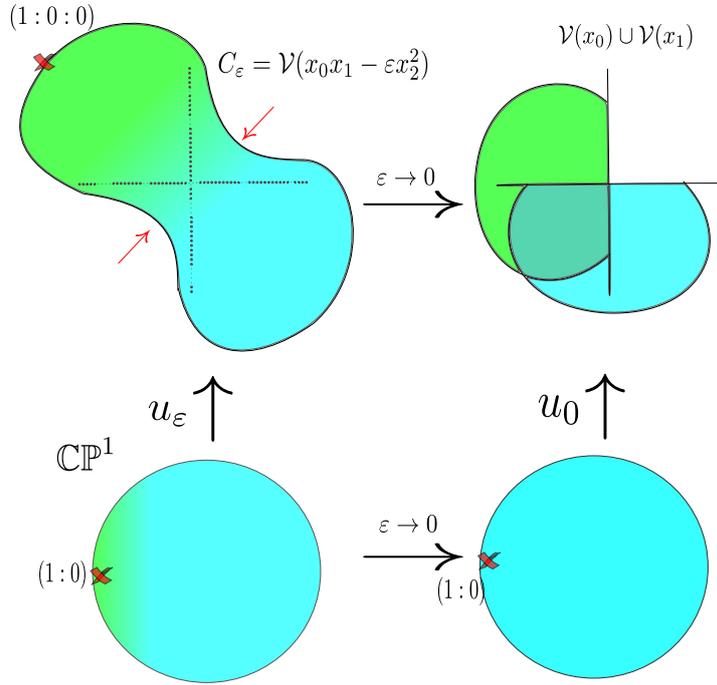
Se recomienda al lector mirar la figura 2 mientras se esta leyendo esta explicación. Notar que la curva no parametrizada C_ε cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ tiende a $\mathcal{V}(x_0) \cup \mathcal{V}(x_1)$, que son dos $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ que se cortan transversalmente en el punto $(0 : 0 : 1)$ (en la figura una burbuja esta arriba de otra). Sin embargo cuando vemos la parametrización, tenemos que $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ donde:

$$u_0 : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$$

$$u_0(x_0 : x_1) = (0 : x_1 : x_0).$$

La convergencia es uniforme en todos lados menos en el punto $(1 : 0)$, donde no esta definido el límite. El problema entonces fue la formación de una “burbuja” que la parametrización no puede ver, volveremos a este ejemplo más adelante.

Figura 2: Bosquejo del segundo ejemplo, el color representa a donde van los puntos.



El último ejemplo ya nos dice que no podemos esperar extraer subsucesiones que converjan, al menos en todo punto. Algo que nos puede dar esperanza son los resultados de regularidad que obtuvimos en la sección 3.1 para curvas pseudoholomorfas, en particular el corolario 3.2.1. Este decía que si tenemos una sucesión de curvas J_n -holomorfas definidas en una carta, digamos $u_n : D \subset \mathbb{C} \rightarrow M$ donde $J_n \rightarrow_n J$ y la sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ esta acotada en la norma $W^{1,p}$, entonces existe una subsucesión convergente C^∞ (si las estructuras son suaves). Un corolario sencillo de esto es:

Proposición 5.1. *Sea $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de estructuras casi complejas tal que $J_n \rightarrow_n J$ (en la topología C_{loc}^∞) y $u_n : \Sigma \rightarrow M$ una sucesión de curvas J_n -holomorfas tal que:*

$$\|du_n\|_{C^0} \leq K,$$

donde la norma de du_n esta determinada por g_J y μ . Entonces $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente C^∞ a $u : \Sigma \rightarrow M$ curva J -holomorfa.

Demostración. Por el Teorema de Arzela-Ascoli tenemos que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente C^0 , supongamos que a $u : \Sigma \rightarrow M$. Cubramos a Σ y a $u(\Sigma)$ con una cantidad finita de entornos coordenados, en estos entornos vale el corolario 3.2.1. Entonces en cada carta vamos a tener una subsucesión que va a converger a un límite en la topología C^∞ , este límite es continuo por lo tanto debe coincidir con u . Tomando una subsucesión diagonal a todas las cartas obtenemos lo deseado. \square

Notar que entonces los problemas para extraer subsucesiones surgen porque $\{du_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no están equiacotados. La idea ahora es buscar estimativas para du (con u pseudoholomorfa) para controlar el crecimiento del diferencial y aplicar la proposición anterior.

Teorema 5.2 (Desigualdad de valor medio). *Existe $\delta > 0$ tal que si $u : D_r \subset \mathbb{C} \rightarrow M$ es pseudoholomorfa y $\int_{D_r} \|du\|^2 dx dy \leq \delta$ entonces:*

$$\|du(0)\|^2 \leq \frac{8}{\pi r^2} \int_{D_r} \|du\|^2 dx dy.$$

Bosquejo. No vamos a hacer la prueba completa, primero porque es algo técnica y segundo para que se pueda ver la generalidad de la misma. La misma prueba funciona para conexiones de Yang-Mills o curvas pseudoholomorfas con borde, vease [Weh04].

Observación. Si ∇ es una conexión en un fibrado $E \rightarrow M$, esta induce una derivada covariante $d^\nabla : \Omega^p(M, E) \rightarrow \Omega^{p+1}(M, E)$ definida como:

$$d^\nabla(\alpha \otimes \xi) = d\alpha \otimes \xi + (-1)^q \alpha \wedge \nabla \xi.$$

En particular cuando $p = 0$ este es simplemente la conexión, esto es lo mismo que hicimos para definir los operadores $\bar{\partial}_E$ cuando E era un fibrado holomorfo. Para ganar intuición de por qué nos importa este operador, sea $E = TM$ y tomemos un mapa $u : \Sigma \rightarrow M$ donde Σ es una superficie de Riemann, calculemos $d^\nabla du$ en coordenadas:

$$-d^\nabla du = dx \wedge \nabla \partial_x u + dy \wedge \nabla \partial_y u$$

Desarrollando esta expresión:

$$\begin{aligned} d^\nabla du &= dx \wedge dy (\nabla_y \partial_x u - \nabla_x \partial_y u) \\ &\Rightarrow d^\nabla du = u^* T, \end{aligned}$$

donde $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ es el tensor de torsión. Por lo tanto T es de alguna manera nos mide que tanto se aleja d^∇ de formar un complejo de cadenas.

En particular sea ∇ una conexión hermitiana en M tal que la torsión no tiene componente $(1, 1)$ entonces como $du(T\Sigma) \subset TM$ son líneas complejas:

$$d^\nabla du = 0.$$

Analogamente usando dualidad de Hodge obtenemos que:

$$(d^\nabla)^* du = 0.$$

Por lo tanto la forma du es armónica para esta conexión cuando u es pseudoholomorfa, por la fórmula de Weitzenböck obtenemos:

$$0 = \nabla^* \nabla du + du \circ Ricc + K^{u^*TM}(du)$$

Por lo tanto denotando $e(u) = \langle du, du \rangle$ obtenemos:

□

Observación. Sea $u : \Sigma \rightarrow M$ pseudoholomorfa, tomando cartas y comparando la métrica g_J con la estándar obtenemos que $\exists \delta > 0$ tal que si $\int_{D_r} \|du\|^2 dx dy \leq \delta$ entonces vale la desigualdad para alguna constante $C > 0$ que depende de la métrica g_J .

Corolario 5.2.1 (Cuantización de energía). *Existe $K > 0$ tal que si u es pseudoholomorfa con $E(u) \leq K$ entonces u es constante.*

Demostración. Como Σ es compacta, deducimos del Teorema anterior que existe $C > 0$ tal que $\|du\|_{C^0}^2 \leq CE(u)$ para todas las curvas pseudoholomorfas (tomando un cubrimiento finito de entornos coordenados). Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ una curva, estimemos la longitud de $u \circ \gamma$:

$$\begin{aligned} l(u \circ \gamma) &= \int_0^1 \|d_{\gamma(t)} u(\dot{\gamma}(t))\| dt \leq \int_0^1 \|d_{\gamma(t)} u\| \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\ &= \leq \sup_{z \in \Sigma} \|d_z u\| l(\gamma) \leq (CE(u))^{\frac{1}{2}} l(\gamma). \end{aligned}$$

Por lo tanto si $E(u)$ es suficientemente pequeño, $u(\Sigma)$ está contenida dentro de una bola geodésica en M y por lo tanto $u_*[\Sigma]$ es trivial.

□

Vamos a llamar a $\hbar = \sup\{K > 0 : E(u) \leq K \implies u = \text{const}, \bar{\partial}_J u = 0\}$.

Corolario 5.2.2. *Sean $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{J}(M, \omega)$ estructuras casi complejas con $J_n \rightarrow_n J \in \mathcal{J}(M, \omega)$. Existe $K > 0$ tal que si una sucesión $u_n : \Sigma \rightarrow M$ de curvas J_n -holomorfas satisface que $E(u_n) \leq K$ entonces existe una subsucesión convergente en la topología C^∞ a $u_\infty : \Sigma \rightarrow M$ curva J -holomorfa.*

Demostración. Notemos que como $J_n \rightarrow_n J$ en C^∞ entonces $g_{J_n} \rightarrow g_J$ en C^∞ , por lo tanto en la desigualdad del valor medio 5.2 podemos encontrar un δ independiente de J_n . Entonces si $K > 0$ es suficientemente pequeña tenemos una cota global $\|du_n\|_{C^0} \leq C'$, pero por la proposición 5.1 tenemos lo deseado.

□

A partir de ahora, vamos a asumir que $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{J}(M, \omega)$ es tal que $J_n \rightarrow_n J \in \mathcal{J}(M, \omega)$ (en la topología C_{loc}^∞). Podemos refinar un poco el corolario anterior para obtener:

Proposición 5.3. *Sean $u_n : \Sigma \rightarrow M$ curvas J_n -holomorfas tal que $E(u_n) \leq C$ para cierta constante $C > 0$, entonces existen $\{x_1, \dots, x_l\} \subset \Sigma$ y una subsucesión de $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergiendo C_{loc}^∞ en $\Sigma \setminus \{x_1, \dots, x_l\}$ a $u_\infty : \Sigma \setminus \{x_1, \dots, x_l\} \rightarrow M$ J -holomorfa.*

Demostración. Triangulemos Σ y engordemos un poco la triangulación para obtener un cubrimiento $\{V_i^0\}_{i \in I_0}$ (I_0 es un conjunto finito porque Σ es compacta). Subdividiendo baricéntricamente n veces y engordando obtenemos cubrimientos $\{V_i^n\}_{i \in I_n}$ (vease 3) tal que:

1. $\sup_{i \in I_n} \text{diam} V_i^n \rightarrow_n 0$.
2. $V_{i_1}^n \cap V_{i_2}^n \cap V_{i_3}^n \cap V_{i_4}^n = \emptyset$ donde $i_j \neq i_k$.

Sea $K > 0$ como en la proposición anterior entonces veamos que podemos estimar globalmente $\#J_{n,k}$ donde $J_{n,k} = \{i \in I_n : \int_{V_i^n} u_k^* \omega \geq K\}$. Estos son los “conjuntos malos”, notemos que:

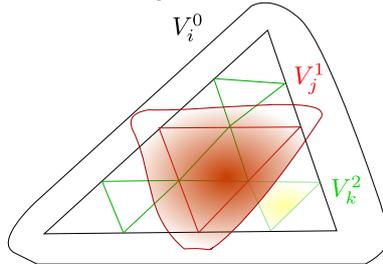
$$\#J_{n,k} K \leq \sum_{i \in J_{n,k}} \int_{V_i^n} u_k^* \omega \leq 3C$$

Por lo tanto tenemos que $\#J_{n,k}$ está acotado y es independiente de n, k . Supongamos que l es una cota superior entera y tomemos $\{x_{n,k}^1, \dots, x_{n,k}^l\}$ elementos en cada uno de los V_i^n con $i \in J_{n,k}$, si hay menos de l rellenamos con elementos cualesquiera de Σ . Como Σ es compacta a menos de tomar subsucesiones de $\{u_k\}$ y $\{V_i^n\}_{i \in I_n}$ supongamos que $x_{n,k}^i \rightarrow x^i$ para cierto $x^i \in \Sigma$.

Ahora si tomamos K_N un compacto en $\Sigma \setminus \{x_1, \dots, x_l\}$ como los diámetros de los cubrimientos van a 0, para un n, k grande tenemos que K_N intersecta solo abiertos tal que $\int_{V_i^n} u_k^* \omega \leq K$, por lo tanto podemos asumir que en K_N tenemos una subsucesión de u_k convergente C^∞ . Haciendo esto para compactos con $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_N = \Sigma \setminus \{x_1, \dots, x_l\}$ tenemos lo deseado tomando la subsucesión diagonal a todas las anteriores. □

Una pregunta natural ahora es si es posible extender ese límite a todo Σ . La respuesta es que si:

Figura 3: Las triangulaciones descritas arriba



Teorema 5.4 (Singularidad evitable). *Sea $D^* = D \setminus \{0\}$ y $u : D^* \rightarrow \Sigma$ una curva J -holomorfa con $\int_{D^*} u^* \omega < +\infty$ entonces existe una extensión a una curva J -holomorfa en el disco D .*

Demostración. La idea es conseguir cotas para el diferencial cerca del 0, así vamos a conseguir que u es Hölder y por lo tanto la podemos extender continuamente. Que esta extensión es pseudoholomorfa lo veremos más adelante.

La hipótesis nos dice que $a(r) = \int_{D_r} \|du\|^2 dx dy$ cumple que $a(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$. Tomemos un $r < \delta$ donde δ es como en el teorema de valor medio 5.2. Entonces si $|z| \leq \frac{\delta}{2}$ tenemos que:

$$\|du(z)\|^2 \leq \frac{8}{\pi(\frac{|z|}{2})^2} \int_{D(z, \frac{|z|}{2})} \|du(x+iy)\| dx dy \leq \frac{C}{|z|^2} a(2|z|), \quad (8)$$

donde usamos $D(z, \frac{|z|}{2}) \subset D(0, 2|z|)$. Usemos esto para estimar $l(r) = \int_0^{2\pi} \|du(re^{i\theta})\| d\theta$ que es la longitud de la curva cerrada $\gamma_r(e^{i\theta}) = u(re^{i\theta})$, por la desigualdad:

$$l(r) \leq 2\pi \sqrt{Ca(2r)},$$

en particular tenemos que $l(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$. En la figura 4 se puede ver un bosquejo de lo que esta sucediendo, el peor caso posible es que la parte fina acumule.

Tratemos de acotar $a(r)$ (para así acotar $\|du(z)\|$), supongamos que r es pequeño para que $l(r')$ sea menor que el radio de inyectividad de la variedad $M \forall r' : 0 < r' \leq r$.

Observar que en estas condiciones γ_r y $\gamma_{r'}$ tienen bien definida la acción simpléctica (vease 2.3). Esto significa que si v_{γ_r} es una extensión de γ_r al disco, la cantidad $A(\gamma_r) = \int_D v_{\gamma_r}^* \omega$ es independiente de la extensión elegida. Definamos $v : S^2 \rightarrow M$ como:

$$v(z) = \begin{cases} v_{\gamma_{r'}}(\frac{1}{r'}z), & z \in D(0, r') \\ u(re^{i\theta}), & z \in A(r, r') \\ v_{\gamma_r}(r\frac{1}{z}), & z \in D(0, r)^c, \end{cases}$$

donde $A(r, r') = D_r \setminus D_{r'}$. Tenemos que v es el borde de una esfera S^3 homotópicamente nula y por lo tanto integrando $v^* \omega$ tenemos que:

$$E(u|_{A(r, r')}) + A(\gamma_r) + A(\gamma_{r'}) = 0.$$

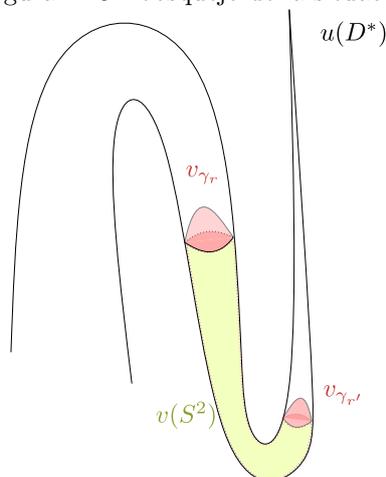
La desigualdad isoperimétrica (teorema 2.6) nos dice que cuando $r' \rightarrow 0$ tenemos que $A(\gamma_{r'}) \rightarrow 0$ y que $A(\gamma_r) \leq Cl(r)^2$. Entonces haciendo $r' \rightarrow 0$ en la igualdad anterior:

$$a(r) \leq C'l(r)^2.$$

Ahora si usamos Cauchy-Schwartz:

$$\begin{aligned} l(r)^2 &= \left(\int_0^{2\pi} \|du(re^{i\theta})\| r d\theta \right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^{2\pi} \|du(re^{i\theta})\|^2 d\theta \right) 2\pi r^2. \end{aligned}$$

Figura 4: Un bosquejo de la situación.



Pasando un r dentro de la integral:

$$l(r)^2 \leq 2\pi r \left(\int_0^{2\pi} \|du(re^{i\theta})\|^2 r d\theta \right).$$

Pero el lado derecho es justamente $4\pi r a'(r)$, por lo tanto:

$$a(r) \leq C' 4\pi r a'(r),$$

integrando esta expresión tenemos que $a(r') \leq a(r) \left(\frac{r'}{r}\right)^{2\alpha}$ donde $\alpha = \frac{1}{8\pi C'} > 0$.

Usando esta cota en la ecuación 8 tenemos que:

$$\|du(z)\| \leq \frac{C''}{|z|^{1-\alpha}},$$

con $\alpha > 0$, de esto deducimos dos cosas: la primera es que entonces u es uniformemente α -Hölder en un entorno de 0 por el teorema de valor medio, entonces la podemos extender continuamente. La segunda observación es que entonces $du \in L^p$ con $p < \frac{2}{1-\alpha}$ (y $\frac{2}{1-\alpha} > 2$) por lo tanto $u \in W^{1,p}$ en un entorno del 0, por los resultados de regularidad concluimos que u es C^∞ y por lo tanto pseudoholomorfa. □

Con esto concluimos entonces:

Corolario 5.4.1. *Sea $u_n : \Sigma \rightarrow M$ una sucesión de curvas J_n -holomorfas con $E(u_n) \leq C$ para cierta $C > 0$. Entonces existen $\{x_1, \dots, x_l\} \subset \Sigma$ tal que en $\Sigma \setminus \{x_1, \dots, x_l\}$, $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergiendo C_{loc}^∞ a $u_\infty : \Sigma \rightarrow M$ curva J -holomorfa.*

Ahora sabemos que a menos de finitos puntos, toda sucesión de curvas con energía acotada tiene una subsucesión convergente (C_{loc}^∞). ¿Podemos decir algo sobre el área de la curva límite? Volvamos al ejemplo 1 que vimos al comienzo,

aquí las curvas iniciales u_n tenían área $2\text{Vol}(S^2)$ (los mapas tienen grado 2) sin embargo el límite tiene área $\text{Vol}(S^2)$. ¿A donde se fue la energía perdida? Ciertamente lo que sea que pase sucede en los finitos puntos donde no tenemos convergencia (ya que las derivadas convergen uniformemente fuera de este conjunto).

Motivados por lo anterior, sean $u_n : \Sigma \rightarrow M$ curvas J_n -holomorfas. Notemos que cada u_n define una medida ν_n en Σ vía la forma $u_n^*\omega$. Las medidas en un espacio compacto, son un conjunto compacto (con la topología w^* , por Banach-Alaoglu) por lo tanto a menos de tomar una subsucesión de u_n tenemos que $\nu_n \rightarrow_n \nu$ una medida y que $u_n \rightarrow_n u_\infty \in C^\infty$ salvo en finitos puntos (por el teorema anterior).

Tomemos $z \in \Sigma$ y definamos:

$$m(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_\varepsilon(z)} u_n^*\omega,$$

donde $D_\varepsilon(z)$ es una bola geodésica centrada en z . Denotemos por C al conjunto de puntos a los que $u_n \not\rightarrow_n u_\infty$ minimal. Observemos entonces que si $z \notin C$ entonces $m(z) = 0$ por convergencia uniforme a u_∞ .

El enunciado que nos completa el panorama de que pasa con la compacidad de las curvas pseudoholomorfas es:

Teorema 5.5 (Compacidad débil). *Sean $u_n : \Sigma \rightarrow M$ curvas J_n -holomorfas con $E(u_n) \leq C$ para cierta $C > 0$, tales que sus medidas asociadas ν_n convergen a cierta ν (en la topología débil) y $u_n \rightarrow_n u_\infty$ una curva J -holomorfa donde la convergencia es uniforme en compactos salvo en finitos puntos C . Entonces usando las notaciones anteriores tenemos:*

1. Si $z \in C$ entonces $m(z) \geq \hbar$.
2. $\nu = \nu_\infty + \sum_{z \in C} m(z)\delta_z$, donde ν_∞ es la medida asociada a u_∞ .

Demostración. 1. Tomemos entornos coordenados alrededor de $z_i \in C$ disjuntos. En estos $\|du_n\|$ no está equiacotado ya que sino $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tendría subsucesión convergente por lo dicho anteriormente. Tomando cartas centradas en estos puntos tenemos $u_n : D_\varepsilon \subset \mathbb{C} \rightarrow M$ curvas J -holomorfas y $z_n \rightarrow_n 0$ una sucesión tal que $\|du_n(z_n)\| \rightarrow_n \infty$. La idea es reparametrizar inteligentemente la curva, para obtener una sucesión de curvas con energía acotada. Esto requiere cierta astucia, más precisamente usaremos:

Lema 5.6 (Hofer). *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función continua. Fijemos $\delta > 0$ y $x \in X$, entonces existe ε con $\delta \geq \varepsilon > 0$ y $\xi \in B_\varepsilon(x)$ tal que:*

$$\sup_{B_\varepsilon(\xi)} f \leq 2f(\xi), \quad \varepsilon f(\xi) \geq \delta f(x).$$

Este lema se llama a veces el lema del “submáximo” ya que nos dice que en cualquier entorno $B_\delta(x)$ de un $x \in X$ podemos encontrar un elemento $\xi \in X$ que “casi” mayor a todos los de cierto entorno $B_\varepsilon(\xi)$ (de hecho se puede cambiar el 2 de la desigualdad por cualquier $c > 1$), además ε depende del tamaño del cociente $\frac{f(x)}{f(\xi)}$ y claramente de δ .

Probemos el lema luego, veamos como nos puede servir en nuestro contexto (a menos de restringirnos a un disco compacto) con la función $f_n(z) = \|du_n(z)\|$, el punto es z_n y el $\delta_n = \frac{1}{\|du_n(z_n)\|^{\frac{1}{2}}}$. Usando el lema obtenemos sucesiones $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D_\varepsilon$ y $\delta_n \geq \varepsilon_n > 0$, donde $\xi_n \rightarrow 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ y:

$$\sup_{B_{\varepsilon_n}(\xi_n)} \|du(z)\| \leq 2\|du(z_n)\|, \quad \varepsilon_n \|du(z_n)\| \rightarrow_n \infty.$$

Consideremos la reparametrización:

$$v_n(z) = u_n\left(\xi_n + \frac{z}{C_n}\right),$$

donde $C_n = \|du_n(z_n)\|$. Observemos que v_n está bien definida en $D_{\varepsilon_n C_n}$, $\|dv_n\|_{L^\infty(D_{\varepsilon_n C_n})} \leq 2$ y $\|dv_n(0)\| \geq 1$.

Concluimos por la equiacotación de los gradientes que a partir de un n , v_n tiene subsucesión convergente en $D_{\varepsilon_n C_n}$. Pero como $\varepsilon_n C_n \rightarrow_n \infty$, si tomamos una subsucesión diagonal obtenemos que $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergiendo C^∞ en compactos a $v : \mathbb{C} \rightarrow M$ una curva J -holomorfa. Además v no es constante ya que $\|dv(0)\| \geq 1$ y por lo tanto tiene cierta energía $E(v) \geq \hbar$. Pero entonces tomando $v(\frac{1}{z})$ obtenemos una curva pseudoholomorfa con dominio $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y energía finita, por el teorema de la singularidad evitable esta se extiende a $v : S^2 \rightarrow M$ J -holomorfo (y $E(v) \geq \hbar$).

En particular si $\lambda \in (0, 1)$ entonces existe un R grande tal que:

$$\begin{aligned} \lambda \hbar &< \int_{D_R} v^* \omega = \lim_n \int_{D_R} v_n^* \omega \\ &< \lim_n \int_{D_{\frac{R}{\delta_n}}(z_n)} u_n^* \omega \leq \lim_n \int_{D_\varepsilon} u_n^* \omega \end{aligned}$$

Como esto vale $\forall \lambda \in (0, 1)$ obtenemos que:

$$\hbar \leq \int_{D_\varepsilon} u_n^* \omega$$

En particular haciendo $\varepsilon \mapsto 0$ obtenemos lo deseado.

2. Tomemos $B_\varepsilon(z_i)$ con $z_i \in C$ bolas geodésicas disjuntas y denotamos a $E(u, K) = \int_K u^* \omega$ para u pseudoholomorfa entonces:

$$\begin{aligned} E(u_\infty, \Sigma \setminus \bigcup_{i=1}^l B_\varepsilon(z_i)) &= \lim_n E(u_n, \Sigma \setminus \bigcup_{i=1}^l B_\varepsilon(z_i)) \\ &= \lim_n E(u_n, \Sigma) - \sum_{i=1}^l E(u_n, B_\varepsilon(z_i)) \end{aligned}$$

Y notemos que $\lim_n E(u_n, \Sigma) = E(u_\infty, \Sigma)$. Haciendo $\varepsilon \mapsto 0$ tenemos lo deseado.

□

6 Aplicaciones

6.1 El teorema de "Non-squeezing"

El objetivo de esta sección es probar el famoso teorema de Gromov:

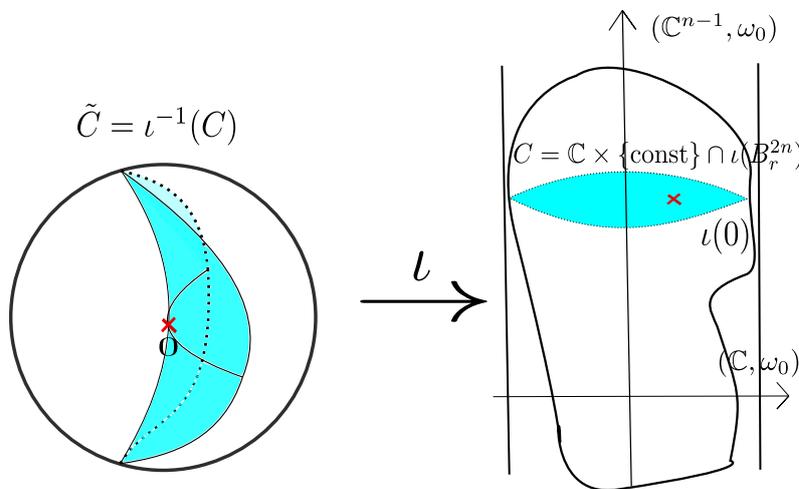
Teorema 6.1 (Non-squeezing). *Supongamos que $\iota : B_r^{2n} \rightarrow D_R \times \mathbb{C}^{n-1}$ es un encaje simpléctico respecto a las formas simplécticas estandar, entonces $r \leq R$.*

Antes que nada, veamos como aparecen las curvas pseudoholomorfas en esta situación. Supongamos que $\iota(0) \in \mathbb{C} \times \{\text{const}\}$ (vease la figura 5), entonces $C = \mathbb{C} \times \{\text{const}\} \cap \iota(B_r^{2n})$ es una subvariedad de $D_R \times \mathbb{C}^{n-1}$ tal que:

- Es simpléctica.
- $\text{área}(C) \leq \pi R^2$.
- C es mínima para la métrica usual g_0 (simplemente porque esta contenida en un plano).

Esto nos dice que $\iota^{-1}(C) = \tilde{C} \subset B_r^{2n}$ es una superficie pasando por cero que tiene la misma área que C ($\leq \pi R^2$) y es mínima según la métrica ι^*g_0 (lo cual puede no decirnos nada).

Figura 5: Bosquejo de la situación.



La idea de Gromov es sutil y se basa en la observación hecha al comienzo del capítulo 3 que nos decía que las subvariedades simplécticas eran lo mismo que las curvas J -holomorfas para cierta J -estructura compatible con la simpléctica. Gracias a esta observación, supongamos por un momento que existe $C \subset D_R \times \mathbb{C}^{n-1}$ una superficie (posiblemente abierta) pasando por $\iota(0)$ tal que:

- Es J -holomorfa para cierta J estructura compatible con ω_0 .

- $\text{área}(C) \leq \pi R^2$ respecto a la métrica g_J determinada por J y ω .

Entonces $\iota^{-1}(C) = \tilde{C} \subset B_r^{2n}$ es una curva ι^*J -holomorfa pasando por 0 con la misma área que C . Pero el espacio de J -estructuras compatibles con la forma simpléctica estandar es muy flexible (en el sentido de que es fácil construirlas), en particular veremos que es posible construir una J -estructura en $D_R \times \mathbb{C}^{n-1}$ tal que $\iota^*J = J_0$ la estructura estandar. Esto implica que \tilde{C} es una curva *holomorfa* pasando por 0, entonces por el principio de monotonía (teorema 2.28) obtenemos que:

$$\pi r^2 \leq \text{área}(\tilde{C}) = \text{área}(C) \leq \pi R^2,$$

que implica lo deseado. Gracias a esto reducimos la demostración del teorema a probar la existencia de curvas pseudoholomorfas con área prefijada. El problema que tenemos ahora es que las curvas mencionadas anteriormente son abiertas, si pudieramos modificar este problema a uno donde las mismas fueran compactas, entonces la existencia de curvas con área prefijada es equivalente a la existencia de curvas en cierta clase de homología (por la identidad de energía, vease 3.3). Esto es lo que haremos para rematar la idea.

Observación. Para probar el teorema podemos asumir sin pérdida de generalidad que ι se extiende diferenciablemente a $\overline{B_r^{2n}}$ con imagen compacta en $D_R \times \mathbb{C}^{n-1}$. Esto es porque $\forall \varepsilon > 0$ podemos restringir ι a $\overline{B_{r-\varepsilon}^{2n}}$, probar el teorema en este caso nos dice que $r - \varepsilon \leq R \forall \varepsilon > 0$, y esto prueba la desigualdad deseada.

Casi demostración. Usando la observación anterior, sin pérdida de generalidad suponemos que $\iota(B_r^{2n})$ tiene clausura compacta en $D_R \times \mathbb{C}^{n-1}$, en particular está contenido en $D_{R-\delta} \times [-N, N]^{2n-2}$ para algún N grande y $\delta > 0$.

Sea $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / k\mathbb{Z}^n$, $k \in \mathbb{Z}$ el toro usual, tenemos el encaje $[-N, N]^{2n-2} \hookrightarrow \mathbb{T}^{2n-2}$ simplécticamente, donde la estructura simpléctica en el toro es la que baja naturalmente al cociente. También podemos encajar simplécticamente $D_{R-\delta} \hookrightarrow S^2$ donde S^2 tiene una forma de área σ con $\int_{S^2} \sigma = \pi R^2$.

Por lo tanto a menos de componer por un encaje simpléctico $\phi : D_R \times [-N, N]^{2n-2} \rightarrow S^2 \times \mathbb{T}^{2n-2}$, podemos suponer que tenemos el encaje $\iota : B_r^{2n} \hookrightarrow S^2 \times \mathbb{T}^{2n-2}$, donde este último tiene la estructura simpléctica $\sigma \oplus \omega_0$.

Tenemos ahora el abierto $\iota(B_r^{2n}) \subset S^2 \times \mathbb{T}^{2n-2}$, aquí podemos definir la estructura compleja $J := \iota_* J_0$. Esta estructura es compatible con $\sigma \oplus \omega_0$ porque ι es un simplectomorfismo. Podemos extender J a una estructura compatible en todo $S^2 \times \mathbb{T}^{2n-2}$ usando funciones chichón (J es simplemente una sección de un fibrado).

Notemos que $\pi_2(S^2 \times \mathbb{T}^{2n-2}) \cong \mathbb{Z}$ y está generado por la clase de homotopía de $S^2 \times \{pt\}$. Esto nos dice que el área de una curva J -holomorfa puede ser solamente un múltiplo del área de la esfera por la siguiente cuenta: sea $u = (u^{S^2}, u^{\mathbb{T}^{2n-2}}) : S^2 \rightarrow S^2 \times \mathbb{T}^{2n-2}$ una curva pseudoholomorfa, entonces:

$$E(u) = \langle \sigma \oplus \omega_0, u_*[S^2] \rangle = \langle \sigma, u_*^{S^2}[S^2] \rangle + \langle \omega_0, u_*^{\mathbb{T}^{2n-2}}[S^2] \rangle = \langle \sigma, u_*^{S^2}[S^2] \rangle,$$

donde la última igualdad es porque $\pi_2(\mathbb{T}^{2n-2}) = 0$. Entonces concluimos que $E(u) = \pi k R^2$, donde $k = \deg u^{S^2}$.

En particular si existiese $u : S^2 \rightarrow S^2 \times \mathbb{T}^{2n-2}$ con clase de homología $u_*[\Sigma] = [S^2 \times \{pt\}]$ entonces $\text{área}(u(S^2)) = \pi R^2$ y:

$$\text{área}(u(S^2)) \geq \text{área}(u(S^2) \cap \iota(B_r^{2n})) = \text{área}(\iota^{-1}(u(S^2) \cap \iota)) \geq \pi r^2,$$

donde la última desigualdad es por el principio de monotonía, ya que $\iota^{-1}(u(S^2) \cap \iota(B_r^{2n}))$ es una curva holomorfa pasando por 0 por la elección de J . \square

Lo único que nos falta probar es la existencia de la curva $u : S^2 \rightarrow S^2 \times \mathbb{T}^{2n-2}$ con $u_*[S^2] = [S^2 \times \{pt\}]$. Vamos a probar algo mucho más fuerte:

Teorema 6.2. *Sea (W, ω) una variedad simpléctica tal que $\langle \omega, \pi_2(W) \rangle = 0$ y tomemos $S^2 \times W$ con la forma simpléctica $\omega_0 = \sigma \oplus \omega$, donde σ una forma de área en S^2 . Entonces dada $J \in \mathcal{J}(M, \omega_0)$ y $z \in S^2$ el mapa:*

$$\begin{aligned} ev_z : \mathcal{M}([S^2 \times \{pt\}], S^2; J) &\rightarrow S^2 \times W \\ ev_z(u) &= u(z), \end{aligned}$$

es sobreyectivo.

Es decir que por cada punto pasa una curva J -holomorfa con clase de homología $[S^2 \times \{pt\}]$ como queríamos, lo cual termina la prueba del teorema.

En lo que queda de esta sección vamos a probar este resultado. Este teorema no es cierto en general para cualquier variedad simpléctica, la prueba se basa fuertemente en que tenemos una familia de J -estructuras en M que son automáticamente regulares. Una vez que tenemos esto el resto del argumento es esencialmente: por cobordismo extender el resultado para el resto de las estructuras regulares y luego usar la densidad de estas últimas en el espacio $\mathcal{J}(M, \omega_0)$ para concluir el caso general.

Proposición 6.3. *Sea $J^W \in \mathcal{J}(W, \omega)$ y definamos $J_0 = j^{S^2} \oplus J^W$ donde j^{S^2} es la estructura compleja de S^2 . Entonces esta estructura es regular para la clase $[S^2 \times \{pt\}]$ y cumple con el teorema.*

Demostración. Si tenemos $u = (u^{S^2}, u^W) : S^2 \rightarrow S^2 \times W$ entonces u^{S^2} y u^W son holomorfa y J^W -holomorfa respectivamente. Pero entonces como $\pi_2(W) = 0$ tenemos $E(u^W) = 0$ y por lo tanto $u^W = \text{const}$, por otro lado como u^{S^2} tiene grado 1 (por la elección de la clase de homología) los posibles u^{S^2} son cualquier elemento de $\text{Aut}(S^2) = PGL(2, \mathbb{C})$. Concluimos entonces que tenemos un difeomorfismo natural $\mathcal{M}([S^2 \times \{pt\}], S^2; J_0) \cong PGL(2, \mathbb{C}) \times W$ (es sencillo ver que las topologías mediante esta identificación coinciden). Esto una variedad de dimensión $6 + \dim W$. Por otro lado observemos que:

$$n\chi(S^2) + 2c_1(u^*T(S^2 \times W)) = 2n + 2c_1(TS^2) = 2n + 4$$

Que como $\dim W = 2n - 2$ tenemos que es justamente la dimensión del moduli. Por lo tanto J_0 es regular en el sentido de la sección 4.

Notar que entonces el mapa evaluación es sobreyectivo porque dado $(w, p) \in S^2 \times W$ basta tomar un automorfismo ϕ llevando z a cualquier $w \in S^2$ y entonces tomando la curva $\phi \times \{p\}$ terminamos. \square

Entonces el segundo paso según el plan anterior es:

Proposición 6.4. *Sea $J \in \mathcal{J}_{reg}([S^2 \times \{pt\}], S^2)$, entonces el mapa evaluación:*

$$ev_z : \mathcal{M}([S^2 \times \{pt\}], S^2; J) \rightarrow S^2 \times W$$

Es sobreyectivo

Demostración. Denotemos $J = J_1$ entonces usando el teorema 4.9 existe $\gamma \in \mathcal{J}_{reg}(J_0, J_1)$ un camino regular tal que $\mathcal{W}([S^2 \times \{pt\}], S^2; \gamma)$ es una variedad diferenciable con borde $\partial\mathcal{W}([S^2 \times \{pt\}], S^2; \gamma) = \mathcal{M}([S^2 \times \{pt\}], S^2; J_1) \cup \mathcal{M}([S^2 \times \{pt\}], S^2; J_0)$.

Si pudiéramos probar que $\mathcal{W}([S^2 \times \{pt\}], S^2; \gamma)$ es compacta probamos la proposición porque entonces como ev_z en el moduli de J_0 es sobreyectiva, tiene grado (mod \mathbb{Z}_2) no nulo y por ser cobordantes entonces ev_z en el moduli de J_1 también tiene grado no nulo y por lo tanto es sobreyectiva.

Por lo tanto resta probar la compacidad del espacio $\mathcal{W}([S^2 \times \{pt\}], S^2; \gamma)$, es difícil porque $Aut(S^2)$ no es compacto, entonces podríamos terminar fácilmente con curvas convergiendo a un punto. Para controlar la falta de compacidad de este grupo tenemos que imponer obstrucciones en el moduli (recordemos que una transformación de Mobius queda únicamente determinada por sus valores en tres puntos).

Lema 6.5. *En las condiciones anteriores, fijemos una métrica en $S^2 \times W$ y $z_1, z_2, z_3 \in S^2$. Consideremos el espacio:*

$$\mathcal{M}_\delta([S^2 \times \{pt\}], \Sigma; \mathcal{J}) = \{(u, J) \in \mathcal{M}([S^2 \times \{pt\}], \Sigma; \mathcal{J}) : d(u(z_i), u(z_j)) \geq \delta, \forall i, j\}$$

Donde $\mathcal{M}([S^2 \times \{pt\}], \Sigma; \mathcal{J})$ el espacio de moduli universal. Entonces la proyección $\pi : \mathcal{M}_\delta([S^2 \times \{pt\}], \Sigma; \mathcal{J}) \rightarrow \mathcal{J}(S^2 \times W, \omega_0)$ es propia.

Demostración. Supongamos que $\{J_i\}$ es una sucesión en $\mathcal{J}(S^2 \times W, \omega_0)$ convergente entonces queremos ver que (u_i, J_i) tiene una subsucesión convergente en la misma clase de homología. Notemos que por lo discutido anteriormente $E(u_k) = \hbar$ la energía de la mínima esfera pseudoholomorfa en $S^2 \times W$. Entonces por los resultados de compacidad probados en la sección 5 tenemos que existen puntos $\{z^1, \dots, z^l\} \subset S^2$ tal que fuera de estos $u_k \rightarrow u_\infty$ C_{loc}^∞ . Además tenemos:

$$E(u_\infty) + \sum_{i=1}^l m(z^i) = \hbar$$

Y por lo probado anteriormente $m(z^i) \geq \hbar \forall i$ y por lo tanto $l \leq 1$. Esto quiere decir que en al menos dos de los z_1, z_2, z_3 tenemos convergencia uniforme usual, pero entonces u_∞ no es constante y por lo tanto $l = 0$. □

Probemos que $\mathcal{W}([S^2 \times \{pt\}], S^2; \gamma)$ es una variedad compacta. Tomemos $z_2, z_3 \in S^2$ y denotemos como $z_1 = z$ el punto donde estamos evaluando los moduli. Tomemos las inclusiones $j_i : \{z_i\} \times W \hookrightarrow S^2 \times W$, notemos que tenemos el mapa de evaluación:

$$\begin{aligned} ev_{z_1} : \mathcal{W}([S^2 \times \{pt\}], S^2; \gamma) &\rightarrow S^2 \times W \\ ev_{z_1}(t, u) &= u(z_1) \end{aligned}$$

Entonces usando el Teorema de transversalidad, a menos de perturbar C^1 a j_i tenemos que estas son transversales a ev_{z_1} y por lo tanto:

$$\tilde{\mathcal{W}}([S^2 \times \{pt\}], S^2; \gamma) = \{(t, u) \in \mathcal{W}([S^2 \times \{pt\}], S^2; \gamma) : u(z_i) \in \{z_i\} \times W\}$$

Es una variedad diferenciable con borde $\tilde{\mathcal{M}}([S^2 \times \{pt\}], S^2; J_1) \cup \tilde{\mathcal{M}}([S^2 \times \{pt\}], S^2; J_0)$ donde cada uno de estos son las u donde se cumple la restricción como arriba. Además si las perturbaciones son suficientemente pequeñas se cumple que $d(u(z_i), u(z_j)) \geq \delta$ y por lo tanto $\tilde{\mathcal{W}}([S^2 \times \{pt\}], S^2; \gamma)$ es compacta por la proposición anterior y el argumento de cobordismo que dimos anteriormente nos dice que $ev_{z_1}^0 : \tilde{\mathcal{M}}([S^2 \times \{pt\}], S^2; J_0) \rightarrow \{z_1\} \times W$ es sobreyectiva y por lo tanto $ev_{z_1}^1$ también lo es.

Por último notemos que probamos que $ev_{z_1}^1$ es sobreyectiva en $\{z_1\} \times W$, pero para terminar el argumento de que es sobreyectiva basta precomponer con un automorfismo que nos lleve z_1 al deseado. □

Teorema. Ya probamos el teorema para las estructuras regulares. Para una $J \in \mathcal{J}(S^2 \times W, \omega_0)$ no necesariamente regular el Teorema es sencillo ya que simplemente tomemos $p \in S^2 \times W$ y fijemos $z_2, z_3 \in S^2$ entonces considerando el espacio de la demostración anterior $\pi : \mathcal{M}_\delta([S^2 \times \{pt\}], \Sigma; \mathcal{J}) \rightarrow \mathcal{J}(M, \omega)$ aproximemos a J por J_n regulares (que son densas). En cada moduli de las J_n existe u_n una curva J_n -holomorfa con $u_n(z_1) = p$, entonces como la proyección es propia tiene una subsucesión convergente a una u J -holomorfa con $u(z_1) = p$ como queríamos. □

6.2 Capacidades simplécticas y rigidez

Con todo lo que hicimos en la sección anterior vamos a ver que podemos encontrar invariantes globales para las variedades simplécticas. Un tipo de invariante global en la geometría simpléctica son lo que se llaman las capacidades.

Definición 6.1. Una capacidad simpléctica c asigna a cada (M, ω) variedad simpléctica de dimensión fija $2n$ (o una subclase de estas) un real positivo de forma que:

Monotonía Si existe $f : (M, \omega_M) \rightarrow (N, \omega_N)$ encaje simpléctico entonces $c(M, \omega_M) \leq c(N, \omega_N)$.

Conformalidad $c(M, \lambda\omega) = |\lambda|c(M, \omega)$.

Normalización $c(B^{2n}, \omega_0) = c(D \times \mathbb{C}^{n-1}, \omega_0) = \pi$.

Observación. En dimensión 2 tenemos que $|\int_M \omega|$ es una capacidad trivialmente, pero en dimensión más alta es mentira que $|\text{vol}(M)|^{\frac{1}{n}}$ donde vol es la medida de Liouville, es un invariante simpléctico (porque el volumen del cilindro es ∞). Esto se debe a que las capacidades son "invariantes de dimensión 2" como se puede ver en lo siguiente: supongamos $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ es un abierto entonces afirmo que $c(\lambda U, \omega_0) = \lambda^2 c(U, \omega_0)$ con $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Esto es sencillo ya que tenemos el mapa $\phi : \lambda U \rightarrow U$ que manda $x \mapsto \frac{1}{\lambda}x$ y esto cumple que $\phi^* \lambda^2 \omega_0 = \omega_0$ por lo tanto $\phi : (\lambda U, \omega_0) \rightarrow (U, \lambda^2 \omega_0)$ es un difeomorfismo simpléctico entonces basta usar la conformalidad.

Ejemplos. 1. Definamos el ancho de Gromov como:

$$D(M, \omega) = \sup\{\pi r^2 : \text{existe un encaje simpléctico } \phi : (B_r^{2n}, \omega_0) \rightarrow (M, \omega)\}$$

Es fácil ver que $D(M, \omega)$ satisface las dos primeras propiedades para ser una capacidad y la tercera es satisfecha justamente por el Non-Squeezing.

2. También podemos definir:

$$\hat{c}(M, \omega) = \inf\{\pi R^2 : \text{existe un encaje simpléctico } \psi : (M, \omega) \rightarrow (D_R \times \mathbb{C}^{n-1}, \omega_0)\}$$

Por las mismas razones que la anterior, \hat{c} es una capacidad.

Estas capacidades son importantes porque son la capacidad "más chica" y "más grande" respectivamente:

Lema 6.6. *Sea c una capacidad simpléctica entonces $D(M, \omega) \leq c(M, \omega) \leq \hat{c}(M, \omega)$.*

Demostración. Supongamos que existe $\phi : (B_r^{2n}, \omega_0) \rightarrow (M, \omega)$ un encaje simpléctico entonces por monotonía tenemos $c(B_r^{2n}, \omega_0) \leq c(M, \omega)$ pero por lo visto anteriormente $c(B_r^{2n}, \omega_0) = \pi r^2$ y entonces tomando supremos tenemos lo deseado. La otra desigualdad es idéntica. □

Comentario. Notar que probar la existencia de una capacidad es equivalente a probar el non-squeezing por lo tanto no es trivial encontrarlas. Una capacidad distinta a las dos encontradas anteriormente es la capacidad de Hofer y Zehnder, la referencia clásica acerca de esto es el libro [HZ94]. Esta se basa en ciertas propiedades sobre las órbitas periódicas para una clase especial de Hamiltonianos en M .

Ahora veamos como la sola existencia de una capacidad implica la rigidez C^0 de los simplectomorfismos.

Teorema 6.7 (Eliashberg, Gromov). *Supongamos que $f_k : (M, \omega_M) \rightarrow (N, \omega_N)$ difeomorfismos simplécticos tal que $f_k \rightarrow f \in \text{Diff}(M, N)$ donde la convergencia es en la topología C^0 , entonces f es un difeomorfismo simpléctico*

Tomando cartas de Darboux basta ver el enunciado más fuerte:

Proposición 6.8. Sean $f_k : B^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ con $f_k(0) = 0$, supongamos que $f_k \rightarrow f$ en la topología C^0 y que f es diferenciable en 0, entonces $d_0 f \in Sp(2n, \mathbb{R})$.

Para esto usemos el siguiente lema de álgebra lineal:

Lema 6.9. Supongamos que $L \in SL(2n, \mathbb{R})$ no es simpléctica ni antisimpléctica ($L^* \omega_0 = -\omega_0$) entonces existe un $S \in Sp(2n, \mathbb{R})$ y una base simpléctica $\{e_1, f_1, \dots, e_n, f_n\}$ tal que:

1. $L \circ S(e_1) = \lambda e_1$, $L \circ S(f_1) = \lambda f_1$ donde $|\lambda| < 1$.
2. $L \circ S$ deja el ortogonal simpléctico de $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}f_1$ invariante.

Veamos primero como el lema implica la proposición y por lo tanto el teorema

Demostración. Llamemos $T = [df_0]_C$ a la matriz Jacobiana. Primero veamos que $T \in SL(2n, \mathbb{R})$, notemos que como f_k preserva la medida de Lebesgue $\forall k$, f también la preserva por convergencia uniforme. Luego como $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m(f(B_\varepsilon^{2n}))}{m(B_\varepsilon^{2n})} = |\det T|$ (simplemente por Taylor) tenemos que $|\det T| = 1$. Supongamos entonces que T no es simpléctica ni antisimpléctica entonces podemos usar el lema.

Sea $P : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ el cambio de base de la canónica a la base simpléctica del lema, entonces a menos de hacer $P \circ (f \circ S) \circ P^{-1}$ donde S es como en el lema anterior, tenemos que:

$$T(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots)$$

Y por lo tanto $f \circ S(z) = Tz + o(|z|)$ lleva una bola B_ε^{2n} en $B_{\varepsilon'}^{2n}$ con $\varepsilon' < \varepsilon$ y por lo tanto lo mismo vale para f_k con k lo suficientemente grande lo cual es absurdo por el Teorema de Non-Squeezing (o la existencia de una capacidad).

Ahora veamos que si T debe ser simpléctica, sabemos que es simpléctica o antisimpléctica, pero haciendo el mismo argumento de antes para la sucesión $f_k \times Id$ tenemos que $T \oplus Id$ es simpléctica o antisimpléctica, es decir $(T \oplus Id)^* \omega_0 \oplus \omega_0 = \mu(\omega_0 \oplus \omega_0)$ con $\mu = \pm 1$, pero:

$$(T \oplus Id)^* \omega_0 \oplus \omega_0 = (\pm \omega_0) \oplus \omega_0$$

Y por lo tanto $\mu = 1$ y entonces T es simpléctica. □

7 Apéndices

7.1 Espacios de Sobolev

Esta sección tiene el contenido mínimo necesario para que el texto resulte autocontenido, para una buena introducción a los espacios de Sobolev junto a su uso en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales elípticas ver [GT98].

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto, vamos a usar la notación $\partial_I = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_N}\right)^{i_N}$ donde $I = (i_1, \dots, i_N)$ es un multiíndice, definamos como $|I| := \sum_{k=1}^N i_k$ al orden del multiíndice. Por $L^p(\Omega)$ denotamos las funciones medibles en L^p con valores reales.

Definición 7.1. Sea I un multiíndice y $f \in L^p(\Omega)$, decimos que $\partial_I f \in L^1_{loc}(\Omega)$ es la derivada I -ésima débil (o en el sentido de las distribuciones) si:

$$\int_{\Omega} f \partial_I \phi dx = (-1)^{|I|} \int_{\Omega} \partial_I f \phi dx, \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

donde $\mathcal{D}(\Omega)$ es el espacio de funciones C^∞ con soporte compacto en Ω .

Cuando la derivada débil existe está únicamente definida Lebesgue casi todo punto (ctp de ahora en más). En particular por el teorema de la divergencia si una función es C^k entonces sus derivadas débiles coinciden (por lo menos hasta orden k) con las usuales.

Definición 7.2. • Sea $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $p \in [1, \infty]$, definimos el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : \partial_I f \in L^p(\Omega) \forall I \text{ con } |I| \leq k\},$$

donde la derivada es en el sentido débil descrito anteriormente. A este espacio le vamos a poner la norma:

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|I| \leq k} \|\partial_I f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

En el caso $p = 2$ se le puede poner un producto interno de forma análoga.

- Definimos $f \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es medible y para todo abierto U de Ω con $\bar{U} \subset \Omega$ tenemos $f|_U \in W^{k,p}(U)$.
- Denotemos como $W_0^{k,p}(\Omega)$ a la clausura de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$.

Observación. 1. Podemos ver que $W^{k,p}(\Omega)$ es completo ya que ser de Cauchy en $W^{k,p}$ significa que todas las derivadas débiles hasta orden k de una sucesión son de Cauchy y por lo tanto cada una de estas tiene un candidato a límite por la completitud de L^p .

2. Podemos encajar $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega, \mathbb{R}^M)$ para M grande vía el mapa:

$$\begin{aligned} W^{k,p}(\Omega) &\rightarrow L^p(\Omega, \mathbb{R}^M) \\ f &\mapsto (f, \partial_{I_1} f, \dots, \partial_{I_M} f), \end{aligned}$$

donde ordenamos a los multiíndices de orden hasta k con el orden lexicográfico. La imagen de este mapa es un cerrado por el comentario anterior, en particular si $p \in (1, \infty)$ el espacio $L^p(\Omega, \mathbb{R}^M)$ es reflexivo y por lo tanto $W^{k,p}(\Omega)$ es isomorfo a un subespacio cerrado de un espacio reflexivo y por lo tanto es reflexivo.

Definición 7.3. Definamos el espacio de funciones α -Hölder de Ω como:

$$C^{0,\alpha}(\Omega) := \{f \in C^0(\Omega) : \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \infty\},$$

donde:

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} + \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

A $\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$ le llamamos la norma α -Hölder.

El primer teorema que vamos a presentar es el de encaje de Sobolev. Lo central en la prueba anterior es la siguiente desigualdad:

Teorema 7.1 (Desigualdad de Morrey). *Sea $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ y $p \in (N, \infty]$, entonces existe $C = C(p, N) > 0$ tal que:*

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)},$$

donde $\alpha = 1 - \frac{N}{p} (> 0)$.

Demostración.

Afirmación. Para $x \in \mathbb{R}^N$ tenemos la estimativa:

$$\int_{B(x,r)} |f(x+y) - f(x)| dy \leq \frac{r^N}{N} \int_{B(x,r)} \frac{|df(x+y)|}{|y-x|^{N-1}} dy.$$

Para probar esto notemos que si $y \in S^N$ y $s > 0$ entonces:

$$|f(x+sy) - f(x)| \leq \int_0^s |df(x+ty)| dt,$$

donde la norma es la del operador. Esto es simplemente usando el teorema de valor medio y que $y \in S^N$. Por lo tanto integrando en S^N obtenemos:

$$\int_{S^N} |f(x+sy) - f(x)| dS(y) \leq \int_0^s \int_{S^N} |df(x+ty)| dS(y) dt.$$

Si en la expresión de la derecha hacemos $|df(x+ty)| = |df(x+ty)|^{\frac{t^{N-1}}{t^{N-1}}}$ entonces podemos integrar en polares y concluimos:

$$\int_{S^N} |f(x+sy) - f(x)| dS(y) \leq \int_{B(x,s)} \frac{df(x+y)}{|x-y|^{N-1}} dy.$$

Entonces multiplicando por s^{N-1} e integrando de 0 a r obtenemos lo deseado. Una vez que tenemos esto tenemos que acotar primero el supremo de $|u|$ y luego los incrementos.

1. Notemos que:

$$|f(x)| \leq \frac{1}{m(B(x,r))} \left(\int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy + \int_{B(x,r)} |f(y)| dy \right).$$

Por un lado tenemos $\int_{B(x,r)} |f(y)| dy \leq C \|f\|_{L^p(B(x,r))}$ por la desigualdad de Hölder. Basta acotar entonces el primer término. Este está acotado por $C \int_{B(x,r)} \frac{|df(x+y)|}{|x-y|^{N-1}} dy$ usando la estimativa de la afirmación y nuevamente por la desigualdad de Hölder obtenemos:

$$\int_{B(x,r)} \frac{|df(x+y)|}{|x-y|^{N-1}} dy \leq \|df\|_{L^p(B(x,r))} \left(\int_{B(x,r)} \frac{1}{|y-x|^{(N-1)q}} dy \right)^q,$$

donde q es el exponente conjuado de p . Pero $\frac{1}{|y-x|^{(N-1)q}} \in L^1(B(x,r))$ si y solo si $(N-1)q < N$ y como $q = \frac{p}{p-1}$ despejando esto pasa cuando $p > N$. Concluimos que $\|f\|_{C^0(\mathbb{R}^N)} \leq C \|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$.

2. Tomemos $x, y \in \mathbb{R}^N$ y denotemos $r = |y-x|$, entonces si $U = D(x,r) \cap D(y,r)$ tenemos que:

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{m(U)} \left(\int_U |f(x) - f(z)| dz + \int_U |f(y) - f(z)| dz \right)$$

Pero notar que la estimativa que conseguimos para el primer factor en el item anterior nos sirve, además tenemos que:

$$\left(\int_{B(x,r)} \frac{1}{|z-x|^{(N-1)q}} dz \right) = c(r^{N-(N-1)\frac{p}{p-1}})^{\frac{p}{p-1}} = c|x-y|^{1-\frac{N}{p}}$$

Y tenemos lo deseado. □

Ahora supongamos que queremos el teorema para $f \in W^{1,p}(\Omega)$, algo natural que uno se puede preguntar es si hay alguna manera de extender una función de $W^{1,p}(\Omega)$ a una en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Esto no es trivial ya que si intentamos (por ejemplo) multiplicar por una característica entonces las derivadas débiles en el borde explotan. Con esta intuición podemos pensar que la respuesta al problema de extensión va a depender de $\partial\Omega$. El siguiente teorema se puede encontrar en [GT98, 7.25]

Teorema 7.2 (Extensión). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado con $\partial\Omega$ de clase $C^{k-1,1}$ con $k \geq 1$ entonces:*

1. Si denotamos a $C^\infty(\overline{\Omega})$ a las $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ que son C^∞ en un entorno de Ω , entonces $C^\infty(\overline{\Omega})$ es denso en $W^{k,p}(\Omega)$
2. Si Ω' es un abierto que contiene a la clausura de Ω entonces existe un operador lineal acotado $E : W^{k,p}(\Omega) \rightarrow W_0^{k,p}(\Omega')$ tal que $Eu = u$ en Ω .

Asumiendo este teorema tenemos:

Corolario 7.2.1. Sea $p \in (N, +\infty)$ y Ω un abierto de \mathbb{R}^N acotado con borde Lipschitz. Entonces tenemos que la inclusión $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ es lineal acotada y compacta.

Demostración. Veamos que f tiene un representante en $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, para esto tomemos una bola B que contenga a Ω y E un operador de extensión para este conjunto. Sea $\tilde{f} = Ef \in W_0^{1,p}(B)$, aproximemos \tilde{f} por una sucesión $\tilde{f}_n \in \mathcal{D}(B)$ y por el teorema de Morrey tenemos:

$$\|\tilde{f}_n - \tilde{f}_m\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\tilde{f}_n - \tilde{f}_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

Por lo tanto como la sucesión es de Cauchy, lo anterior nos dice que es de Cauchy con la norma Hölder pero entonces por Arzela Ascoli tiene subsucesión convergente a cierta \bar{f} . Pero \tilde{f} debe coincidir con el límite \bar{f} en casi todo punto, entonces \bar{f} es un representante en $C^0(\overline{\Omega})$ de f . Además tenemos que:

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

En particular por Arzela Ascoli tenemos que el mapa es compacto. □

Es inmediato de esto concluir el encaje compacto $W^{k+1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$ para $p \in (N, \infty]$.

Observación. Notar que las cotas son “sharp”, supongamos que en $B \subset \mathbb{R}^N$ la bola unitaria consideramos las funciones:

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\|x\|^\varepsilon},$$

donde $\varepsilon > 0$. Entonces tenemos que $|\nabla f_\varepsilon(x)| = O(\|x\|^{-\varepsilon-1})$ y por lo tanto $f_\varepsilon \in W^{1,p}(B)$ si y solo si $p(-1-\varepsilon) > -N$, es decir $\varepsilon < \frac{N}{p} - 1$. Esto solo puede suceder cuando $p \in (1, N)$. Acá conseguimos $f_\varepsilon \in W^{1,p}(B)$ con $p \in (1, N)$ tal que $f_\varepsilon \notin C^0(B)$. Para construir un ejemplo como los anteriores para $p = N$ es natural considerar:

$$f(x) = \log \|x\|,$$

ya que $|\nabla f(x)| = O(\frac{1}{\|x\|})$ y $\frac{1}{\|x\|}$ está “a punto de pertenecer a $L^N(B)$ ”. Resulta que alterando un poco esta función como:

$$f(x) = (\log \|x\|)^\alpha,$$

donde $\alpha \in (0, 1)$ nos dá un $f \in W^{1,N}(B)$ tal que $f \notin C^0(B)$.

De hecho la desigualdad de Morrey nos dá otro resultado importante:

Corolario 7.2.2. Sean $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, donde Ω es un abierto acotado de borde Lipschitz y $p \in (N, +\infty)$. Entonces tenemos que la inclusión $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es compacta.

Demostración. Como tenemos la inclusión $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ es compacta, por otro lado la inclusión $C^0(\bar{\Omega}) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es continua (como U es acotado la convergencia C^0 implica la convergencia L^p). Por lo tanto la composición de ambos mapas es un mapa compacto. \square

Observación. • Si Ω es un abierto en las condiciones anteriores, $p \in (N, +\infty)$ y $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ es inmediato que la inclusión $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p}(\Omega)$ es compacta.

- Este resultado es cierto incluso para $p \in (1, +\infty)$, sin embargo esto será suficiente para nuestros motivos. Para más información ver el capítulo 7 de [GT98].

7.2 Análisis no lineal

7.2.1 Variedades de Banach

Definición 7.4. Sean E, F espacios de Banach y $U \subset E$ un abierto. Decimos que $f : U \rightarrow F$ es diferenciable en $x \in U$ (o diferenciable en el sentido de Frechet) si existe $d_x f : E \rightarrow F$ un mapa lineal continuo tal que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - d_x f(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Muchas de las cosas hechas en un curso de Cálculo 2 no usan la hipótesis de estar en \mathbb{R}^n . A modo de ejemplo:

Proposición 7.3. 1. Si f es diferenciable en $x \in U$ entonces es continua en este punto.

2. Si $f : U \rightarrow F$ y $g : V \subset F \rightarrow G$ cumplen que f es diferenciable en x y g es diferenciable en $f(x)$ entonces $g \circ f$ es diferenciable y $d_x(g \circ f) = d_{f(x)}g \circ d_x f$.

Denotemos al espacio de transformaciones lineales continuas de E a F como $\mathcal{L}(E, F)$ y supongamos que $f : U \subset E \rightarrow F$ es diferenciable (esto significa que lo es en todo punto de U) entonces podemos ver a $df : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$. Decimos que f es C^1 si el mapa anterior es continuo. Ahora podemos definir las derivadas segundas, si df es diferenciable. Repitiendo este esquema podemos definir lo que significa que una función sea C^k o C^∞ .

Lo más importante es que sigue valiendo el teorema de la función inversa, una de las demostraciones (la que usa el teorema de punto fijo para contracciones, vease el Teorema 3 del segundo capítulo de [Nel69]) solamente usa la completitud del espacio E .

Teorema 7.4 (Función inversa). Sea $f : U \subset E \rightarrow F$ un mapa C^k tal que $d_x f : E \rightarrow F$ es un isomorfismo. Entonces existen abiertos $V, W \subset E$ donde V es un entorno de x y W de $f(x)$ tal que $f|_V : V \rightarrow W$ es un difeomorfismo C^k .

Es bien sabido que este teorema es equivalente a:

Teorema 7.5 (Función implícita). Sean E, F y G espacios de Banach, $f : U \times V \subset E \times F \rightarrow G$ una función C^k tal que $D_2f(x_0, y_0) : F \rightarrow G$ (la derivada parcial en la segunda componente) es un isomorfismo. Entonces existen entornos V_1, V_2 de x_0 e y_0 respectivamente y $g : V_1 \rightarrow V_2$ tal que:

$$f(x, y) = a \Leftrightarrow y = g(x),$$

donde $a = f(x_0, y_0)$ y $(x, y) \in V_1 \times V_2$.

Estos teoremas son los que nos permiten hacer cálculo en variedades como estamos acostumbrados usualmente.

Definición 7.5. Sea X un espacio topológico.

- Una carta de Banach es una tripla (U, ϕ, E_U) donde $U \subset X$ es un abierto, E_U es un espacio de Banach y $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset E_U$ es un homeomorfismo sobre su imagen.
- Dos cartas $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset E_U$ y $\psi : V \rightarrow \psi(V) \subset E_V$ son C^k compatibles si su mapa de transición $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \subset E_V \rightarrow \phi(U \cap V) \subset E_U$ es un difeomorfismo C^k .
- Sea \mathcal{A} una colección de cartas C^k , decimos que es un atlas C^k si las cartas son compatibles y sus dominios cubren X . Dos atlas \mathcal{A} y \mathcal{B} son equivalentes si $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es un atlas C^k .
- Una variedad de Banach C^k es un espacio topológico Hausdorff paracompacto X con una clase de equivalencia de atlas C^k .

Observación. Supongamos que X es una variedad de Banach entonces:

- Todos los espacios de Banach que modelan a X son isomorfos.
- Como X es un espacio Hausdorff, ser paracompacto es equivalente a tener particiones de la unidad subordinadas a cualquier cubrimiento.
- En particular como X es localmente metrizable y tiene particiones de la unidad, tenemos que es metrizable.
- Observar que podríamos haber hecho la misma definición sustituyendo espacios de Banach por espacios de Frechet. El problema es que en estos espacios podemos hacer menos teoría, ya que no tenemos un teorema de la función implícita (vease [Ham82]).

El concepto de función diferenciable entre variedades de Banach se define de la misma forma que en el contexto clásico. Antes de ver ejemplos de estas variedades, vamos a recuperar parcialmente un teorema clásico de topología diferencial, que nos muestra el rol central del teorema de la función inversa:

Proposición 7.6 (Forma Local). 1. Sea $f : X \rightarrow Y$ un mapa C^k y supongamos que dado $p \in X$, $\ker d_p f$ e $\text{Im}(d_p f)$ son subespacios complementados. Entonces existen cartas centradas en p y $f(p)$, digamos ϕ y ψ respectivamente tal que:

$$\begin{aligned}\psi \circ f \circ \phi^{-1} &: U \oplus V \subset E \oplus F \rightarrow E \oplus G \\ \psi \circ f \circ \phi^{-1}(x, y) &= (x, g(x, y)),\end{aligned}$$

donde $g : U \oplus V \rightarrow F$ es C^k y $d_0g = 0$ (E, F y G son ciertos espacios de Banach).

2. Además si $\ker d_p f$ y el subespacio complementario a $\text{Im}(d_p f)$ son de dimensión finita, $\dim E = \dim \ker d_p f$ y $\dim G = \dim \text{Im}(d_p f)$.

Demostración. A menos de tomar cartas centradas, supongamos que X e Y son espacios de Banach, $p = 0$, $f(p) = 0$ y $f : W \subset X \rightarrow Y$. Sea $F = \ker d_0 f$, E un subespacio complementario a F y G un subespacio complementario a $\text{Im}(d_0 f)$. Escribamos $f = (f_1, f_2)$ respecto a la descomposición $Y = \text{Im}(d_0 f) \oplus G$.

Afirmo que podemos suponer sin pérdida de generalidad $d_0 f_1 = \text{Id} : E \rightarrow E$, en particular $E = \text{Im}(d_0 f)$. Esto es porque por hipótesis $d_0 f_1|_E : E \rightarrow \text{Im} d_0 f$ es un isomorfismo, entonces a menos de componer por el mapa $((d_0 f_1|_E)^{-1}, \text{Id}) : E \oplus F \rightarrow E \oplus F$ tenemos lo deseado. También sin pérdida de generalidad $W = U' \oplus V'$ con respecto a la descomposición $X = E \oplus F$.

Definiendo el mapa $h : U' \oplus F \rightarrow E \oplus F$ como $h(x, y) = (f_1(x, y), y)$, notemos que $d_0 h = \text{Id}$ entonces por el teorema de la función inversa existe un entorno del 0 $U \oplus V$ tal que existe $h^{-1} : U \oplus V \rightarrow E \oplus F$ y es C^k . Por lo tanto:

$$f \circ h^{-1}(x, y) = (x, g(x, y)),$$

para $g : U \oplus V \rightarrow G$ cierta función C^k con $d_0 g = 0$. La segunda parte es inmediata de la demostración. □

Ejemplo. Sean M, N dos variedades diferenciables compactas, vamos a introducir una estructura de variedad de Banach en $C^0(M, N)$. Pongamos una métrica Riemanniana en N , entonces vía el mapa exponencial tenemos una identificación entre un entorno de la sección nula $\mathcal{U} \subset TM$ y el entorno $\exp(\mathcal{U}) \subset N \times N$ de la diagonal.

Construyamos cartas alrededor de $u \in C^0(M, N)$. Tenemos que el fibrado $u^*TN \rightarrow M$ viene equipado con la métrica que le pusimos a N , con esta métrica las secciones continuas de este fibrado $C^0(M, u^*TN)$ son un espacio de Banach con la norma $\|\xi\| = \sup_{p \in M} \|\xi(p)\|$. Dentro de este espacio tenemos el abierto $V_u = C^0(M, u^*\mathcal{U})$, definamos entonces las cartas:

$$\begin{aligned}\exp_u &: V_u \rightarrow C(N, M) \\ \exp_u \xi(p) &= \exp_{u(p)}(\xi(p)).\end{aligned}$$

Estos son nuestros candidatos a coordenadas, el mapa anterior es un homeomorfismo sobre su imagen por la elección de \mathcal{U} y vamos a llamar a $\exp_u(V_u) = U_u$. Notar que $v \in U_u$ si y solo si $u \in U_v$.

Proposición 7.7. Sean M, N variedades compactas diferenciables entonces:

1. Los mapas $\exp_u^{-1} : U_u \rightarrow V_u \subset C^0(M, u^*TN)$ definen un atlas en $C^0(M, N)$ que le dan a $C^0(M, N)$ una estructura de variedad de Banach.
2. Los atlas inducidos por métricas Riemannianas distintas son equivalentes.
3. El conjunto $\{U_u : u \in C^\infty(M, N)\}$ es un cubrimiento de $C^0(M, N)$.

Las dos primeras partes son automáticas una vez que se escriben los cambios de coordenadas, además $C^0(M, N)$ es Hausdorff y paracompacto porque es metrizable con la métrica dada por $d(u, v) = \sup_{p \in M} d(u(p), v(p))$ donde d la distancia inducida por una métrica en N . Para la tercera hay que ver que toda función continua la podemos aproximar por diferenciables.

La variedad de Banach que usamos nosotros en el capítulo 4 es $W^{k,p}(M, N)$ con M, N compactas como arriba y $kp > \dim M$.

Notemos que si $\pi : E \rightarrow M$ es un fibrado vectorial entonces podemos definir el espacio $W^{k,p}(M, E)$ como aquellas secciones $s : M \rightarrow E$ tal que en coordenadas locales está en $W^{k,p}$. Tomando un cubrimiento finito \mathcal{U} de M por trivializaciones podemos definir $\|s\|_{W^{k,p}(M, E)}^{\mathcal{U}}$ como la suma de las normas Sobolev en cada trivialización. Esta definición claramente depende de las trivializaciones pero si tomamos dos cubrimientos distintos es sencillo ver (tomando el refinamiento de \mathcal{U} y \mathcal{V}) que $\|\cdot\|_{W^{k,p}(M, E)}^{\mathcal{U}} \leq C \|\cdot\|_{W^{k,p}(M, E)}^{\mathcal{V}}$. En particular notemos que con esta definición los teoremas de encaje de Sobolev y compacidad valen inmediatamente en este contexto ya que valen localmente.

Esto nos define un functor $W^{k,p} : VB(M) \rightarrow \mathcal{B}$ donde $VB(M)$ es la categoría de los fibrados vectoriales sobre M y \mathcal{B} la de los espacios “Banacheables”, estos son los espacios de Banach cocientados por la relación de tener normas equivalentes. Este functor cumple:

1. Existe una inclusión continua $W^{k,p}(M, E) \hookrightarrow C^0(M, E)$.
2. Existe una inclusión continua $W^{k,p}(Hom(E, F)) \hookrightarrow \mathcal{L}(W^{k,p}(M, E), W^{k,p}(M, F))$.
3. Sea \mathcal{U} un abierto de E que se proyecta a toda la variedad y $\psi : \mathcal{U} \rightarrow F$ un mapa suave preservando las fibras. Entonces para cada $\xi \in W^{k,p}(M, \mathcal{U})$ tenemos que $\psi \circ \xi \in W^{k,p}(M, F)$ y además el mapa $\xi \mapsto \psi \circ \xi$ es continuo.

Si se demuestra con cuidado la proposición del ejemplo nos daríamos cuenta que estas tres son las únicas propiedades que se usan, si tomamos la mismas cartas que antes tenemos:

Proposición 7.8. Sean M, N variedades compactas entonces $W^{k,p}(M, N)$ con $kp > \dim M$ es una variedad de Banach separable.

Una prueba detallada de todo lo dicho anteriormente en un contexto más general se puede encontrar en [Eli67].

Notemos que por definición si X es una variedad de Banach C^k y $\{(U_i, \phi_i, E_i)\}_{i \in I}$ es un atlas compatible, entonces si denotamos $\phi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1}$ a los mapas de transición y a $V_i = \phi_i(U_i)$:

$$X \cong \left(\bigsqcup_{i \in I} V_i \right) / x \sim \phi_{ij}(x),$$

donde \cong significa difeomorfos. Esto nos sirve de motivación para definir al espacio tangente de X ya que simplemente basta construir los espacios tangentes TV_i y pegarlos. Definamos $TV_i = V \times E_i$, si $f : V_i \rightarrow V_j$ es diferenciable definamos $Tf : TV_i \rightarrow TV_j$ como $Tf(x, v) = (f(x), df(x)v)$. Finalmente el fibrado tangente de X es la variedad de Banach:

$$TX = \left(\bigsqcup_{i \in I} TV_i \right) / (x, v) \sim T\phi_{ij}(x, v).$$

Observación. • Tenemos que $\pi : TX \rightarrow X$ la proyección canónica es C^k , vamos a denotar a las fibras como $T_p X = \pi^{-1}(p)$. Por construcción TX es un fibrado sobre X en el sentido usual, decimos que es un *fibrado de Banach* ya que la fibra es un espacio de Banach.

- Todo mapa suave $f : X \rightarrow Y$ induce un mapa $TF : TX \rightarrow TY$ suave y se restringe a las fibras como el mapa $d_p f : T_p X \rightarrow T_{f(p)} Y$.

Esto nos da cierta noción de geometría, de hecho nos permite definir la noción de transversalidad. Antes que nada:

Definición 7.6. Sea X una variedad de Banach C^k , un subconjunto $A \subset X$ es una *subvariedad de Banach* si $\forall p \in A$ existe una carta (U, ϕ, E) donde U es un entorno de p tal que $\phi(U \cap A) = \phi(U) \cap F$, donde $F \subset E$ es un subespacio cerrado de E *complementado*.

Observación. • Una subvariedad de Banach es una variedad de Banach en si misma.

- La hipótesis de complementado es para hacer pruebas como la que hicimos cuando probamos la forma local.

Definición 7.7. Sea $f : X \rightarrow Y$ un mapa suave entre variedades de Banach y $N \subset Y$ una subvariedad, decimos que N es transversal a f si $\forall p \in f^{-1}(N)$ la composición:

$$T_p X \xrightarrow{d_p f} T_{f(p)} Y \xrightarrow{\pi} T_{f(p)} Y / T_{f(p)} N,$$

tiene una inversa a derecha.

Observación. • Si $p \in f^{-1}(N)$ como arriba, entonces el subespacio $\ker(\pi \circ d_p f)$ es complementado, ya que $\pi \circ d_p f$ tiene inversa a derecha.

- Si la subvariedad es un punto, esto es justamente la definición de valor regular.

Con esta definición tenemos lo esperable:

Proposición 7.9. Sea $f : X \rightarrow Y$ diferenciable y $N \subset Y$ una subvariedad transversal a f , entonces $f^{-1}(N)$ es una subvariedad de X .

Demostración. A menos de tomar cartas centradas en $x \in f^{-1}(y)$ donde $y \in N$, suponemos que X, Y son espacios de Banach, $Y = F \oplus G$ con $F \oplus 0 = N$ y G el subespacio complementado a F y $f : U \subset X \rightarrow F \oplus G$. Escribamos $f = (f_1, f_2)$ respecto a esta descomposición. Por hipótesis $d_0 f_2 : X \rightarrow G$ es sobreyectivo y $\ker d_0 f_2$ es complementado por la primera observación de antes.

Sea E su complemento, entonces $\partial_2 f_2(0) : E \rightarrow G$ es un isomorfismo (respecto a la descomposición $X = \ker d_0 f \oplus E$). Por el teorema de la función implícita tenemos que el conjunto $f^{-1}(N) = f_2^{-1}(0)$ es localmente de la forma $x_2 = g(x_1)$ (el gráfico de g), para cierta $g : U' \subset \ker d_0 f \rightarrow E$. Luego si consideramos el mapa:

$$(x, y) \mapsto (x, y - g(x)).$$

Por el teorema de la función inversa lleva localmente el gráfico de g a $\ker d_0 f \oplus 0$. □

7.2.2 Operadores de Fredholm

Definición 7.8. Sean E, F espacios de Banach y $D \in \mathcal{L}(E, F)$. Consideremos las propiedades:

1. $\ker D$ tiene dimensión finita.
2. $\text{Im} D$ es cerrado.
3. $\text{coker} D := F/\text{Im} D$ tiene dimensión finita.

Si D cumple con 1 y 2 o 2 y 3, vamos a decir que D es L-Fredholm o R-Fredholm respectivamente (o semi-Fredholm en ambos casos). Si D cumple las tres propiedades decimos que es un mapa *Fredholm*.

Observación. Si D cumple con 1 y 3 entonces automáticamente cumple con 2.

Demostración. Recordar que por Hahn-Banach todos los subespacios finito dimensionales son complementados, por lo tanto podemos tomar A el subespacio complementario a $\ker D$. Por otro lado consideremos un subespacio $B \subset F$ generado por los representantes de una base de $F/\text{Im} D$, claramente $F = \text{Im} D \oplus B$. Definamos el mapa:

$$\begin{aligned} T : A \oplus B &\rightarrow F \\ T(x, y) &= D|_A(x) + y. \end{aligned}$$

Este operador es claramente biyectivo, y como es continuo tiene una inversa continua por el teorema de Banach. Ahora observar que $T(A \oplus 0) = \text{Im} D$ es cerrado ya que $A \oplus 0$ lo es. □

A los mapas Fredholm entre E y F los vamos a denotar como $\mathcal{F}(E, F)$. El siguiente teorema nos da un criterio sencillo para chequear que un mapa es Fredholm (vease por ejemplo en la prueba de Riemann-Roch 2.7).

Teorema 7.10. Sea $D \in \mathcal{L}(E, F)$ y $K \in \mathcal{K}(E, G)$ el conjunto de operadores compactos. Supongamos que tenemos una desigualdad del tipo:

$$\|x\|_E \leq C(\|Dx\|_F + \|Kx\|_G).$$

Entonces D es L-Fredholm.

Demostración. Comencemos con ver que $\ker D$ es finito dimensional, la idea es observar que su bola unidad es compacta. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B_E(0, 1) \cap \ker D$, como K es un operador compacto, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que $Kx_{n_k} \rightarrow_k y \in G$. Usando la desigualdad y que la subsucesión está en $\ker D$ obtenemos:

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k'}}\|_E \leq C \|Kx_{n_k} - Kx_{n_{k'}}\|_G.$$

Por lo tanto la subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. Por completitud de E concluimos que esta converge a algún $x \in B_E(0, 1) \cap \ker D$ (recordar que $\ker D$ es cerrado). Por lo tanto la bola unitaria de $\ker D$ es compacta, esto solamente puede pasar si $\ker D$ es de dimensión finita.

Ahora veamos que $\text{Im} D$ es cerrada. $\ker D$ es de dimensión finita por lo tanto es complementado, esto nos permite asumir que D es inyectivo a menos de considerar la restricción de D a un subespacio complementario a $\ker D$. Sea $Dx_n \rightarrow_n y \in F$, tenemos dos casos posibles:

1. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada, en cuyo caso usando la compacidad de K tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $Kx_{n_k} \rightarrow_k z \in G$. Pero entonces como $\{Dx_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{Kx_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergen, la desigualdad nos dice que la sucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy y por completitud converge a cierto $x \in E$. Por continuidad obtenemos que $Dx = y \in \text{Im} D$.
2. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no está acotada, tomemos $y_n := x_n / \|x_n\|_E$. Esta sucesión si está acotada, por lo tanto podemos tomar una subsucesión $\{y_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\{Ky_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge. Pero entonces $Dy_{n_k} \rightarrow_k 0$ y $\{Ky_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, nuevamente la desigualdad nos dice que $\{y_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy y converge a un punto de la esfera unidad $y \in \partial B_E(0, 1)$. Por continuidad $Dy = 0$, pero esto es absurdo ya que D supusimos que era inyectivo.

□

Este teorema nos permite una prueba elegante de:

Corolario 7.10.1. *Sea $D : E \rightarrow F$ un mapa L -Fredholm, entonces:*

1. *Si $K \in \mathcal{K}(E, F)$ entonces $D + K$ es L -Fredholm.*
2. *Existe $C > 0$ tal que si $P \in \mathcal{L}(E, F)$ es tal que $\|P\| < 1/C$ entonces $D + P$ es L -Fredholm.*

Demostración. Tomemos $K_0 : \ker D \rightarrow \mathbb{R}^n$ un isomorfismo cualquiera, notar que es un mapa compacto. Luego si $A \subset E$ es un subespacio complementario a $\ker D$, definamos el mapa:

$$\begin{aligned} T : \ker D \oplus A &\rightarrow \text{Im} D \oplus \mathbb{R}^n \\ T(x, y) &= D|_A(x) + K_0(y). \end{aligned}$$

Por construcción este mapa es un isomorfismo, y por el teorema de Banach tiene una inversa continua. Esta inversa nos da la cota:

$$\|x\|_E \leq C (\|Dx\|_E + \|K_0x\|).$$

Con esta observación el corolario es casi automático, probemos solo 2. ya que 1. es incluso más sencillo. Por la cuenta de arriba tenemos que:

$$\|x\| \leq C(\|(D + P)x\|_E + \|Px\|_E + \|K_0x\|).$$

Por lo tanto usando $\|Px\|_E \leq \|P\| \|x\|_E$ y despejando tenemos:

$$\|x\|_E(1 - C\|P\|) \leq C(\|(D + P)x\|_E + \|K_0x\|),$$

en particular si $\|P\| < 1/C$, usando el Teorema tenemos lo deseado. \square

Podemos reformular la segunda condición diciendo que los mapas L-Fredholm son abiertos en $\mathcal{L}(E, F)$ (con la norma del operador). Supongamos ahora que tenemos un mapa R-Fredholm, recordar que $\text{Coker}(D) \cong \ker D^*$ y $\ker D \cong \text{Coker} D^*$ donde D^* es el adjunto. En particular D es R-Fredholm si y solamente si D^* es L-Fredholm, por lo tanto si dualizamos recuperamos los resultados anteriores para mapas R-Fredholm. En particular concluimos:

Corolario 7.10.2. *El conjunto $\mathcal{F}(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$ es abierto con la topología inducida por la norma de operadores.*

Los mapas de Fredholm tienen naturalmente un entero asociado llamado el *índice*:

$$\text{Ind}(D) := \dim \ker D - \dim \text{Coker} D,$$

este número cumple un rol fundamental en la teoría. Algunas propiedades básicas del índice son:

Proposición 7.11. 1. Sean $T \in \mathcal{F}(E, F)$ y $S \in \mathcal{F}(F, G)$ entonces $S \circ T \in \mathcal{F}(E, G)$ y $\text{Ind}(S \circ T) = \text{Ind}(S) + \text{Ind}(T)$.

2. Sea $T \in \mathcal{F}(E, F)$ entonces $T^* \in \mathcal{F}(F^*, G^*)$ y $\text{Ind} T^* = -\text{Ind} T$.

Omitiremos las pruebas ya que esencialmente es álgebra lineal. La propiedad que es verdaderamente fundamental es la siguiente:

Proposición 7.12. $\text{Ind} : \mathcal{F}(E, F) \rightarrow \mathbb{Z}$ es continuo

Demostración. Tomemos $T \in \mathcal{F}(E, F)$, como ya vimos $\ker T$ e $\text{Im} T$ son subespacios complementados, tomemos A y B subespacios complementarios a cada uno respectivamente. Denotemos por $i : A \rightarrow A \oplus \ker T$ y $P : \text{Im}(T) \oplus B \rightarrow \text{Im}(T)$ a la inclusión y a la proyección respectivamente. Notar que i y P son operadores de Fredholm donde $\text{Ind}(i) = -\dim \ker T$ e $\text{Ind}(P) = \dim B = \dim \text{Coker}(T)$. Además el operador $P \circ T \circ i : A \rightarrow \text{Im}(T)$ es invertible, sin embargo los operadores invertibles son un abierto en la norma del operador. Tomando $T' \in \mathcal{F}(E, F)$ en un abierto suficientemente pequeño, $P \circ T' \circ i$ también es invertible, en particular es Fredholm con índice 0, pero entonces usando la proposición anterior:

$$\text{Ind}(P) + \text{Ind}(T') + \text{Ind}(i) = 0.$$

Despejando obtenemos que $\text{Ind}(T') = -\text{Ind}(P) - \text{Ind}(i) = \text{Ind}(T)$ como queríamos. \square

Observación. Notar que entonces $\mathcal{F}(E, F)$ es desconexo. Sin embargo si comenzamos con un $T \in \mathcal{F}(E, F)$ y $K \in \mathcal{K}(E, F)$ entonces $T + K$ está en la misma componente conexa que T . Esto es porque el camino $\{T + sK\}_{s \in [0,1]}$ está en $\mathcal{F}(E, F)$. En particular el índice es invariante por perturbaciones compactas, es decir $Ind(T) = Ind(T + K)$.

7.2.3 El teorema de Sard-Smale

Un mapa C^k entre variedades de Banach $f : X \rightarrow Y$ es Fredholm si $\forall p \in X$ tenemos que $d_p f : T_p X \rightarrow T_{f(p)} Y$ es un operador de Fredholm. Notar que por la continuidad del índice, si X es conexa podemos definir $Ind(f) = Ind(d_p f)$ en cualquier punto y esto queda bien definido. Una de las propiedades bonitas de estos mapas es que podemos generalizar el teorema de Sard, la exposición sigue el artículo original de Smale [Sma73]:

Teorema 7.13 (Sard-Smale). *Sea $f : X \rightarrow Y$ un mapa de Fredholm C^k con $k > \{Ind(f), 0\}$, denotemos $\mathcal{R}(f)$ al conjunto de valores regulares. Entonces si X tiene base numerable $\mathcal{R}(f)$ es un residual.*

La prueba se basa en las buenas propiedades topológicas de los mapas de Fredholm. Recordemos que si X e Y son espacios topológicos, una función $f : X \rightarrow Y$ continua se dice que es *propia* si $f^{-1}(K)$ es compacto para todo $K \subset Y$ compacto.

Proposición 7.14. *Todo mapa $f : X \rightarrow Y$ de Fredholm es localmente propio. Esto significa que $\forall p \in X$ existe un entorno V tal que $f|_V$ es un mapa propio.*

Demostración. Como la proposición es local, basta tomar la forma local de un mapa en una variedad de Banach, denotando $Ind(f) = k$ obtenemos que basta probar para: $f : U_1 \oplus U_2 \subset E \oplus \mathbb{R}^n \rightarrow E \oplus \mathbb{R}^{n-k}$ donde $f(x, y) = (x, g(x, y))$

Para ver que es propio, basta ver que para toda sucesión $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f(x_n, y_n)$ converge a cierto (x, z) , tiene una subsucesión convergente. Pero por la forma de f tenemos que $x_n \rightarrow_n x$ automáticamente, y a menos de achicar U_2 la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ esta en un acotado de un espacio de dimensión finita por lo tanto tiene subsucesión convergente. □

Decimos que un espacio topológico Y es *compactamente generado* si se cumple que $A \subset Y$ es cerrado si y solo si $A \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subset Y$. El siguiente lema topológico nos da una caracterización de ser propio:

Lema 7.15. *1. Sea $f : X \rightarrow Y$ continua, cerrada tal que $f^{-1}(y)$ compacto $\forall y \in Y$ entonces es propia.*

2. El recíproco es verdad si Y es compactamente generado.

Demostración. 1. Sea $K \subset Y$ un compacto. Tomemos $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un cubrimiento por abiertos de $f^{-1}(K)$. Dado $y \in K$, como $f^{-1}(y)$ es compacto, existen una cantidad finita de entornos de los anteriores $U_1^y, \dots, U_{n_y}^y$ que lo cubren. Sea $U_y = U_1^y \cup \dots \cup U_{n_y}^y$ y $C_y = (U_y)^c$ un cerrado, notar que por hipótesis $f(C_y)$ es un cerrado y no contiene a y , tomando la componente conexa de $f(C_y)^c$ que contiene a y obtenemos un abierto V_y .

Tenemos entonces que $\{V_y\}_{y \in K}$ es un cubrimiento de K , por lo tanto tiene un subcubrimiento finito, digamos V_{y_1}, \dots, V_{y_k} . Es claro entonces que $\{U_k^{y_j} : j = 1, \dots, k, k = 1, \dots, n_j\}$ es un subcubrimiento finito de $f^{-1}(K)$.

2. Sea $C \subset X$ un cerrado, queremos ver que $f(C)$ es un cerrado. Usando la definición de compactamente generado basta ver que $f(C) \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subset Y$, pero notar que $f^{-1}(f(C) \cap K) = C \cap f^{-1}(K)$ que es un compacto, luego la imagen de un compacto por una continua es compacta. □

Observación. La condición de ser compactamente generado no es tan rara, por ejemplo todo espacio Y con base local numerable lo es. Esto es por lo siguiente: supongamos que $A \cap K$ es cerrado para todo compacto K pero A no lo es, entonces existe $y \in \bar{A} - A$. Como el espacio tiene base local numerable, existe $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con $y_k \rightarrow y$, consideremos entonces $K = \{y\} \cup \{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, este es un compacto pero $A \cap K$ no es cerrado lo que contradice la hipótesis.

Demostración: Sard-Smale. Tomando un entorno N suficientemente pequeño de $p \in X$ para que funcione la forma local y donde sea propia $f|_N$, a menos de tomar cartas suponemos X, Y espacios de Banach donde $X = E \oplus \mathbb{R}^n$, $Y = E \oplus \mathbb{R}^{k-n}$ y $f = (Id, g) : U \oplus V \subset E \oplus \mathbb{R}^n \rightarrow E \oplus \mathbb{R}^{k-n}$ propia donde $k = \text{Ind } f$. Respecto a estas descomposiciones tenemos:

$$d_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ \partial_1 g(x, y) & \partial_2 g(x, y) \end{pmatrix}.$$

Entonces $(x, z) \in Y$ es un valor regular de f si y solo si $\partial_2 g(x, y)$ es sobreyectivo, pero eso pasa si y solo si z es un valor regular de la función: $y \mapsto g(x, y)$. Por el Teorema de Sard clásico, tenemos que los valores regulares son densos en $\{x\} \times \mathbb{R}^{k-n}$. Como son densos en cada fibra, concluimos que los valores regulares son densos en $E \oplus \mathbb{R}^{k-n}$.

Ahora notar que el conjunto $Z = \{(x, y) \in U \oplus V : d_{(x,y)}f \text{ no es sobreyectivo}\}$ es cerrado (el complemento es un abierto por continuidad del diferencial), por lo tanto $f(Z)$ es un cerrado por la caracterización de los mapas propios, y por lo tanto el conjunto $\mathcal{R}(f|_N)$ es un abierto denso.

Para rematar el teorema construyamos una base numerable de abiertos como arriba $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces tenemos que $\mathcal{R}(f) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}(f|_{U_n})$ es una intersección numerable de abiertos densos. □

7.3 Breve introducción a las clases de Chern

Voy a asumir que el lector está familiarizado con la teoría de cohomología y la dualidad de Poincaré, al menos a un nivel intuitivo (vease [Hat02] para un tratamiento excelente del tema). No voy a hacer todas las pruebas sino simplemente una guía de las ideas involucradas, un tratamiento al detalle del tema puede encontrarse en [JWM74].

Tomemos M una variedad diferenciable compacta y orientable, tenemos la clase fundamental $[M]$ que es un generador de $H_n(M, \partial M, \mathbb{Z})$ y el isomorfismo de Poincaré:

$$D_M : H^k(M, \partial M, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-k}(M, \mathbb{Z})$$

$$D_M \alpha = \alpha \cap [M]$$

Esto nos permite definir el número de intersección entre dos clases de homología $\alpha \in H_i(M, \mathbb{Z})$ y $\beta \in H_{n-i}(M, \mathbb{Z})$ como:

$$\alpha \# \beta = \langle D_M^{-1} \alpha \cup D_M^{-1} \beta, [M] \rangle$$

En el caso en que α y β estén representadas por variedades diferenciales N^i y L^{n-i} que se intersectan transversalmente, este número coincide con la cantidad de intersecciones contadas con signo dependiendo de la orientación en la intersección.

Esto puede ser usado para calcular puntos fijos de mapas $f : M \rightarrow M$. Si denotamos a $\Delta \subset M \times M$ a la diagonal, los puntos fijos de f pueden ser vistos $M \times M$ como la intersección entre Δ y $\Gamma_f \subset M \times M$ el gráfico de la función. Sea $\Delta : M \hookrightarrow M \times M$ la inclusión en la diagonal y $\iota_f : M \rightarrow M \times M$ el mapa $\iota_f(p) = (p, f(p))$, las clases de homología correspondientes a la diagonal y al gráfico son $\Delta_*[M] := [\Delta]$ y $(\iota_f)_*[M] = [\Gamma_f]$. Un resultado clásico en estas líneas es:

Teorema 7.16 (Lefschetz). *Sea $f : M \rightarrow M$ continuo entonces:*

$$[\Gamma_f] \# [\Delta] = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{Tr}(f_*^i : H_i(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H_i(X, \mathbb{Q}))$$

En particular si f es un difeomorfismo y los puntos fijos son no degenerados, esto coincide con la suma de los puntos fijos contados con signo dependiendo si estos preservan o revierten orientación.

Un corolario inmediato de este teorema es:

Teorema 7.17 (Poincaré-Hopf). *Sea $X \in \Gamma(TM)$ un campo cuyas singularidades son no degeneradas (es decir que $X : M \rightarrow TM$ es transversal a la sección nula) entonces:*

$$\chi(M) = \sum_{p: X(p)=0} \text{ind}_p X$$

Donde $\text{ind}_p X$ depende de si la intersección con la sección nula preserva o revierte orientación.

Demostración. Las singularidades de X las podemos ver como fijos de ϕ_t su flujo asociado. Usando Lefschetz con ϕ_t y notando que este mapa es homotópico a la identidad (por definición) tenemos lo deseado. □

Esto es bastante profundo porque nos dice que si tenemos una sección del fibrado (genérica) entonces el número de la derecha de la fórmula anterior no depende de que sección elegí. Es decir parece hablarnos de la topología del fibrado, en lo que resta de esta discusión vamos a estudiar esto.

Supongamos que tenemos $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial *orientable* de dimensión k sobre M . Pongámosle a E una métrica Riemanniana y consideremos:

$$B(E) = \{(p, v) \in TM : \|v\| \leq 1\}$$

Intuitivamente esto contiene toda la información de E ya que las fibras re-traen por deformación en una bola. Movamos un poco las manos y vamos a convencernos de que es sencillo entender la estructura de $B(E)$.

Supongamos que M tiene una descomposición simplicial y que a menos de hacer subdivisión baricéntrica cada símplice esta dentro de un entorno donde E se trivializa. Esto nos lleva a pensar que le podemos dar una estructura simplicial a $D(E)$ como el producto $e^l \times e^k$ donde e^l es un l -símplice de M y e^k es simplemente un disco, en particular si esto es verdad $D(E)$ es homológicamente trivial debajo de la dimensión k y además la homología de grado l de M sería isomorfa a la de grado $l + k$ en E . Esto es lo que hay detras del teorema:

Teorema 7.18 (Isomorfismo de Thom). *Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial orientable de dimensión k . Entonces existe una única clase $U_E \in H^k(D(E), S(E))$ llamada la clase de Thom tal que:*

1. U_E restricto a una fibra es un generador de $H^k(D(E)_p, S(E)_p) \cong \mathbb{Z}$.
2. El mapa:

$$\begin{aligned} \phi_E : H^i(M, \mathbb{Z}) &\rightarrow H^{k+i}(D(E), S(E)) \\ \phi_E(\alpha) &= \pi^* \alpha \cup U_E \end{aligned}$$

Es un isomorfismo

Bosquejo. Una prueba estandar sigue las siguientes líneas. Tenemos los háces $H(B(E)|_U, S(E)|_U, \mathbb{Z})$ que son localmente \mathbb{Z} (es decir localmente constantes), de hecho se puede probar que son constantes por la hipótesis de orientabilidad del fibrado. Luego el isomorfismo en una trivialización sigue de la fórmula de Kunnetth y hay que pegar estos resultados usando un argumento de cubrimientos y Mayer-Vietoris. □

Del análisis celda por celda que hicimos anteriormente, podemos llegar a sospechar que el dual de Poincaré de la clase de Thom es la sección nula. Supongamos que M es cerrada, entonces tenemos los siguientes isomorfismos:

$$\mathbb{Z} \cong H^0(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*(\cdot) \cup U_E} H^k(B(E), S(E)) \xrightarrow{D_{B(E)}} H_n(B(E)) \xrightarrow{\pi_*} H_n(M) \cong \mathbb{Z}$$

Por lo tanto $D_{B(E)}$ lleva un generador de $H^k(B(E), S(E))$, es decir U_E en un generador de $H_n(B(E))$, que es justamente $\iota_*[M]$ siendo $\iota : M \hookrightarrow TM$ la inclusión en la sección nula. Acá solo logramos probar que $D_{B(E)}U_E = \pm \iota_*[M]$, sin embargo con un poco más de trabajo podemos ver que el signo correcto es el más.

Juntando esta discusión con lo anterior tenemos que si $s \in \Gamma(B(E))$ entonces el número de intersección $s_*[M] \# \iota_*[M] = \chi(E)$ donde definimos $\chi(E)$ como aquel tal que:

$$U_E \cup U_E = \chi(E)\phi_E([M])$$

En el caso $E = TM$ este número coincide con la característica de Euler. Motivados por esto:

Definición 7.9. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial de dimensión n orientable sobre una variedad compacta y orientable. Definimos la *clase de Euler* de E como:

$$e(E) = \phi_E^{-1}(U_E \cup U_E) \in H^n(X, \mathbb{Z})$$

Se puede probar que:

Proposición 7.19. *La clase de Euler satisface:*

1. *Es functorial respecto a pullbacks, esto significa que si $E \rightarrow N$ es un fibrado vectorial orientable y $f : M \rightarrow N$ es un mapa (continuo es suficiente) entonces $e(f^*E) = f^*e(E)$.*
2. *Si E es un fibrado trivial entonces $e(E) = 0$.*
3. *Si E y F son dos fibrados vectoriales orientables de dimensión m y n respectivamente sobre M , entonces $e(E \oplus F) = e(E) \cup e(F) \in H^{n+m}(M, \mathbb{Z})$. A esto se le llama la fórmula de la suma de Whitney.*

De hecho estas tres propiedades sumadas a que si M es una variedad diferenciable compacta y orientable entonces $e(TM) = \chi(M)[M]$, nos caracterizan únicamente a la clase de Euler.

Supongamos ahora que estamos en el contexto $E \rightarrow M$ un fibrado vectorial complejo donde M es como antes. Supongamos en un principio que $\dim_{\mathbb{C}} E = 1$ (un fibrado por líneas) entonces definamos la primera clase de Chern como:

$$c_1(E) := e(E_{\mathbb{R}}) \in H^2(M, \mathbb{Z})$$

Donde denotamos a $E_{\mathbb{R}}$ al fibrado visto como fibrado real.

Supongamos ahora que tenemos un fibrado complejo de dimensión n sobre M , si proyectivizamos todas las fibras de E obtenemos otro fibrado $\pi : P(E) \rightarrow M$. Siempre que tenemos un espacio proyectivo, viene con un fibrado por líneas canónico $\pi : \lambda_E \rightarrow P(E)$ cuyas fibras son:

$$\pi^{-1}[v]_p = \{([v]_p, w) : w \in \text{span}\{v\} \subset E_p\}.$$

donde $[v]_p \in P(E)$. Si equipamos a E con una métrica hermitiana, entonces el fibrado $\pi^*E \rightarrow P(E)$ hereda la anterior. Observar que el fibrado λ_E está incluido en π^*E , por lo tanto tenemos definido el fibrado ortogonal a λ_E según la métrica Hermitiana. Concluimos que $E \cong \lambda_E \oplus F$ donde F es un fibrado complejo de dimensión $n - 1$.

Con una inducción probaríamos entonces que existe N una variedad diferenciable y $f : N \rightarrow M$ un mapa diferenciable tal que $f^*E = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ suma directa de fibrados por rectas. Definamos:

$$c_1(E) := \sum_{i=1}^n c_1(L_i)$$

- Observación.* 1. De hecho el teorema de Leray-Hirsch nos dice que si el mapa f es construido mediante el proceso descrito anteriormente, entonces $f^* : H^*(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(N, \mathbb{Z})$ es inyectivo. Esto se usa para ver que la clase de Chern es única.
2. El rol fundamental de c_1 es que es un morfismo del espacio de fibrados por rectas sobre un espacio topológico X (Hausdorff, paracompacto con base numerable) a menos de isomorfismo en $H^2(X, \mathbb{Z})$. El producto en los fibrados es el producto tensorial.

7.4 El dual de Hodge

Sea M^n una variedad compacta y orientable con una métrica μ , esta induce en el fibrado $\bigwedge^k T^*M$ una métrica declarando que si e_1, \dots, e_n es una base ortonormal de $T_x M$ entonces $(e_{i_1})^* \wedge \dots \wedge (e_{i_k})^*$ es una base ortonormal de $\bigwedge_x^k T^*M$ con $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Denotemos esta métrica como $\langle \cdot, \cdot \rangle$, el grado del fibrado exterior al que pertenece estará claro en el contexto.

Notar que entonces tenemos dos isomorfismos naturales. El primero es:

$$\begin{aligned} \wedge : \bigwedge^k T^*M &\rightarrow \text{Hom}(\bigwedge^{n-k} T^*M, \bigwedge^n T^*M) \\ \wedge(\alpha)(\beta) &= \beta \wedge \alpha, \end{aligned}$$

que viene dado por el producto cuña. Pero $\bigwedge_x^n T^*M \cong \mathbb{R}$ ya que este espacio tiene dimensión 1, elegimos el isomorfismo identificando $1 \leftrightarrow (e_1)^* \wedge \dots \wedge (e_n)^* = dv_\mu$ el producto del dual de una base ortonormal. Por otro lado la métrica nos dá el isomorfismo bemol:

$$\begin{aligned} \flat : \bigwedge^k T^*M &\rightarrow (\bigwedge^k T^*M)^* \\ \flat(\alpha)(\beta) &= \langle \alpha, \beta \rangle \end{aligned}$$

Definamos entonces

$$* := \wedge^{-1} \circ \flat : \bigwedge^k T^*M \rightarrow \bigwedge^{n-k} T^*M$$

Notar que al variar x , $*_x$ es tan regular como la métrica μ . La construcción de $*$ nos dá que como $\wedge \circ * = \flat$, si $\alpha \in \Omega^k(M)$ y $\beta \in \Omega^k(M)$:

$$\langle \alpha, \beta \rangle dv_\mu = \alpha \wedge * \beta$$

Ahora notemos que como tenemos una métrica en $\bigwedge^k T^*M$, tenemos la norma L^2 :

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{L^2} = \int_M \langle \alpha, \beta \rangle dv_\mu.$$

Que por lo anterior es $\int_M \alpha \wedge * \beta$.

Observación. $*$: $\Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M)$ es una isometría con la métrica que le pusimos ya que manda bases ortonormales en bases ortonormales.

Lema 7.20. $*^2 = (-1)^{k(n-k)}$

Demostración. Por la observación de que $*$ es una isometría tenemos que:

$$\begin{aligned}\alpha \wedge * \beta &= \langle \alpha, \beta \rangle dv_\mu = \langle * \alpha, * \beta \rangle dv_\mu \\ &= * \beta \wedge * * \alpha = (-1)^{k(n-k)} * * \alpha \wedge * \beta\end{aligned}$$

Acá usé la simetría de el producto interno. Como esto pasa para cualquier β terminamos. □

La $*$ se usa usualmente para calcular adjunto a operadores con la norma L^2 de arriba. A modo de ejemplo calculemos el adjunto del operador $d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)$:

$$\langle d\alpha, \beta \rangle_{L^2} = \int d\alpha \wedge * \beta$$

Pero como $d\langle \alpha \wedge * \beta \rangle = d\alpha \wedge * \beta + (-1)^{k-1} \alpha \wedge d \circ * \beta$ entonces por el Teorema de Stokes tenemos que:

$$\int d\alpha \wedge * \beta = (-1)^{\deg k} \int \alpha \wedge d \circ * \beta$$

Entonces si ponemos $d^* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ definido como $d^* = (-1)^{k(n-k+1)} * \circ d \circ *$ es fácil ver por la cuenta anterior que

$$\langle d\alpha, \beta \rangle_{L^2} = \langle \alpha, d^* \beta \rangle_{L^2}.$$

7.5 Algunas cuentas en variedades casi complejas

Sea (M, J) una variedad casi compleja, tomemos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ una métrica Riemanniana para la cual J es una isometría y consideremos ∇ la conexión de Levi-Civita para $\langle \cdot, \cdot \rangle$. En estas condiciones definamos $\omega(X, Y) = \langle JX, Y \rangle$, es claro que $\omega \in \Omega^2(M)$ (a priori no sabemos que ω sea una forma simpléctica porque nos falta la condición $d\omega = 0$).

Nuestro objetivo será encontrar expresiones para los tensores $d\omega$ y N_J (el tensor de Nijenhuis presentado en 2.2) en términos de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y ∇ .

Observación. Sabemos que $J^2 = -Id$ y que ω es alternada, es decir $\langle JX, Y \rangle + \langle X, JY \rangle = 0$. Derivando ambas condiciones obtenemos:

$$J \circ \nabla J = -\nabla J \circ J, \langle (\nabla J)X, Y \rangle + \langle X, (\nabla J)Y \rangle = 0. \quad (9)$$

Estas identidades las usaremos todo el tiempo.

Comencemos con calcular $d\omega$:

$$\begin{aligned}d\omega(X, Y, Z) &= X(\omega(Y, Z)) - Y(\omega(X, Z)) + Z(\omega(X, Y)) \\ &\quad + \omega([Y, Z], X) - \omega([X, Z], Y) + \omega([X, Y], Z).\end{aligned} \quad (10)$$

Tomando X, Y, Z campos tal que $\nabla_X Y(p) = \nabla_X Z(p) = \dots = 0$ entonces como $d\omega$ es un tensor concluimos que:

$$d\omega(X, Y, Z) = \langle (\nabla_X J)Y, Z \rangle + \langle (\nabla_Y J)Z, X \rangle + \langle (\nabla_Z J)X, Y \rangle. \quad (11)$$

Ahora estudiemos el tensor de Nijenhuis. Por definición:

$$N_J(X, Y) = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY].$$

Usando la simetría de la métrica obtenemos que:

$$\begin{aligned} N_J(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X + J(\nabla_{JX} Y - \nabla_Y(JX)) \\ &\quad + J(\nabla_X(JY) - \nabla_{JY} X) - (\nabla_{JX}(JY) - \nabla_{JY}(JX)). \end{aligned}$$

Simplificando esta expresión concluimos:

$$N_J(X, Y) = (J(\nabla_X J) - \nabla_{JX} J)Y - (J(\nabla_Y J) - \nabla_{JY} J)X. \quad (12)$$

De las ecuaciones 11 y 12 podemos deducir:

Proposición 7.21. *En las condiciones anteriores, si J es paralela para ∇ (es decir $\nabla J = 0$) entonces $d\omega = 0$ y $N_J = 0$. En otras palabras (M, J, ω) es Kähler (vease los ejemplos de 2.3).*

Veremos ahora que el recíproco también es verdad, por lo tanto J es paralela para ∇ si y solo si (M, J, ω) es Kähler.

Supongamos ahora que $d\omega = 0$, entonces por la ecuación 11 podemos hacer ciertas permutaciones cíclicas que nos son útiles por ejemplo para calcular:

$$\begin{aligned} \langle N_J(X, Y), Z \rangle &= \langle J(\nabla_X J)Y, Z \rangle - \langle (\nabla_{JX} J)Y, Z \rangle \\ &\quad - \langle J(\nabla_Y J)X, Z \rangle + \langle (\nabla_{JY} J)X, Z \rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

Usando las permutaciones cíclicas en el segundo y cuarto término obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle N_J(X, Y), Z \rangle &= \langle J(\nabla_X J)Y, Z \rangle - \langle J(\nabla_Y J)X, Z \rangle + \langle (\nabla_Y J)Z, JX \rangle \\ &\quad + \langle (\nabla_Z J)JX, Y \rangle - \langle (\nabla_X J)Z, JY \rangle - \langle (\nabla_Z J)JY, X \rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

Simplificando y usando reiteradamente las ecuaciones 9 tenemos que:

$$\langle N_J(X, Y), Z \rangle = 2\langle J(\nabla_Z J)X, Y \rangle. \quad (15)$$

Gracias a esta ecuación concluimos:

Teorema 7.22. *En las condiciones anteriores, J es paralela para ∇ si y solamente si (M, J, ω) es Kähler.*

La igualdad anterior nos da una última identidad interesante, como N_J es antilineal complejo en ambas coordenadas ($N_J(JX, Y) = N_J(X, JY) = -JN_J(X, Y)$), entonces:

$$\begin{aligned}
2\langle J(\nabla_{JZ}J)X, Y \rangle &= \langle N_J(X, Y), JZ \rangle = -\langle J \circ N_J(X, Y), Z \rangle \\
&= \langle N_J(X, JY), Z \rangle = 2\langle J \circ \nabla_Z X, JY \rangle
\end{aligned}$$

Y usando $J^* = J^{-1}$ nuevamente obtenemos:

$$\langle J(\nabla_{JZ}J)X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle \quad (16)$$

Y como esto es verdad para todos X, Y podemos concluir que $J \circ \nabla_{JZ}J = \nabla_Z J$. En particular por 12:

$$N_J(X, Y) = 2(J(\nabla_Y J)X - J(\nabla_X J)Y) \quad (17)$$

Resumiendo estas cuentas:

Teorema 7.23. *Supongamos que (M, ω) es una variedad simpléctica y $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$. Tomemos $\langle \cdot, \cdot \rangle_J = \omega(J\cdot, \cdot)$ y ∇ la conexión de Levi-Civita. En estas condiciones tenemos que $J(\nabla_{JX}Y) = \nabla_X Y$ y el tensor de Nijenhuis se puede calcular con la ecuación 17.*

Referencias

- [AL94] M. Audin and J. Lafontaine. *Holomorphic curves in symplectic geometry*. Springer Basel AG, 1994.
- [Arn86] V. I. Arnold. First steps in symplectic topology. *Russian Math Surveys*, 1:1–21, 1986.
- [DK90] S. K. Donaldson and P. B. Kronheimer. *The Geometry of Four Manifolds*. Clarendon Press, Oxford, 1990.
- [Eli67] H. I. Eliasson. Geometry of manifolds of maps. *J. Differential Geometry*, 1:169–194, 1967.
- [Gro85] M. Gromov. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.*, 82:307–347, 1985.
- [GT98] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998.
- [Ham82] R. S. Hamilton. The inverse function theorem of nash and moser. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 7:65–222, 1982.
- [Hat02] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [Hor90] L. Hormander. *An introduction to complex Analysis in several variables*. North Holland Mathematical library, 1990.
- [HZ94] H. Hofer and E. Zehnder. *Symplectic invariants and Hamiltonian Dynamics*. Birkhauser Verlag, 1994.
- [JWM74] J. D. Stasheff J. W. Milnor. *Characteristic classes*. Princeton University Press, 1974.
- [MS04] D. McDuff and D. Salamon. *J-holomorphic Curves and Symplectic Topology*. American Mathematical Society colloquium publications, 2004.
- [Nel69] E. Nelson. *Topics in Dynamics I: Flows*. Princeton University Press, 1969.
- [Sma73] S. Smale. An infinite dimensional version of sard’s theorem. *Am. Journal Math.*, 87:213–221, 1973.
- [SS11] E. Stein and R. Shakarchi. *Princeton Lectures in Analysis IV, Functional Analysis*. Princeton University Press, 2011.
- [Tau96] C. H. Taubes. Counting pseudo-holomorphic submanifolds in dimension 4. *J. Differential Geometry.*, 44:818–893, 1996.
- [Voi02] C. Voisin. *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry*, volume 1. Cambridge University Press, 2002.
- [Weh04] K. Wehrem. Energy quantization and mean value inequalities for nonlinear boundary value problems. <https://arxiv.org/abs/math/0405484v1>., 2004.