

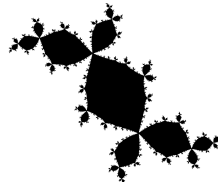
TRABAJO MONOGRÁFICO

Polinomios cuadráticos con ciclo
superatractor

Por: Joaquín Lejtreger

Orientador: Juan Alonso

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY



Febrero de 2020

Resumen

En esta monografía se estudia la dinámica de polinomios de grado 2 en la esfera cuyo punto crítico es periódico. Uno de los objetivos principales es realizar un análisis geométrico del conjunto de Julia relleno de dichos polinomios.

Una de las herramientas centrales es el teorema de Thurston acerca de los cubrimientos ramificados con finitos puntos postcríticos. Este establece una condición topológica para decidir cuando uno de dichos mapas es equivalente, en cierto sentido, a una función racional. Esta equivalencia de Thurston es una intermedia entre la conjugación dinámica y la geométrica.

Aplicamos el teorema de Thurston a una familia específica de cubrimientos llamados mapas araña, que son modelos topológicos de polinomios cuadráticos con punto crítico pre-periódico. Determinamos qué mapas araña son equivalentes a polinomios, y probamos que todos los polinomios estudiados son equivalentes a uno de estos mapas.

Se combinan resultados clásicos de la dinámica local de funciones holomorfas con los modelos topológicos y la equivalencia de Thurston para encontrar la topología del conjunto de Julia relleno de los polinomios estudiados.

Esta monografía está basada en los libros [10] y [8].

Índice

Introducción	4
1. Estudio de Preliminares	7
1.1. Algunos conceptos de análisis complejo	7
1.1.1. Definiciones y resultados clásicos de funciones holomorfas	7
1.1.2. Superficies de Riemann	8
1.2. Métricas hiperbólicas	10
1.3. Dinámica de funciones racionales	12
1.4. Dinámica de polinomios	15
2. El mapa de Böttcher	16
2.1. El teorema de Böttcher	16
2.2. Extensión maximal del mapa de Böttcher	19
2.3. El mapa de Böttcher alrededor de infinito	23
2.4. Extensión al borde del mapa de Böttcher	25
3. Cubrimientos ramificados y mapas araña	29
3.1. Cubrimientos ramificados	29
3.2. El teorema de Thurston	32
3.2.1. Orbifolds	33
3.2.2. La transformación lineal de Thurston	34
3.3. Mapas araña	36
3.3.1. Ángulos pares e impares	37
3.3.2. Araña para $\theta \in \mathbb{Q}^{even}$	38
3.3.3. Araña para $\theta \in \mathbb{Q}^{odd}$	39
3.3.4. Extensión del mapa f_θ	40
3.4. Mapas araña y obstrucciones de Thurston	43
3.4.1. Ciclos de Levy	44
3.4.2. Demostración del teorema 3.4.6	50

4. Rayos exteriores	55
4.1. Definición	55
4.2. Polinomios con puntos críticos fuera de K_p	56
4.3. Sectores	58
5. Modelo de disco pinzado	60
5.1. Parametrización interna de K_p	60
5.2. El árbol de Hubbard	62
5.2.1. Definición y propiedades básicas	62
5.2.2. Rayos exteriores y el árbol de Hubbard	65
5.3. Equivalencia con mapas araña	65
5.4. El teorema del disco pinzado	69
Anexo	74
A. El truco de Alexander	75
B. El teorema de Riemann-Hurwitz	77
C. Visualizando el conjunto K_p	79
Referencias	83

Introducción

La *dinámica compleja* consiste en el estudio de la iteración de funciones holomorfas. Una de las aplicaciones de esta rama de la matemática surge de la búsqueda de condiciones iniciales para asegurar que el método de Newton converja (un método numérico para hallar raíces de polinomios). Schröder y Cayley fueron los primeros en estudiar estos temas, encontrando condiciones para su convergencia en polinomios de grado 2 en el plano complejo. Más adelante algunos matemáticos se empezaron a interesar por la teoría local alrededor de puntos fijos para funciones holomorfas; entre ellos estaba Böttcher, cuyo teorema demostramos en 2.1.1 y da una conjugación local entre un polinomio y un mapa de la forma $z \mapsto z^k$ en el entorno de un punto fijo crítico. Si bien los resultados principales de este trabajo son más recientes, este teorema es fundamental para él.

Los aportes de Fatou y Julia fueron los que terminaron de consolidar esta rama de los sistemas dinámicos. Ellos lograron, mediante la teoría de Montel para funciones normales, estudiar la dinámica de las funciones holomorfas con un enfoque más global, y no localmente como se hacía hasta ese momento.

La historia de esta rama de la matemática hasta la llegada de Fatou y Julia se puede encontrar en [1].

El objetivo de este trabajo es, mediante el teorema de Böttcher y el aporte de la teoría de Teichmüller a través del teorema de Thurston, estudiar la dinámica de polinomios cuadráticos. En particular nos interesan aquellos que tienen ciclo superatractor, es decir, una órbita periódica de un punto crítico. Nos centramos en estudiar la geometría de su conjunto de Julia relleno K_p : el complemento de la cuenca de atracción de ∞ .

Como un polinomio de grado 2 tiene un único punto crítico en \mathbb{C} , la existencia de un ciclo superatractor implica que no hay puntos críticos en la cuenca de atracción de ∞ . En el teorema 2.2.2 probamos que esto implica que el mapa de Böttcher alrededor de ∞ se puede extender a toda su cuenca de atracción. Luego, en el teorema 2.4.1, demostramos que este mapa también se extiende al borde. Esto nos permite definir el *lazo de Caratheodory* (denotado γ_p): un mapa continuo y sobreyectivo de la circunferencia S^1 al conjunto J_p .

Uno de los objetivos de este trabajo es identificar qué puntos de S^1 tienen la misma imagen por γ_p .

Para lograr este objetivo enunciamos un teorema para clasificación de cubrimientos ramificados de Thurston. Hubbard y Douady elaboraron en [5] una demostración de este teorema en base a las notas de un curso dado por Thurston.

Teorema 3.2.15 (Thurston). *Sea $f : S^2 \rightarrow S^2$ un mapa de Thurston con orbifold hiperbólico. Entonces f es equivalente Thurston a una función racional si y solo si toda multicurva f -estable Γ cumple que $\lambda_\Gamma < 1$.*

Un *cubrimiento ramificado* es un mapa de la esfera que es un cubrimiento salvo en finitos puntos; los puntos donde la función no es un cubrimiento se llaman puntos críticos. Si además la órbita futura de todos sus puntos críticos es finita decimos que es un *mapa de Thurston*. Una definición más formal se puede encontrar en 3.1.7. Los polinomios cuadráticos con ciclo superatractor, por ejemplo, son mapas de Thurston. La equivalencia de Thurston es una conjugación geométrica por dos homeomorfismos isotópicos relativos al conjunto de postcríticos. Estos homeomorfismos además deben coincidir en dicho conjunto. La definición de este concepto se puede encontrar en 3.2.1. La demostración de este teorema implica profundizar en la teoría de Teichmüller y escapa al alcance de este trabajo. El desarrollo de esta teoría se puede encontrar en [7] y la demostración del teorema de Thurston se puede encontrar en [8].

Con el objetivo de aplicar este teorema para el estudio de polinomios cuadráticos construimos los mapas araña: funciones que se comportan, en un sentido topológico, como polinomios de grado 2. Estas funciones fueron definidas en [2] donde se utilizan para clasificar polinomios en un contexto más general al de este trabajo. Cada ángulo racional θ tiene su propio mapa araña, y la construcción depende de si el denominador es par o impar. Utilizando esta construcción probamos el siguiente teorema.

Teorema 5.3.1. *Todo polinomio de grado 2 con ciclo superatractor es equivalente Thurston a un mapa araña.*

Además, utilizando el teorema de Thurston encontramos qué mapas araña son equivalentes a una función racional, en el teorema 3.4.2. Este teorema en particular nos dice que todo mapa araña asociado a un ángulo impar es equivalente Thurston a un polinomio con ciclo superatractor.

Durante la demostración del teorema 5.3.1 vamos a probar que todo polinomio cuadrático con ciclo superatractor es equivalente Thurston a los mapas

araña de dos ángulos distintos. Al par de ángulos que cumplen esto los llamamos ángulos compañeros. Para demostrar el teorema 5.3.1 vamos a definir el concepto de rayos exteriores y ver su relación con los mapas araña.

El concepto de ángulos compañeros es especialmente útil en el estudio del conjunto de Mandelbrot: el conjunto que corresponde a los polinomios con Julia conexo en el espacio de parámetros para polinomios de grado 2. Cada par (θ, θ') se corresponde con el “centro” de una componente del Mandelbrot. El estudio de este conjunto escapa del alcance de este trabajo y se puede ver en [8].

Los rayos exteriores permiten definir una semiconjugación entre el polinomio p en J_p y el mapa de duplicación de ángulos. Luego, para dar una descripción combinatoria de la topología de K_p , utilizamos las “secuencia de entrelazado”. Esta secuencia conjuga la duplicación de ángulos con el shift de dos símbolos.

Teorema 5.4.5. *Sea p_θ un polinomio que es equivalente Thurston a un mapa θ -araña y sea γ_θ su lazo de Caratheodory.*

$$\gamma_\theta(t_1) = \gamma_\theta(t_2) \iff \Sigma_\theta(t_1) = \Sigma_\theta(t_2)$$

donde $\Sigma_\theta(t)$ es la secuencia de entrelazado de t para el ángulo θ .

Utilizando este teorema vamos a ver que K_p se puede obtener del disco cocientando la envolvente convexa de los puntos que tienen la misma secuencia de entrelazado.

La organización del trabajo es la siguiente: en el capítulo 1 resumiremos conceptos y resultados preliminares acerca de superficies de Riemann, métricas hiperbólicas y de dinámica compleja. En el capítulo 2 probaremos la existencia del mapa de Böttcher y veremos condiciones para la extensión de dicho mapa. El capítulo 3 trataremos el teorema de Thurston y construiremos los mapas araña. En el capítulo 4 estudiaremos los rayos exteriores, enfocándonos en las propiedades que usaremos. En el último capítulo probaremos que todo polinomio cuadrático con ciclo superatractor es equivalente Thurston a un mapa araña, además de describir la topología del conjunto K_p como un disco pinzado.

Capítulo 1

Estudio de Preliminares

En este capítulo enunciamos algunas definiciones y propiedades básicas pertinentes a la monografía. En primer lugar vamos a hablar sobre resultados clásicos de análisis complejo. En particular nos interesan dos resultados: el teorema de Montel para familias de funciones y el teorema de transformaciones conformes de Riemann. Si bien estos teoremas en general son conocidos, su uso en este trabajo es extenso, por lo que vale la pena repasarlos. Luego vamos a exponer conceptos básicos de la dinámica de funciones holomorfas.

Son pocos los teoremas que se van a demostrar en este capítulo; sin embargo, se dejan referencias bibliográficas donde se pueden consultar las demostraciones.

1.1. Algunos conceptos de análisis complejo

Para empezar, vamos a exponer algunos resultados y definiciones de análisis complejo. Las demostraciones pertinentes a esta sección se pueden encontrar en [7], [9] y [11].

1.1.1. Definiciones y resultados clásicos de funciones holomorfas

Una función holomorfa es una función que es derivable en el plano complejo. Si permitimos además que tomen el valor de ∞ las podemos pensar como funciones de la esfera. Hay muchos resultados relativos a las funciones holomorfas que no son ciertos cuando hablamos de funciones derivables en \mathbb{R}^2 . Sin embargo, no nos vamos a centrar en explicar estas diferencias.

Definimos $\hat{\mathbb{C}}$ como la compactificación por un punto del plano complejo, es decir $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. A este espacio, que topológicamente es una esfera de dimensión

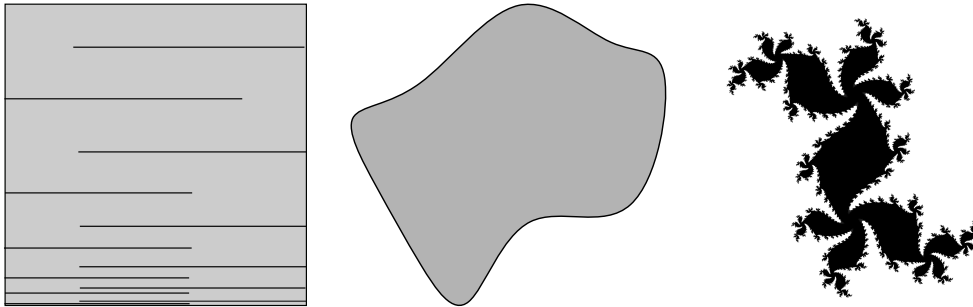


Figura 1.1: Tres ejemplos de simplemente conexos del plano. No importa qué tan extrañas sean sus fronteras, siempre existirá una transformación conforme entre el interior de estas figuras y el disco.

2, típicamente se lo llama la *esfera de Riemann*.

En primer lugar vamos a enunciar el teorema de Montel. Este teorema habla de cuándo familias de funciones son *normales*; es decir, compactas con la topología de convergencia uniforme en compactos.

Teorema 1.1.1 (Montel). Sean $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{S}}$, U abierto de $\hat{\mathbb{S}}$ y sea \mathcal{F} una familia de funciones holomorfas tales que $\mathcal{F} \subseteq \{f : U \rightarrow \hat{\mathbb{S}} : f(U) \subseteq \hat{\mathbb{S}} \setminus \{z_1, z_2, z_3\}\}$. Entonces \mathcal{F} es normal.

Definición 1.1.2. Una *transformación conforme* es una función holomorfa y biyectiva. Decimos que dos conjuntos U y V son *conformemente equivalentes* si existe una transformación conforme entre ellos.

Teorema 1.1.3 (Riemann). Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo. Entonces U es conformemente equivalente a \mathbb{D} si y sólo si $U \neq \mathbb{C}$

Este teorema es algo sorprendente, y, como una consecuencia directa, tenemos que cualquier simplemente conexo (no importa qué tan extraño sea su aspecto) es homeomorfo al disco. Algunos ejemplos de simplemente conexos se pueden ver en la figura 1.1.

1.1.2. Superficies de Riemann

Una superficie de Riemann es una variedad de dimensión 1 compleja donde el cambio de cartas es holomorfo. Si bien hay varias superficies de Riemann que no son subconjuntos de la esfera de Riemann, en general nos van a interesar este tipo de superficies.

Tres ejemplos superficies de Riemann (que no son la misma) son el disco, la esfera y el plano complejo. Más adelante, mediante el teorema de uniformización, veremos por qué estas tres son importantes.

En esta sección vamos a analizar cuáles son los automorfismos de las tres superficies. Para describirlos primero vamos a definir las transformaciones de Möbius.

Definición 1.1.4. Las transformaciones de Möbius son funciones de la forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

con $ad - bc \neq 0$

Proposición 1.1.5. Las transformaciones de Möbius con la composición forman un grupo isomorfo a $PSL(2, \mathbb{C})$.

Teorema 1.1.6.

1. $\text{Aut } \hat{\mathbb{S}}$ es el grupo de todas las transformaciones de Möbius
2. $\text{Aut } \mathbb{C}$ es el grupo de las transformaciones de Möbius de la forma $z \mapsto az + b$ con $a \neq 0$
3. $\text{Aut } \mathbb{D}$ es el grupo de las transformaciones de Möbius de la forma

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}$$

con $\theta \in [0, 2\pi)$ y $a \in \mathbb{D}$

Teorema 1.1.7 (Uniformización). Toda superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente a la esfera, el plano o el disco.

Este teorema nos permite estudiar las superficies de Riemann mediante su *cubrimiento universal*.

Definición 1.1.8. Sea X un espacio topológico. Un *cubrimiento* es un espacio \tilde{X} y un mapa $p : \tilde{X} \rightarrow X$ tal que para cada $x \in X$ existe un entorno U tal que $p^{-1}(U)$ es unión disjunta de abiertos de \tilde{X} en los cuales p es un homeo.

Definición 1.1.9. Un *cubrimiento universal* de un espacio es un cubrimiento (\tilde{X}, p) con \tilde{X} simplemente conexo.

El cubrimiento universal, en caso de existencia, es único y es de gran utilidad para estudiar espacios. Se puede encontrar más información sobre este objeto topológico en [6].

Como corolario del teorema de uniformización tenemos lo siguiente:

Corolario 1.1.10. *Si X es una superficie de Riemann, su cubrimiento universal es el plano, el disco o la esfera.*

Este corolario da lugar a la siguiente definición. La palabra *hiperbólica* tiene que ver con la curvatura de la superficie, sin embargo, no vamos a profundizar sobre este tema.

Definición 1.1.11. Sea X una superficie de Riemann. Decimos que X es *hiperbólica* si su cubrimiento universal es el disco.

También se puede probar que cualquier subconjunto de la esfera que omita 3 puntos es una superficie hiperbólica. Otros ejemplos de superficies hiperbólicas son las superficies cerradas de género mayor o igual que 2.

Podemos identificar las superficies hiperbólicas en función del grupo de automorfismos del disco, como se puede ver en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.12. *Sea X una superficie de Riemann hiperbólica. Entonces $X = \mathbb{D}/\Gamma$, donde Γ es un subgrupo de $\text{Aut } \mathbb{D}$*

1.2. Métricas hiperbólicas

Informalmente, una métrica nos da una forma de “medir largos de curvas” y, por lo tanto, distancias. Dados dos puntos P y Q de una superficie de Riemann X nos gustaría definir la “curva de largo mínimo” entre P y Q . Para poder realizar esto no basta con definir una función distancia, necesitamos una estructura diferenciable.

Definición 1.2.1. Sea X una superficie de Riemann. Una *métrica* es una función $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ de clase C^2 . Si $z \in X$ y $\zeta \in \mathbb{C}$ es un vector del plano tangente, definimos *el largo de ζ para la métrica ρ* como

$$|(z, \zeta)|_\rho = \rho(z)|\zeta|.$$

Intuitivamente esta definición nos dice que los vectores pueden ser más largos o más cortos según el punto del espacio.

Ejemplo 1.2.2. La métrica euclídea se obtiene tomando $\rho(z) \equiv 1$. En ella, el largo del vector no depende del punto donde se esté midiendo.

Ejemplo 1.2.3. La métrica de Poincaré (también llamada métrica hiperbólica) en el disco se define como

$$\rho(z) = \frac{2}{1 - |z|^2}$$

Observamos que, cuanto más nos acercamos al borde del disco, más “largos” son los vectores.

Definición 1.2.4. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ una curva diferenciable. Definimos el *largo* de γ como

$$l_\rho(\gamma) = \int_0^1 |(\gamma(t), \gamma'(t))|_\rho dt$$

Si la métrica está implícita, podemos denotaremos el largo de la curva gama como l_γ .

A su vez podemos definir la distancia entre P y Q como

$$d_\rho(P, Q) = \inf_\gamma \{l_\rho(\gamma) : \gamma(0) = P \text{ y } \gamma(1) = Q\}$$

Por el corolario 1.1.10, para definir métricas en superficies cuyo cubrimiento universal es el disco nos interesan las métricas para las cuales los automorfismos del disco son isometrías. La siguiente proposición nos da una idea de la importancia de la métrica de Poincaré definida en el ejemplo 1.2.3

Proposición 1.2.5. *Toda métrica invariante por isometrías del disco es un múltiplo de la métrica de Poincaré.*

Supongamos que tenemos una métrica definida en un dominio Ω_2 y una función $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ sobreyectiva y holomorfa. Podemos utilizar la métrica de Ω_2 para definir una métrica en Ω_1

Definición 1.2.6. Sea $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$, y sea ρ una métrica de Ω_2 . El *pullback* de ρ por f se define por

$$f^* \rho(z) = \rho(f(z)) |\partial f / \partial z|$$

Además, a partir del pullback podemos definir el concepto de isometría. Una isometría es una función entre dos espacios que preserva la métrica.

Definición 1.2.7. Sean (Ω_1, ρ_1) y (Ω_2, ρ_2) dos superficies de Riemann con sus respectivas métricas. Sea $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ una transformación conforme. Decimos que f es una *isometría entre Ω_1 y Ω_2* si se cumple que

$$f^* \rho_2 = \rho_1$$

A partir de esta definición se puede probar la siguiente proposición.

Proposición 1.2.8. *Toda superficie hiperbólica X admite una métrica donde la proyección $p : \mathbb{D} \rightarrow X$ es una isometría local. A esta métrica la llamamos métrica hiperbólica de X .*

Las funciones holomorfas contraen la métrica hiperbólica.

Proposición 1.2.9. Sean X e Y superficies de Riemann hiperbólicas. Sean d_X y d_Y las distancias provenientes de la métrica hiperbólica para X e Y respectivamente. Sea $f : X \rightarrow Y$ holomorfa. Entonces se cumple que para todo $x_1, x_2 \in X$

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq d_X(x_1, x_2)$$

donde la igualdad se cumple si y sólo si f es un cubrimiento.

Si bien no demostraremos esta proposición, la idea de la prueba es simplemente levantar f al cubrimiento universal (el disco) y aplicar allí el Lema de Schwartz.

Finalmente vamos a enunciar una propiedad fundamental sobre superficies de Riemann hiperbólicas y funciones holomorfas, que será de utilidad en la sección 2.4

Corolario 1.2.10. Sean $U, V \subseteq \mathbb{C}$ dominios hiperbólicos. Denotamos por $|(z, \zeta)|_U$ y $|(z, \zeta)|_V$ los largos del vector ζ en el punto z para la métrica hiperbólica de U y V respectivamente. Si $\bar{U} \subseteq V$ entonces existe $C < 1$ tal que

$$|(z, \zeta)|_V \leq C |(z, \zeta)|_U$$

La demostración de este corolario viene de que la inclusión $\iota : U \rightarrow V$ es una función holomorfa.

1.3. Dinámica de funciones racionales

Esta parte de los preliminares está más estrechamente relacionada con la monografía. El objeto de estudio de este trabajo es la dinámica de funciones holomorfas en $\hat{\mathbb{S}}$. Un resultado clásico de análisis complejo nos dice que estas funciones son exactamente las racionales, es decir, funciones de la forma

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

con P y Q polinomios complejos.

El estudio de la dinámica de las funciones racionales en la esfera se centra en entender dos conjuntos totalmente invariantes, uno donde la dinámica es sencilla y otro en donde es más caótica.

Definición 1.3.1. Sea $\hat{\mathbb{S}}$ la esfera de Riemann, y $f : \hat{\mathbb{S}} \rightarrow \hat{\mathbb{S}}$ una función holomorfa. Definimos el *conjunto de Fatou* de f como el conjunto de puntos z_0 tales que existe un entorno U de z_0 para el cual la familia $\{f^{on}|_U\}$ es normal, y lo denotamos F_f . El complemento de dicho conjunto lo definimos como el *conjunto de Julia* de f y lo denotamos J_f

El teorema de Montel (que se enunció en el capítulo 1) es lo que inspira la definición de estos conjuntos.

Proposición 1.3.2. *Sea $z \in J_f$ y U entorno de z . Entonces*

$$\bigcup_{n \geq 1} f^{\circ n}(U)$$

cubre toda la esfera salvo, a lo sumo, dos puntos.

Demostración. Si no fuera así, entonces $\{f|_U^{\circ n}\}$ sería una familia normal por el teorema de Montel, lo que es absurdo pues $z \in J_f$ □

Esta proposición nos da una noción de lo caótica que es la dinámica en el conjunto de Julia.

Ejemplo 1.3.3. Un ejemplo que permite ilustrar estos fenómenos es el de la función $f(z) = z^2$. Para este mapa tenemos que $J_f = S^1$ y $F_f = \hat{\mathbb{S}} \setminus S^1$.

Fuera de S^1 , la dinámica es sumamente sencilla. Todo lo que está adentro del círculo de radio 1 es atraído a 0, y todo lo que está afuera es atraído a ∞ (como se puede ver en la imagen 1.2)

Por otro lado la dinámica en S^1 es más complicada. Allí el mapa es conjugado a $t \mapsto 2t$ si pensamos S^1 como \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Este mapa tiene un comportamiento caótico y propiedades interesantes. Algunas de ellas se pueden ver en [3].

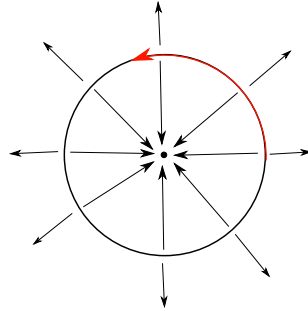


Figura 1.2: Esquema de la dinámica de $f(z) = z^2$ en el plano complejo.

Ahora vamos a explorar características de los conjuntos J_f y F_f . Las propiedades aquí expuestas se pueden ver demostradas en [10].

Proposición 1.3.4. *El Fatou es abierto y el Julia es cerrado y no vacío. Además, ambos conjuntos son totalmente invariantes. Es decir, $F_f = f(F_f) = f^{-1}(F_f)$.*

Los puntos fijos cuya derivada tiene módulo distinto de 1 se pueden clasificar de la siguiente manera:

Definición 1.3.5. Sea $f : \hat{\mathbb{S}} \rightarrow \hat{\mathbb{S}}$ holomorfa. Sea z un punto fijo.

- (1) Si $|f'(z)| > 1$ decimos que z es *repulsor*.
- (2) Si $|f'(z)| < 1$ decimos que z es *atractor*.
- (3) Si $f'(z) = 0$ decimos que z es *superatractor*.

Estos nombres vienen de estudiar qué pasa con los puntos cercanos a ellos al iterarlos por la función.

A los atractores y repulsores los podemos clasificar de la siguiente manera:

Proposición 1.3.6. Sea $f : \hat{\mathbb{S}} \rightarrow \hat{\mathbb{S}}$ holomorfa. Sea z un punto fijo.

- (1) Si z es repulsor entonces $z \in J_f$.
- (2) Si z es atractor entonces $z \in F_f$.

Vale aclarar que los puntos cuya derivada tiene módulo 1 también se pueden clasificar, sin embargo, dicha clasificación es más complicada. También se pueden extender estos conceptos para puntos periódicos, en particular nos interesará el caso de un superatractor.

Definición 1.3.7. Sea z un punto periódico de período k . Decimos que el ciclo $\{f^{on}(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es *superatractor* si z es superatractor de f^{ok} .

Otra definición que será necesaria para este trabajo es la de la cuenca de atracción. La cuenca de atracción de un punto son todos los puntos “que se acercan a él”.

Definición 1.3.8. Sea $f : \hat{\mathbb{S}} \rightarrow \hat{\mathbb{S}}$ una función holomorfa, y sea z_0 un punto fijo atractor. Definimos la *cuenca de atracción* de z_0 como

$$\mathcal{A}_{z_0} = \{z \in \hat{\mathbb{S}} : \lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(z) = z_0\}$$

Observación. \mathcal{A}_{z_0} es un conjunto abierto.

Definición 1.3.9. La cuenca inmediata de atracción de z_0 es la componente conexa de \mathcal{A}_{z_0} que contiene a z_0 .

1.4. Dinámica de polinomios

Los polinomios son un caso particular de las funciones racionales. Si el polinomio es de grado $d \geq 2$ es fácil ver que ∞ es un punto crítico de orden d . En particular esto quiere decir que es un superatractor. El estudio del complemento de la cuenca de infinito es un objetivo principal de este trabajo.

A lo largo de esta sección, asumimos que p es un polinomio de grado d .

Definición 1.4.1. El *conjunto de Julia relleno* se define como $K_p = \mathbb{C} \setminus \mathcal{A}_\infty$.

Proposición 1.4.2. K_p es cerrado y $\partial K_p = J_p$

Demostración. 1: $\partial K_p \subseteq J_p$

Sea $z \in \partial K_p$, como \mathcal{A}_∞ es abierta tenemos que z tiene órbita acotada. Sin embargo, tiene puntos arbitrariamente cerca que se van a infinito, por lo que $z \in J_p$.

2: $J_p \subseteq \partial K_p$

Si $z \in J_p$, entonces tiene órbita acotada. Si $z \in \overset{\circ}{K}_p$, esto quiere decir que existe U entorno de z tal que $U \subseteq \overset{\circ}{K}_p$. Como $\{p^{on}|_U\}$ es una familia acotada de funciones, por el teorema 1.1.1, es normal. Esto implica que $U \subseteq F_p$, lo cual es absurdo. Luego, $z \in \partial K_p$ y $z \in K_p$. □

Proposición 1.4.3. \mathcal{A}_∞ es conexo.

Demostración. Sea U un entorno de ∞ . Como $p^{-1}(\infty) = \{\infty\}$ y toda componente conexa de $p^{-1}(U)$ debe contener a una preimagen de ∞ , tenemos que $p^{-1}(U)$ es conexo.

Finalmente podemos escribir la cuenca de atracción de ∞ como la siguiente unión

$$\mathcal{A}_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} p^{-n}(U)$$

Como \mathcal{A}_∞ es unión de abiertos conexos cuya intersección es no vacía la proposición queda demostrada. □

Capítulo 2

El mapa de Böttcher

La idea de este capítulo es estudiar el comportamiento de las funciones racionales cerca de un punto fijo superatractor. Vamos a encontrar una conjugación local entre dicho polinomio y un mapa de la forma $z \mapsto z^k$ y también estudiar hasta dónde podemos extender dicha conjugación.

2.1. El teorema de Böttcher

Iniciamos este capítulo con el teorema de Böttcher. Su importancia para este trabajo está en que, cuando hablamos de un polinomio, ∞ siempre es un punto fijo superatractor. Este teorema también vale para funciones racionales.

Teorema 2.1.1 (Böttcher). *Sea p polinomio con un punto fijo superatractor \hat{z} . Existe un entorno U de \hat{z} y un cambio de coordenadas holomorfo $\phi : U \rightarrow \mathbb{D}_r$ con $0 < r \leq 1$ tal que:*

1. $\phi(\hat{z}) = 0$
2. $\phi \circ p(z) = \phi(z)^k$, donde k es el orden del punto crítico.

Además, ϕ es único a menos de multiplicar por una raíz $(k-1)$ -ésima de la unidad.

Demostración. Primero observamos que basta considerar el caso $\hat{z} = 0$.

- Si $\hat{z} \in \mathbb{C}$, conjugamos por $\alpha(z) = z - \hat{z}$
- Si $\hat{z} = \infty$, conjugamos por $\alpha(z) = \frac{1}{z}$

Sea $p(z) = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots$, y sea $c \in \mathbb{C}$ tal que $c^{k-1} = a_k$, tenemos que

$$cp(z/c) = \frac{ca_k z^k}{c^k} + \frac{ca_{k+1} z^{k+1}}{c^{k+1}} + \dots = z^k + \frac{ca_{k+1} z^{k+1}}{c^{k+1}} + \dots$$

Por lo que conjugando por $\alpha(z) = cz$ podemos considerar el caso en que $a_k = 1$.

Luego, podemos escribir

$$p(z) = z^k(1 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots)$$

y con la notación $\eta(z) = b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 \dots$ podemos reescribir nuestro polinomio en función de η :

$$p(z) = z^k(1 + \eta(z))$$

Por continuidad sabemos que existe $r_0 \in \mathbb{R}$ tal que $|z| < r_0 \implies |\eta(z)| < 1/2$
Sea $r = \min\{r_0, 1/2\}$, vamos a ver que $p(\mathbb{D}_r) \subseteq \mathbb{D}_r$:

$$|p(z)| \leq |z^k(1 + \eta(z))| = |z^k| |1 + \eta(z)| \leq \frac{3}{2} |z^k| \leq \frac{3}{4} |z|$$

Además, si $|\eta(z)| < 1$ tenemos

$$p(z) \neq 0 \text{ si } z \neq 0 \text{ y } z \in \mathbb{D}_r \tag{2.1}$$

Utilizando estas dos propiedades buscamos una conjugación de $p|_{\mathbb{D}_r}$. Para ello, vamos a encontrar una expresión para $p^{\circ n}$

Afirmación. $p^{\circ n}(z) = z^{k^n} (1 + k^{n-1} b_1 z + O(z^2))$

Demostración. Inductivamente,

$$\begin{aligned} p^{\circ n+1}(z) &= p(z)^{k^n} (1 + k^{n-1} b_1 p(z) + O(p(z)^2)) \\ &= z^{k^{n+1}} (1 + k^{n-1} b_1 (z^k (1 + b_1 z + O(z^2)) + O(z^2))) (1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots)^{k^n} \\ &= z^{k^{n+1}} (1 + O(z^2)) (1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots)^{k^n} \\ &= z^{k^{n+1}} (1 + k^n b_1 z + O(z^2)) \end{aligned}$$

■

Al tener una expresión para la iterada n -ésima, consideramos

$$\begin{aligned} \phi_n(z) &= \sqrt[k^n]{p^{\circ n}(z)} = z(1 + k^{n-1} b_1 z + \dots)^{1/k^n} \\ &(1 + k^{n-1} b_1 p(z) + O(p(z)^2)) \end{aligned}$$

Como $p^{n-1}(z)$ está en \mathbb{D}_r observamos que $|\eta(p^{n-1}(z))| < 1/2$, por lo que $Re(1 + \eta(p^{n-1}(z))) > 0$. Esto implica que podemos elegir una raíz k^n -ésima holomorfa. Se puede elegir dicha raíz con la siguiente forma:

$$(1 + k^{n-1}b_1z + \dots)^{1/k^n} = (1 + \frac{b_1}{k}z + \dots)$$

Además, sabemos que

$$\phi_n(p(z)) = \sqrt[k^n]{p^{\circ n+1}(z)} = \phi_{n+1}(z)^k \quad (2.2)$$

Usando la ecuación 2.2 vemos que si ϕ_n converge uniformemente su límite nos da la conjugación que buscamos.

Afirmación. ϕ_n converge uniformemente.

Demostración. Podemos cubrir $\mathbb{D}_r \setminus \{0\}$ con la función exponencial:

$$\begin{aligned} exp : \mathbb{H}_r &\rightarrow \mathbb{D}_r \\ Z &\mapsto e^Z \end{aligned}$$

donde $\mathbb{H}_r = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) < \log(r)\}$.

Si $|z| < 1$ podemos definir un logaritmo holomorfo mediante la serie

$$\log(1+z) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

Luego, tenemos una forma de definir $P(Z) = \log p(e^Z)$ como una función holomorfa.

$$P(Z) = \log e^{kZ}(1+\eta) = kZ + \log(1+\eta)$$

Como P es un levantado de p tenemos que $P(\mathbb{H}_r) \subseteq \mathbb{H}_r$, y, como $|\eta| \leq 1/2$, tenemos que

$$P^{\circ n+1}(Z) - kP^{\circ n}(Z) = \log(1 + \eta(P^{\circ n}(Z))) < \log 2 < 1 \quad (2.3)$$

Luego definimos

$$\varphi_n(Z) = \log \phi_n(e^Z) = P^{\circ n}(Z)/k^n$$

Y, usando la ecuación (2.3) acotamos la diferencia:

$$|\varphi_{n+1}(Z) - \varphi_n(Z)| = \frac{|P^{\circ n+1}(Z) - kP^{\circ n}(Z)|}{k^{n+1}} < 1/k^n$$

Como la función exponencial es contractiva, sabemos que

$$1/k^n > d(\varphi_n(Z), \varphi_{n+1}(Z)) \geq d(\phi_n(e^Z), \phi_{n+1}(e^Z)) \quad (2.4)$$

Por la ecuación (2.4) tenemos que la sucesión $\{\phi_n\}$ es de Cauchy y por lo tanto converge, luego, existe ϕ tal que $\phi_n \Rightarrow \phi$. ■

Ahora que tenemos una función que cumple la conjugación, falta probar la unicidad a menos de multiplicar por una raíz $(k - 1)$ -ésima de la unidad.

Sea $f_k(z) = z^k$. Supongamos que existen U y V entornos de \hat{z} y mapas conformes $\phi : U \rightarrow \mathbb{D}$ y $\psi : V \rightarrow \mathbb{D}$ tales que $\phi(p(z)) = \phi(z)^k$ y $\psi(p(z)) = \psi(z)^k$. Entonces tenemos que, en $V \cap U$

$$p(z) = \psi^{-1} \circ f_k \circ \psi = \phi^{-1} \circ f_k \circ \phi \quad (2.5)$$

Esto a su vez implica que

$$\phi \circ \psi^{-1} \circ f_k = f_k \circ \phi \circ \psi^{-1} \quad (2.6)$$

Escrito de otra forma tenemos la igualdad

$$\phi \circ \psi^{-1}(z^k) = (\phi \circ \psi^{-1}(z))^k$$

Sea $\phi \circ \psi^{-1}(z) = c_1 z + c_m z^m + O(z^{m+1})$ entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \phi \circ \psi^{-1}(z^k) &= c_1 z^k + c_m z^{mk} + \dots \\ (\phi \circ \psi^{-1}(z))^k &= c_1^k z^k + k c_1^{k-1} c_m z^{k+m-1} + \dots \end{aligned}$$

Luego, tenemos que

$$c_1^k = c_1$$

y, como $mk > k + m - 1$, entonces $c_m = 0$. Esto implica que

$$\phi \circ \psi^{-1}(z) = c_1 z$$

lo que prueba la unicidad a menos de multiplicar por una raíz $(k - 1)$ -ésima de la unidad. \square

El inverso de la conjugación tiene un interés en sí mismo, por lo que utilizamos una notación específica para dicho mapa.

Definición 2.1.2. Llamamos ψ_p al inverso del mapa de Böttcher. Si el polinomio está implícito, lo llamamos ψ

2.2. Extensión maximal del mapa de Böttcher

Nos interesa saber hasta dónde podemos extender el mapa de Böttcher. Si bien la construcción que hicimos en el teorema 2.1.1 es local, podemos estudiar condiciones sobre el dominio máximo donde puede estar definida.

Por el resto de la sección, consideramos p un polinomio con un punto fijo superatractor \hat{z} . También denotamos $\phi : U \rightarrow \mathbb{D}_r$ como el mapa de Böttcher y ψ su inverso.

Corolario 2.2.1. *La función $|\phi| : U \rightarrow \mathbb{R}^+$ (la norma del mapa de Böttcher) se puede extender a toda la cuenca de atracción de \hat{z}*

Demostración. En U tenemos la siguiente igualdad

$$|\phi(p(z))| = |\phi(z)^k| = |\phi(z)|^k$$

Dado $z \in \mathcal{A}_{\hat{z}}$, sabemos que existe m tal que $p^{\circ m}(z) \in U$. Luego, definimos

$$|\phi|(z) = \sqrt[k^m]{|\phi(p^{\circ m}(z))|}$$

□

Teorema 2.2.2. *Existe un r' maximal ($0 < r' \leq 1$) tal que ψ se extiende a una función $\hat{\psi}$ del disco $\mathbb{D}_{r'}$ a la cuenca inmediata de atracción de \hat{z} . Si $r' = 1$, entonces $\hat{\psi}$ es biyectiva y \hat{z} es el único punto crítico en su cuenca inmediata de atracción. Si $r' < 1$, hay un punto crítico en la frontera de $\hat{\psi}(\mathbb{D}_{r'})$*

Demostración. Si partimos de la función ψ definida en 2.1.2, utilizando su serie de potencias, podemos extenderla analíticamente hasta un disco cierto radio r' . Llamemos $\hat{\psi}$ a dicha extensión.

Afirmación. $\hat{\psi}$ es una transformación conforme.

Demostración. Como $\hat{\psi}|_{\mathbb{D}_r} = \psi$ es conforme tenemos que

$$\hat{\psi}'|_{\mathbb{D}_r}(0) = \psi'(0) \neq 0$$

Vamos a ver que si $w \in \mathbb{D}_{r'}$ se cumple que $\hat{\psi}'(w) \neq 0$. Supongamos que $\hat{\psi}'(w) = 0$ con $w \neq 0$. Como por la definición de $\hat{\psi}$ tenemos que $\hat{\psi}(w^k) = p(\hat{\psi}(w))$, por la regla de la cadena podemos deducir que

$$kw^{k-1}\hat{\psi}'(w^k) = p'(\hat{\psi}(w))\hat{\psi}'(w) = 0$$

lo que implica que w^k también es un punto crítico de $\hat{\psi}$. Aplicando el mismo razonamiento podemos ver que $w, w^k, w^{2k}, w^{3k} \dots$ son todos puntos críticos de $\hat{\psi}$ y esto es absurdo pues una función holomorfa no constante no puede tener una familia de puntos críticos que acumula. Supongamos ahora por absurdo que $\hat{\psi}$ no es inyectiva.

La explicación anterior implica que $\hat{\psi}$ es localmente invertible y por lo tanto que los pares (w_1, w_2) con $\hat{\psi}(w_1) = \hat{\psi}(w_2)$ forman un conjunto cerrado de $\mathbb{D}_r \times \mathbb{D}_r$ que llamaremos C .

Si $w \in \mathbb{D}_r$ tenemos que $|\phi \circ \hat{\psi}(w)| = |w|$. Por la forma en que extendimos $\hat{\psi}$ (continuación analítica) y utilizando la definición de $|\phi|$ del corolario 2.2.1 tenemos el mismo resultado si w está en $\mathbb{D}_{r'}$. Acá vale la pena aclarar que, en los puntos donde ϕ no está bien definida, la expresión $|\phi \circ \hat{\psi}|$ hace referencia a $|\phi| \circ \hat{\psi}$. Luego, si $(w_1, w_2) \in C$ tenemos que

$$|\phi \circ \hat{\psi}(w_1)| = |\phi \circ \hat{\psi}(w_2)|$$

y esto implica que $|w_1| = |w_2|$.

Ahora consideremos un par $(w_1, w_2) \in C$ tal que $|w_1| = |w_2|$ es lo menor posible. Si logramos encontrar puntos w'_1, w'_2 con $\hat{\psi}(w'_1) = \hat{\psi}(w'_2)$ y $|w'_1| < |w_1|$ llegaríamos a una contradicción.

Sean U_1 y U_2 entornos de w_1 y w_2 respectivamente. Como $\hat{\psi}(U_1) \cap \hat{\psi}(U_2)$ es un abierto no vacío si tomamos un punto w'_1 lo suficientemente cerca de w_1 , existe w'_2 cerca de w_2 tal que $\hat{\psi}(w'_1) = \hat{\psi}(w'_2)$. Si tomamos w'_1 de tal forma que $|w'_1| < |w_1|$, se obtiene el absurdo que buscábamos. ■

Tenemos que $\hat{\psi}$ se extiende a ψ y es invertible. Luego, podemos definir $\hat{\phi} = \hat{\psi}^{-1}$. Es inmediato ver que $\hat{\phi}$ extiende a ϕ .

Caso 1: $r' = 1$

Supongamos por absurdo que $U = \hat{\psi}(\mathbb{D}) \neq \mathcal{A}_0$. Sea $z_0 \in \mathcal{A}_0 \cap \partial U$ y $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{D}$ tales que $\hat{\psi}(w_n) \rightarrow z_0$. Tenemos que

$$|\hat{\phi} \circ \hat{\psi}(w_n)| = |w_n| \rightarrow 1 = |\phi(z_0)|$$

Pero como se cumple que

$$p^{\circ n}(z_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{z}$$

tenemos que

$$|\hat{\phi}(p^{\circ n}(z_0))| = |\phi(z_0)|^{k^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

lo que es absurdo.

Caso 2: $r' < 1$

Supongamos por absurdo que no hay puntos críticos de p en $\partial \hat{\psi}(\mathbb{D}_{r'})$. Si $U = \hat{\psi}(\mathbb{D}_{r'})$ tenemos el siguiente diagrama que conmuta

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{p} & p(U) \\ \hat{\psi} \updownarrow \hat{\phi} & & \hat{\psi} \updownarrow \hat{\phi} \\ \mathbb{D}_{r'} & \xrightarrow{z^k} & \mathbb{D}_{r'^k} \end{array}$$

Como $r' < 1$ tenemos que $\overline{\mathbb{D}_{r'^k}} \subseteq \mathbb{D}_{r'}$ y esto implica que $\overline{p(U)} \subseteq U$ lo que a su vez nos dice que $\bar{U} \subseteq \mathcal{A}_z$. Por esta razón, podemos extender $\hat{\phi}$ de forma holomorfa en un entorno de ∂U con un método análogo al de la demostración del corolario 2.2.1.

Vamos a buscar una forma de extender $\hat{\psi}$ y ver que efectivamente es el inverso de $\hat{\phi}$. Sea $w_0 \in \partial \mathbb{D}_{r'}$. Consideramos la curva $\gamma(t) = tw_0, t \in (0, 1)$. Tomamos un punto de acumulación $z_0 \in \partial U$ de $\hat{\psi}(\gamma(t))$, cuando $t \rightarrow 1$.

Como z_0 no es un punto crítico de p podemos tomar una inversa local holomorfa (a la que llamaremos q) en un entorno de $p(z_0)$.

Ahora podemos extender $\hat{\psi}$ de forma holomorfa en un entorno de w_0 con la siguiente fórmula:

$$\hat{\psi}(w) = q(\hat{\psi}(w^k))$$

Acá vale la pena notar que si w está cerca de w_0 entonces $\hat{\psi}(w^k)$ está cerca de $p(z_0)$. Esto claramente es verdad cuando w está en $\mathbb{D}_{r'}$, pues $p(\hat{\psi}(w)) = \hat{\psi}(w^k)$, y también se cumple para puntos que no están en $\mathbb{D}_{r'}$ porque ψ es abierta.

Además, observamos que

$$p(\hat{\psi}(w)) = \hat{\psi}(w^k)$$

por lo que la extensión de $\hat{\psi}$ respeta la conjugación.

Como no hay puntos críticos de p en ∂U podemos repetir este proceso en cada $w_0 \in \partial \mathbb{D}_{r'}$ obteniendo una extensión holomorfa de $\hat{\psi}$ a $\mathbb{D}_{r''}$, con $r'' > r'$.

Para concluir la prueba primero debemos observar que la extensión de $\hat{\phi}$ que construimos es inyectiva (encontrando así la inversa de $\hat{\psi}$); al probar esto estaríamos negando la hipótesis de que r' es maximal (ya que pudimos extender el inverso del mapa de Böttcher a un radio más grande). Observamos que basta probar su inyectividad en ∂U .

Supongamos por absurdo que existen $z, z' \in \partial U$ tales que $\hat{\phi}(z) = \hat{\phi}(z') = w \in \partial \mathbb{D}_r$. Sean $\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{z'_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq U$ dos sucesiones que convergen a z y z' respectivamente. Por continuidad

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{\phi}(z_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \hat{\phi}(z'_i) = w$$

Denotamos por $L_i \subseteq \mathbb{D}_{r'}$ al segmento que une $\hat{\phi}(z_i)$ con $\hat{\phi}(z'_i)$ y por X al conjunto de puntos de acumulación de $\hat{\psi}(L_j)$. Observamos que X es un compacto conexo y que $z, z' \in X$. Esto implica, en particular, que X es un conjunto infinito. A su vez tenemos que el conjunto de puntos de acumulación de L_i cuando i tiende a ∞ es w .

Por un lado tenemos que, como X es infinito y p es un polinomio $p(X)$ tiene infinitos puntos. A su vez, si definimos el conjunto $L_i^k = \{z^k : z \in L_i\}$ y el conjunto Y como los puntos de acumulación de las curvas $\hat{\psi}(L_i^k) = p(\hat{\psi}(L_i))$ se cumple que $p(X) \subseteq Y$ (ver figura 2.1). Esto implica que el conjunto Y tiene infinitos puntos.

Por otro lado, sabiendo que $\hat{\psi}(L_i^k) \subseteq U$, que $\hat{\psi}|_U$ es un homeomorfismo y que el límite de las curvas L_i^k es un único punto (w^k) concluimos que $Y = \{\hat{\psi}(w^k)\}$, lo que es absurdo.

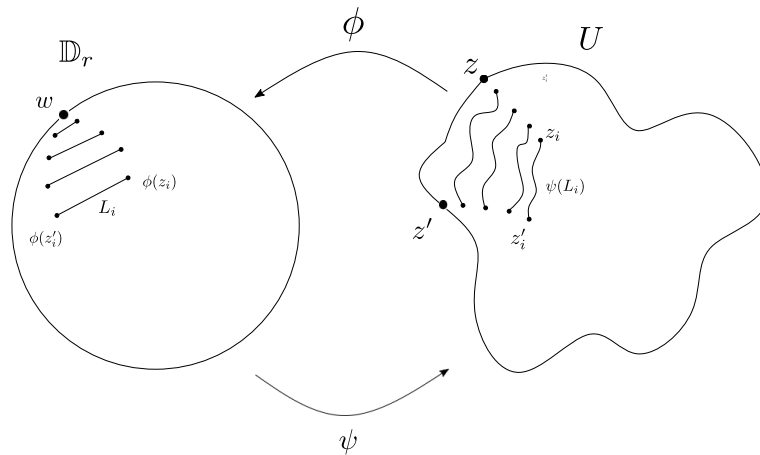


Figura 2.1: Esquema de la demostración del teorema 2.2.2, para el caso $r' < 1$

Al ser $\hat{\psi}$ la inversa de $\hat{\phi}$, concluimos que $\hat{\psi}$ se puede extender a un radio más grande, probando así el teorema. \square

2.3. El mapa de Böttcher alrededor de infinito

Como ya discutimos, todos los polinomios de orden d tienen un superatractor de grado d en infinito. En esta sección vamos a ver en qué condiciones podemos extender el mapa de Böttcher a toda la cuenca de atracción infinito. *Observación.* Conjugando por $\alpha(z) = 1/z$ podemos pensar el mapa de Böttcher como una función

$$\phi : \hat{\mathbb{S}} \setminus \bar{\mathbb{D}}_{c_p} \rightarrow U$$

siendo U un entorno de ∞ y con $c_p \in \mathbb{R}^+$ suficientemente grande. A esta función la llamamos **el mapa de Böttcher alrededor de ∞**

A veces es de utilidad pensar en el logaritmo de la norma de este mapa, en vez de la norma en sí.

Definición 2.3.1. La función de Green

$$G : \mathbb{C} \setminus K_p \rightarrow \mathbb{R}$$

está definida por

$$G(z) = \log |\phi(z)|$$

Proposición 2.3.2. *La función de Green se extiende a una función continua*

$$\bar{G} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

definiéndola como 0 en K_p

Demostración. Definimos la función de Green de la siguiente forma:

$$\bar{G}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in K_p \\ G(z) & \text{si } z \notin K_p \end{cases} \quad (2.7)$$

Claramente la función es continua en K_p° y en \mathcal{A}_∞ . Para probar el teorema basta ver que es continua en J_p o, expresado de otra manera, que si $z_0 \in J_p$ entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \bar{G}(z) = 0$$

En primer lugar tenemos que

$$G(p(z)) = \log |\phi(p(z))| = \log |\phi(z)^d| = d \log |\phi(z)| = dG(z) \quad (2.8)$$

Otra observación es que si $|z| > 1$ y $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_dz^d$ entonces

$$|p(z)| \leq (|a_0| + |a_1| + \dots + |a_d|)|z^d|$$

Consideremos una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}_\infty$ tal que $z_n \rightarrow z$. Vamos a ver que $\lim_{n \rightarrow \infty} G(z_n) = 0$. Para esto elegimos $C > 1$ tal que $\max\{|z_n|\} < C$ y $K_p \subseteq \mathbb{D}_C$.

Si consideramos el anillo cerrado

$$A = \{z \in \mathbb{C} : C \leq |z| \leq (|a_0| + |a_1| + \dots + |a_d|)C\}$$

entonces se cumple que para n suficientemente grande existe un a_n tal que $p^{\circ a_n}(z_n) \in A$. Además por continuidad de p tenemos que $a_n \rightarrow \infty$.

Como G es continua en \mathcal{A}_∞ tenemos que tiene un máximo en A (que llamaremos C_1). Luego, por la ecuación (2.8) se cumple que

$$G(z_n) = \frac{G(p^{\circ a_n}(z_n))}{d^{a_n}} \leq \frac{C_1}{d^{a_n}}$$

Como $a_n \rightarrow \infty$, tenemos que $G(z_n) \rightarrow 0$, lo que prueba la proposición. \square

Definición 2.3.3. Sea $c > 0$. Las curvas determinadas por soluciones de $G^{-1}(c)$ se llaman **curvas equipotenciales**.

Juntando la observación 2.3 y el teorema 2.2.2 obtenemos el siguiente resultado que nos permite entender la importancia del mapa de Böttcher para el estudio de K_p .

Teorema 2.3.4. *Si K_p tiene todos los puntos críticos de p , entonces:*

(1) *El mapa de Böttcher alrededor de ∞ se extiende a una transformación conforme*

$$\hat{\phi} : \mathbb{C} \setminus K_p \rightarrow \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$$

(2) *K_p y J_p son conexos.*

Demostración.

1. La demostración de este punto es el teorema 2.2.2 aplicado al mapa de Böttcher alrededor de ∞ . Por la proposición 1.4.3, sabemos que el mapa se extiende a toda la cuenca de atracción de ∞
2. El inverso al mapa de Böttcher alrededor de ∞ es una función

$$\hat{\psi} : \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathcal{A}_\infty$$

Luego definimos $A_{1+\epsilon} = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 1 + \epsilon\}$.

Es claro ver que $J_p = \bigcap_{\epsilon > 0} \hat{\psi}(\overline{A_{1+\epsilon}})$. Al ser una intersección de conjuntos conexos, tenemos que J_p es conexo, y, como K_p es un cerrado cuya frontera es J_p tenemos que K_p también es conexo.

□

Cuando no haya ambigüedad nos vamos a referir a la máxima extensión del mapa de Böttcher y a la de su inverso únicamente como ϕ y ψ respectivamente.

2.4. Extensión al borde del mapa de Böttcher

Como veremos en esta sección en algunos casos podemos extender el mapa de Böttcher al borde de la cuenca de infinito, es decir, a J_p . Esta extensión puede no ser inyectiva (si J_p no es una curva cerrada simple). Aún así, nos permitirá entender la dinámica de los polinomios en su conjunto de Julia.

Teorema 2.4.1. *Si todos los puntos críticos de p son atraídos por un ciclo atractor, el mapa inverso de Böttcher*

$$\psi : \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C} \setminus K_p$$

se extiende al borde.

Demostración. Dado $R > 1$ consideremos $\gamma_n(t) = \psi(R^{1/d^n} e^{2\pi i t})$. Observamos que

$$p(\gamma_n(t)) = p(\psi(R^{1/d^n} e^{2\pi i t})) = \psi(R^{1/d^{n-1}} e^{2\pi i dt}) = \gamma_{n-1}(dt)$$

Primero vamos a ver que γ_n converge uniformemente. Para esto vamos a encontrar un entorno U de J_p cuya métrica hiperbólica es expandida por p .

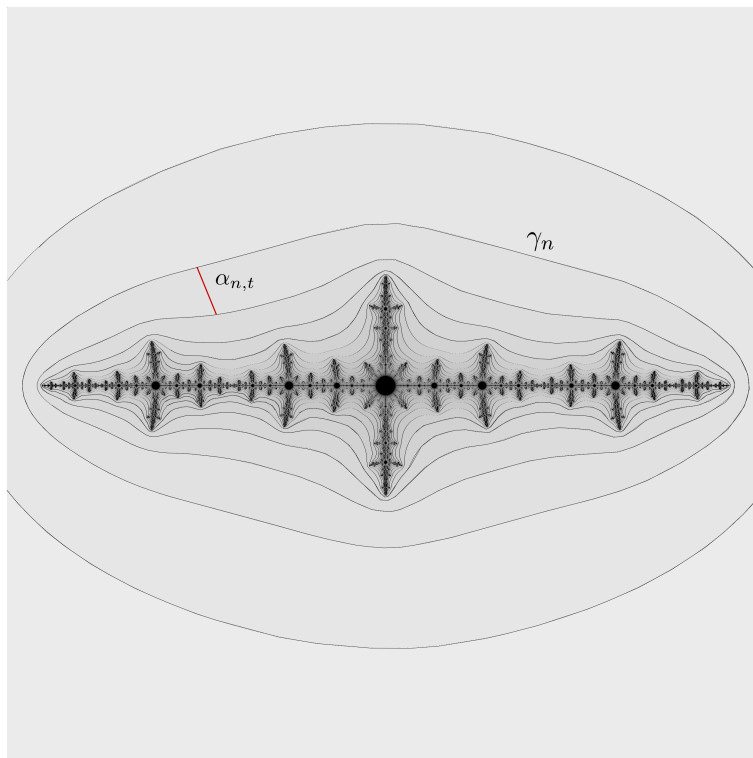


Figura 2.2: *Dibujo hecho por computadora de K_p con $p = z^2 - 1,476$. En rojo se puede apreciar $\alpha_{n,t}$, y en negro las curvas γ_n , también llamadas equipotenciales.*

Sea Z el conjunto de puntos periódicos atractores. Consideramos V_0 un entorno de Z que cumpla que $p(\overline{V_0}) \subseteq V_0$. Sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $V_n = p^{-n}(V_0)$ contiene a todos los puntos críticos.

Dado $R > 0$ definimos

$$V_R = \{z \in \mathbb{C} : G(z) < R\}$$

donde G es la función de Green definida en 2.3.1. También consideramos los conjuntos U y U' dados por

$$\begin{aligned} U &= (\mathbb{C} \setminus \bar{V}_n) \cap V_R \\ U' &= p^{-1}(U) = p^{-1}(\mathbb{C} \setminus \bar{V}_n) \cap p^{-1}(V_R) \end{aligned}$$

Afirmación. $\bar{U}' \subseteq U$

Demostración. En primer lugar, como se cumple que $p(\bar{V}_0) \subseteq V_0$, tenemos que $\bar{V}_n \subseteq p^{-1}(V_n)$. Tomando el complemento obtenemos que

$$\mathbb{C} \setminus \bar{V}_n \supseteq p^{-1}(\mathbb{C} \setminus \bar{V}_n)$$

En segundo lugar tenemos la igualdad $p^{-1}(V_R) = V_{R/d}$ que en particular nos dice que

$$\bar{V}_{R/d} \subseteq V_R$$

Tomando la intersección de ambos conjuntos observamos que se cumple la inclusión $\bar{U}' \subseteq U$ ■

Como U no tiene puntos críticos en su interior, U' tampoco los tendrá y esto implica que $p|_{U'} : U' \rightarrow U$ es un cubrimiento. Los cubrimientos holomorfos son isometrías locales de la métrica hiperbólica (ver propiedad 1.2.9). Por lo tanto,

$$|(z, \zeta)|_{U'} = |(p(z), p'(z)\zeta)|_U$$

Como U' tiene clausura compacta en U por el corolario 1.2.10 existe $C < 1$ tal que

$$|(z, \zeta)|_U \leq C|(z, \zeta)|_{U'} = C|(p(z), p'(z)\zeta)|_U \quad (2.9)$$

Denotamos $\alpha_{n,t}$ como la imagen de la curva $\rho \mapsto \psi(\rho e^{2\pi it})$, con $R^{1/d^{n+1}} \leq \rho \leq R^{1/d^n}$. Observar que $\alpha_{n,t}$ es un arco que conecta $\gamma_n(t)$ con $\gamma_{n+1}(t)$. Denotamos su largo respecto a la métrica hiperbólica de U por $l_{n,t}$ y tomamos $l_n = \sup_t \{l_{n,t}\}$. Como $\psi(z^d) = p(\psi(z))$ tenemos que $p(\alpha_{n,t}) = \alpha_{n-1,dt}$. Esto implica que $l_{n,t} \leq Cl_{n-1,dt}$ y, a su vez, que

$$l_n \leq Cl_{n-1}$$

de lo que se deduce que la serie $\sum l_n$ converge.

Para ver que la sucesión de curvas γ_n converge vamos a ver que es de Cauchy. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$

$$\|\gamma_n - \gamma_m\| \leq \|\gamma_n - \gamma_{n+1}\| + \|\gamma_{n+1} - \gamma_{n+2}\| + \dots + \|\gamma_{m-1} - \gamma_m\| \leq \sum_n^m l_n \rightarrow 0$$

Esto implica que la sucesión γ_n converge uniformemente a una curva γ cuya imagen es J_p .

Finalmente definimos la extensión de ψ en cada $t \in S^1$ como $\gamma(t)$. Observamos que si elegimos otro R para la construcción de las curvas γ_n la curva γ que determina su límite va a ser la misma. Efectivamente, si elegimos otro $R' \neq R$ y generamos una sucesión de curvas γ'_n tenemos que $d(\gamma_n, \gamma'_n) \rightarrow 0$ (pues $R^{1/d} \rightarrow 1$). Esto prueba que la extensión de ψ es continua. □

Capítulo 3

Cubrimientos ramificados y mapas araña

El objetivo de este capítulo es generalizar el estudio de funciones racionales a mapas continuos que son localmente equivalentes, en un sentido topológico, a dichas funciones. Estos mapas, llamados cubrimientos ramificados, pueden llegar a tener un comportamiento similar a las funciones racionales. Esta similaridad, llamada equivalencia de Thurston, es más fuerte que una conjugación geométrica pero más débil que una dinámica. El teorema de Thurston (que no demostraremos en este trabajo) nos da una condición para que así sea. Su prueba se puede encontrar en [5].

Si bien el enunciado del teorema es técnico, uno de los objetivos de este trabajo es ejemplificar cómo lo podemos utilizar: nos permitirá entender a los polinomios cuadráticos con ciclo superatractor.

Durante este capítulo trabajaremos con la esfera topológica S^2 (sin una estructura compleja definida).

3.1. Cubrimientos ramificados

Definición 3.1.1. Sean M y N dos superficies cerradas. Decimos que un mapa $f : M \rightarrow N$ es un *cubrimiento ramificado* si es un homeomorfismo local salvo en un conjunto discreto. Los puntos donde f no es un homeomorfismo local se llaman *puntos críticos* de f y su conjunto se denota $Crit_f$.

Definición 3.1.2. Un *valor crítico* de un cubrimiento ramificado es la imagen de un punto crítico.

Se cumple que la restricción $f : M \setminus Crit_f \rightarrow N \setminus f(Crit_f)$ es un cubrimiento finito. Además, un resultado clásico de topología algebraica dice que

en un cubrimiento finito los puntos tienen una cantidad fija de preimágenes. Los valores críticos, sin embargo, pueden tener una cantidad distinta de preimágenes.

Definición 3.1.3. Sea c un punto crítico de un cubrimiento ramificado f . Existe un entorno B de c y un natural k tal que $f : B \setminus \{c\} \rightarrow f(B) \setminus \{f(c)\}$ es un cubrimiento de grado m . En dicho caso, decimos que c tiene *orden (o multiplicidad) k* .

Definición 3.1.4. Si $c \in \text{Crit}_f$ tiene orden k decimos que $\deg_c f = k$. Si $p \notin \text{Crit}_f$ decimos que $\deg_p f = 1$

Observación. Un resultado clásico de análisis complejo nos dice que las funciones holomorfas son geoméricamente conjugadas a un mapa de la forma $f_k(z) = z^k$ en el entorno de un crítico. Esto implica que cumplen con la definición 3.1.3.

En este trabajo vamos a asumir que $M = N = S^2$ y que los cubrimientos ramificados además preservan orientación.

Definición 3.1.5. Sea $f : M \rightarrow N$ un cubrimiento ramificado. Decimos que $\deg(f)$ es la cantidad de preimágenes que tiene un punto no crítico.

Definición 3.1.6. El conjunto de puntos *postcríticos* de f se define como

$$P_f = \bigcup_{n>0} f^{\circ n}(\text{Crit}_f)$$

Observación. Si f es un cubrimiento ramificado, y $k \geq 1$. $\text{Crit}_f \subseteq \text{Crit}_{f^{\circ k}}$

Definición 3.1.7. Se dice que un cubrimiento ramificado f es un *mapa de Thurston* si $|P_f| < \infty$

Proposición 3.1.8. Sea $f : S^2 \rightarrow S^2$ un mapa de Thurston. Entonces para todo $k \geq 1$ se cumple que $P_f = P_{f^{\circ k}}$

Para probar esta proposición vamos a necesitar un lema.

Lema 3.1.9. Sea $k > 1$ y $f : S^2 \rightarrow S^2$ un cubrimiento ramificado. Entonces $c \in S^2$ es un punto crítico de $f^{\circ k}$ si y sólo si existe $0 \leq m < k$ tal que $f^{\circ m}(c)$ es un punto crítico de f .

Demostración.

1: \implies

Supongamos no existe tal m . Entonces se cumple que f es localmente invertible en $c, f(c), f^{\circ 2}(c), f^{\circ 3}(c), \dots, f^{\circ k-1}(c)$ y podemos construir una

inversa local de $f^{\circ k}$ componiendo cada una de estas inversas locales. Esto implica que c no es un punto crítico de $f^{\circ k}$.

2: \Leftarrow

Si $f^{\circ m}(c)$ es un punto crítico entonces $f^{\circ k}$ no es localmente invertible en c . \square

Es interesante ver que si f fuera una función racional la regla de la cadena nos permitiría deducir este resultado fácilmente.

Demostración de la proposición 3.1.8.

1: $P_f \subseteq P_{f^{\circ k}}$

Sea $p \in P_f$; sabemos que existe un punto c crítico de f y un $n > 1$ tal que $f^{\circ n}(c) = p$. Primero asumimos que $n < k$. Sea $r = k - n > 0$. Si elegimos un punto $c' \in f^{-r}(p)$, entonces, por el lema 3.1.9, c' será un punto crítico de $f^{\circ k}$. Además, $f^{\circ k}(c') = f^{\circ n}(c) = p$, lo que prueba que $p \in P_{f^{\circ k}}$

Supongamos ahora que $n \geq k$. Existen q y r tales que $n = qk - r$ y $0 \leq r < k$. Si consideramos un punto $c' \in f^{-r}(c)$, por el lema 3.1.9 es un crítico de $f^{\circ k}$. Luego, sabemos que $(f^{\circ k})^{\circ q}(c') = f^{\circ n}(c) = p$ lo que implica que $p \in P_{f^{\circ k}}$

2: $P_{f^{\circ k}} \subseteq P_f$

Es inmediato por el lema 3.1.9. \square

Recordamos que un polinomio es una función racional que deja a ∞ totalmente invariante. Podemos tener un equivalente para los cubrimientos ramificados.

Definición 3.1.10. Sea f un cubrimiento ramificado. Decimos que f es además un *polinomio topológico* si existe un punto en S^2 (que llamaremos ∞) tal que $f^{-1}(\infty) = \{\infty\}$

En nuestro trabajo nos vamos a centrar en los cubrimientos ramificados de grado 2.

Lema 3.1.11. *Sea f un cubrimiento ramificado de grado 2 con dos puntos críticos c_1 y c_2 . Sea γ una curva de Jordan que pasa por c_1 y c_2 y es preimagen por f de un camino simple que une $f(c_1)$ con $f(c_2)$. Entonces f restricto a cada componente de $S^2 \setminus \gamma$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Llamemos H_1 y H_2 a las dos regiones de S^2 que separa γ . Como $f(\gamma)$ es una curva no cerrada, la imagen de cada H_i es $S^2 \setminus f(\gamma)$. Finalmente, como el cubrimiento es de grado 2, cada punto tiene una preimagen en H_1 y otra en H_2 , obteniendo el resultado que buscamos. \square

3.2. El teorema de Thurston

La siguiente definición nos da una especie de conjugación entre mapas de Thurston. Si bien esta definición es menos restrictiva que la conjugación topológica, a lo largo de este trabajo vamos a ver un ejemplo de cómo nos permite clasificar ciertos polinomios.

Definición 3.2.1. Sean f y g dos mapas de Thurston. Decimos que f y g son *equivalentes Thurston* si existen dos homeomorfismos $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$ y $\varphi' : S^2 \rightarrow S^2$ tales que:

$$(1) \quad \varphi|_{P_f} = \varphi'|_{P_f}$$

$$(2) \quad \text{El siguiente diagrama conmuta:}$$

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{\varphi'} & S^2 \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ S^2 & \xrightarrow{\varphi} & S^2 \end{array}$$

$$(3) \quad \varphi \text{ y } \varphi' \text{ son isotópicos por una isotopía relativa a } P_f.$$

Como los homeomorfismos que “conjugan” pueden ser distintos, muchas propiedades dinámicas se pierden. Un ejemplo de esto es que la cantidad de puntos fijos de f y g puede variar. Sin embargo, la dinámica de los puntos postcríticos sí se preserva, y esta equivalencia preserva, en cierto sentido, la geometría de las funciones. El teorema 3.2.15 da importancia a esta definición.

Proposición 3.2.2. Sean f, g, φ, φ' como en la definición 3.2.1. Entonces:

$$(1) \quad \varphi'(Crit_f) = Crit_g$$

$$(2) \quad \varphi'(P_f) = \varphi(P_f) = P_g$$

Demostración.

$$(1) \quad \text{Como } \varphi \circ f \circ \varphi'^{-1} = g \text{ y tanto } \varphi \text{ como } \varphi' \text{ son homeomorfismos tenemos que si } p \text{ es un punto crítico de } f, \text{ también lo será de } f \circ \varphi'^{-1}. \text{ Esto implica que } \varphi'(Crit_f) = Crit_g.$$

$$(2) \quad \text{Es inmediato por la parte 1 y la definición 3.2.1.}$$

□

3.2.1. Orbifolds

Los orbifolds bidimensionales son una generalización del concepto de superficies y hay varias maneras de definirlos. Si bien este concepto no es central en nuestro trabajo, es necesario para enunciar el teorema de Thurston. Una definición alternativa y propiedades de estos objetos se pueden encontrar en [12].

Definición 3.2.3. Un *orbifold bidimensional* (X, ν) es una superficie orientable X y una función $\nu : X \rightarrow \{1, 2, \dots, \infty\}$ donde ν vale 1 fuera de un conjunto discreto de puntos.

Definición 3.2.4. La *característica de Euler* de un orbifold bidimensional compacto (X, ν) se define como

$$\chi(X, \nu) = \chi(X) - \sum_{x \in X} (1 - 1/\nu(x))$$

Un orbifold es *hiperbólico* si $\chi(X, \nu) < 0$.

A diferencia de la característica de Euler para variedades, en un orbifold el número puede no ser entero.

Para enunciar el teorema de Thurston es necesario definir el orbifold de un mapa de Thurston.

Definición 3.2.5. El *orbifold de un mapa de Thurston* f es $O_f = (S^2, \nu_f)$, donde ν_f es la función definida por

$$\nu_f(x) \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin P_f \\ \infty & \text{si } x \text{ pertenece a la órbita de un punto crítico periódico} \\ \text{mcm}\{\deg_y f^{\circ k} : y \in \text{Crit}_f, f^{\circ k}(y) = x\} & \text{si no} \end{cases}$$

Observación. Sean $x \in S^2$ e $y \in f^{-1}\{x\}$, entonces $\nu_f(x)$ es un múltiplo de $(\deg_y f)(\nu_f(y))$

Ejemplo 3.2.6. El polinomio $f_4(z) = z^4$ es un mapa de Thurston que cumple que $\text{Crit}_{f_4} = \{0, \infty\}$. Ambos puntos críticos son fijos por lo que $\nu_{f_4}(0) = \nu_{f_4}(\infty) = \infty$. La característica de Euler de su Orbifold es

$$\chi(O_{f_4}) = 2 - 1 - 1 = 0$$

lo que implica que no es hiperbólico.

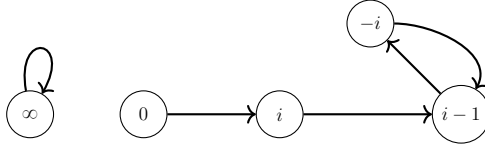


Figura 3.1: Órbitas críticas del polinomio $p_i(z) = z^2 + i$

Ejemplo 3.2.7. El polinomio $p_i(z) = z^2 + i$ es un mapa de Thurston con $Crit_{p_i} = \{\infty, 0\}$ y sus órbitas críticas se pueden ver en la figura 3.1. Observamos que $\nu_{p_i}(1) = deg_0(p_i) = 2$ y, por lo tanto, tenemos que

$$\nu_{p_i}(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = \infty \\ 2 & \text{si } x \in \{1, i-1, -i\} \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La característica de Euler de $O_{p_i} = (S^2, \nu_{p_i})$ es

$$\chi(O_{p_i}) = 2 - (1 - 1/2) - (1 - 1/2) - (1 - 1/2) - 1 = -1/2$$

por lo que el Orbifold es hiperbólico. Aquí podemos ver un ejemplo de un espacio cuya característica de Euler no es entera.

Observación. La mayoría de los Orbifolds son hiperbólicos. La única forma de que la característica de Euler de negativa es que el conjunto valores de ν_f distintos de 1 sea uno de los siguientes: (∞, ∞) , $(2, 2, \infty)$, $(2, 4, 4)$, $(2, 3, 6)$, $(3, 3, 3)$, $(2, 2, 2, 2)$. La clasificación de mapas con este esquema se puede ver en el anexo 8 de [8].

3.2.2. La transformación lineal de Thurston

Consideremos la esfera (S^2, P) siendo P un conjunto finito de puntos distinguidos.

Vamos a definir la condición topológica de la cual depende el teorema de Thurston. Pero, para eso, primero vamos a definir el concepto de multicurva.

Definición 3.2.8. Sea γ una curva cerrada simple en $S^2 \setminus P$. Decimos que γ es *periférica* si es homotópicamente trivial o si una componente de $S^2 \setminus \gamma$ tiene un único punto de P .

Definición 3.2.9. Una *multicurva* Γ de (S^2, P) es una colección de curvas disjuntas, cerradas, simples, no periféricas y no homotópicas entre sí en $S^2 \setminus P$

Proposición 3.2.10. Una multicurva Γ de (S^2, P) tiene a lo sumo $|P| - 3$ elementos.

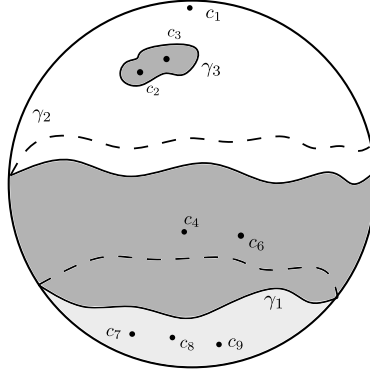


Figura 3.2: Ejemplo de multicurva $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ con $P = \{c_1, \dots, c_9\}$

Demostración. Sea Γ una multicurva y sea $P = \{c_1, \dots, c_n\}$. Dado $\gamma \in \Gamma$ consideramos el conjunto

$$X_\gamma = \{c \in P : c \text{ está en una componente distinta de } S^2 \setminus \gamma \text{ que } c_1\}$$

Si $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, entonces es claro que $X_{\gamma_1} \cap X_{\gamma_2}$ es X_{γ_2} , X_{γ_1} o vacío pues, de lo contrario, las curvas se intersecarían. Además, se cumple que

$$1 < |X_\gamma| < |P| - 1 \quad (3.1)$$

Esta relación entre los X_γ nos permite definir la siguiente relación de orden en las curvas:

$$\gamma_1 < \gamma_2 \iff X_{\gamma_1} \subseteq X_{\gamma_2}$$

Si la relación es un orden total es claro por la inecuación (3.1) que $|\Gamma| \leq |P| - 3$

Sean $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ los elementos maximales del orden definido, como las curvas tienen que encerrar puntos distintos, tenemos que

$$|X_{\gamma_1}| + \dots + |X_{\gamma_k}| < |P| - 1$$

Finalmente, si l_i es el largo de la cadena de la cual γ_i es maximal, tenemos que $l_i < |X_{\gamma_i}| - 1$, lo que prueba la proposición. □

Nota. La proposición anterior nos dice que las multicurvas tienen finitos elementos, pero no que necesariamente hay finitas multicurvas para un conjunto P dado.

Definición 3.2.11. Decimos que una multicurva Γ de (S^2, P_f) es *f-estable* si para cada $\gamma \in \Gamma$, toda componente de $f^{-1}(\gamma)$ es homotópica a un elemento de Γ o periférica.

Definición 3.2.12. Sea Γ una multicurva *f-estable*. Entonces para cada $\gamma, \delta \in \Gamma$ definimos

$$T_\gamma(\delta) = \{\eta \in f^{-1}(\gamma) : \eta \text{ es homotópica a } \delta\}$$

Observación. Cada elemento η de $T_\gamma(\delta)$ es una curva cerrada y simple (ya que γ no pasa por ningún postcrítico). Además, $f|_\eta : \eta \rightarrow \gamma$ es un cubrimiento.

Definición 3.2.13. La *transformación lineal de Thurston* $f_\Gamma : \mathbb{R}^\Gamma \rightarrow \mathbb{R}^\Gamma$ asociada a una multicurva Γ *f-estable* es definida por:

$$f_\Gamma([\gamma]) = \sum_{\delta \in \Gamma} \left(\sum_{\eta \in T_\gamma(\delta)} \frac{1}{\deg(f|_\eta : \eta \rightarrow \gamma)} \right) [\delta]$$

Definición 3.2.14. La transformación lineal de Thurston tiene entradas no negativas y, por el teorema de Perron-Frobenius, un valor propio no negativo. El *valor propio de Thurston* asociado a una multicurva *f-estable* es el valor propio no negativo más grande de f_Γ y lo denotamos λ_Γ .

Teorema 3.2.15 (Thurston). *Sea $f : S^2 \rightarrow S^2$ un mapa de Thurston con orbifold hiperbólico. Entonces f es equivalente Thurston a una función racional si y solo si toda multicurva f -estable Γ cumple que $\lambda_\Gamma < 1$. Además la función racional es única a menos de conjugar por un automorfismo de la esfera.*

Definición 3.2.16. Si existe una multicurva Γ tal que el valor propio de $\lambda_\Gamma \geq 1$ decimos que es una *obstrucción de Thurston*.

El teorema de Thurston da una condición necesaria y suficiente para ver cuándo un cubrimiento ramificado es equivalente a una función racional. Sin embargo, como puede haber infinitas multicurvas, no siempre es fácil encontrar obstrucciones (o probar que no las hay).

3.3. Mapas araña

En esta sección vamos a hacer una construcción topológica de mapas de Thurston llamados “mapas araña”. Estas funciones son cubrimientos ramificados de grado 2 que podemos utilizar para entender los polinomios con ciclo superatractor, usando el teorema 3.2.15.

Más adelante veremos que en el caso de polinomios topológicos de grado 2 se puede decidir más fácilmente si existen obstrucciones de Thurston o no.

3.3.1. Ángulos pares e impares

En esta sección vamos a definir mapas de Thurston asociados a cada ángulo racional $\theta = p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. El tipo de construcción dependerá de la paridad de q .

Durante esta sección vamos a trabajar con dos definiciones de la circunferencia: la circunferencia en \mathbb{C} definida por $S^1 = \{e^{2\pi it} : t \in [0, 1)\}$ y el cociente \mathbb{R}/\mathbb{Z}

Definición 3.3.1. Sea $\theta = p/q$ un ángulo racional. Decimos que $\theta \in \mathbb{Q}^{odd}$ si q es impar y $\theta \in \mathbb{Q}^{even}$ si q es par.

Definición 3.3.2. Definimos el *mapa de duplicación de ángulos* $f_2 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ como

$$f_2(t) = 2t$$

.

Observación. El mapa f_2 es conjugado al mapa $f : S^1 \rightarrow S^1$

$$f(z) = z^2$$

Ambos tipos de ángulos racionales tienen una dinámica distinta respecto a este mapa.

Proposición 3.3.3. Sea $\theta = p/q$ un ángulo racional. Si $\theta \in \mathbb{Q}^{even}$ entonces θ es preperiódico por el mapa f_2 . Si $\theta \in \mathbb{Q}^{odd}$ entonces θ es periódico.

Demostración. Si q es par entonces p es impar. Si k es el máximo número natural tal que 2^k divide a q entonces $2^k p/q \in \mathbb{Q}^{odd}$; esto implica que si probamos que $\theta \in \mathbb{Q}^{odd}$ es periódico la proposición quedará demostrada.

Para probar esto primero observamos que el denominador no cambia cuando duplicamos el ángulo. Luego tenemos que

$$2^k \theta = \frac{2^k p \pmod q}{q}$$

Como q es impar, existe un primer $k > 0$ tal que $2^k \equiv 1 \pmod q$. Esto implica que $2^k p \equiv p \pmod q$ probando así que θ es periódico de período k . \square

Observación. Si pensamos en expansiones binarias, el mapa $t \mapsto 2t$ elimina el primer dígito de dicha expansión. En base a esto deducimos que los elementos de \mathbb{Q}^{odd} tienen expansión binaria periódica y los elementos de \mathbb{Q}^{even} tienen expansión binaria preperiódica.

Ahora que tenemos estas definiciones, vamos a proceder a definir los mapas araña a partir de los ángulos racionales y el mapa que duplica ángulos. Como los elementos de \mathbb{Q}^{odd} tienen un comportamiento diferente a los de \mathbb{Q}^{even} bajo el mapa de duplicado de ángulo, es lógico que las definiciones varíen.

Denotamos al ángulo θ_m mediante la siguiente fórmula

$$\theta_m = 2^{m-1}\theta$$

3.3.2. Araña para $\theta \in \mathbb{Q}^{even}$

Consideremos los puntos

$$X_m = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 0 \\ e^{2\pi i\theta_m} & \text{si } m > 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Observación. Por la proposición 3.3.3 el conjunto $\{X_m : m \in \mathbb{N}\}$ es finito. A estos conjuntos se les llaman “extremos de las patas” de la θ -araña.

Definición 3.3.4. La θ -araña para $\theta \in \mathbb{Q}^{even}$ es el conjunto

$$\mathbf{S}_\theta = \bigcup_{m \geq 1} \{rX_m : r \geq 1\} \cup \{\infty\}$$

Al conjunto $L_m = \{rX_m : r \geq 1\}$ se le llama *pata m -ésima* de la araña.

Para definir el mapa de Thurston asociado a la θ araña, hace falta definir también la araña extendida. Para eso, observamos que el ángulo θ tiene dos preimágenes bajo la duplicación de ángulos: $\theta' = p/2q$ y $\theta'' = (p+q)/2q$. Consideramos la recta

$$M_\theta = \{te^{2\pi i\theta'} : t \in \mathbb{R}\} = \{te^{2\pi i\theta''} : t \in \mathbb{R}\}$$

y luego procedemos a definir la araña extendida.

Definición 3.3.5. La θ -araña extendida para $\theta \in \mathbb{Q}^{even}$ es el conjunto

$$\tilde{\mathbf{S}}_\theta = \mathbf{S}_\theta \cup M_\theta$$

Ahora vamos a definir un mapa en la araña, que es básicamente el mapa de duplicación de ángulos adaptado a las patas de la araña.

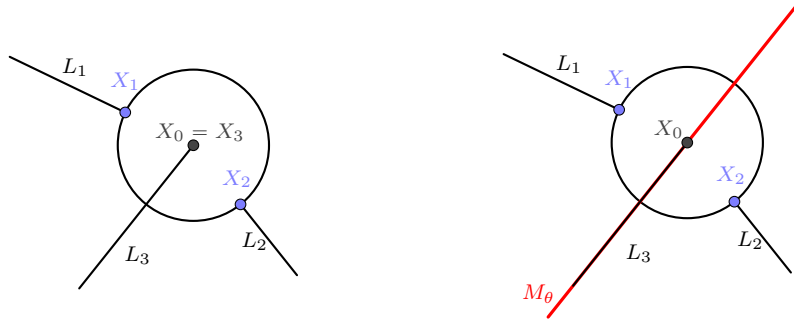


Figura 3.3: Araña y araña extendida para $\theta = 3/7$. Su expansión binaria es $0,0\overline{11}$. Observamos que X_1 tiene período 3 y el punto X_3 corresponde al a preimagen de $3/7$ cuya expansión binaria empieza en 1.

Definición 3.3.6. Sea $\theta \in \mathbb{Q}^{even}$. Definimos el mapa $f_\theta : \tilde{\mathbf{S}}_\theta \rightarrow \mathbf{S}_\theta$ como

$$f_\theta(re^{it}) = \begin{cases} re^{2it} & \text{si } re^{it} \in \tilde{\mathbf{S}}_\theta \setminus M_\theta \\ (r+1)e^{2it} & \text{si } re^{it} \in M_\theta \text{ con } r > 0 \\ X_1 & \text{si } r = 0 \\ \infty & \text{si } r = \infty \end{cases}$$

Observación. f_θ es la duplicación de ángulos extendida a las patas de la araña. Manda cada pata L_i a L_{i+1} como un homeomorfismo y manda cada mitad de M_θ de forma homeomorfa a L_1 .

3.3.3. Araña para $\theta \in \mathbb{Q}^{odd}$

Como vimos en la proposición 3.3.3, existe un $k > 0$ tal que $2^k\theta = \theta$

$$X_m = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 0 \text{ o } m = k \\ e^{2\pi i\theta m} & \text{si } 0 < m < k \end{cases}$$

Definición 3.3.7. La θ -araña para $\theta \in \mathbb{Q}^{odd}$ es el conjunto

$$\mathbf{S}_\theta = \bigcup_{1 \leq m \leq k-1} \{rX_m : r \geq 1\} \cup \{re^{2\pi i\theta k} : r \geq 0\} \cup \{\infty\}$$

Si $m \neq 0, k$ definimos L_m igual que en \mathbb{Q}^{even} . Definimos $L_0 = L_k$ como la semirrecta que une 0 con ∞ en el ángulo $2^{k-1}\theta$.

Al igual que en el caso anterior definimos la recta

$$M_\theta = \{re^{2\pi i\theta'} : r \in \mathbb{R}\} = \{re^{2\pi i\theta''} : r \in \mathbb{R}\}$$

La razón por la que la araña se define distinto para el caso en que θ tiene denominador impar es porque la pata L_k coincide con una mitad de M_θ . Además, al igual que en el caso anterior, podemos definir la araña extendida y f_θ . Un ejemplo de araña y araña extendida se puede ver en la figura 3.3.

Definición 3.3.8. La θ -araña extendida para $\theta \in \mathbb{Q}^{odd}$ es el conjunto

$$\tilde{\mathbf{S}}_\theta = \mathbf{S}_\theta \cup M_\theta$$

Definición 3.3.9. Sea θ un ángulo racional de período k por el mapa de duplicación de ángulo. Definimos el mapa $f_\theta : \tilde{\mathbf{S}}_\theta \rightarrow \mathbf{S}_\theta$ con $\theta \in \mathbb{Q}^{odd}$ como

$$f_\theta(re^{it}) = \begin{cases} re^{2it} & \text{si } re^{it} \in \tilde{\mathbf{S}}_\theta \setminus (M_\theta \cup L_{k-1}) \\ (r+1)e^{2it} & \text{si } re^{it} \in M_\theta \text{ con } r > 0 \\ (r-1)e^{2it} & \text{si } re^{it} \in L_{k-1} \\ X_1 & \text{si } r = 0 \\ \infty & \text{si } r = \infty \end{cases}$$

3.3.4. Extensión del mapa f_θ

Vamos a extender el mapa f_θ para obtener un cubrimiento ramificado de grado 2 de la esfera. A este mapa, que denotaremos \tilde{f}_θ , lo llamaremos *mapa araña para θ* . También veremos que los únicos puntos críticos que tiene el mapa son 0 (que es periódico o preperiódico, según la paridad de θ) e ∞ , y por lo tanto \tilde{f}_θ será un mapa de Thurston.

Teorema 3.3.10. *El mapa $f_\theta : \tilde{\mathbf{S}}_\theta \rightarrow \mathbf{S}_\theta$ se puede extender a un mapa de Thurston $\tilde{f}_\theta : S^2 \rightarrow S^2$, con $Crit_{\tilde{f}_\theta} = \{0, \infty\}$ y $P_{\tilde{f}_\theta} = \{X_1, \dots, X_k, \infty\}$. Esta extensión, llamada el mapa araña para θ , es única a menos de equivalencias de Thurston y es un polinomio topológico.*

Antes de demostrar el teorema vamos a ver el siguiente lema:

Lema 3.3.11. *Si L_i, L_j y L_k están en la misma componente conexa de $S^2 \setminus M_\theta$ entonces el mapa f_θ preserva el orden circular (si L_j está entre L_i y L_k , entonces L_{j+1} está entre L_{i+1} y L_{k+1})*

Demostración. Si los tres ángulos están contenidos en un semicírculo, ninguno puede pasar al otro (al ser duplicado, para que un ángulo se intercambie con otro su diferencia tiene que ser mayor a $1/2$). \square

Demostración del teorema 3.3.10. Sean H_1 y H_2 los abiertos de $S^2 \setminus \tilde{\mathbf{S}}_\theta$ que separa M_θ . Tanto H_1 como H_2 son homeomorfos a discos.

Vamos a definir un mapa $\pi_1 : \mathbb{D} \rightarrow \bar{H}_1$ que sea un homeomorfismo en \mathbb{D} y que cumpla que $\pi_1(S^1) = \partial H_1$. Esto es equivalente a pensar la media esfera \bar{H}_1 como un disco cocientado en su borde por una función. La construcción es análoga para $\pi_2 : \mathbb{D} \rightarrow \bar{H}_2$

Si hay n patas de la araña en ∂H_1 dividimos S^1 en $n + 1$ segmentos. Tomemos un segmento cualquiera y lo denotamos \tilde{M} ; a su punto medio lo denotamos \tilde{X}_0 y a sus extremos los denotamos y_1 e y_2 . Si L_i es la pata más cercana a M_θ denotamos por \tilde{L}_i al segmento adyacente a \tilde{M} cuyo extremo es y_2 . Ahora repetimos lo mismo para la pata más cercana a L_i y etiquetamos cada uno de los segmentos. Se puede ver un esquema de esta construcción en la figura 3.4.

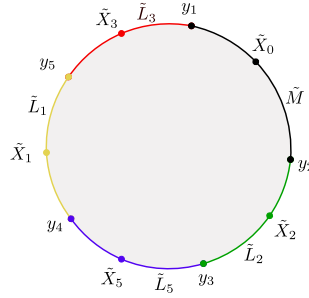


Figura 3.4: Construcción de la media esfera H_1 como cociente de \mathbb{D} .

Procedemos a definir π_1 siguiendo estas reglas (un esquema del mapa se puede ver en la figura 3.5):

1. $\pi_1(\tilde{X}_i) = X_i$
2. $\pi_1(y_i) = \infty$
3. $\pi_1(\tilde{M}) = M_\theta$. Respetando que π_1 sea un homeo en los arcos de \tilde{M} entre los puntos \tilde{X}_0 e y_j .
4. $\pi_1(\tilde{L}_i) = L_i$. Respetando que π_1 sea un homeo en los arcos de \tilde{L}_i entre los puntos \tilde{X}_i e y_j .

Ahora consideremos los abiertos $S_1 = S^2 \setminus f_\theta(\partial H_1)$ y $S_2 = S^2 \setminus f_\theta(\partial H_2)$. El conjunto S_1 es el complemento de las imágenes de las patas que están en ∂H_1 junto con la pata X_1 (que es imagen por f_θ de M_θ). Aplicando una construcción análoga podemos definir $\pi'_1 : \mathbb{D} \rightarrow S^2$ con $\pi'_1(S^1) = \partial S_1$ y podemos hacer lo mismo con S_2 .

Luego podemos levantar f_θ a dos mapas f_1 y f_2 que hacen que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f_i} & S^1 \\ \downarrow \pi_i & & \downarrow \pi'_i \\ \partial H_i & \xrightarrow{f_\theta} & \partial S_i \end{array}$$

Esto lo podemos hacer llevando cada pata $\tilde{L}_i = \pi_i^{-1}(L_i)$ a $\tilde{L}_{i+1} = \pi'_i^{-1}(L_{i+1})$ y \tilde{M} a \tilde{L}_1 . Por el lema 3.3.11 las patas preservan el orden circular, y también lo harán los f_i . Esto implica que no hay problemas de continuidad en los puntos correspondientes a $\pi_i^{-1}(\infty)$.

Por el teorema 1.0.1 del anexo A podemos extender f_1 a un homeomorfismo de \mathbb{D} y, como el diagrama conmuta, podemos usar la función f_1 para definir un mapa $\tilde{f}_1 : \tilde{H}_1 \rightarrow \tilde{S}_1$ que extiende a f_θ y es un homeomorfismo de $\tilde{H}_1 \setminus M_\theta$ en $\tilde{S}_1 \setminus X_1$. Haciendo lo mismo con f_2 obtenemos otro mapa \tilde{f}_2 que es análogo a \tilde{f}_1 y es un homeomorfismo de $\tilde{H}_2 \setminus M_\theta$ en $\tilde{S}_2 \setminus X_1$. Ambos mapas coinciden en M_θ .

Si juntamos ambos homeomorfismos obtenemos un mapa $\tilde{f}_\theta : S^2 \rightarrow S^2$ que es un homeomorfismo local al construirlo pegando dos homeomorfismos salvo en 0 e ∞ y que extiende f_θ . La pata L_1 tiene como preimagen todo M_θ . Esto implica que tanto 0 como ∞ son críticos. Los otros puntos de X_1 tendrán una preimagen en cada semirrecta de M_θ .

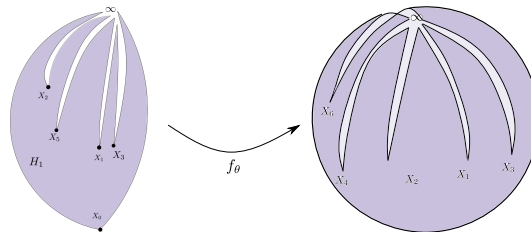


Figura 3.5: En esta figura se puede ver como el mapa de pegado se proyecta a H_1 , y también una idea de cómo actuaría el levantado de f_θ .

Ahora falta probar la unicidad. Supongamos que tenemos un segundo cubrimiento ramificado \tilde{g}_θ que extiende a f_θ . Sabemos que $\tilde{g}_\theta(M_\theta) = L_1$. Luego, por el lema 3.1.11, sabemos que $\tilde{g}_\theta|_{\bar{H}_1}$ y $\tilde{g}_\theta|_{\bar{H}_2}$ son homeomorfismos (que llamaremos \tilde{g}_1 y \tilde{g}_2 respectivamente) salvo en la línea divisoria.

Por el teorema 1.0.2 del anexo A, podemos deducir que \tilde{f}_1 es isotópico a \tilde{g}_1 y \tilde{f}_2 es isotópico a \tilde{g}_2 .

Definimos $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$

$$\varphi(z) = \begin{cases} \tilde{g}_1 \circ \tilde{f}_1^{-1}(z) & \text{si } z \in \bar{H}_1 \\ \tilde{g}_2 \circ \tilde{f}_2^{-1}(z) & \text{si } z \in \bar{H}_2 \setminus M_\theta \end{cases}$$

y $\varphi' = id$. Es inmediato ver que el diagrama de la definición 3.2.1 conmuta. Además se cumple que φ restringido a la araña es la identidad. También sabemos que φ y φ' son isotópicas relativo a la araña (porque \tilde{f}_i y \tilde{g}_i lo son) y, por lo tanto, φ y φ' establecen una equivalencia de Thurston entre \tilde{f}_θ y \tilde{g}_θ . \square

3.4. Mapas araña y obstrucciones de Thurston

Ahora que construimos ejemplos de polinomios topológicos de grado 2 en la esfera queremos ver cuándo son equivalentes Thurston a un polinomio en el sentido clásico. En esta sección vamos a dar condiciones combinatorias para ver cuándo esto ocurre y, en próximos capítulos, vamos a ver que todo polinomio cuadrático con ciclo superatractor es equivalente Thurston a un mapa araña.

Para describir los casos donde los mapas araña tienen obstrucciones de Thurston es necesario definir la secuencia de entrelazado de los puntos postcríticos de \tilde{f}_θ . Esta secuencia, además, nos dará una forma de describir la topología del conjunto de Julia relleno. Para definirla consideramos la línea M_θ que separa S^1 en dos y denotamos A_θ como el semicírculo que contiene a $1 = e^{2\pi i 0}$, y B_θ al otro.

Definición 3.4.1. Sea t un ángulo en \mathbb{R}/\mathbb{Z} . La θ -secuencia de entrelazado

$$\Sigma_\theta(t) = \Sigma_\theta^0(t), \Sigma_\theta^1(t), \Sigma_\theta^2(t), \dots$$

es una sucesión de letras A y B definida por

$$\Sigma_\theta^n(t) = \begin{cases} A & \text{si } e^{2\pi i 2^n t} \in A_\theta \\ B & \text{si } e^{2\pi i 2^n t} \in B_\theta \end{cases}$$

También decimos que $\Sigma_\theta(\theta)$ es la *secuencia de entrelazado del mapa \tilde{f}_θ* .

Esta definición puede ser ambigua si un punto en la órbita del ángulo t cae en la línea M_θ . Esta ambigüedad se resuelve en el capítulo 5.

Observación. Para $\theta \in \mathbb{Q}^{even}$ la secuencia de entrelazado del mapa \tilde{f}_θ no es ambigua. Esto es porque $e^{2\pi i\theta}$ es un punto estrictamente preperiódico bajo duplicación de ángulos.

Otra observación es que, como los puntos postcríticos de \tilde{f}_θ son periódicos o preperiódicos bajo duplicación de ángulos, sus secuencias de entrelazado también lo serán.

Podemos decir que $\Sigma_\theta^n(t)$ también es la secuencia de entrelazado del punto $e^{2\pi i t}$. Esto nos permite definir la secuencia de entrelazado en los puntos postcríticos de \tilde{f}_θ .

Observación. El mapa de duplicación de ángulos induce un shift en la secuencia de entrelazado. Dicho de otra forma

$$\Sigma_\theta(2t) = \Sigma_\theta^1(t), \Sigma_\theta^2(t), \dots$$

El objetivo del resto del capítulo es probar el siguiente teorema que identifica cuándo un mapa araña tiene obstrucciones de Thurston (en algunos casos en función de la secuencia de entrelazado de sus puntos postcríticos):

Teorema 3.4.2. *Sea θ un ángulo racional.*

- (1) *Si $\theta \in \mathbb{Q}^{odd}$ entonces el mapa \tilde{f}_θ no tiene obstrucciones de Thurston y, por lo tanto, es equivalente Thurston a una función racional (un polinomio de grado 2).*
- (2) *Si $\theta \in \mathbb{Q}^{even}$ entonces el mapa \tilde{f}_θ no tiene obstrucciones de Thurston si y sólo si todos los puntos postcríticos X_m tienen secuencias de entrelazado distintas.*

3.4.1. Ciclos de Levy

Si bien el teorema 3.2.15 da una clasificación para ver cuándo los mapas de Thurston son equivalentes a funciones racionales, muchas veces esta condición es difícil de chequear. Para demostrar el teorema 3.4.2 vamos a utilizar un tipo de multicurva cuya existencia impide que un mapa de Thurston sea equivalente a una función racional. Estas multicurvas, llamadas ciclos de Levy, pueden no ser f -estables.

Definición 3.4.3. Sea $f : (S^2, P_f) \rightarrow (S^2, P_f)$ un mapa de Thurston y sea Δ una multicurva ordenada

$$\Delta = \{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}, \delta_n = \delta_0\}$$

Decimos que Δ es un *ciclo de Levy de f* si se cumple que para todo i al menos una componente δ'_{i-1} de $f^{-1}(\delta_i)$ es homotópica a δ_{i-1} en $S^2 \setminus P_f$ y, además, $f : \delta'_{i-1} \rightarrow \delta_i$ tiene grado 1.

Proposición 3.4.4. Si un mapa de Thurston f tiene un ciclo de Levy Δ , entonces f no es equivalente Thurston a una función racional.

Demostración. Supongamos por absurdo que existe una función racional g que es equivalente Thurston a f . Esto quiere decir que existen φ y φ' tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{\varphi'} & \hat{S} \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ S^2 & \xrightarrow{\varphi} & \hat{S} \end{array}$$

Además, φ y φ' coinciden en P_f y son isotópicas relativo a P_f .

Esto implica que para cada i las curvas $\varphi(\delta_i)$ y $\varphi'(\delta_i)$ son homotópicas en $\hat{S} \setminus P_g$.

Dado $i \in \mathbb{N}$, como existe δ'_{i-1} homotópico a δ_{i-1} tal que $f(\delta'_{i-1}) = \delta_i$, esto implica que

$$\varphi \circ f(\delta'_{i-1}) = \varphi(\delta_i)$$

A su vez, por la equivalencia de Thurston, esto implica que

$$g \circ \varphi'(\delta'_{i-1}) = \varphi(\delta_i)$$

y como φ' y φ son isotópicas tenemos que la curva $\varphi'(\delta'_{i-1})$ es homotópica a $\varphi(\delta_{i-1})$. Esto implica que

$$\Delta' = \{\varphi(\delta_0), \varphi(\delta_1), \dots, \varphi(\delta_{n-1}), \varphi(\delta_n)\}$$

es un ciclo de Levy para g .

La idea ahora es probar que una función racional no puede tener un ciclo de Levy.

Como $|P_f| = |P_g| > 2$ (pues existe una multicurva) sabemos que $\hat{S} \setminus P_g$ admite una métrica hiperbólica que llamaremos ρ_1 . También es claro que $g^{-1}(P_g) \supset P_g$, por lo que $\hat{S} \setminus g^{-1}(P_g)$ también admite una métrica hiperbólica que llamaremos ρ_2 .

Como $Crit_g \subseteq g^{-1}(P_g)$ tenemos que $g : \hat{S} \setminus g^{-1}(P_g) \rightarrow \hat{S} \setminus P_g$ es un cubrimiento y, por lo tanto, una isometría local entre ρ_1 y ρ_2 .

Podemos reemplazar a $\varphi(\delta_i)$ en Δ' por la única geodésica en la clase de homotopía para la métrica ρ_1 (que llamaremos δ_i^*).

Tenemos que $g^{-1}(\delta_i^*)$ tiene una componente homotópica a δ_{i-1}^* en $\hat{S} \setminus P_g$, que llamaremos σ . Además se cumple que

$$l_{\rho_1}(\delta_{i-1}^*) \leq l_{\rho_1}(\sigma) < l_{\rho_2}(\sigma) = l_{\rho_1}(\delta_i^*)$$

donde la segunda desigualdad viene del hecho de que $S^2 \setminus g^{-1}(P_g) \subseteq S^2 \setminus P_g$. Esto es absurdo pues, al ser Δ' un ciclo de Levy, los índices están numerados circularmente y tendríamos que una curva es más corta que si misma. \square

Hay un tipo especial de ciclos de Levy llamados ciclos de Levy degenerados.

Definición 3.4.5. Un ciclo de Levy $\Delta = \{\delta_0, \dots, \delta_n = \delta_0\}$ es *degenerado* si existe un conjunto de discos topológicos D_i tales que $\partial D_i = \delta_i$ y, además, existe una componente de $f^{-1}(D_i)$ que es un disco (que llamamos D'_{i-1}) que cumple:

1. La curva $\partial D'_{i-1}$ es homotópica a δ_{i-1} en $S^2 \setminus P_f$
2. D'_{i-1} contiene los mismos puntos postcríticos de f que D_i
3. $f : D'_{i-1} \rightarrow D_i$ es un homeomorfismo

Estas multicurvas nos ayudarán a clasificar las equivalencia de Thurston de los mapas araña, y su importancia nos la da el siguiente teorema.

Teorema 3.4.6. *Sea f un mapa de Thurston que además es un polinomio topológico. Si f tiene una obstrucción de Thurston entonces tiene un ciclo de Levy degenerado.*

Antes de probar el teorema vamos a explorar algunos conceptos sobre las multicurvas.

Definición 3.4.7. Una obstrucción de Thurston es *minimal* si cumple que, si $\Gamma' \subseteq \Gamma$ es una obstrucción de Thurston entonces $\Gamma' = \Gamma$

Definición 3.4.8. Sea Γ una obstrucción de Thurston minimal. Decimos que una curva $\gamma \in \Gamma$ es *no esencial* si cumple que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_{\Gamma}^{\circ m}([\gamma]) = 0$$

de lo contrario decimos que γ es *esencial*. Al conjunto de curvas no esenciales lo denotamos Γ_N y al de las esenciales lo denotamos Γ_E

Observación. $\Gamma = \Gamma_E \sqcup \Gamma_N$.

Para poder entender mejor estas definiciones recordamos la definición de la transformación lineal de Thurston.

$$f_\Gamma([\gamma]) = \sum_{\delta \in \Gamma} \left(\sum_{\eta \in T_\gamma(\delta)} \frac{1}{\deg(f|_\eta : \eta \rightarrow \gamma)} \right) [\delta]$$

y ahora, la iteración k -ésima de la transformación de Thurston la podemos escribir de la siguiente manera

$$f_\Gamma^{\circ k}([\gamma]) = \sum_{\delta \in \Gamma} \left(\sum_{\eta \in T_\gamma(\delta)} \frac{1}{\deg(f|_\eta : \eta \rightarrow \gamma)} \right) f_\Gamma^{\circ k-1}([\delta]) \quad (3.3)$$

Lema 3.4.9. *Si γ es una curva no esencial, y η es un elemento de Γ homotópico a una componente de $f^{-1}(\gamma)$, entonces η es no esencial.*

Otra forma de enunciar el lema es decir que Γ_N es una multicurva f -estable.

Demostración. Supongamos por absurdo que hay una curva γ no esencial que tiene una componente de $f^{-1}(\gamma)$ que si lo es. Vamos a ver que $f_\Gamma^{\circ k}([\gamma])$ no puede tender a 0. Por la fórmula

$$\begin{aligned} f_\Gamma^{\circ k}([\gamma]) &= \sum_{\delta \in \Gamma} \left(\sum_{\eta \in T_\gamma(\delta)} \frac{1}{\deg(f|_\eta : \eta \rightarrow \gamma)} \right) f_\Gamma^{\circ k-1}([\delta]) \\ &= \frac{1}{\deg(f|_\eta : \eta \rightarrow \gamma)} f_\Gamma^{\circ k-1}([\eta]) + \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

Como todos los términos son positivos y $f_\Gamma^{\circ k-1}([\eta])$ no tiende a 0 (pues η es esencial), concluimos que la expresión no puede tender a 0. \square

Nota. Esto no es cierto para las curvas esenciales: una curva que es preimagen de una curva esencial puede ser homotópica a una curva no esencial. Sin embargo, no todas sus preimágenes pueden ser no esenciales.

Lema 3.4.10. $\Gamma_E \neq \emptyset$

Demostración. Si $\Gamma_N = \Gamma$, entonces para todo $v \in \mathbb{R}^\Gamma$ se cumple que

$$f_\Gamma^{\circ k}(v) \rightarrow 0$$

Esto es absurdo pues f_Γ tiene un valor propio mayor a 1, al ser Γ obstrucción de Thurston. \square

Lema 3.4.11. *Si Γ es minimal y $\gamma \in \Gamma_E$ entonces existe $\alpha \in \Gamma_E$ tal que una componente de $f^{-1}(\alpha)$ es homotópica a γ*

Demostración. Supongamos por absurdo que γ no cumple el enunciado. Por el lema 3.4.9 tenemos que ningún elemento de Γ tiene una preimagen por f homotópica a γ ; luego, la matriz asociada a la f_Γ tendrá la siguiente forma:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} & A & & B & & C \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & D & & E & \\ 0 & \dots & 0 & & & & \end{array} \right) \quad (3.5)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\Gamma_N} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{\Gamma_E}$

donde la columna y la fila del medio es la correspondiente a la curva γ . Todas las entradas de la fila del medio son 0 porque ninguna curva de Γ_N es homotópica a γ (pues Γ_N es f -estable).

Nuevamente por el lema 3.4.9, tenemos que $\Gamma \setminus \{\gamma\}$ es f -estable y, por la forma de la matriz, el vector propio asociado a λ_Γ está en $\Gamma \setminus \{\gamma\}$. Concluimos así que $\Gamma \setminus \{\gamma\}$ es una obstrucción de Thurston, negando la hipótesis de que Γ es minimal. \square

Ahora estamos en condiciones de probar el teorema 3.4.6.

Demostración del teorema 3.4.6. La idea de la demostración es partir de una obstrucción de Thurston minimal Γ y probar que Γ_E es un ciclo de Levy degenerado.

Sea γ una curva cerrada simple en $S^2 \setminus P_f$. Tenemos que γ divide S^2 en dos componentes conexas. Denotamos por D_γ a la que no contiene a ∞ .

Luego definimos Γ_{in} como el conjunto de curvas esenciales interiores; es decir, las curvas $\gamma \in \Gamma_E$ tales que D_γ no contiene otras curvas de Γ_E . La idea es probar que $\Gamma_{in} = \Gamma_E$ y que además es un ciclo de Levy degenerado.

Vamos a considerar, para cada $\gamma \in \Gamma_{in}$, el conjunto $I_\gamma \subseteq \Gamma_E$ de elementos homotópicos a una componente conexa de $f^{-1}(\gamma)$. Vamos a ver que I_γ tiene un único elemento y este pertenece a Γ_{in} . Sea $\gamma \in \Gamma_{in}$; como $\gamma \in \Gamma_E$, por el lema 3.4.11 existe un elemento $\eta \in \Gamma_E$ homotópico a una componente de $f^{-1}(\gamma)$. Supongamos que $\eta \notin \Gamma_{in}$. Esto quiere decir que existe $\delta \in \Gamma_E$, tal que $\delta \subseteq D_\eta$.

Nuevamente por minimalidad existe $\alpha \in \Gamma_E$ tal que δ es homotópica a una componente de $f^{-1}(\alpha)$. Analicemos ahora los puntos de P_f que encierran

las curvas α, δ y η . El disco D_δ debe contener al menos dos puntos x_1 y x_2 de P_f . A su vez, D_η debe contener un punto postcrítico x_3 que no esté en D_δ . Luego, $f(x_1), f(x_2)$ y $f(x_3)$ deben estar en D_γ mientras que D_α no puede contener a $f(x_3)$. Esto implica que α está contenido en D_γ , lo cual niega el hecho de que $\gamma \in \Gamma_{in}$. La idea de este argumento se puede ver en la figura 3.6.

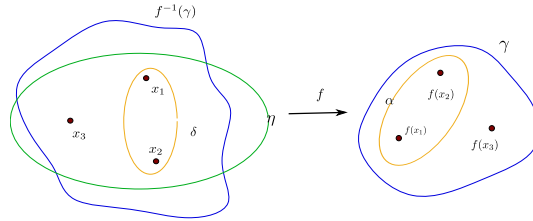


Figura 3.6: Esquema del argumento de las curvas de Γ_E . Como se puede ver, si $\eta \notin \Gamma_{in}$, entonces γ no puede pertenecer a Γ_{in} .

Tenemos entonces que para todo $\gamma \in \Gamma_{in}$ se cumple que $I_\gamma \subseteq \Gamma_{in}$. Además, es claro que si $\gamma \neq \eta$ entonces $I_\gamma \cap I_\eta = \emptyset$ (de lo contrario γ y η serían homotópicas).

Recapitulando, se cumple que $|I_\gamma| \geq 1$ y que son todos disjuntos. Esto implica que cada I_γ tiene un solo elemento y el mapa $\gamma \mapsto I_\gamma$ induce una permutación entre las curvas de Γ_{in} . Por un argumento análogo al del lema 3.4.11 tenemos que la permutación es circular y además $\Gamma_{in} = \Gamma_E$.

Ahora podemos ordenar las curvas de $\Gamma_E = \{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}$ de tal forma que γ_{i-1} es la curva homotópica al único elemento de I_{γ_i} .

Para concluir que Γ_E es un ciclo de Levy lo único que falta probar es que si η_i es la componente de $f^{-1}(\gamma_i)$ homotópica a γ_{i-1} entonces $f|_{\eta_i} : \eta_i \rightarrow \gamma_i$ es de grado 1.

Vamos a ordenar los elementos de Γ para construir matriz asociada a la transformación lineal f_Γ , de una forma similar al lema 3.4.11: al principio ponemos los elementos correspondientes a las curvas de Γ_N . Después ponemos los elementos de Γ_E de tal forma que la columna correspondiente a γ_i sea adyacente con la correspondiente a γ_{i+1} . Así, la matriz asociada a f_Γ queda con la siguiente forma:

$$f_\Gamma = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$$

Luego notamos que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1/d_{m-1} \\ 1/d_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

donde d_i es el grado de $f|_{\eta_i} : \eta_i \rightarrow \gamma_i$. Para concluir, observamos que el polinomio característico de f_Γ es

$$\det(A - \lambda I)\det(D - \lambda I) = \left(\frac{1}{d_0 \dots d_{m-1}} - \lambda^m \right) \det(D - \lambda I)$$

Como D no puede tener valores propios mayores a 1 (pues es la matriz asociada a la transformación de Thurston para multicurvas no esenciales), y Γ es una obstrucción de Thurston, eso implica que la raíz de $\left(\frac{1}{d_0 \dots d_{m-1}} - \lambda^m \right)$ tiene que ser mayor o igual que 1. La única forma de que esto ocurra es que $d_0 = d_1 = \dots = d_{m-1} = 1$, por lo que Γ_E es un ciclo de Levy. Además, es un ciclo de Levy degenerado ya que una componente de $f^{-1}(D_{\gamma_i})$ contendrá los mismo postcríticos que $D_{\gamma_{i-1}}$ \square

Este resultado es fuerte: probar que no existe un ciclo de Levy degenerado muchas veces es más fácil que probar que no existe una obstrucción de Thurston.

3.4.2. Demostración del teorema 3.4.6

Ahora vamos a probar el teorema que determina cuándo los mapas araña son equivalentes Thurston a polinomios cuadráticos. En el caso de \mathbb{Q}^{odd} vamos a probar un resultado aún más general.

Teorema 3.4.12. *Sea f un mapa de Thurston que también es polinomio topológico. Si todos los puntos postcríticos tienen puntos críticos en su órbita futura entonces f no tiene ciclos de Levy degenerados.*

Esto nos permite deducir el siguiente corolario.

Corolario 3.4.13. *Sea f un polinomio topológico con Orbifold hiperbólico. Si todos los puntos postcríticos tienen puntos críticos en su órbita futura entonces f es equivalente Thurston a una función racional.*

Demostración del teorema 3.4.12. Supongamos por absurdo que f tiene un ciclo de Levy degenerado

$$\Delta = \{\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}, \gamma_m = \gamma_0\}$$

con D_0, \dots, D_{m-1} sus respectivos discos.

Como $f(\gamma_i)$ es homotópico a γ_{i+1} , tenemos que

$$f(P_f \cap D_i) = P_f \cap D_{i+1} \quad (3.6)$$

En particular debe existir algún D_i que contenga un punto crítico. Esto es absurdo pues la componente D'_i de $f^{-1}(D_{i+1})$ cuya frontera es homotópica a γ_i no se puede mapear de manera homeomorfa a D_{i+1} (pues D'_i tiene un punto crítico en su interior). \square

Como corolario de este teorema tenemos la primera mitad del teorema 3.4.2.

Corolario 3.4.14 (Parte (1) del teorema 3.4.6). *Si $\theta \in \mathbb{Q}^{odd}$, entonces \tilde{f}_θ es equivalente Thurston a una función racional.*

Ahora que tenemos clasificados los mapas arañas para θ impar, vamos a demostrar la segunda parte del teorema 3.4.2

Demostración de la parte (2) del teorema 3.4.2.

1: *Si \tilde{f}_θ tiene una obstrucción de Thurston, entonces hay al menos dos X_n que tienen la misma secuencia de entrelazado.*

Supongamos que el mapa \tilde{f}_θ con $\theta \in \mathbb{Q}^{even}$ admite una obstrucción de Thurston. Por el teorema 3.4.6 sabemos que también admite un ciclo de Levy degenerado

$$\Delta = \{\gamma_0 \dots, \gamma_{m-1}, \gamma_m = \gamma_0\}$$

con sus respectivos discos D_i y con las componentes D'_{i-1} de $\tilde{f}_\theta^{-1}(D_i)$ homotópicas a D_{i-1} .

Por la ecuación (3.6) la órbita futura de puntos postcríticos que estén en $\bigcup_i D_i$ también estará en $\bigcup_i D_i$. Como este conjunto tiene que tener algún punto postcrítico y en los mapas araña la órbita postcrítica es única, debe contener a todos los puntos postcríticos periódicos. Vamos a ver que $\bigcup_i D_i$ no tiene ningún punto postcrítico preperiódico. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que D_0 contiene al primer punto postcrítico periódico de la órbita del punto crítico (que llamaremos x_0). Sabemos que x_0 tiene dos preimágenes: una en la órbita periódica (que llamaremos x_{m-1}) y otra que es preperiódica

en la órbita crítica (que llamaremos y). Si denotamos por C al conjunto de puntos periódicos de la órbita crítica entonces $\tilde{f}_\theta^{-1}(C) \cap P_{\tilde{f}_\theta} = C \cup \{y\}$.

Tomemos el disco D'_{m-1} cuya frontera es homotópica a γ_{m-1} . Como $\tilde{f}_\theta|_{D'_{m-1}} : D'_{m-1} \rightarrow D_0$ es un homeomorfismo, D'_{m-1} no puede contener tanto a x_{m-1} como a y . Sin embargo, como $\bigcup_i D_i$ contiene a todos los puntos postcríticos periódicos, D'_{m-1} debe contener a x_{m-1} . Esto implica que $y \notin \bigcup_i D_i$.

Por otro lado, la componente de $\tilde{f}_\theta^{-1}(\gamma_0)$ que encierra a y no puede tener ningún otro postcrítico periódico (porque todos están en algún D_i). Esto implica que la componente es periférica, y, por lo tanto, que Δ es \tilde{f}_θ -estable.

Recapitulando, tenemos que $\bigcup_i D_i$ tiene a todos los puntos postcríticos periódicos y a ninguno de los preperiódicos. Además, podemos tomar curvas homotópicas a cada γ_i de tal forma que no intersequen patas de la araña que tengan ángulos preperiódicos, de la siguiente forma:

Reemplazamos a cada γ_i por otra curva en su clase de homotopía de tal forma que corte a las patas de ángulos preperiódicos una cantidad finita de veces. Luego observamos que si γ_i corta a dichas patas en una cantidad finita de puntos entonces la componente de $\tilde{f}_\theta^{-1}(\gamma_i)$ homotópica a γ_{i-1} corta las patas una cantidad igual o menor de veces. Esto es porque si un punto $p \in S^2$ no está en una pata, sus preimágenes tampoco lo estarán, pues \mathbf{S}_θ es invariante por \tilde{f}_θ . Además, si una curva γ_j corta a L_1 en un punto y_0 ninguna de sus preimágenes cortará una pata. Esto implica que para un k suficientemente grande, reemplazando cada curva γ_i con la componente correcta de $\tilde{f}_\theta^{-cm^k}(\gamma_i)$ podemos obtener ciclo de Levy degenerado

$$\Gamma' = \{\gamma'_0, \dots, \gamma'_{m-1}\}$$

que no interseca a ninguna pata preperiódica.

Para concluir esta parte del teorema observamos que si una curva γ'_i no corta a la pata L_1 , su preimagen no cortará la recta divisoria M_θ , y tampoco lo hará su imagen, por lo que todos los puntos postcríticos que encierra tendrán la misma secuencia de entrelazado.

2: Si hay un conjunto de postcríticos con la misma secuencia de entrelazado, entonces \tilde{f}_θ tiene una obstrucción de Thurston

Si dos puntos postcríticos tienen la misma secuencia de entrelazado sus imágenes también tendrán la misma secuencia de entrelazado. Luego, todo punto postcrítico periódico tiene la misma secuencia de entrelazado que algún otro punto.

Construimos curvas cerradas simples que encierren a puntos postcríticos periódicos con las mismas secuencias de entrelazado y que, además, no

intersequen la línea divisoria M_θ . Llamemos a dicho conjunto

$$\Gamma = \{\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}, \gamma_m = \gamma_0\}$$

ordenado de tal forma que γ_0 contenga al primer punto postcrítico periódico de la órbita crítica y, además, de tal forma que si γ_i contiene a los puntos postcríticos x_1, \dots, x_l , entonces γ_{i+1} contenga a $\tilde{f}_\theta(x_1), \dots, \tilde{f}_\theta(x_l)$.

Vamos a probar que Γ es un ciclo de Levy. En primer lugar observemos que si $i \neq j$ entonces $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$. Esto es porque los puntos postcríticos de γ_i y γ_j no tienen las mismas secuencias de entrelazado, por lo que existe un $p > 0$ tal que la componente de $\tilde{f}_\theta^{-p}(\gamma_i)$ que es homotópica a una curva de Γ está en una componente de $S^2 \setminus M_\theta$ y la componente de $\tilde{f}_\theta^{-p}(\gamma_j)$ que es homotópica a una curva de Γ está en la otra. Luego, si dichos conjuntos no se intersecan, tampoco lo harán γ_i y γ_j .

Las curvas no cortan M_θ lo que implica que ninguna curva encierra al crítico, lo que implica que $\tilde{f}_\theta^{-1}(\gamma_i)$ para cada $i = 1, \dots, m$ son dos curvas disjuntas. Esto implica que si $\gamma \in \Gamma$ y γ' es una componente de $\tilde{f}_\theta^{-1}(\gamma)$ entonces $\tilde{f}_\theta : \gamma' \rightarrow \gamma$ es un homeomorfismo, lo que termina de probar que Γ es un ciclo de Levy. Como \tilde{f}_θ tiene un ciclo de Levy entonces no es equivalente Thurston a una función racional y, por lo tanto, tiene una obstrucción de Thurston. \square

Ahora que sabemos qué mapas araña son equivalentes Thurston a polinomios cuadráticos, vamos a tratar ver lo opuesto: que todo polinomio con ciclo superatractor es equivalente Thurston a un mapa araña. El resto del trabajo consistirá en dar una caracterización de la topología del conjunto de Julia relleno para polinomios cuadráticos con ciclo superatractor en función de la secuencia de entrelazado de su mapa araña correspondiente.

Definición 3.4.15. Sea θ un ángulo racional tal que \tilde{f}_θ no admite obstrucciones de Thurston. Llamamos p_θ al polinomio cuadrático que es equivalente Thurston al mapa \tilde{f}_θ .

Por el teorema 3.2.15 de Thurston el polinomio p_θ es único a menos de conjugar por una transformación de Möbius.

Ejemplo 3.4.16. Vamos a ver un ejemplo de un mapa araña con una obstrucción de Thurston. Para esto vamos a trabajar con la expansión binaria de los ángulos racionales. Consideramos el ángulo $\theta = 43/60 = 0,101101_2$; tenemos que M_θ es la recta radial que pasa por $\theta' = 0,0101101_2$ y $\theta'' = 0,1101101_2$. A partir de esto observamos que $\Sigma_\theta^n(t) = A$ si y solo si $t < \theta'$ o $t > \theta''$. En base a esto calculamos las secuencias de entrelazado de los X_i :

X_i	Expansión binaria	$\Sigma_\theta(X_i)$
$X_1 = 55/100$	$0,10\overline{0011}$	$BA\overline{AB}$
$X_2 = 5/50 = 13/30$	$0,0\overline{0011}$	$A\overline{AB}$
$X_3 = 5/25$	$0,\overline{0011}$	\overline{AB}
$X_4 = 10/25 = 11/15$	$0,011\overline{0011}$	\overline{BA}
$X_5 = 20/25 = 7/15$	$0,11\overline{0011}$	\overline{AB}
$X_6 = 15/25$	$0,10\overline{011}$	\overline{BA}
$X_7 = 30/25 = 5/25 = X_3$	$0,\overline{0011}$	\overline{AB}

De la tabla y el teorema 3.4.2 deducimos que el mapa \tilde{f}_θ tiene una obstrucción de Thurston. En la figura 3.7 se puede ver una multicurva f -estable que es obstrucción de Thurston.

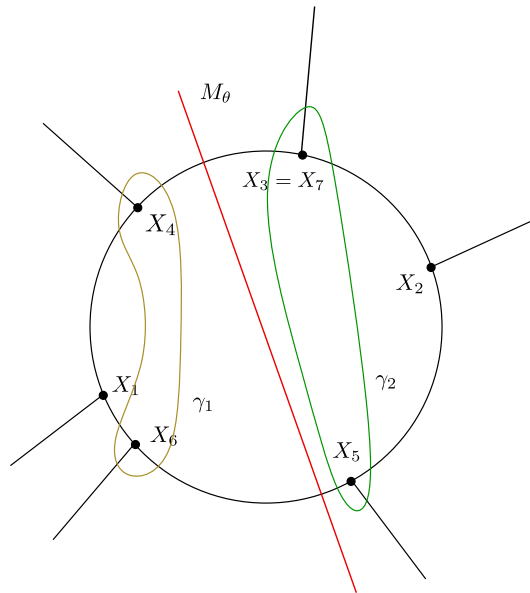


Figura 3.7: Dibujo de una multicurva del mapa \tilde{f}_θ con $\theta = 55/100$. Los puntos postcríticos X_3 y X_5 tienen la misma secuencia de entrelazado y, por lo tanto, los puntos X_4 y X_6 también tienen la misma secuencia entre ellos. Esto implica, por la prueba de la segunda parte del teorema 3.4.2, que la multicurva $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ es una obstrucción de Thurston.

Capítulo 4

Rayos exteriores

El siguiente objetivo de este trabajo es encontrar una conjugación entre polinomios cuadráticos y mapas araña. Para eso vamos a definir rayos exteriores y, en el capítulo siguiente, ver qué relación tienen con las patas de la araña.

Aquí nuevamente tenemos estructura compleja. Trabajamos con un polinomio $p : \hat{\mathbb{S}} \rightarrow \hat{\mathbb{S}}$ tal que todos sus críticos son atraídos por un ciclo superatractor y con el inverso del mapa de Böttcher $\psi : \mathbb{C} \setminus \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \setminus K_p$. El teorema 2.3.4 nos da la existencia de una conjugación entre el polinomio $p|_{\mathbb{C} \setminus K_p}$ y el mapa $f_d(z) = z^d$ dada por el inverso del mapa de Böttcher ψ . En este trabajo nos vamos a centrar en entender la dinámica en K_p .

4.1. Definición

En la construcción de los mapas araña, partimos de semirrectas radiales y la duplicación de ángulos para luego extender el mapa a toda la esfera. En los polinomios cuadráticos podemos encontrar este comportamiento en imágenes de semirrectas por el inverso del mapa de Böttcher. A estas rectas topológicas las llamamos *rayos exteriores*.

Definición 4.1.1. Sea $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Definimos el *rayo exterior de p con ángulo t* como

$$R_p(t) = \{\psi(re^{2\pi it}) : r > 1\}$$

Cuando el polinomio está implícito lo denotamos simplemente $R(t)$.

Observación. $p(R_p(t)) = R_p(dt)$

Definición 4.1.2. Decimos que un rayo $R_p(t)$ *aterriza* cuando existe el $\lim_{r \rightarrow 1} \psi(re^{2\pi it})$

Estas definiciones nos dan una nueva forma de enunciar el teorema 2.4.1.

Teorema 4.1.3. *Sea p un polinomio donde todos los puntos críticos son atraídos por un ciclo superattractor. Entonces $R_p(t)$ aterriza para todo t y el punto de aterrizaje depende continuamente de t .*

La idea detrás de este enunciado es que si el inverso del mapa de Böttcher se extiende de forma continua al borde, entonces el límite $\lim_{r \rightarrow 1} \psi(re^{2\pi i\theta})$ existe y vale $\bar{\psi}(e^{2\pi i\theta})$ donde $\bar{\psi}$ es la extensión al borde de ψ .

La extensión al borde de ψ es sobreyectiva. Cuando J_p no es una curva cerrada simple, esta extensión no es inyectiva.

Definición 4.1.4. Sea p un polinomio donde todos los puntos críticos son atraídos por un ciclo superattractor, y sea $\bar{\psi}$ la extensión al borde del mapa de Böttcher. Definimos el *lazo de Carathéodory* como

$$\begin{aligned}\gamma_p : S^1 &\rightarrow J_p \\ \gamma_p &= \bar{\psi}|_{S^1}\end{aligned}$$

Veremos a lo largo de este trabajo cómo el lazo de Carathéodory nos permite inferir cosas acerca del conjunto de Julia de un polinomio. Un ejemplo de esto es el corolario 4.1.5.

Corolario 4.1.5. *Si p es un polinomio cuadrático con ciclo superattractor, J_p es localmente conexo.*

4.2. Polinomios con puntos críticos fuera de K_p

En esta sección vamos a ver cómo es J_p cuando un punto crítico no tiene órbita acotada.

Teorema 4.2.1. *Si hay un punto crítico de p en $\mathbb{C} \setminus K_p$, entonces K_p y J_p tienen una cantidad no numerable de componentes conexas.*

Demostración. Si consideramos el mapa de Böttcher alrededor de infinito, entonces el teorema 2.2.2 se traduce a que existe un $r > 1$ mínimo tal que el mapa ψ (alrededor de infinito) se extiende a una transformación conforme

$$\hat{\psi} : \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}_r \rightarrow U \subseteq \mathbb{C} \setminus K_p$$

Además, ∂U es un conjunto compacto que contiene un punto crítico c . La norma del mapa de Böttcher sí se extiende a toda la cuenca de atracción, y, además, si $p(c) = v$ tenemos que

$$|\phi(v)| = |\phi(c)^d| = r^d > r$$

lo que a su vez implica que el valor crítico v está en U .

Consideremos ahora la recta infinita $R = \{t\phi(v) : t \geq 1\} \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_r$ y también $R' = \hat{\psi}(R) \subseteq U$. El conjunto R' es un rayo exterior de p .

Claramente $p^{-1}(R') \subseteq \bar{U}$. Además, $U \cap p^{-1}(R')$ consiste en k rayos exteriores, que coinciden con las raíces k -ésimas del punto $\phi(v)$. Cada uno de estos rayos tendrá un punto límite en cada una de las soluciones de la ecuación $p(z) = v$ y, además, como c es crítico, por lo menos dos de ellos tendrán a c como punto límite. Sean R'_1 y R'_2 dos rayos que tienen a c como punto límite. Como R'_1 y R'_2 son dos rectas infinitas que se unen en el mismo punto, van a cortar el plano en dos abiertos que llamaremos V_0 y V_1 .

Como $p(R'_1 \cup R'_2) = R'$ es una semirrecta tenemos que tanto $p(V_0)$ como $p(V_1)$ cubren todo el plano salvo, posiblemente, R' . Luego, como $K_p \subseteq p(V_i)$ para $i \in \{0, 1\}$, esto quiere decir que $V_i \cap K_p$ es no vacío y, como tanto V_1 como V_2 son abiertos, esto implica que $V_i \cap J_p$ también es no vacío.

Si definimos $J_0 = V_0 \cap J_p$ y $J_1 = V_1 \cap J_p$ tenemos que J_0 y J_1 es una división del Julia con intersección vacía que además cumple que

$$p(J_0) = p(J_1) = J_p$$

Podemos seguir subdividiendo cada J_k en conjuntos disjuntos $J_{k_0} = J_k \cap p^{-1}(J_0)$ y $J_{k_1} = J_k \cap p^{-1}(J_1)$ y, siguiendo este razonamiento, podemos definir

$$J_{k_0 \dots k_m} = J_{k_0} \cap p^{-1}(J_{k_1}) \cap \dots \cap p^{-m}(J_{k_m})$$

con $p(J_{k_0 \dots k_m}) = J_{k_1 \dots k_m}$. Dada cualquier sucesión $\{k_n\}$ de 0s y 1s, podemos tomar la intersección de

$$J_{k_0} \supseteq J_{k_0 k_1} \supseteq J_{k_0 k_1 k_2} \dots$$

donde cada intersección da un conjunto compacto y no vacío. De esta forma, obtenemos no numerables componentes conexas de J_p y, por lo tanto, tenemos lo mismo para K_p \square

En cierto sentido encontramos un shift de dos símbolos en las componentes conexas de J_p . Sin embargo, sólo utilizamos dos rayos exteriores de todos los que aterrizan en el punto crítico. Se puede probar que, si hay un crítico fuera de K_p , efectivamente el polinomio restringido al conjunto de Julia es semiconjugado a un shift.

4.3. Sectores

Como veremos en el siguiente teorema, cuando un punto de J_p es fijo una cantidad finita de rayos aterrizan en él. Esto nos permite definir sectores, que son abiertos del plano complejo delimitados por dos rayos consecutivos.

Teorema 4.3.1. *Sea p un polinomio con grado $d \geq 2$, donde todos los puntos críticos son atraídos por un ciclo superatractor. Sea $z_0 \in J_p$ un punto fijo. Entonces una cantidad finita de rayos aterrizan en z_0 . Además, los rayos son periódicos y son todos del mismo período bajo el mapa $f_d : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dado por*

$$f_d(t) = dt$$

Demostración. Sea $X = \gamma_p^{-1}(z_0)$. En primer lugar es claro que X es un conjunto cerrado. Como z_0 es un punto fijo entonces $f_d(X) \subseteq X$.

Afirmación. El mapa $f_d|_X : X \rightarrow X$ es inyectivo.

Demostración. Supongamos que existen $t_1, t_2 \in X$ tales que $f_d(t_1) = f_d(t_2) = dt_1$. Como se cumple que $\psi(R_p(t)) = R_p(dt)$ esto quiere decir que la imagen de los rayos de ángulos t_1 y t_2 por p es un único rayo (de ángulo dt_1), que también aterriza en z_0 .

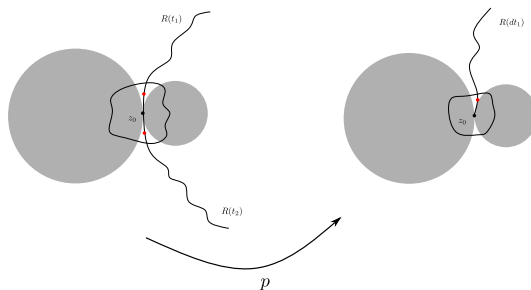


Figura 4.1: Esquema de la demostración de la afirmación

Como p es una función abierta existen puntos arbitrariamente cerca de z_0 en $R(t_1)$ y $R(t_2)$ (como los puntos rojos de la figura 4.1) que tienen la misma imagen por p . Sin embargo, como z_0 es un punto de J_p , tenemos por la proposición 1.3.6 que $|p'(z_0)| \geq 1$, lo que es absurdo pues p es localmente invertible en z_0 . ■

Como $f_d|_X$ es inyectivo sabemos que tiene una inversa local $g : f_d(X) \rightarrow X$. Además, g es continua, pues $g^{-1} = f_d$ es abierta. También sabemos que

X es compacto (pues es un cerrado dentro de \mathbb{R}/\mathbb{Z}), y por lo tanto $f_d(X)$ también lo es.

Como g es continua en un compacto, es uniformemente continua; esto implica que existe $\epsilon > 0$ tal que si $|x - y| < \epsilon$ entonces $|g(x) - g(y)| < 1/(2d)$. Podemos tomar $\epsilon < 1/2$. Luego, si cubrimos $f_d(X)$ por n intervalos I_1, \dots, I_n de largo menor a ϵ , observamos que la distancia entre puntos en diferentes componentes de $f_d^{-1}(I_i)$ es

$$\frac{1}{d} - \frac{\epsilon}{d} > \frac{1}{2d}$$

Esto se debe a que $1/d$ es la distancia entre dos preimágenes de un punto por f_d^{-1} y que $\frac{\epsilon}{d}$ es el largo de cada componente de $f_d^{-1}(I_i)$.

Finalmente, esto implica que podemos cubrir X con n intervalos de largo ϵ/d y, como $f_d(X) \subseteq X$, también podemos cubrir $f_d(X)$ con n intervalos de largo ϵ/d . Aplicando el razonamiento anterior una y otra vez podemos cubrir X con n intervalos de largo ϵ/d^m para todo m . Esto implica que X tiene a lo sumo n puntos.

Como hay finitos rayos que aterrizan, y vimos que f_d es inyectiva en X , entonces p induce una permutación entre los rayos exteriores que aterrizan en z_0 .

□

Corolario 4.3.2. *Si z_0 es periódico de período n vale el mismo resultado.*

Demostración. En $\mathbb{C} \setminus K_p$ se cumple que $\psi \circ p \circ \psi^{-1} = f_d$, entonces, en el mismo dominio, dado que $K_p = K_{p^n}$, se cumple que $\psi \circ p^n \circ \psi^{-1} = f_d^n$. Como el inverso del mapa de Böttcher es el mismo para p y p^{nk} si un $R_{p^{nk}}(t)$ aterriza en z_0 entonces $R_p(t)$ también lo hace. □

Ahora estamos en condiciones de definir sectores.

Definición 4.3.3. Sea z_0 un punto periódico de J_p , y sean R_1 y R_2 dos rayos exteriores consecutivos que aterrizan en z_0 . El *sector delimitado por R_1 y R_2* es la componente conexa de $\mathbb{C} \setminus (R_1 \cup R_2)$ que no tiene rayos exteriores que aterrizan en z_0 .

Capítulo 5

Modelo de disco pinzado

En este capítulo combinamos las construcciones topológicas del capítulo 3, en particular la de los mapas araña, con la dinámica racional estudiada en el resto del trabajo. Hasta ahora casi todos los resultados demostrados eran válidos para polinomios de grado arbitrario; sin embargo, es en este momento cuando se vuelve de vital importancia que p sea un polinomio de grado 2.

El objetivo de esta sección es dar una descripción topológica del conjunto de Julia relleno. Para poder lograr este objetivo primero es necesario obtener una parametrización interna del conjunto K_p y luego realizar una construcción análoga a los rayos exteriores en las componentes conexas de $\overset{\circ}{K}_p$. Cuando el punto crítico es fijo ya sabemos por el teorema 2.1.1 que tenemos un mapa de Böttcher en su cuenca de atracción; con esto en mente, vamos a definir una parametrización similar de las componentes de $\overset{\circ}{K}_p$ y también vamos a definir rayos interiores en esa componente. Como veremos, lo que nos permitirá definir la parametrización interna es el hecho de que los polinomios de grado 2 tienen un único punto crítico en \mathbb{C} .

En este capítulo consideramos que p es un polinomio de grado 2 con un punto crítico periódico x_0 de período $k > 1$ y $x_0, \dots, x_k = x_0$ es su órbita. Llamamos también V_i a la componente conexa de $\overset{\circ}{K}_p$ que contiene a x_i .

5.1. Parametrización interna de K_p

Primero vamos a definir mapas que sean homeomorfismos del disco a cada componente del interior del Julia relleno. Para eso usamos un teorema de suma importancia que no demostraremos.

Teorema 5.1.1. *Sea p un polinomio de grado 2 con ciclo superatractor. Entonces para toda componente V de $\overset{\circ}{K}_p$ se cumple que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $p^{\circ m}(V) = V_0$.*

La prueba se puede encontrar en la proposición 9.4.8 de [8].

Proposición 5.1.2.

- (1) Existe un único homeomorfismo $\eta_{V_0} : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \bar{V}_0$, analítico en el interior, de tal forma que $\eta_{V_0}(z^2) = p^{\circ k}(\eta_{V_0}(z))$ con $\eta_{V_0}(0) = x_0$.
- (2) Sea V una componente conexa de $\overset{\circ}{K}_p$. Existe un único m tal que $p^{\circ m} : V \rightarrow V_0$ es un homeomorfismo analítico. Además, si definimos el mapa $\eta_V : \mathbb{D} \rightarrow V$

$$\eta_V = (p^{\circ m}|_V)^{-1} \circ \eta_{V_0}$$

podemos observar que es un homeomorfismo analítico y se extiende a $\bar{\mathbb{D}}$ de manera homeomorfa.

Demostración.

- (1) En primer lugar, como se cumple que $J_p = J_{p^{\circ k}}$, podemos definir $\eta_{V_0}|_{\mathbb{D}}$ como el inverso del mapa de Böttcher de $p^{\circ k}$ alrededor de x_0 .

Como los únicos puntos críticos de $p^{\circ k}$ son $\{x_0, \dots, x_k\}$, que son fijos para $p^{\circ k}$, estamos en las hipótesis del teorema 2.4.1 y $\eta_{V_0}|_{\mathbb{D}}$ se extiende al borde. Para ver que la extensión es un homeomorfismo basta ver que ∂V_0 es una curva de Jordan. Supongamos por absurdo que no lo es. Consideramos una curva cerrada simple γ que separe V_0 de $\mathcal{A}_\infty = \mathbb{C} \setminus K_p$. Como ∂V_0 no es cerrada simple hay un punto $z_1 \in \partial V_0 \setminus \gamma$. Claramente $z_1 \in J_p$, luego, si tomamos un entorno U de z_1 que no corte a γ entonces U no puede cortar a \mathcal{A}_∞ y está contenido en K_p . Esto es absurdo por la propiedad 1.3.2 ya que la órbita futura de un abierto contenido en K_p no puede cubrir \mathcal{A}_∞ .

Concluimos que ∂V_0 es una curva de Jordan lo que prueba esta parte de la proposición.

- (2) Primero observamos que si V no tiene al punto crítico, $p|_V$ es inyectiva. Además, como el valor crítico tiene una sola preimagen, $p^{-1}(p(V))$ tampoco tiene al punto crítico; esto a su vez implica que $p : p^{-1}(p(V)) \rightarrow p(V)$ es un cubrimiento de grado 2 y por lo tanto $p^{-1}(p(V))$ es una unión disjunta de dos discos, uno de los cuales es V .

Usando el teorema 5.1.1 sabemos que existe m tal que $p^{\circ m}(V) = V_0$. Como, por el párrafo anterior, invirtiendo en cada componente a p tenemos que $p^{\circ i}|_V$ es invertible cuando $i \leq m$, el mapa η_V es un homeomorfismo analítico en \mathbb{D} .

□

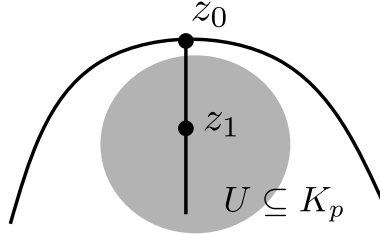


Figura 5.1: Esquema de la demostración de la proposición 5.1.2 parte 1.

La proposición 5.1.2 nos da una forma de parametrizar las componentes conexas de $\overset{\circ}{K}_p$. Podemos definir rayos interiores de forma análoga a los rayos exteriores.

Definición 5.1.3. Sea V una componente conexa de $\overset{\circ}{K}_p$. Definimos el *rayo interior* de V con *ángulo interno* t como la imagen de $\eta_V(re^{2\pi it})$ con $0 \leq r \leq 1$. Decimos que el punto $\eta_V(0)$ es el *centro* de V y el punto $\eta_V(1)$ es la *raíz* de V .

Definición 5.1.4. A la raíz de V_i la denotamos y_i .

Observación. Sean V', V'' componentes conexas de $\overset{\circ}{K}_p$, con $p(V') = V'' \neq V_0$ y sea ζ un rayo interior de V' . Se cumple que $p(\zeta)$ es el rayo interior de V'' para el mismo ángulo.

5.2. El árbol de Hubbard

Nuestro siguiente objetivo es definir el árbol de Hubbard, que es un conjunto de caminos en K_p que es invariante por p .

Utilizaremos esta construcción para probar ciertas propiedades de las raíces de las componentes de $\overset{\circ}{K}_p$ que contienen a los puntos de la órbita crítica.

5.2.1. Definición y propiedades básicas

Antes de poder definir el árbol de Hubbard es necesario definir y probar la existencia de caminos regulados.

Definición 5.2.1. Un *camino regulado* en K_p es un arco que interseca cada componente conexa de $\overset{\circ}{K}_p$ en a lo sumo dos rayos interiores.

Proposición 5.2.2. Si x, y son centros de rayos interiores entonces existe un *único camino regulado simple* que los une.

La prueba de esta proposición nos requerirá probar una serie de lemas.

Lema 5.2.3. *Sea K un conjunto simplemente conexo y localmente conexo. Sea γ un camino en K y V una componente conexa de $\overset{\circ}{K}$ tal que $\gamma \cap \bar{V} \neq \emptyset$. Entonces $\gamma \cap \bar{V}$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $\gamma \cap \bar{V}$ no es conexo. Esto quiere decir que existen t_1 y t_2 tales que $\gamma(t_1), \gamma(t_2) \in \partial V$, y $\gamma|_{(t_1, t_2)} \cap \bar{V} = \emptyset$. Como ∂V es conexo por caminos, existe un camino $\zeta \subseteq \partial V$ que los une. Observemos que $\gamma|_{(t_1, t_2)} \cup \zeta$ es una curva cerrada simple en K . Esto implica que $\gamma|_{(t_1, t_2)} \subseteq \bar{V}$, lo que es absurdo. \square

Lema 5.2.4. *Sea K un conjunto simplemente conexo y localmente conexo. Sean V_1 y V_2 componentes conexas de $\overset{\circ}{K}$. Si $\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2 \neq \emptyset$ entonces o bien $V_1 = V_2$ o $\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2$ es un punto.*

Demostración. Supongamos que existen $z_1, z_2 \in \bar{V}_1 \cap \bar{V}_2$. Como \bar{V}_1 y \bar{V}_2 son conexos por caminos existen γ_1 y γ_2 curvas incluidas en V_1 y V_2 respectivamente que unen z_1 con z_2 . Como K es simplemente conexo, el interior de la concatenación de γ_1 y γ_2 está contenido en K , lo que implica que $V_1 = V_2$. \square

Lema 5.2.5. *No hay caminos regulados cerrados simples.*

Demostración. Supongamos por absurdo que tenemos un camino regulado cerrado simple γ .

K_p es simplemente conexo por lo que la componente acotada que encierra γ está incluida en K_p . Esto implica que γ está en una sola componente conexa de $\overset{\circ}{K}_p$ lo cual es absurdo pues los rayos interiores parten todos del mismo punto y aterrizan en puntos distintos. \square

Demostración de la proposición 5.2.2.

1: *Existencia*

Sean x e $y \in K_p$ y γ un camino simple entre ellos. Podemos dividir γ en una familia de curvas $\{\gamma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de tal forma que cada γ_α esté en una componente V_α de $\overset{\circ}{K}_p$ y sus extremos en ∂V_α . Por el lema 5.2.3, podemos tomar las componentes de tal forma que, si γ_α y γ_β están incluidos en dos componentes V_α y V_β respectivamente, $V_\alpha \neq V_\beta$. Para cada γ_α podemos hacer una homotopía a extremos fijos para que sea la concatenación del rayo interior que aterriza en $\gamma_\alpha(0)$ y el rayo interior que aterriza en $\gamma_\alpha(1)$.

2: *Unicidad*

Supongamos que existen dos caminos regulados simples γ y η entre x e y . Esto implica que en la unión de ambos caminos hay un camino regulado cerrado simple. Esto es absurdo por el lema 5.2.5. \square

La siguiente proposición es la que le da importancia a los caminos regulados y nos permitirá definir el árbol de Hubbard: un árbol de caminos regulados contenido en K_p que es invariante por p .

Proposición 5.2.6. *La imagen por p de un camino regulado es un camino regulado.*

Demostración. Los rayos interiores van a rayos interiores por p . Por lo tanto, los caminos regulados van a caminos regulados. \square

Definición 5.2.7. El *árbol de Hubbard* T_p de un polinomio p de grado 2 es la unión de todos los caminos regulados simples que unen puntos de la órbita crítica.

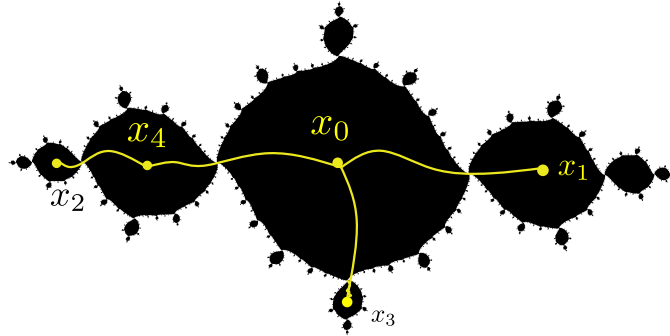


Figura 5.2: Ejemplo de árbol de Hubbard, para el polinomio $p(z) \sim z^2 - 0,9646 + 0,0560i$ con 5 puntos en la órbita crítica.

Proposición 5.2.8.

- (1) T_p es un árbol.
- (2) $p(T_p) = T_p$
- (3) Existe $1 < m \leq k$ tal que $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ son todas las hojas de T_p .

Demostración.

- (1) Si T_p tiene una curva cerrada simple, esto implica que hay un camino regulado simple que es cerrado.
- (2) $p(\{x_1, \dots, x_k\}) = \{x_1, \dots, x_k\}$. Como la imagen de un camino regulado es un camino regulado, y por la unicidad de caminos regulados simples, tenemos que $p(T_p) = T_p$

- (3) En primer lugar, un punto que no esté en la órbita crítica no puede ser hoja de T_p ya que nunca estará en extremidades de los caminos regulados.

Luego observamos que si un punto postcrítico x_n con $n < k$ no es hoja de T_p entonces x_{n+1} tampoco lo será. Esto se da porque p lleva rayos interiores en rayos interiores y $p : V_n \rightarrow V_{n+1}$ es un homeomorfismo.

□

La siguiente proposición es un ejemplo de cómo, utilizando los rayos interiores y el árbol de Hubbard, podemos probar proposiciones sobre J_p .

5.2.2. Rayos exteriores y el árbol de Hubbard

Proposición 5.2.9. *Si $y \in T_p \cap J_p$, más de un rayo exterior aterriza en y .*

Demostración. Sean x_i, x_j puntos de la órbita crítica cuyo camino regulado simple pasa por y . Como dicho camino es único tenemos que $J_p \setminus \{y\}$ no puede ser conexo ya que, si lo fuera, tendríamos dos caminos regulados que unen x_i y x_j , uno que pasa por y y otro que no. Supongamos ahora que sólo un rayo $R(\theta)$ aterriza en y . Como el mapa de Carathéodory γ_p es sobreyectivo, $\gamma_p(S^1 \setminus \{e^{2\pi i\theta}\}) = J_p \setminus \{y\}$, lo que es absurdo pues $J_p \setminus \{y\}$ no es conexo. □

Concluimos este capítulo con un resultado más sobre los rayos exteriores y el árbol de Hubbard.

Proposición 5.2.10. *Si $y \in T_p \cap J_p$ entonces cada componente de $T_p \setminus \{y\}$ está en un sector distinto de los determinados por los rayos que aterrizan en y .*

Demostración. Vamos a probar que cada sector de y tiene exactamente una componente conexa de $J_p \setminus \{y\}$. La proposición se deduce de que cada componente de $T_p \setminus \{y\}$ está en una componente distinta de $J_p \setminus \{y\}$.

Sea S el sector que está entre dos rayos R_1 y R_2 que aterrizan en y . Considero $[t_1, t_2]$ el intervalo tal que $\gamma_p([t_1, t_2]) = S \cap J_p$. Como γ_p es continua tenemos que $J_p \cap S$ es conexo. □

5.3. Equivalencia con mapas araña

En el siguiente teorema relacionaremos finalmente a los polinomios con ciclo superatractor con los mapas araña, probando que cada uno de estos polinomios es equivalente a dos mapas araña.

Recordamos del capítulo 3 que si el mapa araña \tilde{f}_θ asociado al ángulo racional θ es equivalente Thurston a un polinomio, llamamos a dicho polinomio p_θ .

Teorema 5.3.1. *Sea p un polinomio con un punto crítico x_0 y ciclo superatractor $\{x_0, x_1 \dots x_k = x_0\}$. Sea V_i la componente de \mathring{K}_p que contiene a x_i y sea y_i la raíz de dicha componente. Entonces*

- (1) *Hay dos rayos exteriores de K_p que caen en la raíz y_1 y cuya unión separa x_1 de los otros x_i . Estos rayos tienen período k por p .*
- (2) *Si los ángulos de dichos rayos son θ y θ' , p es conjugado a p_θ y a $p_{\theta'}$.*

Para probar este teorema es necesario probar el siguiente lema.

Lema 5.3.2. *Sea y un punto fijo de p en J_p y sea S un sector de delimitado por los rayos exteriores R_1 y R_2 que aterrizan en y . Entonces existe un entorno U de y tal que $p(U \cap S)$ está incluido en el sector delimitado por $p(R_1)$ y $p(R_2)$.*

Demostración. Sea U un entorno de y que no contiene al punto crítico. Tenemos que $p^{-1}(p(R_1 \cap U))$ tiene dos preimágenes cuyas fronteras son los rayos exteriores R_1, R_2 y otros dos rayos exteriores que no aterrizan en y . Esto implica que $p : S \cap U \rightarrow p(S \cap U)$ es un homeomorfismo y, por lo tanto, $p(S \cap U)$ está incluido en el sector delimitado por $p(R_1)$ y $p(R_2)$. \square

Demostración del teorema 5.3.1.

- (1) Sea $y'_1 \in J_p \cap T_p$ el lugar donde aterriza el rayo interior del camino regulado de T_p que pasa por x_1 . Por la proposición 5.2.8 parte 3 sabemos que x_1 es hoja de T_p y, por lo tanto, hay un solo rayo interior de V_1 que es parte de T_p . Además, por la misma razón, sabemos que $p^{\circ k}(y'_1) = y'_1$. La proposición 5.1.2 nos da un homeomorfismo $\eta_{V_1} : \mathbb{D} \rightarrow \bar{V}_1$. Sea $z \in \partial\mathbb{D}$ tal que $\eta_{V_1}(z) = y'_1$ entonces se cumple que

$$\eta_{V_1}(z^2) = p^{\circ k}(\eta_{V_1}(z)) = y'_1 = \eta_{V_1}(z)$$

de donde se deduce que $z^2 = z$. Esto implica que $y'_1 = \eta_{V_1}(1) = y_1$.

Por ser hoja del T_p se cumple que x_1 es el único postcrítico en su componente de $J_p \setminus \{y_1\}$. Además por la proposición 5.2.10 hay dos rayos exteriores R_1 y R_2 que separan dicha región.

Los rayos R_1 y R_2 aterrizan en y_1 , por lo que $p^{\circ k}(R_1)$ y $p^{\circ k}(R_2)$ también aterrizan en y_1 . Además, por el lema 5.3.2 el sector que determinan estos

rayos debe contener a la componente de $T_p \setminus \{y_1\}$ que contiene a x_1 y, por lo tanto, deben separarlos del resto de T_p . Esto implica que, o bien $p^{\circ k}(R_i) = R_i$ o bien los intercambia. Sin embargo, $p^{\circ k}$ no pueden intercambiar a R_1 con R_2 pues de lo contrario revertiría orientación.

Vamos a probar que el período de estos rayos es exactamente k . Para eso consideremos un $m < k$ y supongamos que $p^{\circ m}(y_1) = y_1$. Hay un rayo interior que une y_1 y x_{m+1} que es la imagen por $p^{\circ m}$ del que une y_1 con x_1 . Por el lema 5.3.2 tenemos que un rayo interior que sale de x_{m+1} debe estar en el sector que determinan $p^{\circ m}(R_1)$ y $p^{\circ m}(R_2)$. Esto implica que $p^{\circ m}(R_1) \neq R_1$ y que $p^{\circ m}(R_2) \neq R_2$.

- (2) Esta demostración sirve tanto para θ como para θ' . Lo primero que observamos es que, como $2^k\theta \equiv \theta \pmod{1}$, tanto θ como θ' pertenecen a \mathbb{Q}^{odd} .

Tenemos que buscar φ y φ' para que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{\varphi'} & \hat{S} \\ \downarrow \tilde{f}_\theta & & \downarrow p \\ S^2 & \xrightarrow{\varphi} & \hat{S} \end{array} \quad (5.1)$$

con φ y φ' isotópicos relativo a $P_{\tilde{f}_\theta}$. Para lograr esto vamos a encontrar conjuntos similares a las patas de la araña \mathbf{S}_θ . Vamos a definir entonces los conjuntos $\tilde{L}_{\theta,i}$ como la unión del rayo exterior $R(2^{i-1}\theta)$ con el rayo interior de ángulo 0 de V_i . Como $R(\theta)$ aterriza en y_1 tenemos que $p(R(\theta)) = R(2\theta)$ aterriza en $p(y_1) = y_2$. Siguiendo el proceso tenemos que cada rayo $R(2^{i-1}\theta)$ aterriza en y_i . A la unión de los $\tilde{L}_{\theta,i}$ la denotamos \tilde{S}_θ .

Observamos que si los $\tilde{L}_{\theta,i}$ con $i \in \{1, \dots, m-1\}$ no se intersecan entre sí entonces la unión de ellos es homeomorfa a la araña \mathbf{S}_θ . Sin embargo, puede pasar que y_1 tenga período menor que k , es decir que $y_1 = y_j$ con $j \neq 1$. Para evitar este problema podemos sustituir cada $\tilde{L}_{\theta,i}$ por un elemento cercano de su clase de homotopía rel P_p que no corte a ningún $\tilde{L}_{\theta,i}$ evitando que pase por el punto y_i (ver figura 5.3). Esto es posible por la parte 1 de este teorema, ya que ninguno de los rayos se repite. A estos nuevos conjuntos los llamamos $L_{\theta,i}$ y definimos el conjunto S_θ como

$$S_\theta = \bigcup_{i=0}^k L_{\theta,i}$$

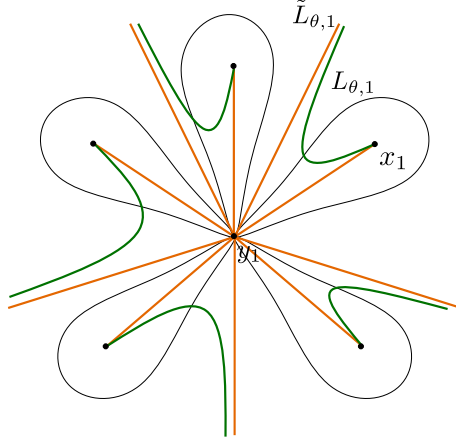


Figura 5.3: Esquema de la demostración del teorema 5.3.1. Vemos qué pasa si los $\tilde{L}_{\theta,i}$ no son disjuntos. Los pétalos corresponden a los conjuntos V_i que son adyacentes a y_1 . En este caso, al menos dos rayos $R(2^{i-1}\theta)$ aterrizan en el mismo punto (y_1). Estos rayos están dibujados en naranja. Tomando elementos cercanos en su clase de homotopía podemos construir las patas $L_{\theta,i}$ (dibujadas en verde) y así lograr que sean disjuntas. Podemos hacer una construcción análoga para el ángulo θ'

Observamos que $p^{-1}(L_{\theta,i})$ son dos arcos unidos en ∞ pero, si $i \neq 1$, solo uno de ellos tiene a x_{i-1} . Denotamos por $L'_{\theta,i-1}$ al arco preimagen que une x_{i-1} con ∞ . A los arcos que son preimagen de $L_{\theta,1}$ y tienen por extremo a x_0 ; llamamos $L'_{\theta,0}$ al que es homotópico a $L_{\theta,0}$ y $L''_{\theta,0}$ al otro. También denotamos la unión de los $L'_{\theta,i}$ sin $L''_{\theta,0}$ por S'_θ .

Ahora podemos elegir un homeomorfismo $\varphi : \mathbf{S}_\theta \rightarrow S_\theta$ y, observando que $p : S'_\theta \rightarrow S_\theta$ es un homeomorfismo, definir $\varphi' : \mathbf{S}_\theta \rightarrow S'_\theta$ como

$$\varphi' = p^{-1} \circ \varphi \circ f_\theta$$

Aquí aclaramos que, como $\theta \in \mathbb{Q}^{odd}$, tomando solo la mitad de la línea divisoria M_θ podemos pensar a f_θ como un homeomorfismo de la araña (no extendida) en sí misma.

La construcción de φ y φ' depende de las curvas que elegimos para construir S_θ . Sabemos que cada pata $L_{\theta,i-1}$ es homotópica a $L'_{\theta,i-1}$ rel P_p . Como $\varphi(L_i) = L_{\theta,i}$ y $\varphi'(L_i) = L'_{\theta,i}$ y ambas llevan los puntos X_i de la araña en x_i , concluimos que ambos mapas son isotópicos.

Por el truco de Alexander (teorema 1.0.1 del anexo A) y utilizando la misma estrategia que empleamos en la construcción de los mapas araña podemos extender φ y φ' a homeomorfismos de toda la esfera. Claramente

estos homeomorfismos coinciden en $P_{\tilde{f}_\theta}$. Además, por el corolario 1.0.3 del anexo A estos homeomorfismos son isotópicos relativos a $P_{\tilde{f}_\theta}$.

Observamos que la unión de $L'_{\theta,0}$ y $L''_{\theta,0}$, que llamaremos M , divide a la esfera de la misma forma que M_θ la divide. El polinomio p restringido a cada lado de M es inyectivo y, por lo tanto, podemos tomar las extensiones de φ y φ' de tal forma que el diagrama (5.1) conmute.

□

Definición 5.3.3. Decimos que θ y θ' son *ángulos compañeros* si p_θ y $p_{\theta'}$ conjugados.

Corolario 5.3.4. Sea $\theta \in \mathbb{Q}^{odd}$. Entonces θ tiene un único ángulo compañero.

Demostración. Supongamos que p es conjugado a p_θ y a p_σ . Sea $\alpha : (C) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $p_\theta \circ \alpha = \alpha \circ p_\sigma$. Como la conjugación es de la forma $\alpha(z) = az + b$ y el mapa de Böttcher de grado 2 es único, tenemos que α manda rayos exteriores en rayos exteriores. Además se cumple que $\alpha(T_{p_\theta}) = T_{p_\sigma}$. Esto implica que debe mandar rayos adyacentes a y_1 para p_θ a rayos adyacentes a y_1 para p_σ . Esto implica que $\sigma = \theta'$. □

La unicidad del teorema de Thurston nos dice que si un mismo mapa de Thurston es equivalente Thurston a dos polinomios entonces esos polinomios son conjugados. Por lo tanto los ángulos θ y θ' del teorema 5.3.1 son compañeros.

5.4. El teorema del disco pinzado

Ahora estamos en condiciones de probar el teorema que caracteriza el conjunto de Julia relleno para polinomios con ciclo superatractor. En esta sección vamos a trabajar con un polinomio p_θ que es equivalente Thurston al mapa araña \tilde{f}_θ y denotamos su conjunto de Julia por J_θ y su conjunto de Julia relleno por K_θ . Recordamos que, como el polinomio tiene un ciclo superatractor, existe una extensión al borde del mapa de Böttcher $\gamma_\theta : S^1 \rightarrow J_\theta$.

También recordamos que si la órbita crítica de p_θ es $\{x_0, \dots, x_k = x_0\}$ entonces V_i es la componente de \mathring{K}_θ que contiene a x_i .

Vamos a definir la línea divisoria: el equivalente al conjunto M_θ de la araña extendida.

Proposición 5.4.1. Los rayos de ángulos $\theta/2$ y $(\theta+1)/2$ aterrizan en $\eta_{V_0}(0)$ y $\eta_{V_0}(1/2)$.

Demostración. Ya vimos que el rayo exterior de ángulo θ aterriza en y_1 , la raíz de V_1 . Luego, como $R(2t) = p_\theta(R(t))$ tenemos que los rayos de ángulos $\theta/2$ y $(\theta + 1)/2$ deben aterrizar en preimágenes de y_1 . Tenemos que, módulo 1, $2^k\theta = \theta$, por lo que o bien $2^{k-1}\theta = \theta/2$ o bien $2^{k-1}\theta = (\theta + 1)/2$. Esto quiere decir que uno de los dos rayos aterriza en $p_\theta^{o_{k-1}}(\eta_{V_1}(0)) = \eta_{V_0}(0) = y_0$.

Finalmente, como $p_\theta(\eta_{V_0}(1/2)) = \eta_{V_1}(0)$ tenemos que $\eta_{V_0}(1/2)$ también es preimagen de y_1 , por lo que el otro rayo debe aterrizar allí. \square

Definición 5.4.2. La *línea divisoria* de p_θ es la unión de los rayos exteriores de ángulos $\theta/2$ y $(\theta + 1)/2$ junto con los rayos interiores de ángulos 0 y $1/2$ de la componente V_0 .

En la demostración del teorema 5.4.5 vamos a usar que la línea divisoria es la preimagen del rayo exterior $R(\theta)$ de p_θ unido al rayo interior de ángulo 0 en V_1 . Además, la línea divisoria divide el plano en dos regiones y no interseca rayos exteriores con ángulo distinto a $\theta/2$ y $(\theta + 1)/2$.

Proposición 5.4.3. Sea θ' el ángulo compañero de θ . Entonces $\theta'/2$ aterriza en el mismo punto que $(\theta + 1)/2$.

Demostración. Supongamos por absurdo que la hipótesis no se cumple. Esto implica que $\theta/2$ y $\theta'/2$ aterrizan en el mismo punto y, como $R(\theta')$ y $R(\theta)$ determinan un sector, también lo harán $R(\theta/2)$ y $R(\theta'/2)$. Podemos aplicar el mismo razonamiento para $R((\theta + 1)/2)$ y $R((\theta' + 1)/2)$.

Supongamos ahora que $\theta < \theta'$. Entonces tenemos la siguiente cadena de desigualdades en $(0, 1)$

$$\theta/2 < \theta'/2 < (\theta + 1)/2 < (\theta' + 1)/2$$

Además tenemos que los intervalos $[\theta/2, \theta'/2]$ y $[(\theta + 1)/2, (\theta' + 1)/2]$ van a $[\theta, \theta']$ por el mapa de duplicación de ángulos. Esto implica que el sector delimitado por $R(\theta/2)$ y $R(\theta'/2)$ es disjunto al sector delimitado por $R((\theta + 1)/2)$ y $R((\theta' + 1)/2)$, lo que es absurdo pues ambos deben contener a x_0 (la única preimagen de x_1). La demostración es análoga si $\theta > \theta'$. \square

Definición 5.4.4. Denotamos por A'_θ a la componente conexa del complemento de la línea divisoria que contiene al rayo exterior de ángulo 0 y por B'_θ la otra.

Esta definición, al igual que la secuencia de entrelazado definida en 3.4.1 es ambigua, dado que no tenemos una manera a priori de decir si un punto en la línea divisoria está en A'_θ o B'_θ . Para resolver este problema usamos el ángulo compañero: sea θ' el ángulo compañero de θ . Si $\theta < \theta'$ entonces

decimos que el rayo exterior $R(\theta/2)$ está en A'_θ y $R((\theta + 1)/2)$ está en B'_θ . Si $\theta > \theta'$ los ubicamos al revés.

La razón de esta decisión es la propiedad 5.4.3. El rayo $R(\theta/2)$ aterriza en el mismo punto que el rayo $R((\theta' + 1)/2)$ y, si $\theta < \theta'$, el rayo $R((\theta' + 1)/2)$ está contenido en A'_θ . Luego, la elección hace que θ y θ' tengan la misma secuencia de entrelazado, ya que $\text{Sigma}^{(k-1)}_\theta(\theta')$ no es ambigua y $\text{Sigma}^{(k-1)}_\theta(\theta)$ sí lo es.

Observación. Como el inverso del mapa de Böttcher conjuga el mapa $z \mapsto z^2$ con p_θ entonces

$$p_\theta^{\circ n}(R(t)) \subseteq A'_\theta \iff \Sigma_\theta^n(t) = A$$

donde $\Sigma_\theta(t)$ es la secuencia de entrelazado de t para el ángulo θ .

Esta observación nos permite eliminar la ambigüedad de la secuencia de entrelazado. El problema es que para eso necesitamos encontrar ángulos compañeros.

Teorema 5.4.5 (Modelo de disco pinzado). *Sea p_θ un polinomio que es equivalente Thurston a \tilde{f}_θ con $\theta \in \mathbb{Q}^{\text{odd}}$. Sea γ_θ su lazo de Caratheodory, J_θ su conjunto de Julia y K_θ su conjunto de Julia relleno. Entonces se cumple que*

$$\gamma_\theta(t_1) = \gamma_\theta(t_2) \iff \Sigma_\theta(t_1) = \Sigma_\theta(t_2)$$

Demostración.

1: \implies

La primera parte es la más simple de probar. Si t_1 y t_2 no están en la órbita de θ y $R(t_1)$ y $R(t_2)$ aterrizan en el mismo punto entonces también lo harán $R(2^i t_1)$ y $R(2^i t_2)$. Como los rayos exteriores no pueden cortar la línea divisoria, esto implica que t_1 y t_2 tienen la misma secuencia de entrelazado.

Si t_1 y t_2 están en la órbita de θ , la elección que hicimos para levantar la ambigüedad asegura que tendrán la misma secuencia de entrelazado.

2: \impliedby

Recordemos que en la demostración del teorema 2.4.1 encontramos dos entornos de J_θ , llamados U y U' , tales que $\overline{U'} \subseteq U$, $p_\theta^{-1}(U) = U'$ y $p_\theta|_{U'} : U' \rightarrow U$ es un cubrimiento.

Vale la pena recordar la idea de la construcción de U . En este caso podemos considerar un entorno (arbitrariamente chico) de los puntos del ciclo superatractor e intersecar su complemento con un entorno de K_θ que tenga la siguiente forma:

$$V_R = \{z \in \mathbb{C} : G(z) < R\}$$

donde G es la función de Green.

Vamos a probar que si t_1 y t_2 tienen la misma secuencia de entrelazado y si $\gamma_\theta(t_1) = x$ y $\gamma_\theta(t_2) = y$ entonces $d_{U'}(x, y) = 0$, donde $d_{U'}$ es la distancia para la métrica hiperbólica de U' .

Recordamos de la demostración del teorema 5.3.1 que el conjunto $\tilde{L}_{i,\theta}$ es la unión del rayo exterior $R(2^{i-1}\theta)$ con el rayo interior de ángulo 0 de V_i .

Para cada m consideramos una curva α_m en U' con extremos $p_\theta^{\circ m}(x)$ y $p_\theta^{\circ m}(y)$ que no corte ningún conjunto $\tilde{L}_{\theta,i}$ ni la línea divisoria $p_\theta^{-1}(\tilde{L}_{\theta,1})$. Esto es posible ya que, como t_1 y t_2 tienen la misma secuencia de entrelazado, $p_\theta^{\circ m}(x)$ y $p_\theta^{\circ m}(y)$ están en la misma componente del complemento de la línea divisoria. Además observamos que dos curvas que cumplan estas características son homotópicas rel P_{p_θ} : efectivamente, si β_m es una curva no homotópica a α_m entonces la concatenación de α_m y β_m^{-1} debe rodear un punto postcrítico x_i y, por lo tanto, cortar a $\tilde{L}_{\theta,i}$.

Como α_m no corta ningún $\tilde{L}_{\theta,i}$ entonces $p_\theta^{-1}(\alpha_m)$ tampoco lo hará, y no cortará la línea divisoria. Esto implica que hay una preimagen de α_m en cada lado de la línea divisoria y, por lo tanto, una de ellas une $p_\theta^{m-1}(x)$ con $p_\theta^{m-1}(y)$ (que están en la misma componente del complemento de la línea divisoria) y, al no cortar ningún $\tilde{L}_{\theta,i}$, es homotópica a extremos fijos a α_{m-1} .

Denotamos por δ_m a la geodésica para la métrica hiperbólica de U' que está en la clase de homotopía de α_m a extremos fijos. Vamos a ver que hay una componente de $p_\theta^{-1}(\delta_m)$ que es homotópica a δ_{m-1} rel P_{p_θ} . Por como definimos a δ_m tenemos que es homotópica a extremos fijos a α_m . Como $p_\theta : U' \rightarrow U$ es un cubrimiento y $U \subseteq U'$ podemos levantar esta homotopía a U' , lo que nos dice que $p_\theta^{-1}(\delta_m)$ tiene una componente que es homotópica a extremos fijos a α_{m-1} y, por lo tanto, también a δ_{m-1} .

Otro hecho importante es que existe $C_1 > 0$ tal que $l(\delta_m) < C_1$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Esto es porque el conjunto de Julia J_θ es compacto y su diámetro es acotado.

Sea γ la curva que es componente de $p_\theta^{-1}(\delta_{m-1})$ y es homotópica rel P_{p_θ} a δ_{m-1} , utilizando la desigualdad 2.9 (que mostraba que p_θ expande la métrica hiperbólica en U), tenemos que existe un $C < 1$ tal que

$$l(\delta_{m-1}) \leq l(\gamma) \leq Cl(\delta_m)$$

Concatenando varias de estas desigualdades obtenemos que para todo m se cumple

$$l(\delta_0) \leq C^m l(\delta_m) \leq C_1 C^m \tag{5.2}$$

Esto implica que $d_{U'}(\gamma_\theta(t_1), \gamma_\theta(t_2)) \leq l(\delta_0) = 0$, y, por lo tanto, que $\gamma_\theta(t_1) = \gamma_\theta(t_2)$.

□

Finalmente, usando la proposición 5.1.2 y el teorema 5.4.5 podemos deducir que el conjunto de Julia relleno de un polinomio con ciclo superatractor es homeomorfo a tomar el disco \mathbb{D} y cocientar la envolvente convexa de los puntos que tengan la misma secuencia de enterlazado, como se puede ver en la figura 5.4.

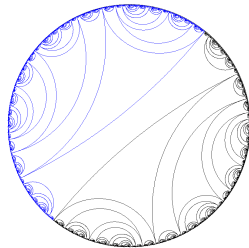


Figura 5.4: Si colapsamos los polígonos delimitados por geodésicas a un punto en la figura obtenemos una superficie homeomorfa al conejo de Douady (el conjunto de Julia de $p(z) = z^2 + -0,123 + 0,745i$)

Anexo

Anexo A

El truco de Alexander

En este anexo vamos a ver que todo mapa de S^{n-1} se puede extender al disco D^n . Si bien la prueba es simple, este teorema es de gran utilidad en este trabajo. En particular lo usamos para probar la unicidad de los mapas araña a menos de isotopías.

Teorema 1.0.1 (Truco de Alexander). *Sea $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ un homeomorfismo que preserva orientación. Entonces existe una extensión $\tilde{f} : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ de f que es un homeomorfismo en el interior.*

Demostración. Vamos a definir \tilde{f} explícitamente por medio de la extensión radial.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} |x|f\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Cuando $x \neq 0$, claramente \tilde{f} es continua. Como $|\tilde{f}(x)| = |x|$, también es continua en 0. Además, tenemos que si $S_r = \{x \in \mathbb{D}^n : |x| = r\}$ entonces $\tilde{f} : S_r \rightarrow S_r$ es biyectiva pues f lo es. Esto implica que es biyectiva en todo el disco. Como su inversa es la misma expresión definida para f^{-1} , concluimos que \tilde{f} es un homeomorfismo. \square

Otro resultado importante es la unicidad a menos de isotopía.

Teorema 1.0.2. *Sean $f : \mathbb{D}^n$ y $g : \mathbb{D}^n$ homeomorfismos que preservan orientación tales que $f|_{S^{n-1}} = g|_{S^{n-1}}$. Entonces f y g son isotópicos.*

Demostración. Vamos a construir una isotopía entre f y \tilde{f} , siendo \tilde{f} la extensión radial de $f|_{S^{n-1}}$. Para ello, construimos la isotopía explícitamente.

$$F_t(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{si } |x| \geq t \\ tf(x/t) & \text{si } |x| \leq t \end{cases} \quad (1.1)$$

Claramente se cumple que $F_0 = \tilde{f}$ y $F_1 = f$. Además observamos que cuando $|x| = t$ se cumple que $\tilde{f}(x) = tf(x/t)$ dado que ambas funciones coinciden en el borde.

Ahora vamos a ver que F_t es biyectiva. Ya vimos en la demostración del teorema anterior que $|\tilde{f}(x)| = |x| \geq t$. Además, $|tf(x/t)| \leq t$. Luego, F_t es inyectiva. Es inmediato ver que además es biyectiva, por lo que tenemos la isotopía buscada.

Aplicando el mismo razonamiento para g y combinando ambas isotopías tenemos lo buscado. \square

Corolario 1.0.3. *Si $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ y $g : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ son isotópicos en el borde entonces son isotópicos.*

Anexo B

El teorema de Riemann-Hurwitz

En este anexo demostraremos un teorema que usamos en varias partes de la monografía. Si bien el resultado vale para superficies en general, vamos a probarlo solo para la esfera.

No vamos a dar una demostración formal de este teorema. Lo que sí vamos a hacer es dar la idea de por qué se cumple.

Teorema 2.0.1 (Riemann-Hurwitz). *Sea $f : S^2 \rightarrow S^2$ un cubrimiento ramificado de la esfera de grado d . Entonces la cantidad de puntos críticos (contados con multiplicidad) es $2d - 2$*

Idea de la demostración. Tomamos una triangulación T de S^2 de tal forma que los valores críticos sean vértices y que el resto de las aristas y caras queden en un dominio fundamental. Sean V, E y F la cantidad de vértices, aristas y caras de la triangulación. Se puede probar que la característica de Euler de la esfera es 2, esto implica que

$$V - E + F = \chi(S^2) = 2$$

Tenemos que $p^{-1}(T)$ es otra triangulación. En general cada vértice, arista y cara de T tendrá d copias de sí mismo en $p^{-1}(T)$. Esto no es cierto para los valores críticos, que tienen una menor cantidad de preimágenes. Si v es un valor crítico la cantidad de preimágenes que le faltan es equivalente a la cantidad de puntos críticos c tales que $f(c) = v$ contados con su multiplicidad. Esto implica que $p^{-1}(T)$ tendrá $dV - r$ vértices, donde r es la cantidad de puntos críticos (contados con multiplicidad). Además, la cantidad de aristas y caras son dE y dF respectivamente.

Todo esto implica que

$$dV - r - dE + dF = \chi(S^2) = 2$$

luego, como $V - E + F = 2$ tenemos que

$$r = 2d - 2$$

□

Anexo C

Visualizando el conjunto K_p

Para realizar algunos dibujos de este trabajo implementé un programa en Python que permite obtener distintos conjuntos de Julia. El programa está basado en otro similar que se puede encontrar en [4].

Para esta implementación se utilizó la librería “numpy” para realizar cálculos y la librería “PIL” para dibujar los conjuntos pixel por pixel.

La idea del programa es elegir n puntos de \mathbb{C} e iterar el mapa $p_c(z) = z^2 + c$ una cierta cantidad de veces. Si el valor se mantiene pequeño entonces el punto pertenece a K_{p_c} y lo pintamos de negro, de lo contrario, el conjunto pertenece a la cuenca de infinito y lo pintamos de blanco.

Una variante de este programa (que se encuentra en la figura 3.1) nos permite analizar la velocidad con la que los puntos se van a infinito, y, cuando se detectan cambios, oscurecer un poco el color. Esto permitió encontrar un esquema de las curvas equipotenciales, como en la figura 2.2.

Una pregunta que es natural hacer es ¿por qué sólo probar con mapas del tipo de p_c ? ¿por qué no probar con todo tipo de polinomios de grado 2? La respuesta a esto la podemos encontrar en la siguiente proposición.

Proposición 3.0.1. *Sea p un polinomio de grado 2, entonces existe c tal que p es conjugado a p_c*

Demostración. Sea c^* el punto crítico de p . Conjugando por $z \mapsto z - c^*$ podemos considerar que el punto crítico es 0. Luego, tenemos que p es conjugado a un polinomio p_2 de la forma

$$p_2(z) = az^2 + c$$

Finalmente, tenemos que, conjugando con el mapa $z \mapsto az$ se cumple que

$$ap_2(z/a) = a^2 \frac{z^2}{a^2} + ac = z^2 + ac$$

Combinando ambas conjugaciones obtenemos lo buscado.

□

```

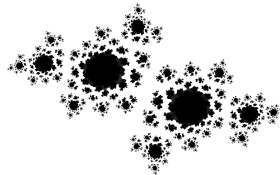
1  import numpy as np
2  from matplotlib.pyplot import imshow
3  from PIL import Image, ImageDraw
4
5
6  # Resolucion de la imagen
7  w, h = 2500, 2500
8
9  # Rango eje real y eje imaginario
10 re_min, re_max = -2.0, 2.0
11 im_min, im_max = -2.0, 2.0
12
13 # Generar pixeles
14 real_range = np.arange(re_min, re_max, (re_max - re_min) /
15                          w)
16 imag_range = np.arange(im_max, im_min, (im_min - im_max) /
17                          h)
18
19 #Sustituimos los valores en base al polinomio que querramos
20 generar.
21 cre = 0
22 cri = 0
23 filename = 'z2-{}+{}j.png'.format(cre, cim)
24 base = Image.new('L', (w,h), color='white')
25 d = ImageDraw.Draw(base)
26 cur = -1
27 #Mapear pixeles a eje real e imaginario
28 for y, im in enumerate(imag_range):
29     for x, re in enumerate(real_range):
30         z = complex(re, im)
31         c = complex(cre, cim)
32         n = 255
33         #Iterar hasta que el modulo del punto sea mayo a
34         10000
35         while abs(z) < 10000 and n >= 5:
36             z = z*z + c
37             n = n - 5
38         #Cuanto mas demora en irse a infinito mas oscuro se
39         pinta el punto
40         d.point((x, y), fill=n)
41
42 base.save(filename, "PNG")
43 imshow(np.asarray(base))

```

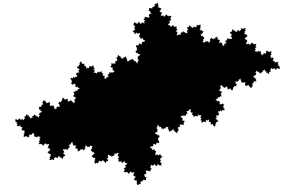
Figura 3.1: Programa desarrollado en Python para visualizar los conjuntos K_{pe}



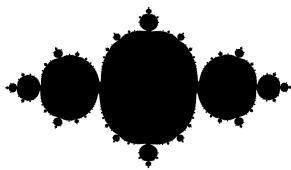
(a) $c \sim -0,9907 + 0,1147i$



(b) $c \sim -0,6555 + 0,3907i$



(c) $c \sim -0,4865 - 0,4761i$



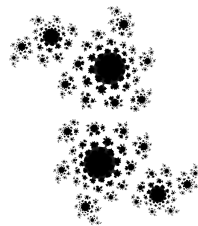
(d) $c \sim -0,7851 - 0,0055i$



(e) $c \sim -0,8345 - 0,1159i$



(f) $c \sim 0,3865 + 0,1564i$



(g) $c \sim 0,3262 + 0,4413i$

Figura 3.2: Algunos conjuntos de Julia relleno. Como podemos observar algunos son conexos y otros no.

Referencias

- (1) Alexander, D. S., *A History of Complex Dynamics: From Schröder to Fatou and Julia*, 1.^a ed.; Aspects of Mathematics 24; Vieweg+Teubner Verlag: 1994.
- (2) Bielefeld, B.; Fisher, Y. y Hubbard, J. The classification of critically preperiodic polynomials as dynamical systems. *Journal of the American Mathematical Society* **1992**, *5*, 721-762.
- (3) Boyland, P. Semiconjugacies to angle-doubling. *Proceedings of the American Mathematical Society* **2006**, *134*, 1299-1307.
- (4) Burke, T. Creating Julia Set images in Python. <https://batchloaf.wordpress.com/2013/02/10/creating-julia-set-images-in-python/>.
- (5) Douady, A.; Hubbard, J. H. y col. A proof of Thurston's topological characterization of rational functions. *Acta Mathematica* **1993**, *171*, 263-297.
- (6) Hatcher, A., *Algebraic topology*, 2005.
- (7) Hubbard, J. H., *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics: Vol 1*, 2006.
- (8) Hubbard, J. H., *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics: Vol 2*, 2016.
- (9) Krantz, S. G., *Complex analysis: the geometric viewpoint*; 23; MAA: 2004.
- (10) Milnor, J. W., *Dynamics in one complex variable*, 2006.
- (11) Stein, E. M. y Shakarchi, R., *Complex analysis*; Princeton University Press: 2010; vol. 2.
- (12) Thurston, W. P., *The geometry and topology of three-manifolds*; Princeton University Princeton, NJ: 1979.