

Monografía final de grado

**Sistemas Hamiltonianos:
Integrabilidad clásica y
perturbaciones caóticas**

Favio Pirán

Orientador: Alejandro Passeggi
Facultad de Ciencias, Udelar

Resumen

En esta monografía se dará una introducción al formalismo Hamiltoniano, con el fin de probar dos resultados claves para el estudio de perturbaciones de sistemas Hamiltonianos Integrables: el Teorema de Arnol'd Liouville y las coordenadas Ángulo-Acción.

Luego, en contraposición con la regularidad de los sistemas integrables, probaremos la existencia de caos en la perturbación de una configuración integrable del problema de tres cuerpos. Construiremos un mapa de retorno para el flujo Hamiltoniano semiconjugado al shift de infinitos símbolos, de lo que deduciremos que el sistema perturbado no será analíticamente integrable.

Índice general

1. Introducción	5
1.1. Problema de kepler	7
2. Sistemas Hamiltonianos	11
2.1. Hamiltonianos en \mathbb{R}^{2n}	11
2.2. Hamiltonianos en variedades simplécticas	14
3. Formalismo simpléctico	17
3.1. Coordenadas canónicas	17
3.2. Corchetes de Poisson y corchetes de Lie	23
4. Funciones generatrices	29
4.1. Cambios de coordenadas simplécticas	29
4.2. Subvariedades Lagrangianas y funciones generatrices	32
5. Integrabilidad	35
5.1. Teorema de Arnol'd-Liouville	35
5.2. Coordenadas Ángulo-Acción	42
6. Problema de tres cuerpos no planar elíptico con restricciones	59
6.1. Descripción del problema	59
6.2. Caso autónomo	61
6.3. Caos en mapa de retorno para excentricidades pequeñas	62
6.4. Demostración de lemas técnicos	70
A. Preliminares topológicos	83
A.1. Definiciones	83
A.2. Herradura: shift como subsistema	84

Capítulo 1

Introducción

La mecánica Hamiltoniana es una reformulación moderna de la mecánica clásica. Esta última describe un sistema gobernado por la segunda ley de Newton en términos de Fuerzas y la mecánica Hamiltoniana describe un sistema gobernado por una ecuación Hamiltoniana en términos de funciones de energía. En lugar de definir las configuraciones del sistema en un espacio de posiciones y velocidades, la mecánica Hamiltoniana se define para *coordenadas generalizadas*: variables de posición q y variables de momento generalizado p .

Un sistema Hamiltoniano es simplemente un formalismo matemático que intenta explicar la dinámica de sistemas conservativos. La energía o cantidad conservada que define al sistema se llama Hamiltoniano, que generalmente denotaremos con H y es una función a \mathbb{R} en el espacio de fase del sistema. Si (q, p) son coordenadas generalizadas, donde tanto q como p son vectores de dimensión n , la ecuación Hamiltoniana se expresa como

$$\begin{cases} \dot{q}_i(q, p) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p) \\ \dot{p}_i(q, p) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p) \end{cases}$$

Son varias las ventajas de expresar un sistema en estos términos. Una de ellas es que, a pesar de que en ocasiones no se logra expresar analíticamente una solución, el formalismo Hamiltoniano logra captar significados físicos de la misma. Como veremos en los próximos capítulos, dadas las condiciones podremos considerar coordenadas que nos indiquen niveles de energía de una solución y posiciones relativas en estos conjuntos de nivel (que resultarán subvariedades).

Para intentar definir intrínsecamente en una $2n$ -variedad las ecuaciones Hamiltonianas, es que se desarrolla el formalismo de la geometría simpléctica: una estructura que surge de forma natural en espacios de posiciones y momentos. Este formalismo es una virtud de los sistemas Hamiltonianos, ya que permite gran variabilidad en el cambio de coordenadas preservando la escritura de las funciones de energía y las ecuaciones. Más aún, esta estructura permite definir una forma de volumen y permite identificar algebraicamente nuevas cantidades conservadas. Un resultado notable es el *Teorema de Darboux*, que asegura que localmente un sistema Hamiltoniano en una variedad simpléctica admite coordenadas para las cuales su estructura simpléctica es equivalente a una canónica en \mathbb{R}^{2n} .

De la idea de expresar leyes naturales que rigen sistemas en términos de energía, es que se origina el concepto de Integrabilidad. Básicamente un sistema Hamiltoniano integrable será aquel que admita varias funciones de energía que se conserven a lo largo del flujo Hamiltoniano. Si estas funciones son suficientes e independientes, las soluciones del sistema se podrán escribir en términos de integrales, y podremos dar información precisa sobre la geometría de las órbitas. Veremos que los sistemas integrables, si existe cierta regularidad, admitirán en el espacio de fase una foliación por toros \mathbb{T}^n donde cada uno de

ellos estará en correspondencia con un nivel de energía. Además admitirán coordenadas para las cuales el flujo Hamiltoniano será lineal a lo largo de cada hoja tórica. De hecho, históricamente para determinar si un sistema es o no integrable, se buscaban dos caminos: buscar buenas coordenadas en las que la ecuación diferencial adoptara una forma sencilla, o buscar muchas cantidades conservadas. El Teorema de Arnol'd-Liouville es central en el estudio de sistemas integrales, pues afirma que tener buenas coordenadas es equivalente a tener suficientes cantidades conservadas. Un ejemplo histórico de integrabilidad es el problema de dos cuerpos que fue formulado por Kepler y formalizado por Newton. Es uno de los primeros ejemplos a estudiar en mecánica clásica celeste: describir la dinámica de un sistema formado por un sol y un planeta. Abordaremos el estudio de este problema desde una perspectiva clásica y analítica, y más adelante veremos una interpretación en términos del formalismo Hamiltoniano y corroboraremos que entra en la categoría de sistema integrable.

Como dijimos, el *Teorema de Arnol'd-Liouville* y las *coordenadas simplécticas ángulo-acción* son fundamentales pues permiten pensar a los sistemas integrables en coordenadas canónicas con una dinámica lineal y sencilla, y son la base para estudiar pequeñas perturbaciones del sistema. La teoría KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) parte de aquí y logra probar que bajo pequeñas perturbaciones del sistema ciertos toros \mathbb{T}^n permanecerán invariantes.

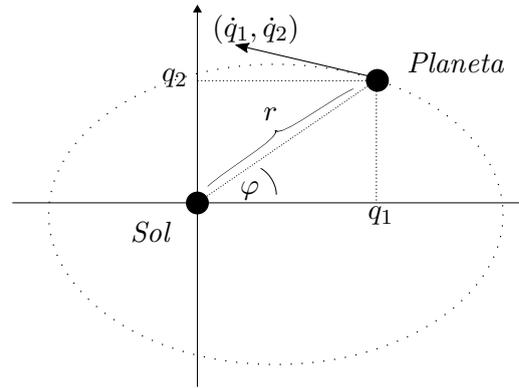
En mecánica celeste, el siguiente paso al problema de Kepler es el problema de tres cuerpos. El estudio sobre éste ha contribuido a generar nuevos puntos de vista y métodos para el estudio de la estabilidad en sistemas clásicos. Históricamente el problema de tres cuerpos, y n cuerpos en general, ha cautivado a matemáticos y aficionados. Entre ellos el Rey Oscar II de Suecia, quien en conmemoración de su aniversario en el año 1889 organizó un concurso matemático, donde uno de los problemas propuestos era hallar una solución para el problema de n cuerpos. Quien consiguió el premio por este problema fue Henri Poincaré, que si bien ya tenía estudios previos en un problema de tres cuerpos restringidos, dio un gran paso y apuntó a estudiar no la estructura analítica de las soluciones, sino su traza, geometría y topología. Aunque no resolvió el problema, que consistía en poder “escribir” las soluciones, abrió nuevos caminos para justamente probar que esto no es posible. Aquí se comienzan a gestar los orígenes del concepto de integrabilidad y caos. Estudiando el problema de los tres cuerpos se encontró con un fenómeno que denominamos *intersecciones homoclínicas* y sentó las bases para la formalización del estudio de dinámicas caóticas. Muchos años luego, a mediados de siglo XX, ya con cierta maduración de dichos conceptos se formalizan definiciones sobre Caos. S.Smale en un artículo llamado *Finding horseshoes on the beaches of Río* ([Sma98]) construye un ejemplo extremadamente sencillo que llamó “Herradura”, en el cual se generan intersecciones homoclínicas y se volvería el ejemplo de dinámica caótica discreta por antonomasia. En el capítulo 6 abordaremos un posible tipo de configuración para el problema de los tres cuerpos, similar al que trató Poincaré, y probaremos que bajo pequeñas perturbaciones del sistema, este será no autónomo y tendrá comportamientos caóticos: no será analíticamente integrable, a pesar de que la teoría KAM asegure la existencia de toros invariantes. Para probar esto, reduciremos la dinámica a un mapa discreto de retorno definido en una superficies, y probaremos que en este mapa discreto se formarán “Herraduras” como las propuestas por Smale.

1.1. Problema de kepler

El problema de kepler es un problema de dos cuerpos celestes, donde uno de ellos estará fijo. Pensaremos al cuerpo fijo como el sol y al móvil como un planeta.

Consideramos un sistema formado por dos masas puntuales en \mathbb{R}^2 , donde una de las cuales se sitúa en el origen $(0, 0)$ y permanece inmóvil. La suposición de que el espacio de configuraciones es \mathbb{R}^2 es debido a que la dinámica de la partícula móvil queda determinada en el plano generado por los vectores posición y velocidad.

Denotaremos con las variables $(q_1(t), q_2(t))$ las coordenadas del cuerpo que no está en el origen.



El sistema debe obedecer a las leyes de Newton y la ley de gravitación universal, cuyo sistema de coordenadas lo pensamos relativo a la partícula en el origen (el sol). Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -\frac{\gamma q_1}{(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}} \\ \ddot{q}_2 = -\frac{\gamma q_2}{(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}} \end{cases}$$

Donde γ es una constante que depende solo de las masas de los cuerpos.

Escribiendo (q_1, q_2) en coordenadas polares $(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$, con r y φ dependientes del tiempo, la ecuación diferencial de segundo orden en las nuevas coordenadas tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} \ddot{r} \cos(\varphi) - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin(\varphi) - r\ddot{\varphi} \sin(\varphi) - r(\dot{\varphi})^2 \cos(\varphi) = -\frac{\gamma \cos(\varphi)}{r^2} \\ \ddot{r} \sin(\varphi) + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos(\varphi) + r\ddot{\varphi} \cos(\varphi) - r(\dot{\varphi})^2 \sin(\varphi) = -\frac{\gamma \sin(\varphi)}{r^2} \end{cases}$$

Y reordenando, tenemos

$$\begin{cases} \cos(\varphi)(\ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2 + \frac{\gamma}{r^2}) + \sin(\varphi)(-2\dot{r}\dot{\varphi} - r\ddot{\varphi}) = 0 \\ \cos(\varphi)(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) + \sin(\varphi)(\ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2 + \frac{\gamma}{r^2}) = 0 \end{cases}$$

Estas igualdades ocurren si y solamente si:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2 + \frac{\gamma}{r^2} = 0 \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

Observamos primero que $r(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})$. Esto implica que $r^2\dot{\varphi}$ es constante en las soluciones del sistema. Por lo que si $\ell = r(0)^2\dot{\varphi}(0) = r(t)^2\dot{\varphi}(t)$, entonces ℓ es una

cantidad conservada en las soluciones. Esta relación nos permite escribir a $\dot{\varphi}$ en función de r .

Sustituyendo en el sistema $\dot{\varphi}$ por ℓ/r^2 , obtenemos que

$$\ddot{r} - \frac{\ell^2}{r^3} + \frac{\gamma}{r^2} = 0$$

Luego, vemos que si definimos $U_\ell(r) = \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{\gamma}{r}$, entonces $\frac{d}{dt}(U_\ell(r)) = \dot{r}(-\frac{\ell^2}{r^3} + \frac{\gamma}{r^2})$. Y como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{r}^2}{2} + U_\ell(r)\right) = \dot{r}\left(\ddot{r} - \frac{\ell^2}{r^3} + \frac{\gamma}{r^2}\right) = 0$$

Se tiene que $\frac{\dot{r}^2}{2} + U_\ell(r) = E$ también es una constante de movimiento. Más aún, se puede corroborar que esto no es más que la Energía mecánica del sistema expresada en coordenadas polares. Esta última ecuación de primer orden solo depende de r , explícitamente:

$$\dot{r} = \pm\sqrt{2(E - U_\ell(r))} = \pm\sqrt{2\left(E - \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{\gamma}{r}\right)}$$

Resulta que esta expresión no tiene una primitiva fundamental, sin embargo podemos estudiar la geometría de las órbitas. Para esto no necesitamos información temporal, pues alcanza con conocer la relación de los pares (r, φ) que son solución.

Sabíamos que $\dot{\varphi} = \frac{\ell}{r^2}$. Veamos que podemos escribir a los radios r de la solución en función de φ .

Si suponemos que hay una condición inicial dada para $t = 0$, y que $\ell^2 = r^2\dot{\varphi} \neq 0$, podemos definir la función $R(\varphi)$, al menos localmente, tal que a cada valor de φ le haga corresponder el radio de la solución en el tiempo $t \geq 0$, siendo t el menor tiempo en el cual la órbita tenga coordenada angular φ .

Es decir, si $\tau(\varphi)$ es una inversa local de $\varphi(t)$, entonces $R(\varphi) = r(\tau(\varphi))$.

Tenemos entonces que $\frac{d\tau}{d\varphi} = \frac{1}{\dot{\varphi}}$, y por lo tanto

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{\pm\sqrt{2\left(E - \frac{\ell^2}{2R^2} - \frac{\gamma}{R}\right)}}{\ell} R^2$$

Vemos que esta ecuación diferencial es de variables separables, siendo φ la variable independiente. Obtenemos que

$$\int \frac{\ell}{\pm\sqrt{2ER^2 + 2\gamma R - \ell^2}} dR = \int 1 d\varphi = \varphi - \varphi_0$$

Si escribimos $e = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\gamma^2}}$ y $p = \frac{\ell^2}{\gamma}$, entonces $\frac{\ell}{\sqrt{2ER^2 + 2\gamma R - \ell^2}} = \frac{p/R}{\sqrt{e^2 R^2 - (p-r)^2}}$, y resolviendo la integral con esta escritura se obtiene

$$\arccos\left(\frac{1}{e}[(p/R(\varphi)) - 1]\right) = \varphi - \varphi_0$$

Despejando, concluimos que

$$R(\varphi) = \frac{p}{1 + \cos(\varphi - \varphi_0)e}$$

Esta es la ecuación de una cónica en coordenadas polares. Según el signo de e (excentricidad) distinguimos a qué sección cónica refiere:

- Para $0 \leq e < 1$, la ecuación es de una elipse y corresponde a $E < 0$.
- Para $e = 1$ una parábola y corresponde a $E = 0$.
- Para $e > 1$ una hipérbola y corresponde a $E > 0$

Esto no es más que la *primer ley de Kepler*. De hecho, estamos en condiciones de deducir las otras leyes:

Como $\ell = r^2\dot{\varphi}$ es una cantidad conservada a lo largo de las órbitas, obtenemos que el área barrida entre los intervalos de tiempo $[t_1, t_2]$ queda dada por:

$$\int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(t_2)} \frac{1}{2} R(\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} r(t)^2 \dot{\varphi}(t) dt = \frac{1}{2} \ell (t_2 - t_1)$$

Esto es la *segunda ley de Kepler*: dos soluciones barren la misma área en el mismo intervalo de tiempo.

Por último corroboremos la *tercer ley de Kepler*: Cuando las órbitas son elipses, los cuadrados de los períodos de cada órbita son proporcionales al cubo del semieje mayor.

Si $z(t)$ es una solución cuya órbita es una elipse, consideramos $Z(t) = c_z z(t/c_t)$ donde c_z, c_t son parámetros reales. Es decir, Z es una homotecia de z de razón c_z , cuyo período se multiplica por c_t . Resulta que Z es solución si y sólo si $c_t^2 = c_z^3$:

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} = \frac{c_z}{c_t^2} \frac{d^2 z}{dt^2} \quad \text{y} \quad \frac{Z}{\|Z\|^3} = c_z^{-2} \frac{z}{\|z\|^3}$$

De la ecuación diferencial deducimos que Z es solución si y sólo si se respeta la proporción entre el cuadrado del período y el cubo del semieje mayor $c_t^2 = c_z^3$

Observación 1.1.1. El cambio a coordenadas polares fue lo que nos permitió perder grados de libertad en la ecuación diferencial. Primero, gracias a que el momento angular $\ell = \ell(r, \dot{\varphi}) = r^2\dot{\varphi}$ se conserva, pudimos escribir $\dot{\varphi}$ en función de r , y luego, al ver que la energía $E(r, \dot{r}) = \frac{\dot{r}^2}{2} + U_\ell(r) = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{\gamma}{r}$ también se conserva, pudimos despejar \dot{r} en función de r . Las cantidades conservadas delimitaron las regiones en las que las soluciones deben estar contenidas. Estos límites son tales que, cuando $E < 0$, logramos deducir que las soluciones serán periódicas, o lo que es equivalente, que si (z, \dot{z}) solución elíptica, esta se puede describir como una órbita periódica definida en una variedad homeomorfa a $S^1 \times S^1 = \mathbb{T}^2$.

Capítulo 2

Sistemas Hamiltonianos

2.1. Hamiltonianos en \mathbb{R}^{2n}

Los sistemas mecánicos conservativos tienen la particularidad de que los movimientos están confinados en niveles de energía constante en el espacio de fase. Si modelamos el espacio de fase en \mathbb{R}^{2n} , pensando a este como el conjunto de posiciones y velocidades, o posiciones y momentos, una función de energía o función Hamiltoniana no es nada más que una función $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$. Si h es un valor regular, entonces $H^{-1}(h)$ será una variedad de dimensión $n - 1$, en donde estarán contenidas las órbitas con energía h .

Sin embargo, la función H en ocasiones no solo restringe la dinámica a conjuntos de nivel, sino que la define. Veamos el siguiente ejemplo:

Consideramos una partícula en el espacio bajo la acción de una fuerza F conservativa que sólo depende de la posición de la misma. El espacio de fase será $\mathbb{R}^6 = \{(q, p) : q \in \mathbb{R}^3, p \in \mathbb{R}^3\}$ dado por posiciones y velocidades, y la dinámica queda definida por la segunda Ley de Newton. Si $F(q) = -\nabla E$ y m es la masa: $m\ddot{q} = F(q)$, y transformando la ecuación a orden 1, ésta se escribe como

$$\begin{cases} \dot{q}_i = p_i & i = 1, 2, 3 \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial E}{\partial q_i} & i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Definimos H como $H(q, p) = E + \frac{1}{2} \sum_1^3 |p_i|^2$ la energía mecánica total. Observamos que $\dot{q}_i = p_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ y que $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, por lo tanto, la ecuación diferencial está determinada por el campo X_H inducido por H :

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, \frac{\partial H}{\partial p_3}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, -\frac{\partial H}{\partial q_2}, -\frac{\partial H}{\partial q_3} \right)$$

Más en general, así como una función $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ determina en \mathbb{R}^{2n} un campo de gradientes, de forma canónica podemos definir un campo X_H ortogonal a ∇H . Diremos que X_H define una ecuación diferencial Hamiltoniana.

Definición 2.1.1. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ un abierto y $H \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ Hamiltoniano. Si denotamos a los puntos de \mathbb{R}^{2n} como $\vec{x} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, definimos la **ecuación diferencial Hamiltoniana** de H como

$$\begin{cases} \dot{q}_i(q, p) = \frac{\delta H}{\delta p_i}(q, p) \\ \dot{p}_i(q, p) = -\frac{\delta H}{\delta q_i}(q, p) \end{cases}$$

O de forma más compacta se puede escribir como

$$\dot{x} = X_H(x) = \mathbb{J} \nabla H \quad , \text{ con } \mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

A $X_H(x)$ lo llamaremos **campo Hamiltoniano**

Observación 2.1.1. El Hamiltoniano H es constante en las órbitas del campo Hamiltoniano. Simplemente basta con observar que el campo X_H es ortogonal al gradiente de H .

Definición 2.1.2. Un **sistema Hamiltoniano lineal** es aquel generado por $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma $H(x) = H(0) + \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle$ donde A es una matriz $2n \times 2n$ simétrica.

Observación 2.1.2. Para un sistema Hamiltoniano lineal se tiene que $\nabla H(x) = Ax$ y que $X_H(x) = Ux$ donde $U = \mathbb{J}A$ matriz.

Por lo tanto la solución se puede escribir como $e^{Ut}x_0$

Ejemplo 2.1.1. *Oscilador armónico*

Consideramos una partícula en \mathbb{R} de masa m ligada a un resorte situado en $q = 0$ que cumple con la ley de Hook, es decir, que la fuerza ejercida sobre la partícula es $F(t) = -kq(t)$ donde k constante positiva.

Definimos la energía total del sistema como la suma de la energía cinética más la potencial elástica:

$$H(q, \dot{q}) = \frac{k}{2}q^2 + \frac{m}{2}(\dot{q})^2$$

En términos de momento lineal en lugar de velocidad ($p = m\dot{q}$), la expresión de H es:

$$\begin{aligned} H(q, p) &= \frac{k}{2}q^2 + \frac{1}{2m}p^2 \\ &= \frac{1}{2} \langle (q, p), \left(\frac{kq}{2}, \frac{p}{2m} \right) \rangle = \frac{1}{2} \langle (q, p), A(q, p) \rangle \end{aligned}$$

Donde $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix}$, y $U = \mathbb{J}A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & 0 \end{pmatrix}$

Tenemos definido por lo tanto un sistema Hamiltoniano lineal. Considerando la observación previa:

$X_H(q, p) = U(q, p) = \left(\frac{1}{m}p, -kq \right)$, que es exactamente la ecuación diferencial asociada a $F = ma = m\ddot{q} = \frac{1}{m}\ddot{p} = -kq$, es decir:

$$\begin{cases} m\dot{q} = p \\ \dot{p} = -kq \end{cases}$$

La energía H define la ecuación diferencial que describe la dinámica del sistema: la segunda ley de Newton.

Por lo tanto, la solución al sistema es

$$\begin{aligned} (q(t), p(t)) &= \exp(Ut)(q_0, p_0) = \left(\sum_0^{\infty} \frac{Ut^n}{n!} \right) (q_0, p_0) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{k}{m}t\right) & -\text{sen}\left(\frac{k}{m}t\right) \\ \text{sen}\left(\frac{k}{m}t\right) & \cos\left(\frac{k}{m}t\right) \end{pmatrix} (q_0, p_0) \end{aligned}$$

Podemos marcar algunas observaciones sobre este último ejemplo:

Primero observamos que la solución obtenida es un movimiento periódico de (q, p) en una elipse de ecuación $(\frac{q}{\sqrt{q_0}})^2 + (\frac{p}{\sqrt{p_0}})^2 = 1$. Topológicamente, es un movimiento en S^1 .

Ante un cambio de coordenadas $(q, p) \mapsto (\sqrt{k}q, \frac{p}{\sqrt{m}}) = (Q, P)$, si llamamos $\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}$ el Hamiltoniano se expresa como

$$H(Q, P) = \frac{\omega}{2}(Q^2 + P^2)$$

Y de esta forma se definen exactamente las mismas ecuaciones diferenciales en términos de P y Q . Como las soluciones del sistema necesariamente se encuentran en un conjunto de nivel de H , las trayectorias de las soluciones viven en $Q^2 + P^2 = h = cte$.

Es por lo tanto natural (y conveniente) buscar coordenadas que simplifiquen la escritura de soluciones en el espacio de fase. Podemos pensar en este ejemplo, que la dinámica se traduce a coordenadas de $\mathbb{R}^{>0} \times S^1$ (polares), ya que cada $h > 0$ define un círculo y cada $\theta \in S^1$ define una posición en el círculo. Con estas coordenadas inmediatamente obtenemos que $\dot{h} = 0$. Explícitamente, consideramos $(h, \theta) \mapsto (h\text{sen}(\theta), h\text{cos}(\theta)) = (Q, P)$, luego las ecuaciones $\dot{Q} = \omega P$ y $\dot{P} = -\omega Q$ se traducen a:

$$\begin{cases} \omega h \dot{\theta} \text{cos}(\theta) = \omega h \text{cos}(\theta) \\ \omega h \dot{\theta} \text{sen}(\theta) = \omega h \text{sen}(\theta) \end{cases}$$

De donde deducimos que $\dot{\theta} = \omega$. Las ecuaciones diferenciales en estas coordenadas son:

$$\begin{cases} \dot{h} = 0 \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

Es decir, la dinámica es constante en h y lineal en θ . La solución está dada por $(Q(t), P(t)) = (h_0 \text{sen}(\omega t + \omega_0), h_0 \text{cos}(\omega t + \omega_0))$

Con este ejemplo simple, se visualiza la importancia de las coordenadas en la descripción de la dinámica Hamiltoniana. Interpretando las nuevas variables, observamos que al descomponer el espacio de fase en niveles de energía, la coordenada h implica una elección de nivel de energía y la elección de θ implica una ubicación angular dentro de este nivel, considerando $\theta = 0$ como punto de partida. Más adelante veremos, que bajo ciertas hipótesis, esto se generaliza: podremos localmente considerar coordenadas locales de tal forma que un grupo de coordenadas determinen un nivel de energía, y otro grupo nos indique una ubicación en este nivel en términos de ángulos. En esta dirección se encamina la primer parte del trabajo monográfico, para construir las que llamaremos *coordenadas ángulo-acción*.

Sin embargo, no hay que perder de vista que en el ejemplo la dinámica se describe en un cilindro $\mathbb{R}^{>0} \times S^1$, lo que anima a pensar cómo formalizar la dinámica Hamiltoniana en variedades.

2.2. Hamiltonianos en variedades simplécticas

Para generalizar la noción de sistema Hamiltoniano a variedades, necesitamos de un formalismo que permita definir intrínsecamente campos que determinen una ecuación diferencial. Más específicamente, necesitamos un método canónico e intrínseco que permita definir X_H como un campo tangente a los conjuntos de nivel de H (función Hamiltoniana).

Vemos que, de hecho, en los espacios de fase con los que trabajamos subyace cierta estructura natural. Las coordenadas en que se define la evolución de un sistema clásico son las "posiciones" q y los "momentos" p . Si las posiciones se encuentran en una variedad M , los momentos son 1-formas diferenciales definidas en el fibrado tangente TM , es decir, dependen de la "posición" q y las "velocidades" \dot{q} . Por lo tanto pensamos al espacio de fase como el conjunto de elementos de la forma "(posición, momento)", o formalmente, lo que denominamos como el fibrado cotangente de las posiciones:

Si M es una variedad diferenciable de dimensión n y $x \in M$:

- Un **vector cotangente** de M en x es una 1-forma definida en $T_x M$
- El **espacio cotangente** de M en x es el espacio dual de $T_x M$, y lo denotamos como $T_x^* M$
- El **fibrado cotangente** de M es la unión disjunta de los espacios cotangentes $(\sqcup_{x \in M} T_x^* M)$ dotada con la estructura diferencial natural. Lo denotamos como $T^* M$

Dado que $P = T^* M$ es una variedad diferencial, podemos elegir ciertas coordenadas convenientes. Si $(q_1, \dots, q_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ son coordenadas locales para $U \subseteq M$ entorno de x , la 1-forma p en $T_x M$ queda determinada por los números $p_l = p(\frac{\delta}{\delta q_l}(x))$, con $1 \leq l \leq n$. Identificamos entonces a p con el vector (p_1, \dots, p_n) , y de esta forma conseguimos coordenadas (q, p) en $T^* U$ donde $\text{Dim}(T^* M) = 2 \text{Dim}(M) = 2n$. Observamos también que TM y $T^* M$ son difeomorfos, pero no de forma canónica.

Es por esto último que para determinar direcciones que no dependan de las cartas a la hora de definir campos Hamiltonianos en $P = T^* M$, es necesario considerar una forma simpléctica.

- Una **forma simpléctica** en una variedad P es una 2-forma ω en P que es anti-simétrica, cerrada ($d\omega = 0$) y no degenerada, es decir, que $\forall x \in P$ y $\zeta \in T_x P$ $\exists \eta \in T_x P$ tal que $\omega(\zeta, \eta) \neq 0$.

Al par (P, ω) lo llamamos **variedad simpléctica**

- Decimos que un campo $X : P \rightarrow TP$ en una variedad simpléctica (P, ω) es un **campo Hamiltoniano** si $\omega(X, \cdot)$ es una 1-forma exacta, y decimos que es un campo localmente Hamiltoniano si la 1-forma es cerrada.
- Una función diferenciable $H : P \rightarrow \mathbb{R}$, que llamaremos Hamiltoniano, define un campo vectorial X_H dado por la ecuación $\omega(X_H, \cdot) = dH$. Al campo X_H lo llamamos campo Hamiltoniano generado por H , y a la terna (P, ω, H) la llamamos **sistema Hamiltoniano**.

Observación 2.2.1. La 2-forma simpléctica ω juega el papel de la matriz \mathbb{J} en \mathbb{R}^{2n} para determinar X_H . Si H es un Hamiltoniano en $\mathbb{R}_q^n \times \mathbb{R}_p^n$ y consideramos la 2-forma simpléctica dada por $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ (luego veremos que esta forma simpléctica es más que un ejemplo), resulta que

$$\omega_0(X_H, \cdot) = dH \iff X_H = \mathbb{J} \nabla H$$

A la 2-forma ω_0 la llamaremos **forma canónica simpléctica**

Observación 2.2.2. *El Hamiltoniano es constante en órbitas del campo Hamiltoniano:*

En una variedad simpléctica (P, ω, H) , el campo X_H induce un flujo solución $\phi : I \times P \rightarrow P$. El Hamiltoniano H es constante en las órbitas definidas por este flujo, pues si $x \in P$, $y = \phi(t, x)$, entonces

$$\frac{d}{dt}(H(\phi(t, x))) = D_y H\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x)\right) = D_y H(X_H(y)) = \omega(X_H(y), X_H(y)) = 0$$

Se tiene entonces que las soluciones de un sistema Hamiltoniano necesariamente se encuentran en un conjunto de nivel de H

Ejemplo 2.2.1. *Péndulo planar sin rozamiento*

Consideramos una masa ligada al vértice de una varilla inflexible sin masa, cuyo otro vértice está fijo. Dependiendo de la posición y velocidad iniciales de la masa, ésta gira sin rozamiento, y suponemos que la dinámica se da en un plano. Colocamos el vértice inmóvil de la varilla en el origen $(0, 0)$ y llamamos θ al ángulo que determina la posición de la masa, tomando la semirrecta $y < 0$ como ángulo 0 y midiendo en sentido antihorario.

El espacio de fase de la partícula será el anillo $\mathcal{A} = S^1 \times \mathbb{R}$, pues la dinámica se describe en términos de posición angular y momento lineal. Normalizando las constantes, la ecuación diferencial en cuestión (que se deduce de la segunda Ley de Newton) es

$$\ddot{\theta} = -\text{sen}(\theta) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\theta} = p \\ \dot{p} = -\text{sen}(\theta) \end{cases}$$

La energía mecánica se traduce en estas variables a

$$H(\theta, p) = \frac{p^2}{2} - \cos(\theta)$$

Observamos que $(\theta, p) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$ son coordenadas locales. Consideramos ω una forma simpléctica en \mathcal{A} tal que en estas coordenadas $\omega = \omega_0 = d\theta \wedge dp$.

Entonces la 1-forma $\omega(\theta, p)\left(a_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + a_2 \frac{\partial}{\partial p}\right)(\cdot)$ queda dada por:

$$\begin{aligned} & \omega(\theta, p)\left(a_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + a_2 \frac{\partial}{\partial p}\right)\left(b_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + b_2 \frac{\partial}{\partial p}\right) \\ &= d\theta \wedge dp\left(a_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + a_2 \frac{\partial}{\partial p}\right)\left(b_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + b_2 \frac{\partial}{\partial p}\right) = a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ &= -a_2 d\theta + a_1 dp \end{aligned}$$

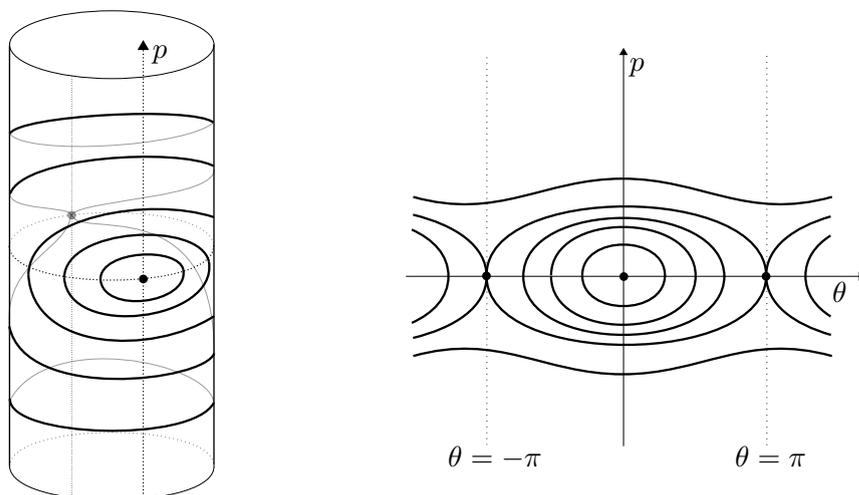
Como $DH(\theta, p) = \text{sen}\theta d\theta + p dp$, tenemos que el campo inducido X_H es

$$X_H(\theta, p) = p \frac{\partial}{\partial \theta} - \text{sen}(\theta) \frac{\partial}{\partial p}$$

Es decir, obtuvimos el campo que define la ecuación diferencial. Si pensamos el espacio de fase en su cubrimiento universal \mathbb{R}^2 , X_H no es más que el correspondiente campo $\mathcal{J}\nabla H$.

Por otro lado, las órbitas están confinadas en niveles de energía H . Si $h \geq -1$ es una energía, el conjunto de nivel asociada está dada por $p = \pm\sqrt{2(h + \cos(\theta))}$. Observamos que

$$\begin{cases} h = -1 \Rightarrow & H^{-1}(h) = \{(0, 0)\} \\ h \in (-1, 1) \Rightarrow & H^{-1}(h) \simeq \mathbb{S}^1 \\ h = 1 \Rightarrow & H^{-1}(h) \simeq \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \\ h > 1 \Rightarrow & H^{-1}(h) \simeq \mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^1 \end{cases}$$

Figura 2.1: Conjuntos de Nivel de H

Observación 2.2.3. *Sistema Hamiltoniano en coordenadas canónicas:*

Sea $P = T^*M$, (P, ω, H) sistema Hamiltoniano. Supongamos que existen coordenadas locales (q, p) en torno a cierto punto de P para las cuales ω es la forma canónica, es decir, es tal que $\omega = \omega_0 = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$. Por lo ya observado, en estas coordenadas las componentes de X_H se pueden escribir como

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_n} \right)$$

Recuperando la notación del campo para sistemas en \mathbb{R}^{2n}

Más adelante veremos que una variedad simpléctica (P, ω) siempre admite localmente coordenadas locales como en la observación anterior (coordenadas canónicas), lo que permite escribir localmente a un sistema Hamiltoniano como un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \dot{q}_i(q, p) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p) \\ \dot{p}_i(q, p) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q, p) \end{cases}$$

Capítulo 3

Formalismo simpléctico

En esta sección probaremos que toda 2-forma simpléctica se puede ver localmente como la forma simpléctica canónica, y por lo tanto es la herramienta que nos permite generalizar a variedades la elección en \mathbb{R}^{2n} de X_H que habíamos definido.

Luego veremos que una variedad simpléctica (P, ω) posee una estructura algebraica natural en el espacio de funciones $C^\infty(P, \mathbb{R})$ que nos permitirá, entre otras cosas, caracterizar a las cantidades conservadas en el sistema y definir una noción de independencia entre estas.

Gran parte del contenido de este capítulo se puede encontrar en [KD18] (capítulo 10).

3.1. Coordenadas canónicas

Para formas simplécticas ω constantes en \mathbb{R}^{2n} , es fácil encontrar una base para la cual la escritura de la forma sea canónica: la matriz asociada a ω en esa base será \mathbb{J} .

Teorema 3.1.1. *Teorema de Darboux (versión lineal)*

Sea ω una forma bilineal antisimétrica de rango r definida en E un \mathbb{R} -espacio vectorial. Entonces $r=2m$ para cierto m natural y existe cierta base \mathcal{B} de E , tal que si $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_{2m}, \dots, e_n\}$, se tiene que $\omega(e_i, e_j) \neq 0$ ssi $1 \leq i \leq m$ y $j = i + m$ (o viceversa), y además para éstos $\omega(e_i, e_{i+m}) = 1$. Es decir, la matriz asociada a ω en la base \mathcal{B} es de la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} & 0 \\ -\mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Demostración. Si suponemos $\omega \neq 0$, entonces existen $\hat{b}_1, \hat{b}_2 \in E$ tal que $\omega(\hat{b}_1, \hat{b}_2) = c_1 \neq 0$. Tomando a $b_1 = \hat{b}_1/c_1$ y $b_2 = \hat{b}_2$, tenemos que $\omega(b_1, b_1) = 0 = \omega(b_2, b_2)$ (pues ω antisimétrica) y $\omega(b_1, b_2) = 1$.

Sean $P_1 = \text{Span}(b_1, b_2)$, $E_2 = \{e \in E : \omega(e, f) = 0 \ \forall f \in P_1\}$. Tenemos que E_2 es un subespacio que cumple $E_2 \cap P_1 = \{0\}$ y que $E_2 + P_1 = E$, pues dado $z \in E$,

$$z + \omega(b_1, z)b_2 - \omega(b_2, z)b_1 \in E_2$$

Entonces $\text{Dim}(E_2) = \text{Dim}(E) - 2$ y podemos restringir ω a E_2 para repetir el procedimiento. Este proceso termina y al conseguir dos vectores en cada etapa, finalizaremos con un conjunto de $2m$ elementos, y por lo tanto $2m$ será el rango de ω . Renombrando a los vectores como $e_i = b_{2i-1}$, $e_{i+m} = b_{2i}$ con $i \in \{1, \dots, m\}$ y completando el conjunto con vectores linealmente independientes para obtener una base, obtenemos $\{e_1, \dots, e_{2m}, \dots, e_n\}$, que cumple con la tesis. \square

Toda forma canónica simpléctica $\omega_0(q, p) = \sum_1^n dq_i \wedge dp_i$ es exacta, por lo tanto es la derivada exterior de una 1-forma. Una elección natural, que llamaremos *1-forma tautológica*, será la elección $\theta = \sum_1^n p_i dq_i$ que cumple $-d\theta = \omega_0$. Sin embargo, en fibrados cotangentes, esta 1-forma se puede definir geoméricamente sin hacer referencia a coordenadas:

Proposición 3.1.1. *Sea $P = T^*M$ fibrado cotangente con M una n -variedad. (P, ω_0) variedad simpléctica. Consideramos los siguientes mapas:*

- $\Pi_M^* : P \rightarrow M$ tal que $\Pi_M^*(T_q^*M) = \{q\}$
- $D\Pi_M^* : TP \rightarrow TM$ donde $D\Pi_M^*(T_xP) = T_{\Pi_M^*(x)}M$

Entonces la 1-forma θ_0 definida por

$$\theta_0(Y(x)) = x(D\Pi_M^*(Y(x)))$$

cumple que $d\theta_0 = -\omega_0$, donde $Y : P \rightarrow TP$ es un campo arbitrario. Esta definición es independiente de las cartas pues utiliza la estructura natural del fibrado cotangente.

A θ_0 la llamamos **1-forma tautológica** o **1-forma de Liouville**.

Demostración. Recordamos que dado $x \in P$, si $\Pi_M^*(x) = q \in M$, x actúa en T_qM .

Una 1-forma en P queda determinada por cómo actúa en campos arbitrarios en TP . Sea $Y : P \rightarrow TP$ campo tangente. Corroboramos que $\theta_0(Y(x)) = x(D\Pi_M^*(Y(x)))$ está bien definido pues $D\Pi_M^*(Y(x)) \in T_qM$

En coordenadas locales (q, p) de un entorno $U \subseteq P$ de x , es decir, con $(q, p) : T^*U \rightarrow \mathbb{R}_q^n \times \mathbb{R}_p^n$, si escribimos a Y como $Y = \sum_1^n (Y_i \frac{\partial}{\partial q_i} + Y_{i+n} \frac{\partial}{\partial p_i})$, entonces

$$D\Pi_M^*(Y(q, p)) = \sum_1^n Y_i(q, p) \frac{\partial}{\partial q_i}$$

Como $p = \sum_1^n p_i dq_i$, tenemos:

$$\theta_0(Y(q, p)) = p(D\Pi_M^*(Y(q, p))) = p\left(\sum_1^n Y_i(q, p) \frac{\partial}{\partial q_i}\right) = \sum_1^n p_i Y_i(q, p)$$

Por lo tanto podemos escribir a θ_0 como $\theta_0(q, p) = \sum_1^n p_i dq_i$, que verifica

$$d\theta_0 = \sum_1^n dp_i \wedge dq_i = -\omega_0$$

□

Definición 3.1.1. Sean (P, ω) y (Q, ρ) variedades simplécticas de la misma dimensión y $F \in C^1(P, Q)$

- Decimos que F es **simpléctico** si $F^*\rho = \omega$
- Decimos que F es **simplectomorfismo** si es un difeomorfismo simpléctico.

Para fibrados cotangente la idea de simplectomorfismo también resulta bastante natural. Si M es una n -variedad y $f : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo, éste induce un simplectomorfismo en T^*M .

Definición 3.1.2. Sean M, N variedades diferenciables, $f \in C^1(M, N)$. Definimos el **levantado cotangente** de f como el mapa $D^*f : T^*N \rightarrow T^*M$ tal que $D^*f(\beta_n)(v) = \beta_n(Df(v))$ para $\beta_n \in T_n^*N$, $v \in T_mM$ y $n = f(m)$

Efectivamente, el levantado cotangente es un simplectomorfismo:

Proposición 3.1.2. Sea M variedad diferenciable, $f \in C^1(M, M)$ difeomorfismo y D^*f su levantado cotangente. Entonces D^*f deja invariante la 1-forma de Liouville en T^*M , es decir, $(D^*f)^*(\theta_0) = \theta_0$.

Este resultado también implica que el levantado cotangente deja invariante a la forma canónica simpléctica, y por lo tanto es un simplectomorfismo.

Demostración. Tenemos:

- $f : M \rightarrow M$ difeo, $f : q \mapsto Q$
- $Df : TM \rightarrow TM$, $Df : v \in T_qM \mapsto Df(v) \in T_{f(q)}M$
- $g = D^*f : T^*M \rightarrow T^*M$, con $g : (Q, P) \mapsto (q, p)$
donde $p_q(v) = (q, p)(v) = D^*f(Q, P)(v) = P_Q(Df(v))$, para $v \in T_qM$, $Df(v) \in T_QM$, y por lo tanto $p_q = P_Q \circ D_qf$.

Si θ es una 1-forma en T^*M , entonces $g^*(\theta)(Q, P)(v) = \theta(g(Q, P))(D_{(Q,P)}g(v))$. La 1-forma de Liouville está dada por $\theta_0(q, p) = \sum_1^n p_i dq_i$.

Como $p = P \circ D_qf$, $P = ((D_qf)^{-1})^\top p$. Entonces, por un lado:

$$g^*\theta_0(Q, P) = \theta_0(q, p) = \sum_1^n p_i dq_i$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} \theta_0(P, Q) &= \theta_0\left(\left((D_qf)^{-1}\right)^\top p, f(q)\right) \\ &= \langle \left((D_qf)^{-1}\right)^\top p, (D_qf) dq \rangle = \langle p, (D_qf)^{-1} (D_qf) dq \rangle = \sum_1^n p_i dq_i \end{aligned}$$

Es, decir, $g^*\theta_0 = (D^*f)^*\theta_0 = \theta_0$

□

Para la demostración del teorema de Darboux en variedades simplécticas, la estrategia será ir deformando el espacio mediante un camino de simplectomorfismos, para preservar la 2-forma pero cambiar su escritura en una base de vectores. Para estimar estas deformaciones es que necesitamos definir qué es “derivar” una forma en cierta dirección.

Definición 3.1.3. Sea M variedad diferenciable, X campo vectorial en M , ω una k -forma en M .

- Definimos el **producto interno entre X y ω** como la $(k-1)$ -forma

$$\iota_X \omega(X_1, \dots, X_{k-1}) := \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1})$$

- Definimos la **derivada de Lie de ω respecto a X** ($L_X \omega$) como la k -forma

$$L_X \omega := (\iota_X d + d\iota_X) \omega$$

Proposición 3.1.3. *Sea M variedad diferenciable, X campo vectorial en M , ω una k -forma y ρ una l -forma en M . Entonces:*

$$d(L_X(\omega)) = L_X(d\omega) \quad y \quad L_X(\rho \wedge \omega) = L_X(\rho) \wedge \omega + \rho \wedge L_X(\omega)$$

Demostración. Para ver que L conmuta con la derivada, usando que $d^2 = 0$:

$$d(L_X(\omega)) = d((\iota_X d + d\iota_X)(\omega)) = d\iota_X d\omega = (\iota_X d + d\iota_X)d\omega = L_X(d\omega)$$

Para probar la segunda igualdad, observamos que

$$\begin{cases} d(\rho \wedge \omega) = (d\rho) \wedge \omega + (-1)^l \rho \wedge d\omega \\ \iota_X(\rho \wedge \omega) = (\iota_X \rho) \wedge \omega + (-1)^l \rho \wedge (\iota_X \omega) \end{cases}$$

Por lo tanto, podemos suponer que la forma ρ es elemental, es decir, de la forma $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_l$. Observamos que el resultado es trivial si $l = 1$, luego:

$$\begin{aligned} \iota_X(\rho \wedge \omega) &= (\iota_X dx_1)[dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_l \wedge \omega] + (-1)(\iota_X dx_2)[dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_l \wedge \omega] + \dots \\ &+ (-1)^{k-1}(\iota_X dx_l)[dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{l-1} \wedge \omega] + (-1)^k [dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_l \wedge \iota_X \omega] \\ &= \sum_{i=1}^l (-1)^{l-1} (\iota_X dx_i)[dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx}_i \cdots \wedge dx_l \wedge \omega] + (-1)^l \rho \wedge (\iota_X \omega) \\ &= (\iota_X \rho) \wedge \omega + (-1)^l \rho \wedge (\iota_X \omega) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} L_X(\rho \wedge \omega) &= \iota_X d(\rho \wedge \omega) + d\iota_X(\rho \wedge \omega) \\ &= \iota_X \left((d\rho) \wedge \omega + (-1)^l \rho \wedge (d\omega) \right) + d \left((\iota_X \rho) \wedge \omega + (-1)^l \rho \wedge (\iota_X \omega) \right) \\ &= (L_X \rho) \wedge \omega + \rho \wedge (L_X \omega) \end{aligned}$$

□

La siguiente proposición es fundamental en el teorema de Darboux, pues se usará a la hora de ir “moviendo” diferenciablemente las coordenadas hasta conseguir coordenadas canónicas.

Proposición 3.1.4. *Sea X_t campo vectorial en M que varía según t y define la ecuación diferencial $\frac{d}{dt}F_t = X_t \circ F_t$ con $F_0 = Id$ y $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, $0 \in I$. Entonces, para toda forma diferenciable ω_t :*

$$\frac{d}{dt}(F_t^* \omega) = F_t^* \left(L_{X_t} \omega_t + \frac{d}{dt} \omega_t \right)$$

En particular, si X es constante en el tiempo y ω también, $F_t = \Phi_t$ flujo solución y obtenemos $\frac{d}{dt}(\Phi_t^ \omega) = \Phi_t^*(L_X \omega)$.*

Demostración. Podemos pensar el enunciado en $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}_q^n \times \mathbb{R}_p^n$, pues los razonamientos son siempre locales. Empecemos por probarlo para 0 -formas:

Sea $g_t \in C^\infty(M)$ una 0 -forma y $p \in M$. $F_t^* g_t(p) = g_t(F_t(p)) = g(t, F(t, p))$. Llamamos H a la función $H(t, x) = (t, F(t, x))$, entonces:

$$\frac{d}{dt}(F_t(g_t)(p)) = \frac{d}{dt}(g \circ H)(t, p) = Dg_{(H(t,p))} \left(\frac{d}{dt} H(t, p) \right)$$

Como $Dg = (\frac{d}{dt}g, \frac{d}{dq_1}g, \dots, \frac{d}{dp_n}g)$ y $\frac{d}{dt}H = (1, \frac{d}{dt}F_t) = (1, X_t \circ F_t)$, obtenemos

$$\frac{d}{dt}(F_t(g_t)(p)) = \frac{d}{dt}(g(t, F_t(p)) + Dg_t(F_t(p))(X_t(F_t(p)))) = F_t^*\left(L_{X_t}g_t + \frac{d}{dt}g_t\right)(p)$$

Luego, veamos que se cumple para una 1-forma constante canónica dq_i o dp_i : Tenemos que $F_t^*(dq_i)(p)(v) = dq_i(F_t(p))(DF_t(v))$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(F_t^*(dq_i))(p)(v) &= dq_i(F_t(p))(D\frac{d}{dt}F_t(v)) = dq_i(F_t(p))(D(X_t \circ F_t(v))) \\ &= dq_i(F_t(p))(DX_t(DF_t(v))) = DX_i(t)(F_t(p))(DF_t(v)) \end{aligned}$$

Y por otro lado:

$$\begin{aligned} F_t^*(L_{X_t}dq_i)(p)(v) &= L_{X_t}dq_i(F_t(p))(DF_t(v)) = d(L_{X_t}q_i)(F_t(p))(DF_t(v)) \\ &= d(\iota_{X_t}dq_i)(F_t(p))(DF_t(v)) = DX_i(t)(F_t(p))(DF_t(v)) \end{aligned}$$

Por último, si $z_i = q_i$, $z_{i+n} = p_i$ con $i \in \{1, \dots, n\}$, teniendo en cuenta que toda k -forma ω_t la podemos escribir como

$$\omega_t = \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_k \leq 2n} (g_t)_{l_1, \dots, l_k} dz_{l_1} \wedge \dots \wedge dz_{l_k}$$

Y usando que:

$F_t^*(\alpha \wedge \beta) = F_t^*(\alpha) \wedge F_t^*(\beta)$, y $L_{X_t}(\alpha \wedge \beta) = L_{X_t}(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge L_{X_t}(\beta)$, se obtiene el resultado para ω_t . □

Una consecuencia notable de la proposición anterior es que, así como esperamos para un sistema físico, el flujo Hamiltoniano preserva volumen:

Teorema 3.1.2. *Sea (M, ω, H) un sistema Hamiltoniano, y sea X_H el campo inducido por H (por la relación $\omega(X_H, \cdot) = dH$). Si $\Phi : I \times M \rightarrow M$ flujo asociado, entonces:*

$$\Phi_t^* \omega^k = \omega^k = \omega \wedge \dots \wedge \omega \text{ } k \text{ veces, con } k \in \{1, \dots, \frac{1}{2} \text{Dim} M\}$$

En particular, el flujo Hamiltoniano para un tiempo t es un symplectomorfismo. Y observando que ω^n es una forma de volumen, tenemos que el flujo Hamiltoniano preserva volumen.

Demostración. Como $\Phi_0 = Id_M$, $\Phi_0^* \omega^k = \omega^k$. Por teorema anterior:

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t^* \omega) = \Phi_t^*(L_{X_H} \omega) = \Phi_t^*(\iota_{X_H} d\omega + d\iota_{X_H} \omega) = \Phi_t^*(\iota_{X_H} 0 + d(dH)) = 0$$

Por lo que $\Phi_t^* \omega$ constante en t . Luego, por regla de Leibnitz:

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t^* \omega^k) = \frac{d}{dt}(\Phi_t^* \omega \wedge \dots \wedge \Phi_t^* \omega) = 0$$

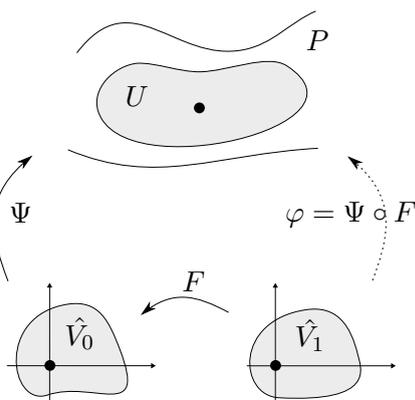
Resultando que $\Phi_t^* \omega^k$ también constante, lo que implica $\Phi_t^* \omega^k = \omega^k$ □

Ya estamos en condiciones de demostrar el teorema de Darboux en variedades:

Teorema 3.1.3. *Teorema de Darboux (en variedades simplécticas)*

Sea (P, ω) una variedad simpléctica de dimensión $2n$, $x \in P$. Entonces existe un entorno U de x y una carta local (U, φ) , tal que si $\varphi = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, entonces $\omega|_U = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i = \omega_0$, la forma canónica simpléctica.

Demostración. Al trabajar localmente podemos identificar vía una carta a los entornos de P con \mathbb{R}^{2n} y trabajar allí. Es decir, si $\psi : V_1 \subseteq \mathbb{R}^{2n} \rightarrow U \subseteq P$ carta local con $\psi(0) = x \in P$, identificamos (U, ω) con $(V_1, \psi^*(\omega))$. Probaremos que si V_0, V_1 son dos entornos de $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ y ω forma simpléctica en V_1 , entonces existe $F : \hat{V}_0 \rightarrow \hat{V}_1$ difeomorfismo con $0 \in \hat{V}_0 \subseteq V_0$ y $0 \in \hat{V}_1 \subseteq V_1$ de tal forma que $F^*(\omega) = \omega_0$ la forma canónica simpléctica. Luego, la carta $\varphi := \psi \circ F : \hat{V}_0 \rightarrow \psi(V_1) \subseteq U$ cumple con la tesis.



Podemos asumir, por el teorema de Darboux lineal, que $\omega(0) = \omega_0(0)$ (la forma canónica simpléctica). Construiremos a F como la solución de una ecuación diferencial $\frac{d}{dt}F_t = X_t \circ F_t$ con $F = F_1$ y $F_0 = Id$, y para ello necesitamos conseguir un campo variable en el tiempo X_t que cumpla lo siguiente:

$$F_t(0) = 0, \quad DF_t(0) \text{ invertible}, \quad L_{X_t}\omega_t = \omega_0 - \omega$$

Donde $\omega_t := (1-t)\omega_0 + t\omega$. Y una vez conseguido el campo, tenemos que:

$$\frac{d}{dt}F_t^*(\omega_t) = F_t^*(L_{X_t}\omega_t + \frac{d}{dt}\omega_t) = F_t^*(0) = 0$$

Por lo que $F_t^*(\omega_t)$ constante en el tiempo, entonces $\omega_0 = F_0^*(\omega_0) = F_1^*(\omega_1) = F_1^*(\omega)$, que es lo que queríamos.

Para ver que existe tal campo X_t , observamos que $\omega - \omega_0$ es una forma exacta en un entorno de 0 , entonces por lema de Poincaré, existe θ una 1-forma tal que $d\theta = \omega - \omega_0$.

Por otro lado, como ω_t es una forma cerrada, $L_Y\omega_t = d\iota_Y(\omega_t)$ para cualquier campo Y . Además, en un entorno de 0 , ω_t es no degenerada ($\omega_t(0) = \omega_0(0)$ es no degenerada y esto es una propiedad abierta).

Consideramos \hat{V}_0 y \hat{V}_1 para que se den estas condiciones y suponemos que $DF_t(0)$ invertible para $t \in [0, 1]$ (como $DF_0 = Id$, existe ϵ tal que DF_t invertible en $[0, \epsilon]$, y el razonamiento sigue igual con la homotopía ω_t de ω_0 a ω en tiempo ϵ , por lo que no perdemos generalidad en suponer $\epsilon = 1$).

Por lo tanto, basta con encontrar campo X_t tal que $\iota_{X_t}(\omega_t) = \theta + df$ para alguna $f \in C^\infty$. Eligiendo apropiadamente df también podemos suponer que $\theta(0) = 0$. Luego, fijado t , sabemos que existe X_t tal que $\theta = \omega_t(X_t, \cdot)$. Como esta asignación del campo X_t

varía diferenciablemente y siempre $X_t(0) = 0 \forall t \in [0, 1]$ (pues $\theta(0) = 0$ y ω_t no degenerada) y $F_t(0) = 0$, éste es el campo que buscábamos. \square

Éste último teorema nos permite pensar que la forma simpléctica, localmente en el espacio de fase, es esencialmente la canónica, lo que facilita los razonamientos a la hora de hacer cuentas y expresar de forma sencilla campos Hamiltonianos. Sin embargo estas coordenadas, por lo general, no se pueden extender a toda la variedad.

Proposición 3.1.5. *Sea M una $2n$ -variedad compacta sin borde. Entonces M no admite una 2-forma antisimétrica que sea a la vez no degenerada y exacta.*

Demostración. Si ω es una 2-forma antisimétrica no degenerada, entonces ω^n es una forma de volumen en M . Como M es compacta sin borde, por teorema de Stokes no admite una forma de volumen exacta. Por lo tanto ω^n no es exacta, lo que implica ω no es exacta, pues si $\omega = d\alpha$, entonces $d(\alpha \wedge \omega^{n-1}) = \omega^n$, contradiciendo que ω^n es no exacta. \square

3.2. Corchetes de Poisson y corchetes de Lie

La estructura simpléctica no sólo es útil para definir campos generados por funciones de energía, sino también para distinguir cierta independencia entre estas funciones. Si (P, ω, H) es un sistema Hamiltoniano y h es un valor regular de H , entonces las órbitas con energía h se mantendrán en $H^{-1}(h)$, una variedad de dimensión $2n - 1$. Sin embargo, si conseguimos demostrar que las órbitas tienen otra cantidad conservada que llamamos G , y que además G es independiente con H (en algún sentido que luego explicitaremos), entonces las órbitas vivirán en conjuntos de nivel de la función (H, G) , una variedad de dimensión $2n - 2$. De esta forma, consiguiendo nuevas cantidades conservadas podremos delimitar con mayor precisión las regiones en las que las órbitas estarán confinadas. Para lograr este objetivo, analizaremos la estructura algebraica inducida por ω en el espacio de funciones C^∞ de la variedad a \mathbb{R} .

Definición 3.2.1. Sea (M, ω) variedad simpléctica, $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Definimos el **corchete de Poisson** de f y g como

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

donde X_f y X_g campos inducidos por f y g respectivamente.

Podemos pensar al corchete de Poisson entre f y g en términos geométricos como “derivar” f en la dirección X_g . Basta con observar lo siguiente:

Proposición 3.2.1. *Dada (M, ω) variedad simpléctica, $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, entonces*

$$\{f, g\} = -L_{X_f}g = L_{X_g}f$$

Esto implica que, dada f , la correspondencia $g \mapsto \{f, g\}$ es una derivación, pues satisface la regla de Leibniz: $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$.

Demostración.

$$-L_{X_f}g = -(\iota_{X_f}d + d\iota_{X_f})g = -\iota_{X_f}dg = -\iota_{X_f}(\iota_{X_g}\omega) = -\omega(X_g, X_f) = \omega(X_f, X_g)$$

\square

El corchete de Poisson detecta nuevas cantidades conservadas si partimos de una ecuación diferencial inducida por un Hamiltoniano:

Proposición 3.2.2. *Sea $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, Φ_t flujo Hamiltoniano asociado. Entonces dada $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, $\{f, g\} = 0$ sii g constante en órbitas de Φ_t .*

Demostración.

$$\frac{d}{dt}(g \circ \Phi_t) = \frac{d}{dt}\Phi_t^*g = \Phi_t^*(L_{X_f}g) = -\Phi_t^*(\{f, g\}) = 0$$

Por lo tanto, g constante en órbitas de Φ_t □

Observación 3.2.1. En coordenadas canónicas $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ de una variedad simpléctica (para las cuales $\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$) se tiene que

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right)$$

Recordando que en estas coordenadas $(X_f)_i = \frac{\partial f}{\partial p_i}$ y $(X_f)_{i+n} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}$

En particular, $\{p_i, p_k\} = \{q_i, q_k\} = 0$ y $\{q_i, p_k\} = \delta_{i,k}$

A continuación veremos que el corchete de Poisson tiene una fuerte vinculación con el llamado corchete de Lie para campos. Veremos luego que el corchete de Lie “detecta” flujos que conmutan, así como el corchete de Poisson “detecta” cantidades conservadas. De hecho, la idea de cantidades conservadas y campos que conmutan están ligadas y serán fundamentales en la prueba del teorema de Arnol’d-Liouville.

Proposición 3.2.3. *Sean X, Y campos vectoriales en M una n -variedad diferenciable. Entonces $L_X L_Y - L_Y L_X$ es un operador diferencial de primer orden actuando sobre $C^\infty(M, \mathbb{R})$.*

Demostración. Consideramos (z_1, \dots, z_n) coordenadas locales en M , y φ una función $C^\infty(M, \mathbb{R})$. Recordamos que podemos identificar a los campos en una variedad diferenciable con operadores diferenciales de primer orden: escribimos a X e Y como $X(z) = \sum_1^n X_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i}$, $Y(z) = \sum_1^n Y_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i}$, entonces:

$$\begin{aligned} L_X L_Y(\varphi) &= L_X(d\varphi(Y)) = L_X\left(\sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}\right) = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial z_i} \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} + X_i Y_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial z_j} \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(L_X L_Y - L_Y L_X)(\varphi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial z_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial z_i} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}$ □

Definición 3.2.2. Dada M una n -variedad diferenciable, $X, Y : M \rightarrow TM$ campos vectoriales. Definimos el **corchete de Lie** $[X, Y]$ como el campo en M que satisface $L_{[X, Y]} = L_X L_Y - L_Y L_X$.

Teniendo en cuenta la proposición anterior, en coordenadas locales podemos escribir al corchete de Lie como

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial z_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial z_i} \right) \frac{\partial}{\partial z_j}$$

Se puede corroborar que el espacio vectorial formado por los campos C^∞ en M con el corchete de Lie conforman un álgebra de Lie.

El siguiente teorema es el que permite afirmar que el corchete de Lie detecta cierta “independencia” entre dos flujos generados por campos. Cuando el corchete se anula los flujos conmutan, y por lo tanto, definen una acción de \mathbb{R}^2 sobre la variedad.

Teorema 3.2.1. *Sea M una n -variedad diferenciable, $X, Y : M \rightarrow TM$ campos de clase C^2 . Llamamos Φ_t y Ψ_t a los flujos generados por X e Y respectivamente. Entonces tenemos que*

$$\Psi_s \circ \Phi_t = \Phi_t \circ \Psi_s \iff [X, Y] = 0$$

Demostración. Sea $f \in C^2(M, \mathbb{R})$, y $x_0 \in M$. Observamos lo siguiente:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \Phi_t)(x_0) = Df_{\Phi_t(x_0)}(\Phi'_t(x_0)) = Df_{\Phi_t(x_0)}(X(\Phi_t(x_0))) = (L_X f \circ \Phi_t)(x_0)$$

Y análogamente $\frac{d}{dt}(f \circ \Psi_s)(x_0) = (L_Y f \circ \Psi_s)(x_0)$

Luego:

$$\frac{d}{dt} \frac{d}{ds}(f \circ \Psi_s \circ \Phi_t) = \frac{d}{dt} (L_Y f \circ \Psi_s \circ \Phi_t) = L_X(L_Y f \circ \Psi_s) \circ \Phi_t$$

Lo que implica, teniendo en cuenta que $\Psi_0(x_0) = x_0 = \Phi_0(x_0)$, que:

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{d}{ds}(f \circ \Psi_s \circ \Phi_t) - \frac{d}{ds} \frac{d}{dt}(f \circ \Phi_t \circ \Psi_s) \right) \Big|_{s=0, t=0} = (L_X L_Y - L_Y L_X)(f)(x_0) = L_{[X, Y]} f(x_0)$$

Teniendo esto en cuenta, demostremos el teorema:

(\Rightarrow): Si $(\Psi_s \circ \Phi_t) = (\Phi_t \circ \Psi_s)$, entonces por la observación $L_{[X, Y]} f = 0 \forall f \in C^2(M, \mathbb{R})$. En coordenadas locales (z_1, \dots, z_n) , consideramos las funciones $f_i = \pi_i$ (proyecciones sobre la i -ésima coordenada). Para estas funciones obtenemos

$$0 = L_{[X, Y]} f_i = f_i([X, Y]) = [X, Y]_i$$

Por lo tanto, $[X, Y] = 0$

(\Leftarrow): Fijamos $x \in M$ y definimos las siguientes funciones:

$$\eta(s, t) := \Psi_s(\Phi_t(x)), \quad \tau(s, t) := \Phi_t(\Psi_s(t))$$

Para las cuales tenemos que:

$$\frac{d}{ds} \eta(s, t) = Y(\eta(s, t)), \quad \frac{d}{dt} \tau(s, t) = X(\tau(s, t))$$

El objetivo es probar que $\eta = \tau$.

Veamos primero que la función $\lambda(s, t) = \frac{d}{dt} \eta(s, t) - X(\eta(s, t))$ es cero, es decir, probemos primero que $\frac{d}{dt} \eta(s, t) = X(\eta(s, t))$:

En coordenadas locales (z_1, \dots, z_n) :

$$\frac{d}{dt} \frac{d}{ds} \eta = \frac{d}{dt} (Y(\eta(s, t))) = DY_{\eta(s, t)} \left(\frac{d}{dt} \eta(s, t) \right) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla Y_i(\eta(s, t)), \frac{d}{dt} \eta(s, t) \rangle \frac{\delta}{\delta z_i}$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y}{\partial z_i}(\eta(s, t)) \left(\frac{d}{dt} \eta(s, t) \right)_i$$

Observando que como η es C^2 sus derivadas parciales conmutan, y que $\frac{d}{ds}(X(\eta(s, t))) = DX_{\eta(s, t)}(Y(\eta(s, t)))$ tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{ds}(s, t) &= \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} \eta(s, t) - \frac{d}{ds} X(\eta(s, t)) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Y}{\partial z_i}(\eta(s, t)) \left(\frac{d}{dt} \eta(s, t) \right)_i - \frac{\partial X}{\partial z_i}(\eta(s, t)) Y_i(\eta(s, t)) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Y}{\partial z_i}(\eta(s, t)) (\lambda_i(s, t) - X_i(s, t)) - \frac{\partial X}{\partial z_i} Y_i(\eta(s, t)) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Y}{\partial z_i}(\eta(s, t)) (\lambda_i(s, t)) \right) + [X, Y](\eta(s, t)) \end{aligned}$$

Y como $[X, Y] = 0$, obtenemos la siguiente ecuación diferencial de primer orden (dejando t fijo):

$$\frac{d\lambda_t}{ds}(s) = \frac{d\lambda}{ds}(s, t) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Y}{\partial z_i}(\eta(s, t)) (\lambda_i(s, t)) \right)$$

donde la coordenada j -ésima es

$$\frac{d\lambda_j}{ds}(s, t) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Y_j}{\partial z_i}(\eta(s, t)) (\lambda_i(s, t)) \right)$$

Si fijamos t , como $\lambda_t(0) = \lambda(0, t) = X(\Phi_t(x)) - X(\Phi_t(x)) = 0$, por teorema de unicidad de Picard, $\lambda_t(s) = \lambda(s, t) = 0$. Como t es arbitrario, $\lambda \equiv 0$, lo que implica $\frac{d}{dt} \eta(s, t) = X(\eta(s, t))$.

Por otro lado, $\frac{d}{dt} \tau_s(t) = X(\eta(s, t))$. Tenemos entonces:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \eta_s(t) = X(\eta_s(t)), & \eta_s(0) = \Psi_s(x) \\ \frac{d}{dt} \tau_s(t) = X(\eta_s(t)), & \tau_s(0) = \Psi_s(x) \end{cases}$$

Entonces, por unicidad de soluciones, necesariamente $\forall s, \eta_s = \tau_s$. Y por lo tanto, los flujos Ψ y Φ conmutan. □

A continuación un lema en el que se prueba una propiedad del corchete de Lie cuando lo evaluamos en k -formas. Esto será útil para demostrar la relación entre corchete de Lie y corchete de Poisson.

Lema 3.2.1. *Si $X, Y : M \rightarrow TM$ campos y α una k -forma en M , entonces*

$$\iota_{[X, Y]} \alpha = L_X \iota_Y \alpha - \iota_Y L_X \alpha$$

Demostración.

- Para 0-formas esta igualdad es trivial, pues ι_Y evaluado en una 0-forma es 0.

- Si (z_1, \dots, z_n) son coordenadas locales y α es una 1-forma dz_i , tenemos:

$$L_X \iota_Y dz_i - \iota_Y L_X dz_i = (L_X(\iota_Y d + d\iota_Y)z_i - L_X d\iota_Y z_i) - \iota_Y L_X dz_i$$

Como $\iota_Y z_i = 0$, $dL_X = L_X d$, $\iota_Y L_X z_i = 0$ obtenemos

$$= L_X L_Y z_i - \iota_Y dL_X z_i = L_X L_Y z_i - (\iota_Y d + d\iota_Y)L_X z_i - d\iota_Y L_X z_i$$

$$= L_X L_Y z_i L_Y L_X z_i = L_{[X,Y]} z_i = d\iota_{[X,Y]} z_i + \iota_{[X,Y]} dz_i = \iota_{[X,Y]} dz_i$$

- Si α es una k-forma, se puede escribir como suma y producto exterior de 1-formas del tipo dz_i . Luego, por la siguiente propiedad de ι_X

$$\iota_X(dz_i \wedge \beta) = (\iota_X dz_i) \wedge \beta - dz_i \wedge \iota_X(\beta)$$

Se deduce el resultado para cualquier k-forma

□

La siguiente relación es fundamental y marca el vínculo del corchete de Poisson con el corchete de Lie. Como dijimos, el corchete de Poisson detecta cantidades conservadas y el corchete de Lie detecta flujos que conmutan. La relación de ambos corchetes es clave: dos cantidades conservadas inducen flujos que conmutan.

Teorema 3.2.2. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Entonces se tiene que*

$$d\{f, g\} = -\iota_{[X_f, X_g]}\omega = -\omega([X_f, X_g], \cdot)$$

Es decir, el campo Hamiltoniano asociado a $\{f, g\}$, es $X_{\{f, g\}} = -[X_f, X_g]$.

Demostración. Como $d\omega = 0$ y $L_{X_f}\omega = 0 = L_{X_g}\omega$ se tiene

$$\begin{aligned} d\{f, g\} &= dt_{X_g} \iota_{X_f} \omega = L_{X_g} \iota_{X_f} \omega - \iota_{X_g} d\iota_{X_f} \omega \\ &= L_{X_g} \iota_{X_f} \omega - \iota_{X_g} L_{X_f} \omega + \iota_{X_f} \iota_{X_g} d\omega = L_{X_g} \iota_{X_f} \omega \\ &= L_{X_g} \iota_{X_f} \omega - \iota_{X_f} L_{X_g} \omega = -\iota_{[X_f, X_g]}\omega \end{aligned}$$

Pues la última igualdad queda justificada por el lema anterior.

□

Las funciones C^∞ en M con el corchete de Poisson también tienen estructura de álgebra de Lie:

Proposición 3.2.4. *El corchete de Poisson es antisimétrico y cumple la identidad de Jacobi. Es decir, Dadas $f, g, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, se tiene que:*

$$\begin{cases} \{f, g\} = -\{g, f\} \\ \{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0 \end{cases}$$

Y por lo tanto $C^\infty(M, \mathbb{R})$ con el corchete de Poisson conforman un Álgebra de Lie.

Demostración. El hecho de que el corchete sea antisimétrico es inmediato pues la 2-forma simpléctica es antisimétrica.

Luego tenemos

$$\begin{cases} \{ \{f, g\}, h \} = -L_{X_{\{f, g\}}} h \\ \{ \{g, h\}, f \} = -L_{X_f} L_{X_g} h \\ \{ \{h, f\}, g \} = L_{X_g} L_{X_f} h \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \{ \{f, g\}, h \} + \{ \{g, h\}, f \} + \{ \{h, f\}, g \} &= -L_{X_{\{f, g\}}} h - L_{X_f} L_{X_g} h + L_{X_g} L_{X_f} h \\ &= \left((L_{X_g} L_{X_f} - L_{X_f} L_{X_g}) - L_{X_{\{f, g\}}} \right) h \\ &= \left(L_{[X_g, X_f]} - L_{X_{\{f, g\}}} \right) h = 0 \end{aligned}$$

□

Observación 3.2.2. El teorema 3.2.2 implica que existe un morfismo entre los espacios $(C^\infty(M, \mathbb{R}), \{ \cdot, \cdot \})$ y $(\chi^\infty(M), [\cdot, \cdot])$ como álgebras de Lie, dado por la correspondencia

$$f \rightarrow X_f$$

Esta conexión permite distinguir una propiedad fundamental en sistemas Hamiltonianos, que será de vital importancia en la demostración del Teorema de Arnol'd-Liouville:

$$\{f, g\} = 0 \Rightarrow [X_f, X_g] = 0 \Rightarrow \Phi_{X_f} \circ \Phi_{X_g} = \Phi_{X_g} \circ \Phi_{X_f}$$

Donde Φ_{X_f} y Φ_{X_g} son los flujos generados por X_f y X_g respectivamente.

Capítulo 4

Funciones generatrices

El teorema de Darboux nos asegura la existencia de buenas coordenadas locales. En este capítulo mostraremos una forma de hallar explícitamente este tipo de coordenadas en términos de una función que llamaremos función generatriz. Si bien este método no será necesario para las pruebas de los teoremas de Arnol'd-Liouville y coordenadas ángulo-acción (de hecho este capítulo puede ser saltado pues solo se usará para la construcción de coordenadas en el ejemplo 5.1.1), no deja de ser una herramienta muy importante tanto para ejemplos concretos como en la teoría.

La idea consiste en generar un cambio de coordenadas locales $(Q, P) \mapsto (q, p)$ mediante un simplectomorfismo en una $2n$ -variedad simpléctica M , de tal forma que conociendo algunos de los siguientes pares de información: (Q, q) , (Q, p) , (P, q) , (P, p) , podremos expresar a las coordenadas restantes en términos de derivadas parciales de una función generatriz $S(Q, P, q, p)$ con $S : U \subset M \times M \rightarrow \mathbb{R}$. Si alguno de los pares (Q, P) o (q, p) eran coordenadas canónicas, el otro también lo será. Esto muestra cierta plasticidad en el cambio de coordenadas, pues nos permite extender ciertos cambios de coordenadas en algunas variables a coordenadas canónicas locales.

Como veremos en el próximo capítulo en el ejemplo 5.1.1, partiremos de \mathbb{R}^4 con la forma canónica simpléctica y consideraremos un cambio a coordenadas polares en las coordenadas espaciales. Con cierta función generatriz, lograremos deducir quienes son los correspondientes momentos generalizados que deban acompañar a estas nuevas coordenadas espaciales, de tal forma que la expresión de la forma simpléctica en estas nuevas coordenadas también sea canónica. Para ello, en este capítulo también veremos resultados más generales: los cambios de variable mediante simplectomorfismos actuando en variedades simplécticas con la forma canónica, permiten una traducción del Hamiltoniano tal que se preserve la escritura de la forma simpléctica y la estructura algebraica dada por los corchetes de Poisson.

4.1. Cambios de coordenadas simplécticas

Primero veamos que los simplectomorfismos son las funciones que preservan las estructuras de variedades simplécticas y por lo tanto preservan las ecuaciones Hamiltonianas. Para ello veamos primero como se comporta en un fibrado cotangente, que podremos pensar luego como \mathbb{R}^{2n} pues nos ocuparemos de argumentos locales.

Lema 4.1.1. *Sea M variedad diferenciable, $P = T^*M$ su fibrado cotangente y $H : P \rightarrow \mathbb{R}$ un Hamiltoniano. Si θ_0 es la 1-forma de Liouville en P definimos la 1-forma $\Theta_H := \Pi_1^* \theta_0 - H dt$ definida en el espacio de fase extendido $P \times \mathbb{R}_t$, donde $\Pi_1 : P \times \mathbb{R}_t \rightarrow P$*

proyección en P .

Sea un campo W en $P \times \mathbb{R}_t$. Entonces $d\Theta_H(W, \cdot) = 0$ si y solamente si $W = f\tilde{X}_H$ para cierta $f \in C^\infty(P \times \mathbb{R}_t, \mathbb{R})$ donde $\tilde{X}_H = X_H + \frac{\delta}{\delta t}$

Demostración. En coordenadas locales podemos escribir

$$W = \sum_{i=1}^n \left(a_i \frac{\delta}{\delta q_i} + b_i \frac{\delta}{\delta p_i} \right) + c \frac{\delta}{\delta t}$$

Y como $d\Theta_H(W, \cdot) = \left(\Pi^*(d\theta_0) - dH \wedge dt \right)(W, \cdot)$, se tiene

$$\begin{aligned} d\Theta_H(W, \cdot) &= -\Pi^*(\omega_0)(W, \cdot) - DH(W)dt(\cdot) + \frac{\delta}{\delta t}WDH(\cdot) \\ &= \sum_{i=1}^n -(a_i dp_i - b_i dq_i) + \sum_{i=1}^n -\left(\frac{\delta H}{\delta q_i} a_i + \frac{\delta H}{\delta p_i} b_i \right) dt + \sum_{i=1}^n c \left(\frac{\delta H}{\delta q_i} dq_i + \frac{\delta H}{\delta p_i} dp_i \right) \end{aligned}$$

Comparando coeficiente a coeficiente, tenemos que $d\Theta_H(W, \cdot) = 0$ si y solamente si

$$a_i = c \frac{\delta H}{\delta p_i}, \quad b_i = -c \frac{\delta H}{\delta q_i}$$

Es decir, si y solamente si $W = c \sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta H}{\delta p_i} \frac{\delta}{\delta q_i} - \frac{\delta H}{\delta q_i} \frac{\delta}{\delta p_i} + \frac{\delta}{\delta t} \right) = c\tilde{X}_H$

Por lo tanto, tomando $f = c$, $d\Theta_H(W, \cdot) = 0 \Leftrightarrow W = f\tilde{X}_H$

□

Observación 4.1.1. En las condiciones del Lema anterior, observamos que para cada $x \in P \times \mathbb{R}$ existe un subespacio de dimensión 1 (una dirección) en $T_x(P \times \mathbb{R})$ para la cual se anula $d\Theta_H$. Siguiendo estas direcciones (el campo que define W) y dado un punto base inicial, obtenemos una curva solución

$$c(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t), t)$$

Que por el lema, las coordenadas de la curva cumplen $\dot{q}_i = \frac{\delta H}{\delta p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\delta H}{\delta q_i}$. Es decir, $d\Theta_H$ determina las ecuaciones diferenciales Hamiltonianas.

Llamaremos a $c(t)$ **curva característica**

Usaremos la existencia de estas curvas características para probar que las ecuaciones Hamiltonianas son preservadas por simplectomorfismos:

Teorema 4.1.1. Sea $M \subseteq \mathbb{R}_q^n \times \mathbb{R}_p^n$ espacio de fase y $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ Hamiltoniano. Consideramos $\Psi(q, p) = (Q(q, p), P(q, p))$ un simplectomorfismo de M (cambio de coordenadas que preservan la forma simpléctica). Entonces las ecuaciones diferenciales Hamiltonianas $\dot{q}_i = \frac{\delta H}{\delta p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\delta H}{\delta q_i}$, (respecto a la forma canónica simpléctica) en las nuevas coordenadas se transforman a

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\delta K}{\delta P_i} \\ \dot{P}_i = -\frac{\delta K}{\delta Q_i} \end{cases}$$

Donde $K(Q(q, p), P(q, p)) = H(q, p)$ es la expresión de H en $\Psi(M)$

Demostración. Definimos la 1-forma $\alpha := \sum_1^n (p_i dq_i - P_i dQ_i)$ en M . Como Ψ es un simplectomorfismo y la derivada conmuta con el pullback, obtenemos

$$d\alpha = \sum_1^n dp_i \wedge dq_i - \Psi^* \left(\sum_1^n dp_i \wedge dq_i \right) = 0$$

En el espacio de fase extendido $M \times \mathbb{R}$ con Π proyección sobre M , tenemos:

$$-\Pi^*(\alpha) - Hdt = -\Pi^* \left(\sum_1^n p_i dq_i \right) + \Pi^* \left(\sum_1^n P_i dQ_i \right) - Hdt$$

Y despejando:

$$\Pi^* \left(\sum_1^n p_i dq_i \right) - Hdt = \Pi^* \left(\sum_1^n P_i dQ_i \right) - Hdt + \Pi^* \alpha$$

Sean $\Theta_1 = \Pi^* \left(\sum_1^n p_i dq_i \right) - Hdt$, $\Theta_2 = \Pi^* \left(\sum_1^n P_i dQ_i \right) - Hdt$

Entonces, derivando en ambos lados de la igualdad y teniendo en cuenta que $d\alpha = 0$ y $d\Pi^*(\alpha) = \Pi^*(d\alpha)$, obtenemos que $d\Theta_1 = d\Theta_2$

Por lo tanto, $d\Theta_1$ y $d\Theta_2$ definen la misma curva característica, para las cuales sus coordenadas definen las ecuaciones diferenciales Hamiltonianas: $d\Theta_1$ define $c_1(t) = (q_1(t), \dots, p_n(t), t)$ $d\Theta_2$ define $c_2(t) = (Q_1(t), \dots, P_n(t), t)$

donde

$$\dot{q}_i = \frac{\delta H(q, p)}{\delta p_i}, \dot{p}_i = \frac{-\delta H(q, p)}{\delta q_i} \quad y \quad \dot{Q}_i = \frac{\delta H(q, p)}{\delta P_i}, \dot{P}_i = \frac{-\delta H(q, p)}{\delta Q_i}$$

Como $H(q, p) = K(Q, P)$, obtenemos $\dot{Q}_i = \frac{\delta K(P, Q)}{\delta P_i}, \dot{P}_i = \frac{-\delta K(P, Q)}{\delta Q_i}$

□

También se preserva el corchete de Poisson y la determinación del campo Hamiltoniano $f \mapsto X_f$ bajo simplectomorfismos:

Teorema 4.1.2. Sean (P, ω) y (Q, ρ) variedades simplécticas, $F : P \rightarrow Q$ simplectomorfismo. Entonces, para cualesquiera $f, g \in C^\infty(Q, \mathbb{R})$, el pullback F^* satisface: $F^*X_f = X_{F^*f}$ y $F^*({f, g}_Q) = {F^*f, F^*g}_P$

Por lo tanto, el campo Hamiltoniano generado por F^*f es el generado por f visto con el pullback en P y además el Pullback conmuta con los corchetes de Poisson.

Demostración. Recordando que $\omega(X_h, \cdot) = Dh$, $\rho(X_f, \cdot) = Df$,

la primera igualdad se deduce de

$$\begin{aligned} \iota_{F^*X_f}(\omega) &= \iota_{F^*X_f}(F^*\rho) = F^*(\iota_{X_f}(\rho)) = F^*(\rho(X_f, \cdot)) \\ &= F^*(Df(\cdot)) = d(F^*f) = \omega(X_{F^*f}, \cdot) = \iota_{X_{F^*f}}\omega \end{aligned}$$

Y la segunda igualdad se deduce de la primera:

$$F^*({f, g}_Q) = F^*(\rho(X_f, X_g)) = F^*\rho(F^*X_f, F^*X_g) = \omega(X_{F^*f}, X_{F^*g}) = {F^*f, F^*g}_P$$

□

Los últimos dos teoremas permiten considerar a los sistemas Hamiltonianos a menos de cambios de variables por transformaciones canónicas (simplectomorfismos). Es decir, mediante el pullback, podemos traducir la dinámicas a nuevas coordenadas respetando la escritura de la forma simpléctica, la determinación de campos Hamiltonianos y el corchete de Poisson.

4.2. Subvariedades Lagrangianas y funciones generatrices

Como mencionamos en la introducción del capítulo, queremos construir funciones generatrices que definan simplectomorfismos. Si llamamos F al simplectomorfismo, la función generatriz estará definida en el gráfico de F en $M \times M$. Este gráfico además de ser una subvariedad tiene la particularidad de ser *Lagrangiano*. A continuación definiremos este concepto y corroboraremos dicha propiedad sobre el gráfico de F .

Definición 4.2.1. Sea (P, ω) variedad simpléctica, L una subvariedad encajada de P y $I : L \rightarrow P$ la inclusión. Decimos que L es **isotrópico** si $I^*\omega = 0$, y que es **Lagrangiano** si además $\dim L = \frac{1}{2}\dim P$.

Teorema 4.2.1. Sean $(M_1, \omega_1), (M_2, \omega_2)$ variedades simplécticas y $F : M_1 \rightarrow M_2$ difeomorfismo. Entonces:

F es simpléctico sii el gráfico $\Gamma_F = \{(x, F(x)) : x \in M_1\} \subseteq M_1 \times M_2$ es Lagrangiano respecto a la forma $\omega_1 \ominus \omega_2$, definida por

$$(\omega_1 \ominus \omega_2)(a, b)((v_1, u_1), (v_2, u_2)) = \omega_1(a)(v_1, v_2) - \omega_2(b)(u_1, u_2)$$

Demostración. Dado $x \in M_1$, el espacio tangente de $(x, F(x))$ en el gráfico es de la forma $T_{(x, F(x))}\Gamma_F = \{(v, DF(v)) : v \in T_x M_1\}$. La inmersión (inclusión) $I : \Gamma_F \rightarrow M_1 \times M_2$ cumple

$$\begin{aligned} I^*(\omega_1 \ominus \omega_2)(v_1, DF(v_1))(v_2, DF(v_2)) &= \omega_1(v_1, v_2) - \omega_2(DF(v_1), DF(v_2)) \\ &= (\omega_1 - F^*\omega_2)(v_1, v_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $I^*(\omega_1 \ominus \omega_2) = 0 \Leftrightarrow F$ simpléctico □

En las hipótesis del teorema anterior, se tiene que si ω_1 y ω_2 son exactas ($\omega_1 = d\theta_1, \omega_2 = d\theta_2$ para ciertas 1-formas θ_1 y θ_2), entonces $\omega_1 \ominus \omega_2$ también es exacta (y $\omega_1 \ominus \omega_2 = d\Theta$ con $\Theta = \theta_1 \ominus \theta_2$).

Más aún, si $L = \Gamma_F$ variedad Lagrangiana con $I : L \rightarrow M_1 \times M_2$ inmersión, entonces $I^*\Theta$ es cerrada y por lo tanto, por Lema de Poincaré, es localmente exacta. Es decir, que existe una función $C^\infty(U \subseteq L, \mathbb{R})$ tal que su diferencial sea $I^*\Theta \upharpoonright_U$. Esta función está relacionada con la función F original que daba lugar al gráfico L . De hecho, determinar dicha función nos ayudará a “completar” un cambio de coordenadas de tal forma que sea un simplectomorfismo. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 4.2.2. Sean $(M_1, \omega_1), (M_2, \omega_2)$ variedades simplécticas donde ω_1 y ω_2 exactas, $F : M_1 \rightarrow M_2$ simplectomorfismo, y sea $\omega = \omega_1 \ominus \omega_2$ 2-forma exacta en $M_1 \times M_2$, con $\omega = d\Theta$. Si $I : L = \Gamma_F \rightarrow M_1 \times M_2$ inmersión, llamamos **función generatriz** a una función $S \in C^\infty(L, \mathbb{R})$ tal que $-dS = I^*\Theta$.

Observación 4.2.1. Si asumimos (sin pérdida de generalidad) que $\omega_1 = \sum_{i=1}^{i=n} dq_i \wedge dp_i$ y $\omega_2 = \sum_{i=1}^{i=n} dQ_i \wedge dP_i$ en coordenadas (q, p) en M_1 y $(Q, P) = F(q, p)$ en M_2 , podemos conseguir

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \sum_{i=1}^{i=n} p_i dq_i \\ \theta_2 &= \sum_{i=1}^{i=n} P_i dQ_i \end{aligned}$$

con $\Theta = \sum_{i=1}^{i=n} (p_i dq_i - P_i dQ_i)$ tal que $d\Theta = (\omega_1 \ominus \omega_2)$ (o $d(\Theta + \alpha) = (\omega_1 \ominus \omega_2)$ con α 1-forma cerrada en $M_1 \times M_2$).

Luego, por teorema de la función implícita, podemos expresar a S localmente en función de n variables en lugar de $2n$, y generalmente queremos expresar S en una de las siguientes 4 formas: $S(q, Q)$, $S(q, P)$, $S(p, P)$, $S(p, Q)$. Y así, conociendo (o definiendo) $P(q, p)$ o $Q(q, p)$ podemos “completar” el cambio de coordenadas. Explícitamente:

- Para $S(q, Q)$:

$$dS = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\delta S}{\delta q_i} dq_i + \frac{\delta S}{\delta Q_i} dQ_i \right) = -I^* \Theta = \sum_{i=1}^{i=n} (P_i dQ_i - p_i dq_i).$$

Por lo que $p_i = -\frac{\delta S}{\delta q_i}$ y $P_i = \frac{\delta S}{\delta Q_i}$

- Para $S(q, P)$:

$$dS = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\delta S}{\delta q_i} dq_i + \frac{\delta S}{\delta P_i} dP_i \right).$$

Podemos considerar $\tilde{\Theta} = \Theta + \sum_{i=1}^{i=n} d(P_i Q_i) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i dq_i + Q_i dP_i$, ya que $d\Theta = d\tilde{\Theta}$. Luego, como queremos $dS = -I^* \tilde{\Theta} = \sum_{i=1}^{i=n} -p_i dq_i - Q_i dP_i$, tenemos que $p_i = -\frac{\delta S}{\delta q_i}$ y $Q_i = -\frac{\delta S}{\delta P_i}$

- Para $S(p, P)$:

$$dS = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\delta S}{\delta p_i} dp_i + \frac{\delta S}{\delta P_i} dP_i \right)$$

Tomamos $\tilde{\Theta} = \Theta + d(\sum_{i=1}^{i=n} -q_i p_i + Q_i P_i) = \sum_{i=1}^{i=n} -q_i dp_i + Q_i dP_i$, y queremos que $dS = -I^* \tilde{\Theta} = \sum_{i=1}^{i=n} q_i dp_i - Q_i dP_i$.
Por lo tanto $q_i = \frac{\delta S}{\delta p_i}$ y $Q_i = -\frac{\delta S}{\delta P_i}$

- Para $S(p, Q)$:

$$dS = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\delta S}{\delta p_i} dp_i + \frac{\delta S}{\delta Q_i} dQ_i \right)$$

Tomamos $\tilde{\Theta} = \Theta + d(\sum_{i=1}^{i=n} -q_i p_i) = \sum_{i=1}^{i=n} -q_i dp_i - P_i dQ_i$. Luego, para que $dS = -I^* \tilde{\Theta} = \sum_{i=1}^{i=n} q_i dp_i + P_i dQ_i$ se tiene que:
 $q_i = \frac{\delta S}{\delta p_i}$ y $P_i = \frac{\delta S}{\delta Q_i}$

De esta forma, conociendo alguno de los pares (q, Q) , (q, P) , (p, P) o (p, Q) , podemos completar el cambio de coordenadas con un simplectomorfismo definido en términos de una función generatriz S .

Capítulo 5

Integrabilidad

No hay consenso sobre una definición de integrabilidad. En cuestiones generales, entendemos un sistema integrable como aquel gobernado por una ecuación diferencial cuyas soluciones se “pueden escribir”, y aquí es donde ya hay ambigüedad: no hay definiciones precisas para “poder escribir”, ya que podemos considerar “escribir” una solución como una serie convergente, un límite, o una integral. Apuntaremos a lo último, y pensaremos que un sistema integrable es aquel que en ciertas coordenadas, conociendo las condiciones iniciales, la solución pueda escribirse en términos de una integral.

Como vimos, un sistema Hamiltoniano queda determinado por una función de energía que se conserva en las soluciones. Definiremos un sistema Hamiltoniano integrable como aquel que tenga tantas cantidades conservadas independientes como dimensiones de “posición” (si la variedad simpléctica es de dimensión $2n$, serán n cantidades). La idea central es que podremos considerar a estas funciones de energía como coordenadas. Dichas cantidades conservadas también se conocen como *primeras integrales*, pues justamente pueden expresarse en términos de una integral.

En esta sección veremos primero que un sistema Hamiltoniano integrable admite una foliación por toros \mathbb{T}^n como consecuencia inmediata del teorema de Arnol’d-Liouville. Luego veremos que las n coordenadas correspondientes a cantidades conservadas, bajo ciertas hipótesis, se podrán extender a $2n$ coordenadas tales que se preserve la forma simpléctica, en donde cada una de ellas se expresa en términos de una integral. Las llamaremos coordenadas *ángulo-acción*. Más aún, la dinámica en estas coordenadas adpotará una escritura sumamente sencilla.

5.1. Teorema de Arnol’d-Liouville

Definición 5.1.1. Sea $H \in C^\infty(P, \mathbb{R})$ una función Hamiltoniana en la variedad simpléctica (P, ω) de dimensión $2n$.

- $F \in C^\infty(P, \mathbb{R})$ es una **constante de movimiento o cantidad conservada** si se cumple $\{F, H\} = 0$.
- El conjunto $\{F_1, \dots, F_k\}$ de funciones $F_i \in C^\infty(P, \mathbb{R})$ se dice que **está en involución** si $\{F_i, F_j\} = 0 \forall i, j \in \{1, \dots, k\}$.

Si el conjunto $\{x \in P : dF_1(x) \wedge \dots \wedge dF_k(x) = 0\}$ tiene medida de Liouville cero (la inducida por la forma de volumen $\frac{(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \omega^n}{n!}$), decimos que el conjunto $\{F_1, \dots, F_k\}$ es **independiente**.

- El conjunto $\{F_1, \dots, F_k\}$ se dice **Liouville-integrable** si está en involución, es independiente y $k = n$.
- La función H se dice **Liouville-integrable** si existen F_1, \dots, F_n cantidades conservadas Liouville-integrables con $F_1 = H$

Veamos en el siguiente ejemplo que sistemas como los del problema de Kepler son integrables. Más aún, veamos que el procedimiento se puede repetir para funciones con potencial centralmente simétrico.

Ejemplo 5.1.1. *Movimiento en \mathbb{R}^2 con potencial centralmente simétrico*

Este ejemplo obviamente generaliza el problema de Kepler, cuyo potencial es el inducido por la ley de gravitación universal. Consideramos el movimiento de una partícula en \mathbb{R}^2 , por lo tanto el espacio de fase será $M = T^*\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}_q^2 \times \mathbb{R}_p^2$, y la forma simpléctica será la canónica $\omega_0 = dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2$.

La partícula está sujeta a una fuerza inducida por un potencial V que sólo depende del radio: $V \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, $V(q, p) = W(\|q\|)$.

El Hamiltoniano que define la dinámica es la energía mecánica:

$$H(q, p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + W(\|q\|)$$

En la resolución del problema de kepler en 1.1, encontramos otra cantidad conservada: el momento angular. Para esto, con el cambio de coordenadas

$$(q_1, q_2) = (r\cos(\varphi), r\sen(\varphi)), \quad (p_1, p_2) = \dot{r}(r\cos(\varphi), r\sen(\varphi)) + \dot{\varphi}(-r\sen(\varphi), r\cos(\varphi))$$

obtuvimos que la nueva cantidad conservada se escribe como $\ell = r^2\dot{\varphi}$. Lo que en coordenadas cartesianas sería

$$\ell(q, p) = q_1p_2 - q_2p_1$$

Esta cantidad será también una cantidad conservada en problemas con potencial centralmente simétrico: definimos el momento angular L como

$$L(q, p) = q_1p_2 - q_2p_1$$

Observamos que las cantidades H y L Poisson-conmutan:

$$\{H, L\} = \omega_0(X_H, X_L) = \omega_0(\nabla H, \nabla L) = 0$$

Luego, por propiedad 3.2.2 L es una cantidad conservada en las órbitas del flujo generado por H . Para que el conjunto $\{H, L\}$ sea Liouville-integrable, necesitamos que dH y dL sean linealmente independientes salvo en un conjunto de medida cero.

$$\begin{cases} dH = \frac{\partial V}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2} dq_2 + p_1 dp_1 + p_2 dp_2 \\ dL = p_2 dq_1 - p_1 dq_2 - q_2 dp_1 + q_1 dp_2 \end{cases}$$

- Si $dH = 0$, se tiene $(p_1, p_2) = (0, 0)$ y $W'(\|q\|) = 0$. Por lo tanto $H(q, p) = W(\|q\|) = cte$. Los puntos que cumplen esto son un conjunto de medida nula.
- $dL = 0$ solo en el origen
- Si $\lambda dH = dL$ para cierto $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$, se cumple

$$q = \lambda \mathbb{J}p \quad \text{y} \quad p = -\lambda \mathbb{J} \nabla V(q)$$

Por lo tanto $(q_1, q_2) = \lambda^2 \nabla V(q) = \lambda^2 W'(\|q\|)(q_1, q_2)$ y p queda determinado si λ y q fijos. El conjunto de los puntos que cumplen estas condiciones tiene medida nula.

Concluimos que efectivamente el sistema es integrable.

Debido a la simetría central, así como hicimos en el problema de kepler, es conveniente usar coordenadas polares para las coordenadas espaciales:

$$q_1(r, \varphi) = r \operatorname{sen}(\varphi), \quad q_2(r, \varphi) = r \operatorname{cos}(\varphi)$$

Queremos extender estas coordenadas al espacio de fase, de tal forma que se preserve la forma simpléctica. Para esto, consideramos la siguiente función generatriz:

$$S((r, \varphi), (p_1, p_2)) = p_1 r \operatorname{sen}(\varphi) + p_2 r \operatorname{cos}(\varphi)$$

Recordamos que si $\Psi : M \rightarrow M$ es el cambio de coordenadas buscado y Γ_Ψ es el gráfico de Ψ , la función $S : \Gamma_\Psi \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $-dS = I^* \Theta$ (Ver definición 4.2.2).

La función S es del tipo " $S(q, P)$ " vista en 4.2.1, por lo tanto

$$(q_1, q_2) = \left(\frac{\partial S}{\partial p_1}, \frac{\partial S}{\partial p_2} \right), \quad (p_r, p_\varphi) = \left(\frac{\partial S}{\partial r}, \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)$$

Donde corroboramos que se verifica $\left(\frac{\partial S}{\partial p_1}, \frac{\partial S}{\partial p_2} \right) = (r \operatorname{sen}(\varphi), r \operatorname{cos}(\varphi))$

Tenemos:

$$\begin{cases} p_r = p_1 \operatorname{sen}(\varphi) + p_2 \operatorname{cos}(\varphi) = \frac{1}{\|q\|} \langle p, q \rangle \\ p_\varphi = p_1 r \operatorname{cos}(\varphi) - p_2 r \operatorname{sen}(\varphi) = L \end{cases}$$

Por lo tanto tenemos definido el cambio de coordenadas simpléctico:

$$\begin{aligned} \Psi : T^*(\mathbb{R}^+ \times S^1) &\rightarrow T^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \\ (r, \varphi, p_r, p_\varphi) &\mapsto (q_1, q_2, p_1, p_2) \end{aligned}$$

Como $p_1^2 + p_2^2 = p_r^2 + \frac{L^2}{r^2} = p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}$, en las nuevas coordenadas el Hamiltoniano H se escribirá:

$$H \circ \Psi(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2r^2} + W(r)$$

El Hamiltoniano no depende de φ y de la ecuación hamiltoniana se desprende $\dot{p}_\varphi = \dot{L} = 0$. Por lo tanto, $\ell = p_\varphi(0) = p_\varphi(t)$ es una constante de movimiento para $H \circ \Psi$. Esto permite reducir las variables en juego y reescribir la función de energía con un solo grado de libertad: $K_\ell : T^*(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$K_\ell(r, p_r) = \frac{1}{2} p_r^2 + W_\ell(r)$$

donde $W_\ell(r) = W(r) + \frac{\ell^2}{2r^2}$

Observación: esto es exactamente lo que hicimos en el problema de Kepler con la función que habíamos llamado U_ℓ (Ver 1.1).

De igual forma que hicimos en 1.1 podemos hallar una expresión (teórica) para la solución $r(t)$ despejandola de una ecuación integral, pues obtenemos una ecuación diferencial de variables separables: $\dot{r} = p_r = \sqrt{2(h - W_\ell)} \Rightarrow$

$$\int_{r_0}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{2(h - W_\ell(r))}} = t - t_0$$

Y de la ecuación $\dot{\varphi} = \frac{\partial H \circ \Psi}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{r^2} = \frac{\ell}{r^2}$, conociendo r obtenemos φ :

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \ell \int_{t_0}^t \frac{1}{r^2(s)} ds$$

Es decir, a menos de resolver una integral, pudimos hallar expresiones para las soluciones de la ecuación diferencial Hamiltoniana.

En el caso particular del problema de Kepler, podemos remarcar lo siguiente. Si (h, l) es un valor regular de $F = (H, L)$, $F^{-1}(h, l)$ es una subvariedad de dimensión 2. Si la subvariedad es compacta, ya vimos que debe ser $S^1 \times S^1 = \mathbb{T}^2$, pues las órbitas son las que corresponden a aquellas cuya proyección en el plano (q_1, q_2) son elipses. Más aún, son periódicas en \mathbb{T}^2 .

La existencia de estas subvariedades invariantes en el espacio de fases no es estrictamente propio del problema de Kepler. El Teorema de Arnol'd Liouville afirma que esto sucede en general cuando tenemos un sistema integrable: los niveles de energía para valores regulares definen toros \mathbb{T}^n invariantes cuando los niveles de energía definen regiones compactas, y además, existen coordenadas para las cuales en este nivel de energía el flujo solución es lineal.

Teorema 5.1.1. (Arnol'd - Liouville)

Sea (P, ω) una variedad simpléctica de dimensión $2n$ y $\{F_1, \dots, F_n\}$ conjunto de funciones Liouville-integrable. Si $f \in F(P) \subseteq \mathbb{R}^n$ es un valor regular de $F = (F_1, \dots, F_n) : P \rightarrow \mathbb{R}^n$, entonces cada componente compacta y conexa M_f de $F^{-1}(f)$ es difeomorfa a $\mathbb{T}^n = (S^1)^n$.

Más aún, existen coordenadas angulares $[\varphi_1], \dots, [\varphi_n]$ en M_f y frecuencias $\omega_1, \dots, \omega_n \in \mathbb{R}$ tales que el flujo Hamiltoniano generado por $H = F_1$ en M_f tiene la forma:

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(0) + \omega_i t \pmod{2\pi}, \quad t \in \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, n\}$$

Es decir, la dinámica es lineal en cada coordenada angular de M_f .

Demostración. Sea M_f una componente compacta y conexa de $F^{-1}(f)$ y sea $B_\epsilon(f) = \{f' \in \mathbb{R}^n : \|f - f'\| \leq \epsilon\}$ entorno de f . Sea K la componente compacta y conexa de $F^{-1}(B_\epsilon(f))$ que contiene a M_f .

Entonces tenemos lo siguiente:

i Los campos Hamiltonianos $\{X_{F_1}, \dots, X_{F_n}\}$ conforman un conjunto l.i:

Como $dF_1(x) \wedge \dots \wedge dF_n(x) \neq 0$ para $x \in M_f$, los dF_i son l.i. Luego, como $dF_i = \omega(X_{F_i}, \cdot)$, si $X_1 = \sum_{i=2}^n a_i X_{F_i} \Rightarrow dF_1 = \omega(X_{F_1}, \cdot) = \omega(\sum_{i=2}^n a_i X_{F_i}, \cdot) = \sum_{i=2}^n a_i dF_i$, lo que contradice que los dF_i sean l.i.

ii Los campos X_{F_i} son tangentes a los conjuntos de nivel de F , pues:

$$dF_i(X_{F_j}) = \omega(X_{F_i}, X_{F_j}) = \{F_i, F_j\} = 0 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

iii M_f es una n -variedad Lagrangiana:

Como $\dim M_f = n$ por ser preimagen de valor regular, el conjunto $\{X_{F_1}, \dots, X_{F_n}\}$ es una base del tangente. Por lo tanto si $Y = \sum_{i=1}^n y_i X_{F_i}$ y $Z = \sum_{i=1}^n z_i X_{F_i}$ son dos campos cualesquiera en M_f , $\omega(Y, Z) = 0$ por linealidad. Es decir, si $i : M_f \rightarrow P$ inclusión, $i^* \omega \equiv 0$, y por lo tanto M_f Lagrangiana.

iv Los flujos $\Phi_t^k : K \rightarrow K$ asociados a los campos X_{F_k} están definidos para todo tiempo, por teorema de escape de compactos (pues K es compacto).

v Los flujos Φ^k y Φ^j conmutan para todo $k, j \in \{1, \dots, n\}$, es decir, $\Phi_{t_k}^k \circ \Phi_{t_j}^j = \Phi_{t_j}^j \circ \Phi_{t_k}^k$ para tiempos t_k y t_j arbitrarios:

Esto es consecuencia inmediata del Lema 3.2.1, en el que se afirma que los flujos conmutan si $[X_{F_k}, X_{F_j}] = 0$, donde lo segundo se cumple pues $[X_{F_k}, X_{F_j}] = -X_{\{F_k, F_j\}} = 0$

Definimos entonces el mapa $\Psi : \mathbb{R}^n \times M_f \rightarrow M_f$ por

$$\Psi(t_1, \dots, t_n, x) = \Phi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \Phi_{t_n}^n(x)$$

Este mapa está bien definido por (ii), (iii) y (iv), pues los flujos Φ_t^i dejan invariante M_f .

Además, por (v) tenemos que $\Psi_t : M_f \rightarrow M_f$ satisface $\begin{cases} \Psi_0 \equiv Id_{M_f} \\ \Psi_s \circ \Psi_t = \Psi_{s+t} \end{cases}$ Es decir, que Ψ es una acción del grupo de Lie \mathbb{R}^n sobre M_f .

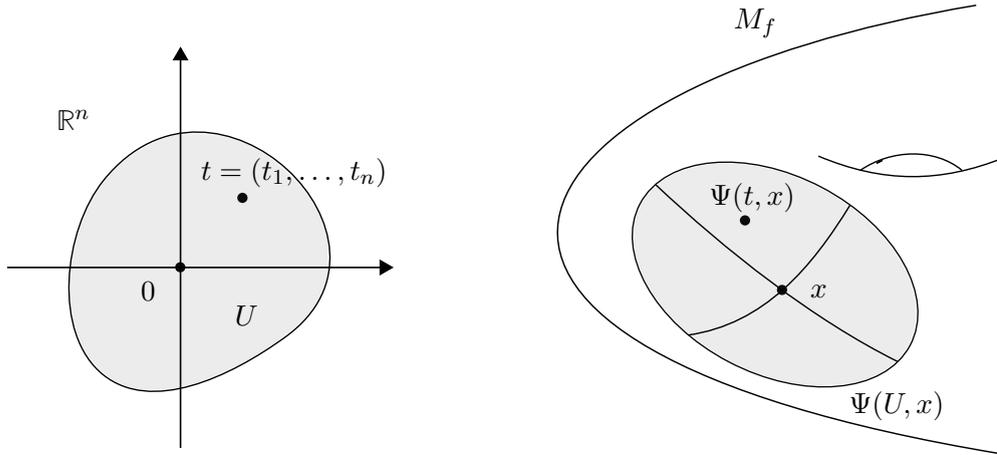


Figura 5.1: Acción de Ψ sobre M_f

Veamos ahora que la acción de este grupo es localmente libre y transitiva (por lo que dado un punto arbitrario $x \in M_f$, el mapa $\Psi_x : \mathbb{R}^n \rightarrow M_f$ es un cubrimiento universal):

Observamos primero que dado cualquier $x \in M_f$, existe un entorno U de $0 \in \mathbb{R}^n$ para el cual $\Psi_x|_U : U \rightarrow M_f$ es un difeomorfismo (basta con ver que $\frac{\delta}{\delta e_i} \Psi_x|_U = X_{F_i}$). Y por la compacidad de M_f podemos conseguir un entorno U que sirva para todos, es decir, que $\forall x \in M_f$ el mapa $\Psi_x|_U$ sea un difeomorfismo, en particular inyectiva y por lo tanto la acción localmente libre.

Fijemos ahora $x \in M_f$, tenemos que $\Psi(\mathbb{R}^n, x)$ es un abierto en M_f , pues dado $y \in \Psi(\mathbb{R}^n, x)$ arbitrario, con $y = \Psi(\hat{t}, x) = \Psi(0, y)$, $\exists \hat{U}$ entorno de $0 \in \mathbb{R}^n$ para el cual $\Psi(\hat{U}, y)$ es abierto, donde $\Psi(\hat{U}, y) = \Psi(\hat{U} + \hat{t}, x) \subseteq \Psi(\mathbb{R}^n, x)$. Además, $M_f \setminus \Psi(\mathbb{R}^n, x)$ también es abierto. Para ver esto, dado $z \in M_f \setminus \Psi(\mathbb{R}^n, x)$, existe \hat{U} entorno de $0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\Psi(\hat{U}, z)$ abierto, el cual necesariamente cumple $\Psi(\hat{U}, z) \subseteq M_f \setminus \Psi(\mathbb{R}^n, x)$, pues si existe $w \in \Psi(\mathbb{R}^n, x) \cap \Psi(\hat{U}, z)$ existirían $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^n$ para los cuales $\Psi(t_1, x) = w = \Psi(t_2, z) \Rightarrow \Psi(t_1 - t_2, x) = z$ que contradice que $z \in M_f \setminus \Psi(\mathbb{R}^n, x)$.

Tenemos entonces que $\Psi(\mathbb{R}^n, x)$ es abierto, cerrado y no vacío en M_f conexo, por lo tanto $\Psi(\mathbb{R}^n, x) = M_f$ y la acción es transitiva.

Definimos

$$\Gamma_x = \text{Stab}(x) = \{t \in \mathbb{R}^n : \Psi_t(x) = x\} < \mathbb{R}^n$$

Como la acción es transitiva este subgrupo no depende de x , pues dado $y \in M_f$, para algún s , $\Psi(s, x) = y \Rightarrow \Gamma_y = \{t \in \mathbb{R}^n : \Psi(t, y) = y\} = \{t \in \mathbb{R}^n : \Psi(t + s, x) = \Psi(s, x)\} = \Gamma_x$. Por lo tanto escribimos a este grupo como Γ .

Como la acción de \mathbb{R}^n es localmente libre, existe entorno U de $0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\Gamma \cap U = \{0\}$. Esto implica que dado $t \in \Gamma$, t es el único punto en $t + U$ que pertenece a Γ , y por lo tanto Γ es un subgrupo discreto.

Observando que Γ es isomorfo al grupo de transformaciones de cubrimiento de \mathbb{R}^n y que el cubrimiento es universal, $\mathbb{R}^n/\Gamma \cong M_f$, pero si $k = \dim(\text{span}_{\mathbb{R}}(\Gamma))$, entonces:

$$\mathbb{R}^n/\Gamma \cong \mathbb{R}^{n-k} \times (\mathbb{R}^k/\Gamma) \cong \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{T}^k$$

Por lo que, como M_f es compacto, necesariamente $k = n$ y $M_f \cong \mathbb{T}^n$

Entonces podemos parametrizar a M_f en n coordenadas “angulares”, pues el mapa Ψ_x induce $\hat{\Psi}_x : \mathbb{R}^n/\Gamma \rightarrow M_f$ difeomorfismo, donde su inversa son las correspondientes coordenadas. Sin embargo queremos normalizar estas coordenadas, es decir, queremos que las coordenadas de M_f sean de la forma $\Phi : M_f \rightarrow [0, 2\pi)^n$, de tal forma que el flujo generado por H sea lineal en cada coordenada.

A continuación usaremos el siguiente **Lema**, cuya demostración se encuentra al final de la prueba:

Si $\Gamma < \mathbb{R}^n$ discreto, $k = \dim(\text{span}_{\mathbb{R}}(\Gamma))$, entonces existen ℓ_1, \dots, ℓ_k vectores l.i tales que $\ell_i \in \Gamma$ y $\Gamma = \text{span}_{\mathbb{Z}}(\ell_1, \dots, \ell_k) = \{\sum_{i=1}^k z_i \ell_i : z_i \in \mathbb{Z}\}$.

Tomamos entonces los vectores $\{\ell_1, \dots, \ell_n\}$ del Lema para Γ (en este caso $k = n$), que resultan ser una base de \mathbb{R}^n y generan la “grilla” por la que se cocienta \mathbb{R}^n . Solo necesitamos un cambio de coordenadas para que esta grilla se vuelva la canónica, es decir, dada por los vectores $2\pi e_i$.

Definimos L como la matriz formada por las columnas $(\ell_1), \dots, (\ell_n)$. L es un isomorfismo tal que $e_i \mapsto \ell_i$. Esto induce un mapa en los cocientes generando también un difeo. Tenemos $\frac{\hat{L}}{2\pi} : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma$. Las coordenadas angulares están dadas por la inversa de $\Lambda = \frac{\hat{L}}{2\pi} \circ \hat{\Psi}_x : \mathbb{T}^n \rightarrow M_f$

Explícitamente, si $x \in M_f$ arbitrario el mapa $\Lambda : \mathbb{T}^n \rightarrow M_f$ está dado por

$$\Lambda([\varphi_1], \dots, [\varphi_n]) = \Psi\left(\sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i \ell_i}{2\pi}, x\right), \quad \varphi_i \in [0, 2\pi)$$

Este mapa, es la restricción de la acción de Ψ_x a un n -cubo determinado por la “grilla” (el dominio fundamental), la cual es biyectiva y por lo tanto un difeomorfismo. Veamos que éste es el cambio de coordenadas que queremos:

Si escribimos al vector $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ como $e_1 = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{2\pi} \ell_i$, y escribimos a $y \in M_f$ como $\Psi(s, x)$ entonces el flujo generado por $H = F_1$ es de la forma

$$\Phi_{t_1}^1(y) = \Psi(t_1 e_1, y) = \Psi\left(\sum_{i=1}^n \frac{t_1 \omega_i}{2\pi} \ell_i, y\right) = \Psi\left(s + \sum_{i=1}^n \frac{t_1 \omega_i}{2\pi} \ell_i, x\right)$$

Podemos escribir a s como $s = \sum_{i=1}^n \frac{\theta_i}{2\pi} \ell_i$, obteniendo que:

$$\Phi_t^1(y) = \Psi\left(\sum_{i=1}^n \frac{t\omega_i + \theta_i}{2\pi} \ell_i, x\right) = \Lambda([t\omega_1 + \theta_1], \dots, [t\omega_n + \theta_n])$$

Por lo que, en las nuevas coordenadas, el flujo generado por H está dado por $[\varphi_i(t)] = [\theta_i + t\omega_i] = [\varphi_i(0) + t\omega_i]$

□

A continuación, la demostración del Lema usado en la prueba:

Lema 5.1.1. *Sea $\Gamma < \mathbb{R}^n$ subgrupo discreto, $k = \dim(\text{Span}_{\mathbb{R}}(\Gamma))$ la dimensión del subespacio vectorial generado por Γ , entonces existen ℓ_1, \dots, ℓ_k vectores l.i tales que $\ell_i \in \Gamma$ y $\Gamma = \text{Span}_{\mathbb{Z}}(\ell_1, \dots, \ell_k) = \{\sum_{i=1}^k z_i \ell_i : z_i \in \mathbb{Z}\}$.*

Demostración. Sea ℓ_1 elemnto no nulo de Γ tal que $d(\ell_1, 0) = d(\Gamma \setminus \{0\}, 0)$ (es decir, tal que no existe otro elemento no nulo estrictamente más cerca del 0. Suponiendo que $k \geq 1$ (si $k = 1$ ℓ_1 ya genera Γ), construiremos el conjunto partiendo de ℓ_1 en etapas, como sigue:

Supongamos que ya conseguimos $\{\ell_1, \dots, \ell_m\}$ con $m < k$ vectores l.i de Γ que generan el subgrupo $\Gamma_m < \Gamma$ de tal forma que si $U_m = \text{Span}_{\mathbb{R}}(\ell_1, \dots, \ell_m)$, se tiene $\Gamma \cap U_m = \Gamma_m$.

Como $\Gamma \setminus \Gamma_m \neq \emptyset$, podemos tomar $\ell \in \Gamma \setminus \Gamma_m$ y definimos $d_\ell = d(\ell, U_m)$. Observamos que por la condición $\Gamma \cup U_m = \Gamma_m$, necesariamente $d \neq 0$. Podemos escribir a ℓ como

$$\ell = a_1 \ell_1 + \dots + a_m \ell_m + s_\ell, \text{ con } s_\ell \in U_m^\perp \text{ y } a_i \in \mathbb{R}$$

Donde $a_1 \ell_1 + \dots + a_m \ell_m$ es la proyección de ℓ sobre U_m , por lo que $d_\ell = \|s_\ell\|$.

Sean $z_i = \lfloor a_i \rfloor$ enteros y $\tilde{\ell} \in \Gamma_m$ tal que $\tilde{\ell} = z_1 \ell_1 + \dots + z_m \ell_m$. Luego:

$$d(\ell, \tilde{\ell}) \leq \sum_{i=1}^m (a_i - \lfloor a_i \rfloor) \|\ell_i\| + \|s_\ell\| \leq \sum_{i=1}^m \|\ell_i\| + d_\ell$$

Definimos entonces $d = \inf\{d_\ell : \ell \in \Gamma \setminus \Gamma_m\} = d((\Gamma \setminus \Gamma_m), U_m)$

Observamos que necesariamente d tiene que ser un mínimo:

Si d no fuera un mínimo, entonces existe una sucesión monótona decreciente $d_{\ell(r)}$ que tienda a d_ℓ asociada a vectores $\ell(r) \in \Gamma_m$ con $r \in \mathbb{N}$. Por lo visto esto implica que $\ell(r) - \tilde{\ell}(r) \in B := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \sum_{i=1}^m \|\ell_i\| + d + 1\}$ a partir de cierto r . Como B es compacto, Γ discreto y $\ell(r) - \tilde{\ell}(r) \in \Gamma$, la sucesión $\ell(r) - \tilde{\ell}(r)$ necesariamente se estabiliza. Sin embargo, esto implica que $s_\ell(r)$ se estabilice, y como $\|s_\ell(r)\| = d_{\ell(r)}$, la sucesión $d_{\ell(r)}$ se estabiliza, contradiciendo la monotonía.

Definimos ℓ_{m+1} como un elemento de $\Gamma \setminus \Gamma_m$ para el cual se alcanza el mínimo $d_{\ell_{m+1}} > 0$. Por construcción $\{\ell_1, \dots, \ell_{m+1}\}$ es l.i.

Falta ver que si $\Gamma_{m+1} = \text{Span}_{\mathbb{Z}}(\ell_1, \dots, \ell_{m+1})$ y U_{m+1} el \mathbb{R} -subespacio generado, entonces $\Gamma \cap U_{m+1} = \Gamma_{m+1}$:

Dado $\ell \in \Gamma \cap U_{m+1}$, éste se escribe de forma única como

$$\ell = p + a \ell_{m+1} \text{ con } p \in U_m \text{ y } a \in \mathbb{R}$$

Si $z = \lfloor a \rfloor \in \mathbb{Z}$, el vector $\ell - z \ell_{m+1}$ pertenece a $\Gamma \cap U_{m+1}$ y cumple que su distancia a U_m es $(a - z) d_{\ell_{m+1}}$ con $(a - z) \in [0, 1)$. Esto implica que necesariamente $(a - z) = 0$ y por lo tanto a es un entero, pues si $(a - z) \neq 0$:

$$(\ell - z \ell_{m+1}) \in \Gamma \setminus \Gamma_m \Rightarrow (a - z) d_{\ell_{m+1}} \geq d((\Gamma \setminus \Gamma_m), U_m) = d_{\ell_{m+1}}$$

que contradice $(a - z) \in (0, 1)$.

Por lo tanto, dado $\ell \in \Gamma \cap U_{m+1}$, se tiene que

$$p = \ell - a \ell_{m+1} \in \Gamma_m \Rightarrow p \in \text{Span}_{\mathbb{Z}}(\ell_1, \dots, \ell_m) \text{ y } \ell \in \text{Span}_{\mathbb{Z}}(\ell_1, \dots, \ell_{m+1})$$

Repitiendo el procedimiento hasta llegar a $m = k$ se obtiene la tesis. □

5.2. Coordenadas Ángulo-Acción

Hemos visto que si $F = (f_1, \dots, f_n)$ es una función de la variedad P a \mathbb{R}^n donde las funciones f_i son las cantidades conservadas, toda componente conexa y compacta de la preimagen de un valor regular de F , que llamamos $M_{\tilde{f}}$, resulta topológicamente un toro \mathbb{T}^n . Veremos en esta sección que en un entorno de $M_{\tilde{f}}$, el espacio de fase admite una foliación por toros, cada uno de ellos asociado a un nivel de energía F . Más aún, construiremos un simplectomorfismo de este entorno con $\mathbb{T}^n \times \tilde{U}$, donde $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto simplemente conexo. Las coordenadas correspondientes a este simplectomorfismo, permitirán expresar la dinámica de forma extremadamente sencilla: el flujo Hamiltoniano será lineal en las variables angulares del toro, y constante en las variables de \tilde{U} , que llamaremos variables de acción.

Ejemplo 5.2.1. Oscilador armónico

Como vimos en 2.1.1, podemos expresar el Hamiltoniano en este sistema como

$$H(q, p) = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2), \quad \omega > 0 \text{ cte}$$

Donde las soluciones del sistema son rotaciones con velocidad angular constante ω .

Nos interesa estudiar la dinámica en los niveles de energía asociados a valores regulares. En este caso, tomamos $h > 0$, y el espacio de fase a considerar es $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ y la forma simpléctica es la canónica $\omega = dq \wedge dp$. Las órbitas deben estar en conjuntos de nivel de H , es decir, en circunferencias de radio $\sqrt{2h/\omega}$. Esto genera una foliación por círculos, donde cada hoja corresponde a un valor de energía distinto.

En la resolución que hicimos en 2.1.1, observamos que podíamos describir cada momento de las trayectorias en términos de las coordenadas (h, θ) : la función h determina el nivel de energía, y θ el ángulo correspondiente en el círculo. Veamos como hacer esto con más cuidado de tal forma que el cambio de coordenadas sea simpléctico.

Una idea natural, que resultará localmente un simplectomorfismo, es describir la dinámica en términos de *tiempo* τ y *energía* h . Es decir, la coordenada h nos indica el nivel de energía y τ nos indica el tiempo transcurrido de la solución fijando un comienzo $\tau = 0$. Definir la dinámica en estos términos resulta trivial, pues las ecuaciones diferenciales obtendrán la forma

$$\dot{\tau} = 1, \quad \dot{h} = 0$$

Para definir un punto de partida en cada conjunto de nivel, basta considerar una variedad transversal a las circunferencias, por ejemplo, la semirrecta $(0, p)$ con $p > 0$. Fijado h , el punto de partida para la solución en ese conjunto de nivel será

$$(q_0, p_0) = \left(0, \sqrt{2h/\omega}\right)$$

En función de este punto de partida, las soluciones se escriben como

$$\begin{cases} p(t, q_0, p_0) = -q_0 \operatorname{sen}(\omega t) + p_0 \operatorname{cos}(\omega t) \\ q(t, q_0, p_0) = q_0 \operatorname{cos}(\omega t) + p_0 \operatorname{sen}(\omega t) \end{cases}$$

Por lo tanto, en función de (h, τ) :

$$q(\tau, h) = \sqrt{2h/\omega} \operatorname{cos}(\omega \tau), \quad p(\tau, h) = \sqrt{2h/\omega} \operatorname{sen}(\omega \tau)$$

Se verifica que el cambio de coordenadas es simpléctico (preserva la forma canónica):

$$\begin{aligned} dq &= -\sqrt{2h}\sqrt{\omega}\operatorname{sen}(\omega\tau)d\tau + \frac{\sqrt{1/\omega}}{\sqrt{2h}}\cos(\omega\tau)dh \\ dp &= \sqrt{2h}\sqrt{\omega}\cos(\omega\tau)d\tau + \frac{\sqrt{1/\omega}}{\sqrt{2h}}\operatorname{sen}(\omega\tau)dh \\ \Rightarrow d(q(\tau, h)) \wedge d(p(\tau, h)) &= d\tau \wedge dh \end{aligned}$$

Sin embargo, estas no pueden ser coordenadas globales: no hay biyectividad debido a la periodicidad de las órbitas. De hecho, acabamos de construir un cubrimiento

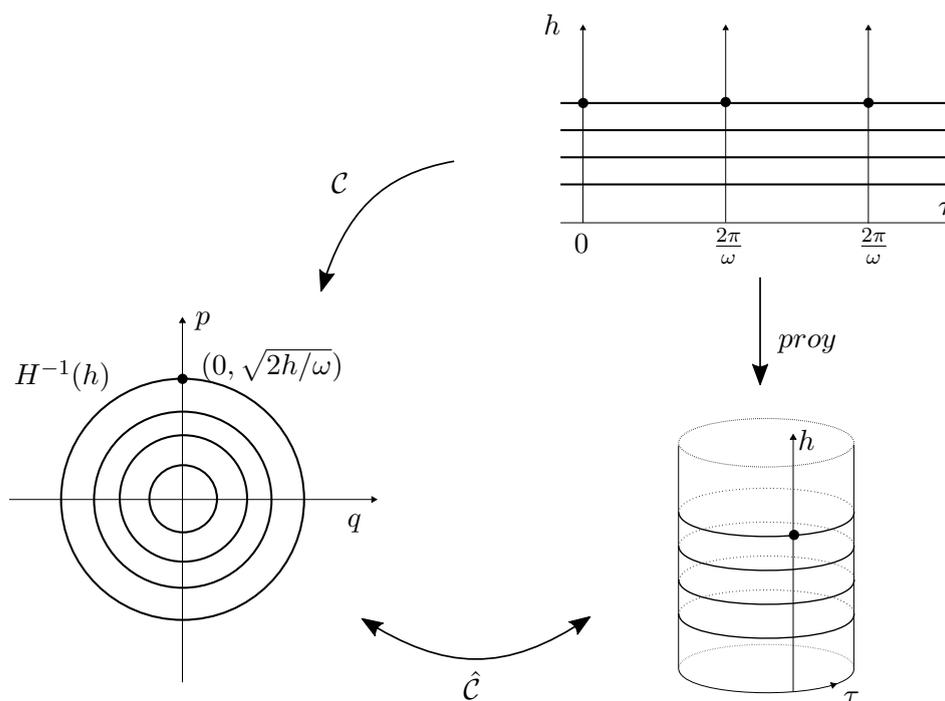
$$\mathcal{C} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

$$(\tau, h) \mapsto (q(h, \tau), p(h, \tau)) = \left(\sqrt{2h/\omega}\cos(\omega\tau), \sqrt{2h/\omega}\operatorname{sen}(\omega\tau) \right)$$

El mapa \mathcal{C} es $\frac{2\pi}{\omega}$ periódico en la variable τ . Esto permite considerar el mapa inducido

$$\hat{\mathcal{C}} : \frac{\mathbb{R}}{(2\pi/\omega)\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow M$$

Que sí resulta un simplectomorfismo.



Estas casi son las coordenadas *ángulo-acción* que buscamos. La diferencia está en que queremos escribir una coordenada como un ángulo en $\mathbb{T}^1 = \mathbb{S}^1 = \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$. Para esto, basta con reescalar la variable τ construida de tal forma que el cambio sea simpléctico. Consideramos el siguiente mapa

$$\mathcal{D} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

$$(\tau, h) \mapsto (\varphi, I) = (\omega\tau, h/\omega)$$

El mapa es un difeomorfismo del espacio de cubrimiento y resulta simpléctico:

$$d\varphi(\tau, h) \wedge dI(\tau, h) = \omega d\tau \wedge \frac{1}{\omega} dh = d\tau \wedge dh$$

De nuevo, tenemos que $\mathcal{C} \circ \mathcal{D}^{-1}$ es 2π periódico en la variable φ por lo que induce un mapa en el cociente. Por lo tanto, conseguimos un simplectomorfismo en el espacio cociente

$$\mathcal{C} \circ \mathcal{D}^{-1} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow M$$

El Hamiltoniano en estas coordenadas es $h([\varphi], \tau) = I\omega$ y las ecuaciones diferenciales son

$$[\dot{\varphi}] = \omega, \quad \dot{I} = 0$$

Ejemplo 5.2.2. *Péndulo planar sin rozamiento*

Como vimos en 2.2.1, el espacio de fase del péndulo es el anillo $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, la forma simpléctica es $d\theta \wedge dp$ y el Hamiltoniano H está dado por

$$H(\theta, p) = \frac{p^2}{2} - \cos(\theta)$$

Si $h \in (-1, 1)$, h es un valor regular y las curvas de nivel están dadas por $p = \pm \sqrt{2(h + \cos(\theta))}$. Topológicamente son círculos (pueden ser 1-variedades compactas).

Fijado uno de estos círculos, al igual que en el oscilador armónico, podemos definir variables *tiempo-energía* en el espacio de cubrimiento del anillo, que también resultaran localmente un simplectomorfismo. Sin embargo, a la hora de considerar el cociente para conseguir un simplectomorfismo global en el entorno del círculo seleccionado, hay que tener en cuenta que, a diferencia del oscilador armónico, los períodos de las órbitas dependen de la energía h . En el oscilador los períodos de todas las órbitas eran $T = 2\pi/\omega$. En el caso del péndulo, como $\frac{d\theta}{dt}(t) = p$, se tiene $\frac{d\theta}{d\theta}(\theta) = 1/p$. Integrando obtenemos una expresión para el período en función de h :

$$T(h) = 2 \int_{\theta_0^-(h)}^{\theta_0^+(h)} \frac{d\theta}{\sqrt{2(h + \cos(\theta))}}$$

Donde θ_0^- y θ_0^+ son las raíces de $H(\theta, 0) = h$.

Para conseguir coordenadas globales simplécticas la idea será la siguiente: a partir de las coordenadas *tiempo-energía* definidas en el espacio de cubrimiento, definiremos un simplectomorfismo allí de tal forma que normalice todos los períodos. Esta idea es esencial en la demostración general para la existencia de este tipo de coordenadas (5.2.1). Con la normalización de los períodos sí podremos cocientar y recuperar el anillo. Haremos esto con cuidado de tal forma que con este cociente, consigamos las coordenadas *ángulo-acción*.

Para la construcción de las coordenadas tiempo y energía, consideramos como tiempo 0 en cada círculo de energía h al punto de corte con la subvariedad transversal dada por la parametrización $(0, p)$. El punto de corte en el círculo de energía h es $(\theta, p) = (0, \sqrt{2(h + 1)})$. Si Φ_t^H es el flujo Hamiltoniano, definimos

$$\mathcal{C} : \mathbb{R} \times (-1, 1) \rightarrow M$$

$$\mathcal{C}(\tau, h) = \Phi_\tau^H \left(0, \sqrt{2(h + 1)} \right)$$

El mapa \mathcal{C} es un cubrimiento y (τ, h) son coordenadas en el espacio de cubrimiento tales que localmente \mathcal{C} es un simplectomorfismo. Es decir, el mapa \mathcal{C}^{-1} es una carta local que

preserva la forma simpléctica. Si definimos la relación de equivalencia $(\tau, h) \sim (\tau + T(h), h)$ y consideramos el cociente de $\mathbb{R} \times (-1, 1)$ bajo esa relación, conseguimos un difeomorfismo \mathcal{C} , que simplemente es la correspondencia $[(\tau, h)] \leftrightarrow (\theta, p)$. Sin embargo, con este cociente las variables τ y φ dejan de ser “independientes” por lo que la ecuación diferencial no tendrá la escritura sencilla que buscamos.

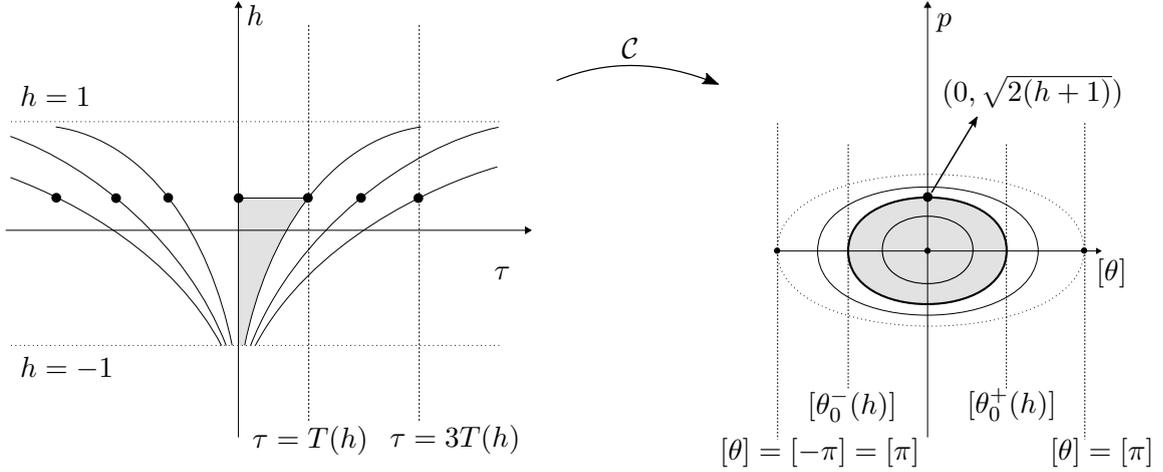


Figura 5.2: Cubrimiento por coordenadas tiempo-energía

Construiremos un symplectomorfismo $\mathcal{D} : \mathbb{R} \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \times A$ con A un intervalo de \mathbb{R} de tal forma que se normalicen los períodos. Definimos el difeomorfismo

$$\varphi(\tau, h) = \frac{2\pi}{T(h)}\tau$$

La variable acción I tiene que depender sólo de h y que a su vez el cambio de coordenadas sea simpléctico, es decir, se deberá cumplir $d\varphi \wedge dI = d\tau \wedge dh$. En función de esto, como $\frac{\partial I}{\partial \tau} = 0$, dicha condición se reduce a

$$\frac{\partial I}{\partial h} = \frac{T(h)}{2\pi}$$

Por lo tanto

$$I(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^h T(\tilde{h}) d\tilde{h}$$

Observamos que como $\frac{\partial I}{\partial h} > 0$, I es un difeomorfismo $(-1, 1) \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}$, y el hecho de que la forma simpléctica se conserve implica que el mapa \mathcal{D} dado por $(\tau, h) \mapsto (\varphi, I)$ sea un difeomorfismo simpléctico. Luego \mathcal{D} induce un symplectomorfismo $\hat{\mathcal{D}}$ en los cocientes. Ya normalizados los períodos, tenemos

$$\hat{\mathcal{C}} \circ \hat{\mathcal{D}}^{-1} : \mathbb{S}^1 \times A \rightarrow M$$

Un symplectomorfismo, cuya inversa corresponde a las coordenadas *ángulo-acción*: La función Hamiltoniana en estas coordenadas es $H(I)$ (la función inversa de $I(h)$) y la ecuación Hamiltoniana se expresa como

$$[\dot{\varphi}] = \left[\frac{\partial h}{\partial I} \right] = \left[\frac{2\pi}{T(h)} \right] = \omega(I), \quad \dot{I} = 0$$

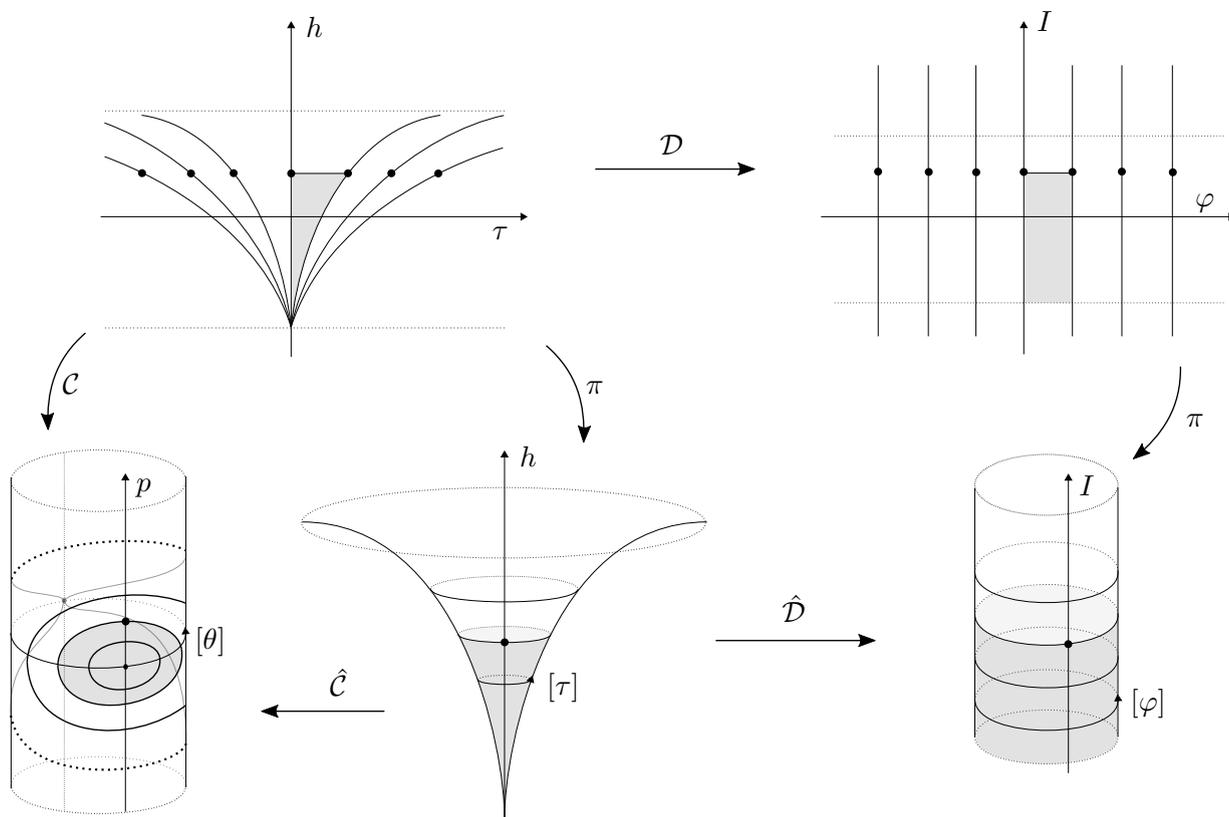


Figura 5.3: Construcción de coordenadas ángulo-acción

Por lo que fijado un nivel de energía, el flujo es lineal en la curva de nivel.

Observación: $2\pi I(h) = \int_{-1}^h T(\tilde{h}) d\tilde{h}$ es el área encerrada bajo la curva $T(h)$ en el espacio (τ, h) . Es decir, es el área del conjunto $\{(\tau, h) : h \in (-1, h), \tau \in (0, T(h))\}$. Como \mathcal{C} es un simplectomorfismo restringido a este dominio, preserva área. Este conjunto vía \mathcal{C} es

$$\left\{ (\theta, p) : \theta \in \mathbb{S}^1, p \in [-\sqrt{2(h + \cos(\theta))}, +\sqrt{2(h + \cos(\theta))}] \right\}$$

El conjunto está delimitado por la curva $\gamma(h) = \{(\theta, p) : H(\theta, p) = h\}$. Por lo tanto, como la forma de área es $pd\theta$

$$I(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(h)} pd\theta$$

En otras palabras, la variable de acción se escribe como la integral de la 1-forma tautológica sobre la curva cerrada simple asociada al nivel de energía. En la observación 5.2.1 veremos que en general podemos escribir a las coordenadas acción de esta forma.

Para la construcción de las coordenadas, veremos que el teorema de Arnol'd-Liouville vale en un entorno de la variedad tórica hallada y luego, siguiendo la idea de los ejemplos presentados, generaremos las coordenadas tiempo-energía para pasar a las ángulo-acción.

En la literatura podemos encontrar el siguiente teorema como parte del Teorema de Arnol'd-Liouville. La demostración aquí presentada es una conjugación de lo expuesto en [KD18] y [Fas99].

Teorema 5.2.1. (Coordenadas Ángulo-Acción)

Sea (P, ω) una $2n$ -variedad simpléctica, $\{F_1, \dots, F_n\}$ conjunto Liouville-integrable, $F := (F_1, \dots, F_n)$ y $\tilde{f} \in F(P)$ valor regular.

Entonces toda componente conexa $M_{\tilde{f}} \in F^{-1}(\tilde{f})$ tiene un entorno $U \in P$ (con $M_{\tilde{f}} \in U$) que admite coordenadas de acción $I_k : U \rightarrow \mathbb{R}$ y coordenadas angulares $[\varphi_k] : U \rightarrow S^1$ para $k \in \{1, \dots, n\}$, tales que:

- La forma simpléctica ω en estas coordenadas se escribe $\omega = \sum_1^n d\varphi_k \wedge dI_k$
- Si $I = (I_1, \dots, I_n)$, la ecuación dif. Hamiltoniana ($H = F_1$) se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{I}_k = 0 \\ [\dot{\varphi}_k] = \omega_k(I) \end{cases}$$

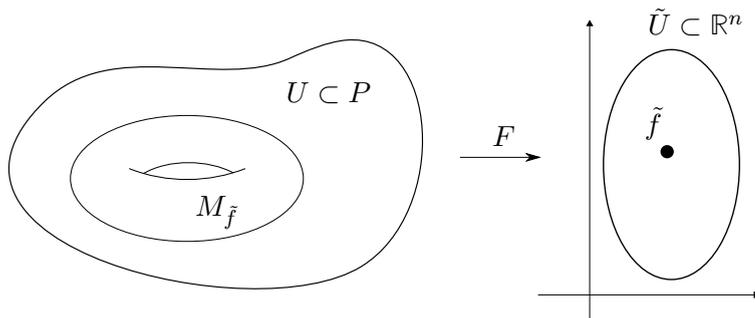
Demostración. Por el teorema anterior, ya tenemos coordenadas angulares en un toro $M_{\tilde{f}}$. La idea de la prueba es mostrar que en un entorno de $M_{\tilde{f}}$ podemos encontrar una foliación por toros donde cada toro corresponda a un valor regular distinto. Las coordenadas de acción nos indicarán en que toro se encuentra un punto, y las coordenadas angulares en qué lugar del toro.

La estructura de la prueba puede ordenarse en las siguientes etapas:

1. Observar que existe un entorno U del toro $M_{\tilde{f}}$ para el cual DF sobreyectivo. Esto implicará que todo elemento de este entorno vivirá, por la acción del flujo Hamiltoniano, en una sección M_f difeomorfa a un toro \mathbb{T}^n .
2. Encontrar una variedad transversal N a todos los toros del entorno U hallado, de dimensión n y difeomorfa a un entorno simplemente conexo \tilde{U} de \tilde{f} . Si consideramos a U suficientemente chico, tenemos que U es difeomorfo a $M_{\tilde{f}} \times N(\tilde{U})$.
3. Generar coordenadas locales tomando de referencia los puntos bases dados por N , que llamaremos coordenadas tiempo-energía.
4. Deformar a N para que además de ser transversal a los toros, sea Lagrangiana. Con el nuevo mapa N , las coordenadas construidas serán localmente canónicas.
5. A partir de las coordenadas halladas, construir coordenadas globales ángulo-acción en U , es decir, un simplectomorfismo $\mathbb{T}^n \times V \longleftrightarrow U$, donde $V \subseteq \mathbb{R}^n$.

1) Que \tilde{f} sea valor regular no implica que exista un entorno de valores regulares alrededor de \tilde{f} . Sin embargo, como $M_{\tilde{f}}$ es compacto, sí podemos conseguir un entorno \tilde{U} de \tilde{f} de tal forma que si U es la componente conexa de $F^{-1}(\tilde{U})$ que contiene a $M_{\tilde{f}}$, entonces U está formado por puntos regulares de F . Una forma rápida de ver esto es razonando por absurdo: si no existiera tal \tilde{U} , para todo entorno compacto U de $M_{\tilde{f}}$ encontramos un

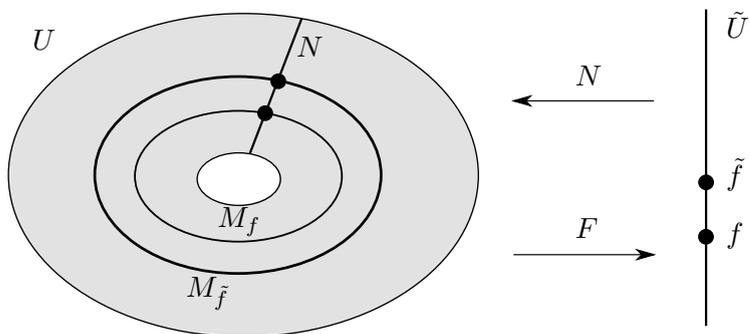
punto no regular. Conseguiríamos una sucesión de entornos compactos U_n decrecientes y puntos no regulares $p_n \in U_n$ tales que $F(p_n) \rightarrow_n \tilde{f}$. Esto implica que la sucesión tiene un punto de acumulación en $M_{\tilde{f}}$ que por continuidad tiene que ser no regular, llegando a un absurdo.



Por lo tanto, conseguimos U entorno de $M_{\tilde{f}}$ tal que si $x \in U$, $D_x F$ sobreyectivo. Observamos que esta es la hipótesis necesaria para el teorema de Arnol'd-Liouville y por lo tanto para construir coordenadas angulares, es decir, si $f \in \tilde{U}$, M_f es un toro de dimensión n .

2) Buscamos una subvariedad N de dimensión n que sea trasversal a los toros, de tal forma que podamos considerar a los cortes de N con los toros como los puntos de partida, los “ángulos” 0, y que movernos por N sea equivalente a elegir un toro, Es decir, buscamos

$$N : \tilde{U} \rightarrow U \text{ tal que } F \circ N = Id_{\tilde{U}}$$



Dado $x_0 \in M_{\tilde{f}}$ consideramos los campos ψ^i generados por ∇F_i en un entorno de x_0 (los gradientes están bien definidos localmente mediante una carta local, aunque dependen de la carta). Éstos generan el subespacio complementario al generado por $\{X_{F_1}, \dots, X_{F_n}\}$ en el espacio tangente.

Definimos $G : B(0, \epsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow U$ por $G(t_1, \dots, t_n) = \psi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \psi_{t_n}^n(x_0)$. Como $\frac{\delta G}{\delta t_i}(0, \dots, 0) = \nabla F_i$ y $\{\nabla F_1, \dots, \nabla F_n\}$ es un conjunto *l.i.*, si ϵ suficientemente chico, G es un difeomorfismo sobre su imagen. Sea $\zeta : B(0, \epsilon) \rightarrow \tilde{U}$ definida por $\zeta := F \circ G$, dado $t \in B(0, \epsilon)$, $D_t(\zeta) = D_{G(t)}F \cdot D_tG$. En coordenadas locales, en $t = 0$, podemos ver esto en formato matricial como

$$D_{G(0)}F = \begin{pmatrix} \nabla F_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla F_n(x_0) \end{pmatrix}, D_0G = (D_{G(0)}F)^\top \Rightarrow D_0(\zeta) \text{ invertible.}$$

La condición de tener diferencial invertible es abierta, por lo que achicando ϵ , U y \tilde{U} (mantendremos la notación por comodidad) podemos asumir que $\zeta : B(0, \epsilon) \rightarrow \tilde{U}$ es un difeomorfismo. Definimos $N : \tilde{U} \rightarrow U$ como $N(f) := G \circ \zeta^{-1}(f)$. Se tiene que N es un encaje y que cumple $F \circ N = Id_{\tilde{U}}$, pues si $f = \zeta(t)$,

$$F \circ N(f) = F(N(\zeta(t))) = F \circ G(t) = \zeta(t) = f$$

3) Ya tenemos una subvariedad inmersa parametrizada con N que es transversal a los toros, y por construcción, dado $f \in \tilde{U}$, $N(\tilde{U}) \cap M_f = N(f)$ es un punto que tomaremos de referencia para construir las coordenadas.

Al igual que en el teorema de Arnol'd-Liouville, si Φ^i son los flujos asociados a X_{F_i} , definimos el mapa $\Psi : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow U$ por

$$\Psi(t_1, \dots, t_n, x) = \Phi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \Phi_{t_n}^n(x).$$

Como habíamos visto, esto genera una acción localmente libre de \mathbb{R}^n sobre $M_{F(x)}$. Veamos que esta acción restringida a $\mathbb{R}^n \times N(\tilde{U})$ genera coordenadas locales: Definimos

$$\mathcal{C} : \mathbb{R}^n \times \tilde{U} \rightarrow U, \quad (t, f) \mapsto \Psi(t, N(f))$$

Tenemos que

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t_i}(t, f) &= X_{F_i}(\Psi(t, N(f))) \\ \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial f_i}(t, f) &= \frac{\partial(\Psi_t \circ N)}{\partial f_i}(f) \end{cases}$$

Como $\Psi_t \circ N$ sigue siendo una variedad transversal, se cumple que $\{X_{F_1}, \dots, X_{F_n}, \frac{\partial \Psi_t \circ N}{\partial f_1}, \dots, \frac{\partial \Psi_t \circ N}{\partial f_n}\}$ es una base del tangente en $\Psi_t \circ N(f)$. Entonces, el mapa es un difeomorfismo local.

Conseguimos entonces coordenadas locales (t, f) en un entorno de un punto de U , que llamaremos coordenadas **tiempo-energía**. Más aún, como veremos adelante, podemos tomar estas coordenadas de tal forma que (si consideramos la 2-forma canónica en $\mathbb{R}^n \times \tilde{U}$) la función \mathcal{C} es simpléctica, y por lo tanto la escritura de ω en estas coordenadas en un entorno de U es la canónica.

Estas coordenadas, como hemos visto en ejemplos, son las que responden a la intuición al observar diagramas de fase: las coordenadas de energía f nos sitúan en determinado nivel de energía (conjunto de nivel de F), y las coordenadas temporales nos indica el tiempo por el que debemos fluir en las direcciones X_{F_i} .

Recordamos que el estabilizador de la acción transitiva de \mathbb{R}^n en cada toro M_f es

$$\Gamma_f = \{t \in \mathbb{R}^n : \Psi(t, x) = x, \quad x \in M_f\}$$

Si fijamos $x \in M_f$, tenemos

$$\Gamma_f = \mathbb{Z} \langle \ell_1(x), \dots, \ell_n(x) \rangle$$

Donde $\{\ell_1(x), \dots, \ell_n(x)\}$ base de \mathbb{R}^n como en el lema 5.1.1. Como $\ell_i(x)$ sólo depende de $F(x)$, escribimos

$$\Gamma_f = \mathbb{Z} \langle \tilde{\ell}_1(f), \dots, \tilde{\ell}_n(f) \rangle$$

donde $\tilde{\ell}_i \circ F(x) = \ell_i(x)$

Como vimos en la demostración del teorema de Arnol'd-Liouville, los vectores $\tilde{\ell}_i(f)$ definen una matriz $L(f)$ que a su vez induce un mapa $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $e_i \rightarrow \tilde{\ell}_i(f)$. Esto induce un mapa en los cocientes

$$\frac{\hat{L}}{2\pi} : \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n / \Gamma_f$$

El mapa Ψ también induce un mapa definido en el cociente \mathbb{R}^n / Γ_f . Finalmente conseguimos el mapa $\hat{\Psi} \circ \frac{\hat{L}}{2\pi}(f)$:

$$\mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n / \Gamma_f \longrightarrow M_f$$

Con este mapa construimos las coordenadas angulares en 5.1.1. Si procedemos de igual forma, tomando en cada toro a $N(f)$ de punto base, cada $y \in U$ puede ser escrito como

$$([\varphi], f) \mapsto y = \Psi\left(\sum_1^n \frac{\varphi_i}{2\pi} \tilde{\ell}_i(f), N(f)\right)$$

Donde los ángulos $[\varphi_i]$ corresponden a una posición en el toro \mathbb{T}^n .

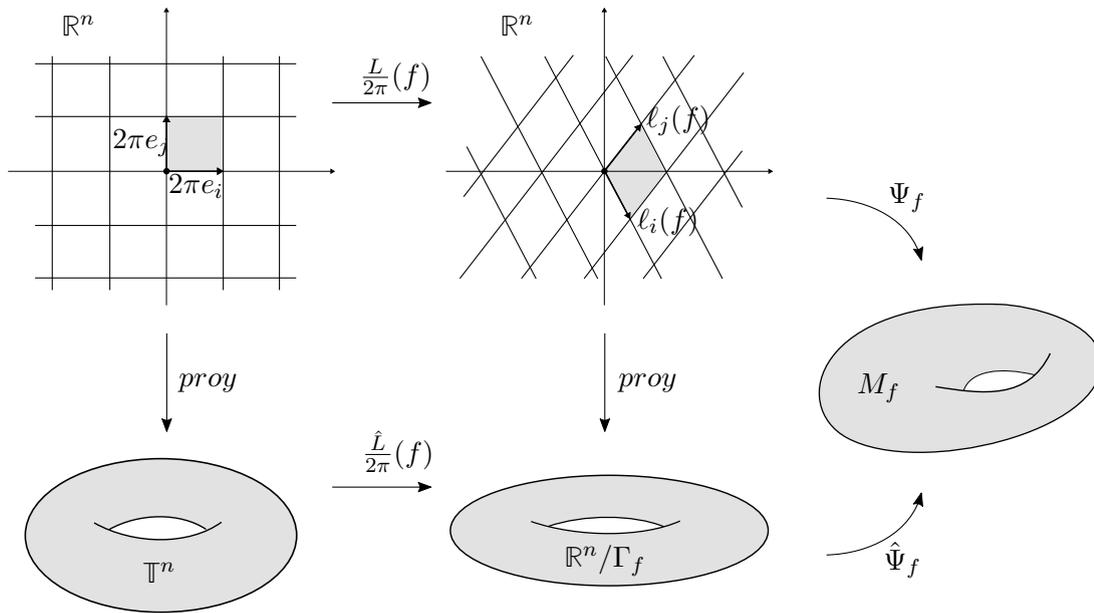


Figura 5.4: Construcción de coordenadas angulares

Sin embargo, surgen problemas: En primer lugar, estas coordenadas en general no son canónicas. Y en segundo lugar, pasar a coordenadas angulares implica una normalización de los períodos a través de $L(f)$. Hay que ver que esta matriz varía diferenciablemente.

Si bien estas serán las coordenadas angulares de U , y $([\varphi], f)$ sí son coordenadas globales, no son canónicas, pues al normalizar las variables angulares hay que adaptar el resto de variables para que preserven la forma simpléctica. Estas coordenadas ajustadas serán las que llamamos coordenadas de acción, que definiremos en 5).

Veamos que los vectores $\ell_1(x), \dots, \ell_n(x)$ varían diferenciablemente al mover x (y por lo tanto la matriz $L(f)$). Como la diferenciabilidad es local, podemos pensar a la variedad (un entorno) como \mathbb{R}^{2n} .

Los elementos de los estabilizadores Γ_x son los ceros de la función $\Psi(t, x) - x$ (pues $t \in \Gamma_x \Leftrightarrow \Psi(t, x) = x$). Dado $\ell_1(\hat{x}) = \hat{t} \in \Gamma_{\hat{x}}$ ($\Psi(\hat{t}, \hat{x}) - \hat{x} = 0 \in \mathbb{R}^{2n}$), como

$$\frac{d}{dt_i}(\Psi(t, x) - x)|_{t=\hat{t}} = X_{F_i}(\Psi(\hat{t}, \hat{x})) \quad \text{y} \quad \{X_{F_1}, \dots, X_{F_n}\} \text{ l.i.}$$

Por teorema de la función implícita, existe un entorno $B_{\hat{t}} \times W_{\hat{x}}$ de (\hat{t}, \hat{x}) y una función g diferenciable tal que $\Psi(t, x) - x = 0 \Leftrightarrow t = g(x)$, para $(t, x) \in B_{\hat{t}} \times W_{\hat{x}}$.

Como $\ell_1(x), \dots, \ell_n(x)$ son aislados, necesariamente $g(x) = \ell_1(x)$ y por lo tanto la asignación $x \mapsto \ell_1(x)$ varía diferenciablemente. De forma análoga se deduce lo mismo para los restantes ℓ_i

4) Nuestro objetivo es definir coordenadas para las cuales $\omega = \sum_1^n dI_k \wedge d\varphi_k$. Queremos entonces que $\{\varphi_i, \varphi_j\} = 0 = \omega(X_{\varphi_i}, X_{\varphi_j}) = D\varphi_i(X_{\varphi_j})$. Es decir, necesitamos que los campos X_{φ_i} sean tangentes a N , pues $D\varphi_i(X) = 0$ implica que en la dirección X no se cambia de ángulo φ_i , que es justamente lo que define a N . Por lo tanto, necesitamos que $\omega|_N \equiv 0$ (N Lagrangiana)

Si la subvariedad transversal N construida no es Lagrangiana, veamos que podemos deformarla para que sí lo sea:

Llamamos ahora \hat{N} a la subvariedad construida (que por comodidad, llamaremos \hat{N} tanto a la variedad como a la parametrización). Consideramos la 2-forma $\hat{N}^*\omega$ en \tilde{U} (el pullback de ω por \hat{N}). Como asumimos que \tilde{U} es simplemente conexo (podemos pensar que \tilde{U} es una bola) por lema de Poincaré existe $\hat{\alpha}$ una 1-forma en \tilde{U} tal que $d\hat{\alpha} = \hat{N}^*\omega$. Definimos entonces $\alpha = F^*(\hat{\alpha})$ 1-forma en U (el pullback de $\hat{\alpha}$ por F). Luego, α define un campo en U mediante la relación $\omega(X, \cdot) = \alpha$, que resulta ser tangente a los toros, pues:

$$-DF_i(X) = \omega(X, X_{F_i}) = \alpha(X_{F_i}) = \hat{\alpha}(DF(X_{F_i})) = \hat{\alpha}(0) = 0$$

Sea $\Phi : U \rightarrow U$ el tiempo 1 del flujo asociado a $-X$. Definimos $N = \Phi \circ \hat{N}$. Veamos a continuación que efectivamente N es Lagrangiana y se cumple $F \circ N = Id_{\tilde{U}}$.

La última igualdad es trivial, pues $F \circ \Phi = F$ ya que como el campo X es tangente a los toros, el flujo no cambia de toros a los puntos (es decir, no los mueve a otro conjunto de nivel).

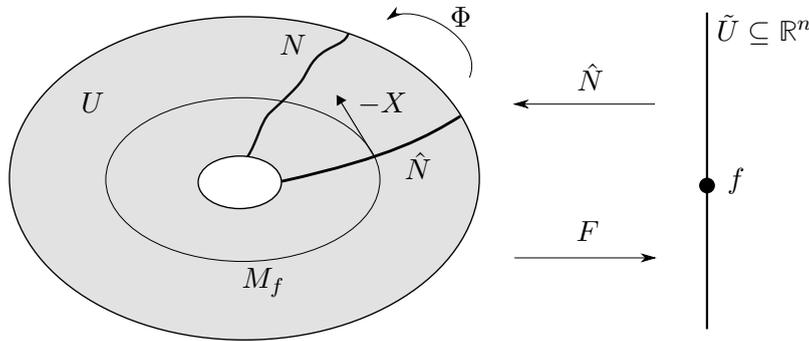


Figura 5.5: Deformación de variedad transversal para lograr N Lagrangiana

Para ver que N es Lagrangiana, por definición, tenemos que verificar que $N^*\omega = (\Phi \circ \hat{N})^*\omega \equiv 0$, o equivalentemente, como $(\Phi \circ \hat{N})^* = \Phi^* \circ \hat{N}^*$, basta probar que si $q \in \hat{N}$:

$$v, w \in T_q \hat{N} \implies \Phi^* \omega_q(v, w) = 0$$

Podemos escribir a U en las coordenadas construidas hasta el momento, es decir, los elementos de U son de la forma $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ donde (q_1, \dots, q_n) son las coordenadas de la parametrización N y (p_1, \dots, p_n) en correspondencia con $(\Phi_{p_1}^1 \circ \Phi_{p_n}^n)(q_1, \dots, q_n)$.

Como α sólo depende de q , X también. Como $X(q, p)$ es tangencial al toro correspondiente a q , tenemos que en estas coordenadas X y Φ se escriben

$$X(p, q) = X(q) = (0, \dots, 0, X_{n+1}(q), \dots, X_{2n}(q))$$

$$\Phi(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) - X(q)$$

Por lo tanto, $D_{(q,p)}\Phi(v_1, \dots, v_{2n}) = (v_1, \dots, v_{2n}) - (0, \dots, 0, \nabla X_{n+1}v, \dots, \nabla X_{2n}v)$. En particular, si $v \in T_q\hat{N}$, $v = (v_1, \dots, v_n, 0, \dots, 0)$ y

$$D_{(q,0)}\Phi(v) = (v_1, \dots, v_n, -\nabla X_{n+1}v, \dots, -\nabla X_{2n}v)$$

Siendo aún más específicos, como X sólo depende de q , para $j = 1, \dots, n$

$$\nabla X_{n+j} = \left(\frac{\partial}{\partial q_1} X_{n+j}, \dots, \frac{\partial}{\partial q_n} X_{n+j}, 0, \dots, 0 \right) \quad y$$

$$D_{(q,0)}\Phi(v) = \left(v_1, \dots, v_n, -\sum_1^n \frac{\partial X_{n+1}}{\partial q_i} v_i, \dots, -\sum_1^n \frac{\partial X_{2n}}{\partial q_i} v_i \right)$$

Entonces, si $v, w \in T_q\hat{N}$, $\Phi_{(q,0)}^*\omega(v, w) = \omega_{\Phi(q,0)}(D\Phi(v), D\Phi(w))$, que desarrollando nos queda

$$\begin{aligned} \Phi_{(q,0)}^*\omega(v, w) &= \omega_{\Phi(q,0)}(v, w) - \omega_{\Phi(q,0)}(0, \dots, 0, \nabla X_{n+1}v, \dots, \nabla X_{2n}v)(w) \\ &\quad - \omega_{\Phi(q,0)}(v)(0, \dots, 0, \nabla X_{n+1}w, \dots, \nabla X_{2n}w) \\ &= \omega_{\Phi(q,0)}(v, w) - \omega_{\Phi(q,0)}(DX(v))(w) - \omega_{\Phi(q,0)}(v)(DX(w)) \end{aligned}$$

Ya que

$$\omega_{\Phi(q,0)}(0, \dots, 0, \nabla X_{n+1}v, \dots, \nabla X_{2n}v)(0, \dots, 0, \nabla X_{n+1}w, \dots, \nabla X_{2n}w) = 0$$

porque $\omega(X_{F_i}, X_{F_j}) = 0$ y los vectores de la forma $(0, \dots, 0, u_1, \dots, u_n)$ son combinaciones lineales de los campos X_{F_i}

Consideremos ahora la siguiente **Observación:**

Si (M, ω) variedad simpléctica de dimensión $2n$ y X campo en M , entonces

$$L_X\omega(v, w) = \omega(DX(v), w) + \omega(v, DX(w))$$

Para probar esto, podemos pensar localmente en coordenadas canónicas, para las cuales $\omega = \omega_0$. En estas coordenadas $\iota_X\omega = \sum_1^n X_i dp_i - \sum_1^n X_{i+n} dq_i$ y $L_X\omega = d(\iota_X\omega) = \sum_1^n dX_i dp_i - \sum_1^n dX_{i+n} dq_i$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} L_X\omega(v, w) &= \sum_1^n dX_i(v)w_{i+n} - \sum_1^n dX_i(w)v_{i+n} - \sum_1^n dX_{i+n}(v)w_i + \sum_1^n dX_{i+n}(w)v_i \\ &= \omega\left(\sum_1^{2n} dX_i(v), w\right) + \omega\left(v, \sum_1^{2n} dX_i(w)\right) = \omega(DX(v), w) + \omega(v, DX(w)) \end{aligned}$$

Entonces

$$\Phi_{(q,0)}^* \omega|_{\hat{N}} = \omega|_{\hat{N}} - L_X \omega|_{\hat{N}} = \omega|_{\hat{N}} - d\alpha|_{\hat{N}}$$

pues $L_X \omega = dt_X \omega = d\alpha$

Por otro lado, como $(\hat{N} \circ F)|_{\hat{N}} = Id_{\hat{N}}$

$$d\alpha|_{\hat{N}} = d(F^* \hat{\alpha})|_{\hat{N}} = F^*|_{\hat{N}}(d\hat{\alpha}) = F^*|_{\hat{N}}(\hat{N}^* \omega) = (\hat{N} \circ F|_{\hat{N}})^* \omega = \omega|_{\hat{N}}$$

Juntando ambas igualdades, concluimos en que $\Phi_{(q,0)}^* \omega|_{\hat{N}} = 0$ y por lo tanto N Lagrangiana. Lo que implica que para la parametrización N , $\{\varphi_i, \varphi_j\} = 0$. Como dijimos, la subvariedad $N = N_0$ corresponde a los ángulos $\varphi = 0$, y para cada φ tenemos la variedad N_φ correspondiente a la traslación de N_0 por el flujo Hamiltoniano dejando correr un tiempo φ ($N_\varphi = \Phi_{\varphi_1}^1 \circ \dots \circ \Phi_{\varphi_n}^n(N_0)$).

Veamos ahora que, tomando de referencia a la subvariedad Lagrangiana N , las coordenadas tiempo-energía construidas en un entorno $W \subseteq U$ (donde podemos suponer $N \cap W \neq \emptyset$) resultan ser canónicas:

Una base del tangente a $x \in W$ es $\{\frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_n}, \frac{\partial}{\partial F_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial F_n}\}$. Por lo tanto, podemos escribir

$$\omega|_W = \sum_{i,j}^n a_{i,j} dt_i \wedge dF_j + \sum_{i<j}^n (b_{i,j} dF_i \wedge dF_j + c_{i,j} dt_i \wedge dt_j)$$

Por construcción de las coordenadas tenemos $\frac{\partial}{\partial t_i} = X_{F_i}$. Por lo tanto:

$$0 = \{F_k, F_l\} = \omega|_W(X_{F_k}, X_{F_l}) = \sum_{i<j}^n c_{i,j} dt_i \wedge dt_j(X_{F_i}, X_{F_j}) = c_{k,l}$$

Pues $dt_i(X_{F_j}) = Dt_i(\frac{\partial}{\partial t_j}) = \delta_{i,j}$. También $dF_i(\frac{\partial}{\partial F_j}) = \delta_{i,j}$, lo que implica

$$\delta_{k,l} = DF_k\left(\frac{\partial}{\partial F_l}\right) = \omega|_W\left(X_{F_k}, \frac{\partial}{\partial F_l}\right) = a_{k,l}$$

Luego

$$\omega|_W = \sum_i dt_i \wedge dF_i + \sum_{i<j} b_{i,j} dF_i \wedge dF_j$$

Oservamos que las funciones $b_{i,j}$ son invariantes bajo la acción del flujo $\Psi_{\hat{t}}$, es decir, $b_{i,j} \circ \Psi_{\hat{t}} = b_{i,j}$. Para ver esto, recordar que el tiempo t de un flujo Hamiltoniano es un simplectomorfismo, y $\Psi_{\hat{t}}$ es la composición de n flujos Hamiltonianos. Por lo tanto, $\Psi_{\hat{t}}^* \omega = \omega$. Más aún, por como definimos las coordenadas tiempo-energía, se tiene que $\Psi_{\hat{t}}^* dF_i = dF_i$ y $\Psi_{\hat{t}}^*(dt_i) = dt_i$ pues $F_i \circ \Psi_{\hat{t}} = F_i$ y $t_i \circ \Psi_{\hat{t}} = t_i + \hat{t}$

Juntando esto obtenemos:

$$0 = \Psi_{\hat{t}}^* \omega - \omega = \sum_{i<j} (b_{i,j} \circ \Psi_{\hat{t}} - b_{i,j}) dF_i \wedge dF_j$$

De donde se deduce $b_{i,j} \circ \Psi_{\hat{t}} = b_{i,j}$.

Entonces, si tomamos $x \in N \cap W$, como $\{\frac{\partial}{\partial F_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial F_n}\}$ es una base de $T_x N$ y N Lagrangiana, se tiene que $b_{i,j} = 0$. Pero si $y \in W$, tenemos que $y = \Psi_{\hat{t}}(x)$ para algún $x \in N$, y por lo tanto, $b_{i,j} = 0$ en todo W . Esto prueba que las coordenadas son canónicas:

$$\omega|_W = \sum_i^n dt_i \wedge dF_i$$

5) Hasta el momento tenemos el mapa simpléctico que localmente es un simplectomorfismo

$$\mathcal{C} : \mathbb{R}^n \times \tilde{U} \rightarrow U, \quad (t, f) \mapsto \Psi(t, N(f))$$

De hecho, este mapa es un cubrimiento.

La 2-forma en las coordenadas (t, f) es la canónica: $\sum_1^n dt_i \wedge dF_i$, donde $f = (F_1, \dots, F_n)$.

Construiremos un simplectomorfismo dado por:

$$\mathcal{D} : \mathbb{R}^n \times \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n \times V, \quad (t, f) \mapsto (\varphi, I)$$

donde V un abierto de \mathbb{R}^n y la 2-forma simpléctica en $(\varphi, I) \in \mathbb{R}^n \times V$ es la canónica. Observar que esto automáticamente nos da coordenadas (φ, I) canónicas en cualquier entorno de un punto de U , dadas por el mapa $(\mathcal{C} \circ \mathcal{D}^{-1})^{-1} = \mathcal{D} \circ \mathcal{C}^{-1}$. Sin embargo, con estas nuevas coordenadas veremos que podemos normalizar los períodos para todos los toros, lo que nos permite cocientar por la grilla dada por la base canónica, para obtener finalmente las coordenadas ángulo-acción:

$$([\varphi], I) : \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z}^n) \times V \rightarrow U$$

inducido por el mapa $\mathcal{C} \circ \mathcal{D}^{-1}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \tilde{U} & \xrightarrow{\mathcal{C}} & U \\ \downarrow \mathcal{D} & & \uparrow \\ \mathbb{R}^n \times V & \xrightarrow{\text{proy}} & \mathbb{T}^n \times V \end{array}$$

La construcción de \mathcal{D} es la siguiente:

La coordenada angular la construimos igual que en el teorema de Arnol'd-Liouville:

$$\varphi(t, f) = 2\pi L(f)^{-1}t$$

Recordando que

$$L(f) = (\tilde{\ell}_1(f), \dots, \tilde{\ell}_n(f)) = \begin{pmatrix} L_{1,1}(f) & \dots & L_{n,1}(f) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{1,n}(f) & \dots & L_{n,n}(f) \end{pmatrix}$$

Las coordenadas de acción I , queremos que sólo dependa de los valores de F , por lo tanto buscamos un difeomorfismo $I : \tilde{U} \rightarrow V$ tal que $(\varphi(t, f), I(f))$ canónicas.

Como $\frac{1}{2\pi} L(f)\varphi = t$, tenemos:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad d\varphi_i \wedge dI_i &= \sum_{j=1}^n d\varphi_i \wedge \frac{\partial I_i}{\partial f_j} dF_j \\ \text{b)} \quad dt_i \wedge dF_i &= \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{j,l=1}^n \frac{\partial L_{i,j}}{\partial f_l} \varphi_j dF_l + \sum_{j=1}^n L_{i,j} d\varphi_j \right) \wedge dF_i \end{aligned}$$

Como $\{d\varphi_1, \dots, d\varphi_n, dF_1, \dots, dF_n\}$ es una base, la igualdad $\sum_{i=1}^n d\varphi_i \wedge dI_i = \sum_{i=1}^n dt_i \wedge dF_i$ se cumple si y sólo si:

$$\text{Para } i, j, l \in \{1, \dots, n\}, \quad \frac{\partial I_i}{\partial f_j} = \frac{1}{2\pi} L_{i,j} \quad \text{y} \quad \frac{\partial L_{i,j}}{\partial f_l} = \frac{\partial L_{l,j}}{\partial f_i}$$

Observar que la primera igualdad (a) implica $DI = \frac{1}{2\pi} L^\top$, que en formato matricial se puede visualizar como:

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta I_1}{\delta f_1} & \cdots & \frac{\delta I_1}{\delta f_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\delta I_n}{\delta f_1} & \cdots & \frac{\delta I_n}{\delta f_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla I_1 \\ \vdots \\ \nabla I_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \tilde{\ell}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\ell}_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} L_{1,1} & \cdots & L_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{n,1} & \cdots & L_{n,n} \end{pmatrix}$$

Es decir, conocemos el diferencial del mapa I buscado. Veamos que podemos resolver la ecuación $DI = \frac{1}{2\pi} L^\top$ por integración.

Si consideramos la 1-forma asociada a $\tilde{\ell}_j$:

$$\tilde{\ell}_{j,1} dx_1 + \cdots + \tilde{\ell}_{j,n} dx_n = L_{1,j} dx_1 + \cdots + L_{n,j} dx_n$$

y recordando que $\tilde{\ell}_j$ está definido en \tilde{U} simplemente conexo, por lema de Poincaré tenemos que si esta forma es cerrada, también es exacta, y por lo tanto existe I_j tal que $dI_j = \tilde{\ell}_{j,1} dx_1 + \cdots + \tilde{\ell}_{j,n} dx_n$, o equivalentemente, $\nabla I_j = \tilde{\ell}_j$. Más aún, la función I_j se construye integrando la 1-forma por caminos.

Alcanza con probar entonces que la 1-forma es cerrada, o equivalentemente, que sus “derivadas cruzadas” coinciden:

$$\frac{\partial}{\partial f_l} \tilde{\ell}_{j,i} = \frac{\partial}{\partial f_i} \tilde{\ell}_{j,l} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial L_{i,j}}{\partial f_l} = \frac{\partial L_{l,j}}{\partial f_i}$$

justamente la segunda igualdad necesaria (b) para que las coordenadas sean canónicas.

Por lo que basta con probar

$$\frac{\partial L_{i,j}}{\partial f_l} = \frac{\partial L_{l,j}}{\partial f_i}$$

Veamos que esto es consecuencia directa del hecho de que N sea Lagrangiana.

Como el mapa \mathcal{C} es simpléctico, $\mathcal{C}^{-1}(N(\tilde{U})) \subseteq \mathbb{R}^n \times \tilde{U}$ es Lagrangiana. Luego

$$\mathcal{C}^{-1}(N(\tilde{U})) = \bigcup_{t \in \Gamma_f} (t, f) = \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^n} (L(f) \cdot v, f)$$

Pues $t \in \Gamma_f \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{Z}^n$ para el cual $t = L(f) \cdot v$

Por lo tanto, por cada $v \in \mathbb{Z}^n$ tenemos una subvariedad Lagrangiana parametrizada por $f \mapsto (L(f) \cdot v, f)$ en $\mathbb{R}^n \times \tilde{U}$. Una base del tangente de alguna de estas subvariedades Lagrangianas viene dado por

$$Z_l = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial L_{i,j}}{\partial f_l} v_j \right) \frac{\partial}{\partial t_i} + \frac{\partial}{\partial f_l} \quad \text{con } l \in \{1, \dots, n\}$$

Como la subvariedad es Lagrangiana y $\omega = \sum_1^n dt_i \wedge dF_i$, se tiene que

$$0 = \omega(Z_l, Z_i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L_{i,j}}{\partial f_l} v_j - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L_{l,j}}{\partial f_i} v_j$$

Como esto se cumple para todo $v \in \mathbb{Z}^n$, necesariamente $\frac{\partial L_{i,j}}{\partial f_i} = \frac{\partial L_{i,j}}{\partial f_j}$

Por lo tanto, tenemos bien definido el mapa simpléctico que brinda coordenadas locales dado por

$$\mathcal{C} \circ \mathcal{D}^{-1} : \mathbb{R}^n \times V \rightarrow U, \quad (\varphi, I) \mapsto \Psi\left(\frac{1}{2\pi}L(f)\varphi, N(f(I))\right)$$

Y como la primer entrada es \mathbb{Z}^n -periódica, el mapa induce el difeomorfismo simpléctico buscado (simplectomorfismo):

$$\Lambda : \mathbb{T}^n \times V \rightarrow U, \quad ([\varphi], I) \mapsto \Psi\left(\frac{1}{2\pi}L(f)\varphi, N(f(I))\right)$$

Y por último, recordando que $H = F_1$, el flujo Hamiltoniano asociado a H es el correspondiente a fluir Ψ por $st_1 = s(1, 0, \dots, 0)$.

Fijado $y \in U$ tal que $F(y) = f$, si escribimos al vector $t_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ y a $y \in M_f$ como

$$t_1 = \frac{1}{2\pi}L(f)\hat{\varphi}, \quad y = \Psi(\hat{t}, N(f))$$

entonces el flujo generado por H es de la forma

$$\Phi^1(s, y) = \Psi(st_1, y) = \Psi(st_1 + \hat{t}, N(f)) = \Psi\left(s\left(\frac{L(f)}{2\pi}\hat{\varphi}\right) + \hat{t}, N(f)\right)$$

Y si escribimos a \hat{t} como $\hat{t} = \frac{1}{2\pi}L(f)\theta$, y a f como $f(I)$ obtenemos que

$$\Phi^1(s, y) = \Lambda(s[\hat{\varphi}] + [\theta], I)$$

Es decir, en las coordenadas $([\varphi], I)$ las ecuaciones Hamiltonianas son lineales y se pueden expresar como

$$\begin{cases} \dot{I}_k = 0 \\ [\dot{\varphi}_k] = [\omega_k](I) \end{cases}$$

Donde $\omega_k(I) = \omega_k(f)$ son los coeficientes de $\hat{\varphi}$, es decir, los coeficientes de t_1 en la base $\{\tilde{\ell}_1(f), \dots, \tilde{\ell}_n(f)\}$. □

Observación 5.2.1. *Coordenadas ángulo-acción en términos de una función generatriz*

En entornos de un conjunto de nivel $M_{\tilde{f}}$ sabemos que existen coordenadas ángulo-acción (φ, I) . Veamos que podemos expresarlas en términos de integrales.

Tomamos \tilde{f} valor regular de F y $M_{\tilde{f}}$ una componente compacta conexa de $F^{-1}(f)$ (topológicamente es un toro \mathbb{T}^n). Dado U entorno de $M_{\tilde{f}}$ suficientemente chico, consideramos θ una 1-forma tal que si $\omega(q, p)$ es la forma simpléctica en P , $d\theta = -\omega$. Esto es posible pues en las coordenadas (φ, I) basta con tomar $\theta = \sum_1^n I_i d\varphi_i$.

Por cada $f \in \tilde{U}$ consideramos una familia de lazos $\{\gamma_1(f), \dots, \gamma_n(f)\}$ en M_f , basados en $x_0(f)$ que varíen diferenciablemente según f , que sean todas transversales, se corten solo en $x_0(f)$ y sus proyecciones en $\pi_1(M_f, x_0(f))$ sean generadores del grupo.

Definimos las funciones $I_i(f)$ como

$$I_i(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i(f)} \theta|_{M_f}$$

Estas necesariamente son coordenadas de acción (a menos de una reordenación de subíndices):

- Para las coordenadas (φ, I) , escribimos a θ como $\theta = \sum_1^n I_i d\varphi_i$.
- La definición de $I_i(f)$ es invariante bajo homotopías a extremos fijos del camino γ_i : Si existe $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M_f$ homotopía tal que

$$H(t, 0) = \gamma(t), \quad H(t, 1) = \hat{\gamma}(t), \quad H(0, s) = H(1, s) \equiv x_0$$

Por teorema de Stokes, se tiene

$$\int_{\gamma} \theta|_{M_f} - \int_{\hat{\gamma}} \theta|_{M_f} = \int_{\partial[0,1]^2} H^*(\theta) = \int_{[0,1]^2} dH^*(\theta) = \int_{[0,1]^2} H^*(d\theta) = 0$$

- Por lo tanto, podemos suponer que las curvas γ_i son una vuelta en la dirección del ángulo φ_i , es decir, de la forma

$$\gamma_i(f) = (I_1(f), \dots, I_n(f), 0, \dots, 2\pi t, \dots, 0)$$

Entonces

$$I_i(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i(f)} I_i(f) d\varphi_i = \frac{1}{2\pi} I_i(f) \int_{S^1} d\varphi_i = I_i(f)$$

Ya conseguimos la coordenada acción en términos de una integral. Buscamos completar el cambio de coordenadas.

Primero, podemos suponer por teorema de Darboux que localmente las coordenadas (q, p) son canónicas, por lo que asumimos θ como $\sum_1^n p_i dq_i$. Además, también localmente, los toros M_f son gráficos de una función $p(q, f)$, es decir, parametrizamos un entorno de M_f como $(q, p(q, f))$. Como ya vimos en el teorema de coordenadas ángulo-acción, la función $I(f) = (I_1(f), \dots, I_n(f))$ es un difeomorfismo local. En definitiva, esto nos permite pensar que un entorno simplemente conexo $W \in U$ de $(q_0, p_0) \in M_{\hat{f}}$ se puede parametrizar como $(q, p(q, I))$.

Definimos en este entorno la siguiente función:

$$S(I, q) = \int_{q_0}^q \sum_1^n p_i(I, q) dq_i = \int_{q_0}^q \theta(I, q)$$

Los límites de integración q_0 y q corresponden a un camino en el toro $M_{f(I)}$, de $(q_0, p(q_0, I))$ a $(q, p(q, I))$. Como el entorno en el que se define es simplemente conexo, esta definición no depende del camino elegido.

Como $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$, esta es la función generatriz que nos permite hallar las coordenadas angulares: por lo visto en 4,2,1 el difeomorfismo $(\varphi, I) \mapsto (q, p)$ es simpléctico y

$$\varphi_i = \frac{\partial S}{\partial I_i}$$

Hay que remarcar que este cambio de coordenadas, con esta construcción, es local.

Podemos corroborar que esta definición es coherente con la escritura $\theta = \sum_1^n I_i d\varphi_i$, pues

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial I_i}(I, \varphi) &= \frac{\partial}{\partial I_i} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sum_1^n I_i d\varphi_i = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\partial}{\partial I_i} \sum_1^n I_i d\varphi_i \\ &= (0, \dots, \int_{\varphi_0}^{\varphi} 1 d\varphi_i, \dots, 0) = (0, \dots, \varphi_i - \varphi_{0_i}, \dots, 0) \end{aligned}$$

Observación 5.2.2. El teorema 5.2.1 tiene un carácter global, y otro local:

Es global en el sentido de que podemos identificar $\tilde{U} \times \mathbb{T}^n$ con un entorno U de una componente conexa y compacta de un conjunto de nivel, tal que U esté saturado y foliado por hojas que son topológicamente toros \mathbb{T}^n , y \tilde{U} es un abierto simplemente conexo de \mathbb{R} . La identificación es global a lo largo de las hojas.

Por otro lado, esta identificación tiene un carácter local en las direcciones transversales a las hojas. Esto es natural, pues no podemos aspirar a conseguir coordenadas globales en toda la variedad para las cuales la forma simpléctica sea la canónica (Ver 3.1.5).

Capítulo 6

Problema de tres cuerpos no planar elíptico con restricciones

El problema de tres cuerpos es un sistema mecánico que consiste en tres masas (constantes) puntuales en \mathbb{R}^3 sometidas a fuerzas de atracción gravitatoria mutua. La ecuación diferencial que rige a este sistema es la segunda Ley de Newton, y las variables en juego son las posiciones y velocidades de cada partícula.

Como vimos con el problema de Kepler, el problema de dos cuerpos es integrable y tenemos una descripción precisa de las órbitas. Sin embargo, lo mismo no ocurre para tres cuerpos de forma genérica. No será un sistema integrable.

Ante la interrogante de qué sucede con el problema de tres cuerpos, y n cuerpos en general, Henri Poincaré a finales del siglo XIX propone un nuevo abordaje al problema: estudiar comportamientos topológicos de las órbitas. Observa que estos sistemas pueden ser extremadamente sensibles a perturbaciones en las condiciones caóticas, dando origen a la teoría del caos. Estudiando posibles configuraciones, se encuentra con la posibilidad de órbitas que tanto a futuro como a pasado tiendan al mismo punto de equilibrio. A futuro tenderá al equilibrio en una dirección, y a pasado en otra distinta. Al punto silla de equilibrio en esta situación lo llamamos *intersección homoclínica transversal*. Este comportamiento meramente topológico estará ligado a la existencia de caos y dará paso al estudio de sistemas hiperbólicos. La forma, la topología, definirá los posibles comportamientos analíticos de un sistema físico. Poincaré logra reducir la dinámica del problema de los tres cuerpos a un mapa discreto, que surge del estudio de los retornos del flujo solución a una subvariedad transversal a las órbitas.

El concepto de Caos fue madurando y a mediados del siglo XX S. Smale formula un ejemplo discreto extremadamente sencillo, conocido como *Herradura de Smale* ([Sma98]), en el cual se inducen intersecciones homoclínicas, volviéndose un ejemplo representativo de dinámicas caóticas y sistemas hiperbólicos a tal punto que para probar la existencia de caos, se buscan Herraduras de Smale como subsistemas. Tal es el caso del problema que trataremos, que será una versión simplificada del problema general de tres cuerpos.

Todo lo expuesto en este capítulo se encuentra en [Mos73].

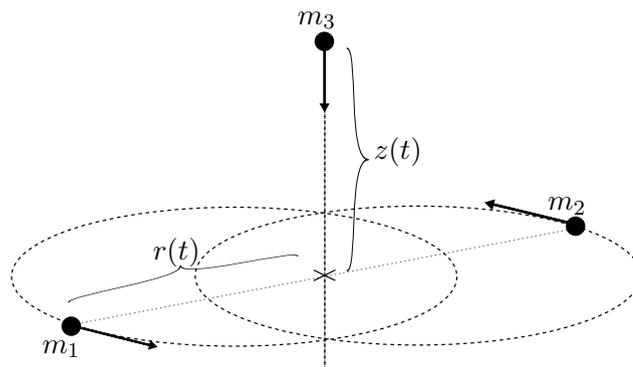
6.1. Descripción del problema

Consideramos dos partículas de igual masa en el espacio sujetas a una fuerza gravitatoria de atracción mutua. La dinámica de estas, modelada de forma clásica (cuyos movimientos están gobernados por la segunda ley de Newton y la ley de gravitación uni-

versal), se encuentra restringida a un plano determinado por las posiciones y velocidades iniciales. Si ciertas condiciones son dadas (no hay colisión y se consideran ciertos niveles de energía bajos), entonces cada una de las partículas tendrá el comportamiento descrito por el problema de Kepler, situando al “Sol” en la posición centro de masa. Cada partícula se moverá a lo largo de una elipse con un foco en el centro de masa.

Podemos pensar que estas dos partículas se mueven en el plano $z = 0$, y el centro de masa se encuentra en el punto $(0, 0, 0)$, lo que implicará que las partículas se encuentren en todo momento en posiciones radialmente opuestas.

Dada esta configuración, agregamos al sistema una tercer partícula de masa despreciable en el eje z , de forma que el sistema anterior no se vea afectado. Por la simetría de la configuración de partículas, esta tercer masa estará confinada a moverse por el eje z . Nos interesa describir el movimiento de esta tercer masa a lo largo del tiempo.



Con un cambio de variable, podemos suponer que las masas de las partículas del plano $z = 0$ son $1/2$, y la constante de gravitación universal igual a 1. También podemos suponer (normalizando la variable temporal) que el período de las órbitas de estas partículas es igual a 2π . Esto nos permite pensar al tiempo como un ángulo tal que la ecuación que describe una de las elipses es de la forma:

$$r(t) = \frac{1 - \epsilon^2}{2(1 - \epsilon \cos(t))}$$

Siendo ϵ la excentricidad de la elipse, y $r(t)$ la distancia al origen (un foco) de una de las masas. Como las partículas del plano $z = 0$ se encuentran siempre radialmente opuestas, tenemos que la ecuación diferencial que rige el movimiento de la tercer masa despreciable está dada por:

$$\ddot{z}(t) = \frac{-z(t)}{(z(t)^2 + r^2(t))^{\frac{3}{2}}}$$

Observamos que cuando la elipse resulta ser una circunferencia ($\epsilon = 0$), el radio es constante igual a $1/2$. Es decir, para $\epsilon = 0$ la ecuación diferencial es autónoma y como veremos, integrable.

Mapa de retorno: Reduciremos el estudio de la dinámica al estudio de los retornos de la partícula de masa despreciable a $z = 0$. Antes de precisar a lo que nos referimos con retorno, consideramos las siguientes observaciones sobre las soluciones:

1. Toda solución $z(t)$ está definida para todo tiempo y en algún momento (a pasado o a futuro) pasa por el plano $z = 0$, pues el único punto de equilibrio es $(z, \dot{z}) = (0, 0)$.

Como toda órbita queda determinada por su condición inicial, podemos indexarlas o identificarlas por su tiempo y velocidad iniciales al pasar por $z = 0$. Es decir, cada órbita se identifica con el par (t_0, v_0) donde $z(t_0) = 0, \dot{z}(t_0) = v_0$.

2. La configuración del sistema de masas en el plano $z = 0$ es 2π -periódica (pues r es 2π periódico). Esto implica que si $z(t)$ solución con condiciones iniciales $(z(t_0), \dot{z}(t_0)) = (0, v_0)$, entonces la solución con condiciones iniciales $(z(t_0 + 2\pi), \dot{z}(t_0 + 2\pi)) = (0, v_0)$ está dada por $z(t + 2\pi)$.
3. La ecuación diferencial es invariante bajo la reflexión $z \mapsto -z$. Como nos interesan los retornos al plano $z = 0$, si (t_0, v_0) son el tiempo y velocidad en el que una solución cumple $z(t_0) = 0, \dot{z}(t_0) = v_0$, podemos restringirnos al estudio de $|v_0|$, ya que el próximo retorno es independiente del signo de v_0 .

Definimos el mapa de retorno $\Phi : (t_0, |v_0|) \mapsto (t_1, |v_1|)$, de tal forma que (en caso de existir) t_1 sea el próximo tiempo de retorno a $z = 0$ y v_1 la velocidad correspondiente, i.e $z(t_1) = 0, \dot{z}(t_1) = v_1$.

Debido a las observaciones se tiene $\Phi(t_0 + 2\pi, |v_0|) = (t_1 + 2\pi, |v_1|)$ y podemos pensar a la variable temporal mod 2π como un ángulo, y a la variable $|v| \neq 0$ como un radio.

Si \mathbb{R}^2 es el espacio tal que $(t, |v|)$ son radio y ángulo, el mapa Φ está definido en un abierto de \mathbb{R}^2 que contiene al 0 y que es acotado.

Lema 6.1.1. *Existe una curva simple cerrada analítica en \mathbb{R}^2 que define un abierto simplemente conexo acotado D_0 (su interior), para el cual existen retornos (el mapa Φ está definido) y en $\mathbb{R}^2 \setminus D_0$ las soluciones se escapan (no hay retorno).*

Este lema se probará luego para el caso general, pero para el caso $\epsilon = 0$ podemos escribir explícitamente el dominio D_0 .

6.2. Caso autónomo

Cuando la excentricidad ϵ es nula, las masas del plano se mueven diametralmente opuestas a lo largo de una circunferencia de radio $r = 1/2$, y por lo tanto la fuerza ejercida sobre la partícula de masa despreciable, sólo depende de su posición en el eje z .

La ecuación que rige al sistema es

$$\ddot{z}(t) = \frac{-z(t)}{(z(t)^2 + 1/4)^{3/2}}$$

La energía mecánica del sistema está dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{\dot{z}^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1/4}} = c$$

Con $c > -2$ una constante independiente de t . El único valor no regular es $c = 0$, por lo que el sistema resulta integrable. Si $c < 0$, los conjuntos de nivel son curvas cerradas en el plano z, \dot{z} , y si $c > 0$, son curvas no acotadas. Simplemente por una restricción dimensional, las soluciones con $c < 0$ son periódicas.

Veamos que pasa con los retornos en este caso. Intuitivamente, como el sistema es autónomo, dado t_0 arbitrario tal que $z(t_0) = 0$, existe una velocidad mínima de escape $|\hat{v}|$ independiente de t_0 . Más aún, como las órbitas que retornan son periódicas, las velocidades

$|v_i|$ de corte con el plano $z = 0$ serán constantes en cada solución. Juntando esto obtenemos que D_0 es un disco de radio $|\hat{v}|$ y que el mapa Φ preserva círculos en D_0 .

Corroboramos la intuición:

Considerando las energías $c \in [-2, 0)$, las curvas intersectan a $z = 0$ en $\dot{z} = v$, donde v cumple la relación:

$$v^2 = 2(c + 1/r) = 2c + 4 < 4$$

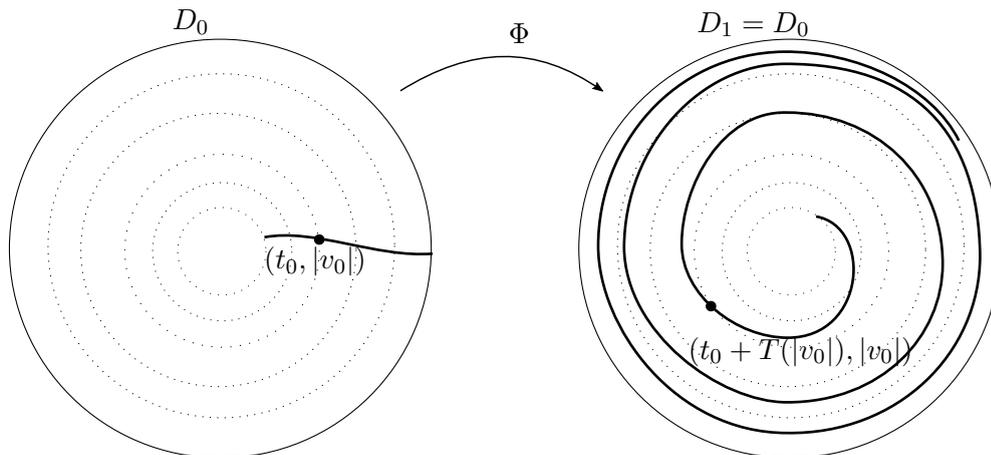
Por lo tanto, las soluciones acotadas con condición inicial $z = 0$ (el conjunto D_0) es exactamente el disco de radio $v < 2$, lo que condice con la observación previamente hecha respecto a las velocidades de escape.

Debido a que el sistema es autónomo y se conserva la energía, necesariamente $|v_1| = |v_0|$ para $v < 2$, y el tiempo de retorno $t_1 - t_0$ es una función que depende solo de la velocidad en $z = 0$, es decir:

$$\Phi(t_0, |v_0|) = (T(|v_0|) + t_0, |v_0|)$$

Esto no es más que un *twist-map integrable* en el anillo: rotaciones en los círculos de radio $|v_0|$ por un ángulo $T(|v_0|)$, donde T es una función creciente tal que $T(v) \rightarrow \infty$ cuando $v \rightarrow 2$.

Si $D_1 = \Phi(D_0) = D_0$, observamos que la imagen de cualquier curva en D_0 que corte transversalmente en un punto p en el borde ∂D_0 , se aproxima a ∂D_1 en forma de espiral. Este comportamiento será similar en el caso no autónomo, como veremos en el Lema 6.3.3.



6.3. Caos en mapa de retorno para excentricidades pequeñas

El objetivo es observar que, mediante pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales de las masas situadas en $z=0$, de tal forma que la excentricidad sea pequeña, se obtienen comportamientos caóticos para la tercer masa.

Con este fin, consideraremos la aproximación lineal según ϵ del radio:

$$r(t) = \frac{1}{2}(1 - \epsilon \cos(t)) + O(\epsilon^2)$$

Estudiaremos la dinámica de los retornos de la partícula a $z = 0$. Esta dinámica discreta estará definida en una superficie. Veremos que existe un subconjunto invariante por el mapa de retorno en esa superficie, tal que la dinámica ahí sea conjugada al shift de

infinitos símbolos. Gráficamente, el mapa de retorno generará una herradura de infinitas “patas”.

Podemos observar que a pesar de la perturbación, si la velocidad inicial en $z = 0$ es suficientemente grande, la solución escapará al infinito. Los comportamientos caóticos los encontraremos en casos límite, en aquellas órbitas con velocidades iniciales cercanas a las velocidades de escape.

A diferencia del caso autónomo, la velocidad de escape para una solución dependerá de la configuración inicial de las masas en el plano $z = 0$, y por lo tanto dependen del tiempo inicial. Este comportamiento es clave para la construcción de la semiconjugación al shift.

Un resultado que ilustra el caos en los retornos es el siguiente:

Teorema 6.3.1. *Si una solución $z(t)$ pasa infinitas veces por $z = 0$ en los tiempos ordenados $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, definimos la sucesión de naturales c_k como $c_k = \left[\frac{t_{k+1} - t_k}{2\pi} \right]$ (con $[\cdot]$ nos referimos a parte entera). Es decir, c_k mide la cantidad de ciclos completos entre dos intersecciones con $z = 0$. Si $\epsilon > 0$ es suficientemente chico, entonces existe un natural $m(\epsilon)$ de tal forma que cualquier secuencia de naturales $\{c_k\}$ con $c_k \geq m(\epsilon)$ corresponde a una solución del problema de los tres cuerpos restringido anteriormente descrito.*

Este teorema es una consecuencia inmediata de la conjugación al shift en un subconjunto del dominio del mapa de retorno. La demostración se verá luego.

A continuación consideraremos ciertos lemas que resumen el estudio analítico del problema y permitirán centrarnos en el estudio topológico del comportamiento de las órbitas con condiciones iniciales cerca del borde ∂D_0 .

El objetivo será probar que existe un subconjunto R del dominio D_0 del mapa de retorno, para el cual la dinámica Φ sea semiconjugada al shift. Este subconjunto cumplirá el papel de un cuadrado en la construcción clásica de la Herradura de Smale, salvo que $\Phi(R)$ y R tendrán infinitas intersecciones o “patas”.

Los lemas son los siguientes:

Lema 6.3.1. *Si $D_1 = \Phi(D_0)$, entonces $D_1 = \rho D_0$ donde ρ es la reflexión $(t, v) \mapsto (-t, v)$. Más aún, $\Phi^{-1} = \rho \Phi \rho$*

Lema 6.3.2. *Si $\epsilon > 0$ suficientemente chico, entonces $D_0 \neq D_1$ y ∂D_0 se interseca no tangencialmente con ∂D_1 en un punto P ubicado en la recta de simetría.*

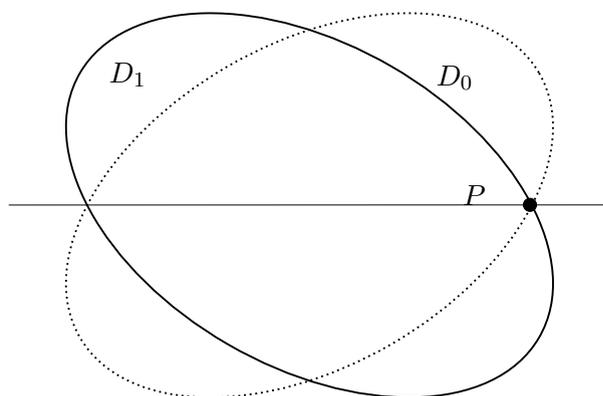


Figura 6.1: Dominio y Codominio de Φ

El comportamiento de espiral para las imágenes de líneas transversales al borde se repite en el caso no autónomo:

Lema 6.3.3. Sea $(t_0(\lambda), v_0(\lambda))$ con $\lambda \in [0, 1]$ una curva C^1 tal que $(t_0(0), v_0(0)) \in \partial D_0$, $\forall \lambda \in (0, 1]$ $(t_0(\lambda), v_0(\lambda)) \in D_0$, y el corte de la curva con ∂D_0 sea transversal. Entonces la imagen de la curva por Φ , que denotaremos $(t_1(\lambda), v_1(\lambda))$ se aproxima a ∂D_1 en forma de espiral y monótona, esto es: $t_1(\lambda) \rightarrow \infty$ cuando $\lambda \rightarrow 0$

Los tres lemas anteriores serán demostrados en la siguiente sección.

Antes de escribir el último lema técnico, consideramos las siguientes definiciones:

- Dado $\delta > 0$ suf. chico, definimos $D_0(\delta) = \{p \in D_0 : d(p, \partial D_0) < \delta\}$. Como ∂D_0 es una curva C^1 , a cada $p \in D_0(\delta)$ le podemos asociar el punto $q \in \partial D_0$ más cercano.
- Definimos dos sectores de fibrados $\Sigma_0(\delta^{1/3})$ y $\Sigma'_0(\delta^{1/3})$:
 - Σ_0 le asocia a cada p en $D_0(\delta)$ el conjunto de rectas que forman un ángulo menor a $\delta^{1/3}$ con la dirección de la recta tangente a ∂D_0 en q (el punto más cercano en el borde).
 - Σ'_0 le asocia al punto p el conjunto complementario de rectas en el espacio tangente
- Análogamente se definen los sectores $\Sigma_1(\delta^{1/3})$ y $\Sigma'_1(\delta^{1/3})$ para $D_1(\delta)$

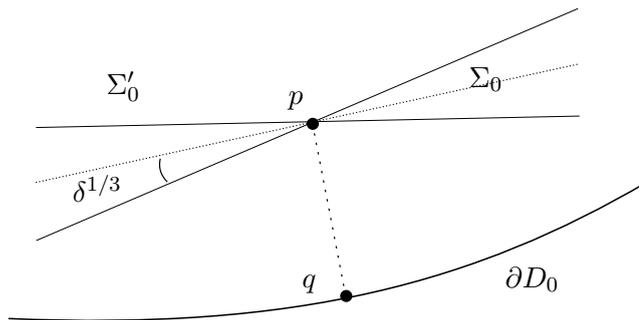


Figura 6.2: Sectores Σ_0 y Σ'_0

El próximo lema no será demostrado. La prueba se puede encontrar en [Mos73].

Lema 6.3.4. Existe $\beta \in (0, 1)$ tal que si $\delta > 0$ es suficientemente chico,

$$\Phi(D_0(\delta)) \subseteq D_1(\delta^\beta) \quad \text{y} \quad d\Phi(\Sigma'_0(\delta^{1/3})) \subseteq \Sigma_1(\delta^{\beta/3})$$

Además, si $w_0 \in \Sigma'_0$, $w_1 = d\Phi(w_0)$ y ζ_0 es la proyección de w_0 en la recta central de Σ'_0 , ζ_1 proyección de w_1 en la recta central de Σ_1 se tiene que

$$|\zeta_1| \geq \delta^{-1/3} |\zeta_0|$$

Ya estamos en condiciones de construir la herradura de infinitas patas, y con esto tendremos que la dinámica $\bar{\sigma}$ en $D(\bar{\sigma}) \subseteq \bar{S}$ se “traslada” a la dinámica Φ en un subconjunto de D_0 que llamaremos I . Es decir, se tendrá al shift como subsistema. Recordamos que σ es el corrimiento en $S = \{\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}} : a_n \in \mathbb{N}\}$ y \bar{S} la compactificación de S (ver Apéndice).

Como I será un conjunto para el cual la dinámica es topológicamente equivalente al shift de infinitos símbolos, se heredan un conjunto de propiedades que indican caos, como por ejemplo: órbitas de todos los períodos, órbitas densas, puntos fijos con variedades estables e inestables asociadas, entropía positiva, expansividad.

Teorema 6.3.2. *El sistema (D_0, Φ) posee a $(D(\bar{\sigma}), \bar{\sigma})$ como subsistema:*

Existe $\tau : D(\bar{\sigma}) \subseteq \bar{S} \mapsto D_0$ homeomorfismo sobre su imagen de tal forma que

$$\tau \circ \bar{\sigma} = \Phi \circ \tau$$

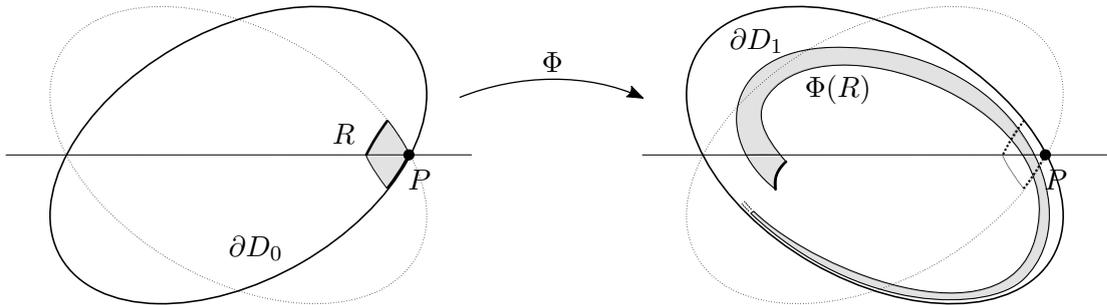
Además $I = \Phi(S)$ es un conjunto hiperbólico invariante y $\Phi|_I$ es topológicamente equivalente a σ vía τ .

Demostración. Nos centraremos en probar que se verifican las condiciones i) y iii) suficientes para la existencia de herradura como subsistema. Dichas condiciones se encuentran en el apéndice (ver A.2.2).

Definimos a R como la clausura de una componente simétrica de $D_0(\delta) \cap D_1(\delta)$. Si δ es suficientemente chico, R estará delimitado por cuatro curvas que identificaremos como lados de R (pues R es topológicamente un cuadrado y jugará el papel de $Q = [0, 1]^2$ en la construcción de una herradura).

Por Lema 6.3.2, dos de los lados de R son curvas que cortan transversalmente a ∂D_0 . Pensamos a estas curvas como lados laterales de un cuadrado

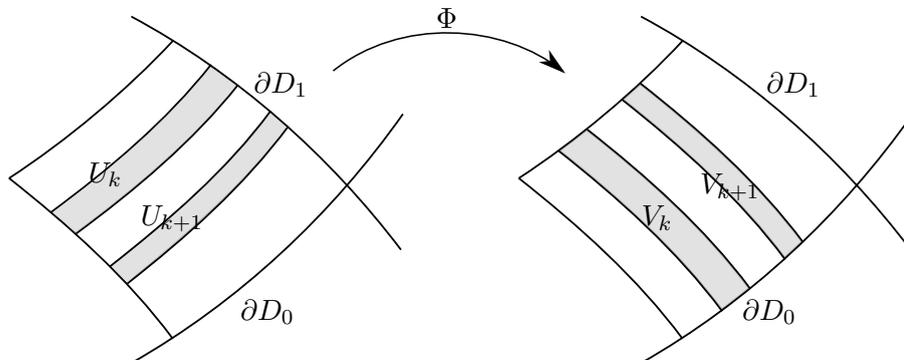
Por Lema 6.3.3, la imagen por Φ de estos lados se aproximan a ∂D_1 en forma de espiral. lo que implica que R y $\Phi(R)$ se intersectan en infinitas componentes, de las cuales, salvo finitas, conectan lados opuestos de R (el lado de arriba y el de abajo). Esto se debe a que el lado correspondiente a $(\partial D_0(\delta)) \setminus \partial D_0$ de R es un compacto en D_0 (y por lo tanto también $\Phi(D_0)$), y al hecho de que $\Phi(D_0)$ es simplemente conexo.



Escribimos a estas componentes que conectan lados opuestos, en orden, como $\{V_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

El orden está dado por su distancia a ∂D_1 . Llamamos $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ a las componentes simétricas de $V_k : \rho(V_k) = U_k$, que son exactamente las componentes de $\Phi^{-1}(R) \cap R$ que conectan lados opuestos, pues:

$$\Phi^{-1}(R) \cap R = \Phi^{-1}(\rho R) \cap \rho R = \rho(\Phi(R) \cap R)$$

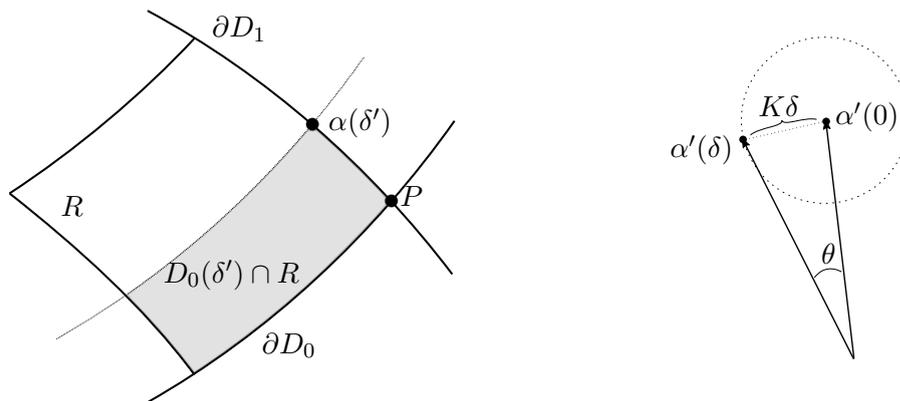


Por lo que hay una biyección entre los conjuntos $\{U_k\}$ (que jugarán el papel de bandas horizontales) y $\{V_k\}$ (bandas verticales). Más aún, veamos que necesariamente $\Phi(U_k) = V_k = \rho U_k$: El hecho de que las imágenes por Φ de las líneas transversales a ∂D_0 se acumulen sobre ∂D_1 en forma de espiral implica que necesariamente el mapa Φ respeta el orden de las componentes de $\Phi^{-1}(R) \cap R$, en el sentido de que cuanto más cerca de ∂D_0 estén las bandas horizontales U_k , más cerca de ∂D_1 estarán las bandas verticales $\Phi(V_k)$. Esto implica $\Phi(U_k) = V_k$, por lo que solo basta probar que efectivamente estos conjuntos son “bandas horizontales y verticales” para corroborar la condición i) para la existencia de la herradura como subsistema (A.2.1).

Sea $P = \partial D_0 \cap \partial D_1 \cap \partial R$. El ángulo que forman ∂D_0 y ∂D_1 en P sólo depende de ϵ y se encuentra en $(0, \pi)$ (Ver 6.3.2). Si δ suf. chico de tal forma que para $\delta' < \delta$ se cumpla $\partial D_0(\delta')$ transversal a ∂D_1 podemos parametrizar $\partial D_1 \cap R$ como $\alpha(\delta)$, tal que $\alpha(\delta) = \partial D_1 \cap (\partial D_0(\delta) \setminus \partial D_0)$. Además α tiene la misma regularidad que D_0 .

Para δ chico, como α tiene derivadas acotadas, podemos afirmar que α cumple $\|\alpha'(\delta) - \alpha'(0)\| \leq K\delta$ para cierto $K > 0$. Esto implica lo siguiente: si θ es el ángulo entre $\alpha'(\delta)$ y $\alpha'(0)$, se tiene $\text{tg}(\theta) \leq \frac{K\delta}{\|\alpha'(0)\|}$, lo que nos permite aproximar θ para δ pequeño:

$$\theta \simeq c\delta, \text{ con } c \text{ cte}$$



Por Lema 6.3.4, la dirección tangente de un borde de una banda $V_k \subseteq \Phi(D_1(\delta))$ se encuentra a lo sumo formando un ángulo $\delta^{\beta/3}$ con la línea central de $\Sigma_1(\delta^{1/3})$. Comparando la dirección tangente de algún punto del borde de la banda con la dirección $\alpha'(0)$ obtenemos para δ suf. chico, que la desviación en el ángulo está acotada por:

$$\delta^{\beta/3} + c\delta < 2\delta^{\beta/3}$$

Podemos considerar un difeomorfismo que mande R en $[0, \delta]^2$ de tal forma que este mapa difiera $O(\delta)$ en norma C^1 con un mapa lineal. La cota que conseguimos permite afirmar que, mediante esta identificación con $[0, \delta]^2$, las derivadas de las curvas borde V_k serán muy próximas a 0, y achicando δ lo suficiente conseguimos que sean efectivamente bandas verticales.

Por la simetría ρ se deduce que las componentes U_k son bandas horizontales. Y con esto queda probada la condición i).

Recordamos que $\Sigma_i(\delta)$ es el conjunto de rectas que forman un ángulo menor a $\delta^{1/3}$ con la línea central respecto a ∂D_i para $i = 1, 2$, y Σ'_i las rectas complementarias. Llamaremos por $L(\Sigma_i)$ y $L(\Sigma'_i)$ a las líneas centrales.

Observamos que como ∂D_0 y ∂D_1 transversales en P , para δ suf chico se cumple $\Sigma_1(\delta^{1/3}) \subseteq \Sigma'_0(\delta^{\beta/3})$.

Por Lema 6.3.2 tenemos $\Phi = \rho\Phi^{-1}\rho$. Luego, usando Lema 6.3.4

$$\begin{aligned} D\Phi(\Sigma'_0(\delta^{\beta/3})) &= \rho D\Phi^{-1}\rho(\Sigma'_0(\delta^{\beta/3})) \\ &= \rho D\Phi^{-1}(\Sigma'_1(\delta^{\beta/3})) \subseteq \rho\Sigma_0(\delta^{1/3}) = \Sigma_1(\delta^{1/3}) \end{aligned}$$

Entonces $D\Phi(\Sigma_1(\delta^{1/3})) \subseteq \Sigma_1(\delta^{1/3})$. Definimos $S^+ = \Sigma_1(\delta^{1/3})$ restricto a $\Phi^{-1}(R) \cap R$. Obtenemos un resultado análogo para el mapa $D\Phi^{-1}$ por la reflexión ρ , y definimos $S^- = \Sigma_0(\delta^{1/3})$ restricto a $\Phi(R) \cap R$.

Si restringimos S^+ a las bandas V_k y S^- a las bandas U_k , tenemos

$$D\Phi(S^+) \subseteq S^+, \quad D\Phi^{-1}(S^-) \subseteq S^-$$

De nuevo por Lema 6.3.4, si $w_0 \in S^+$, $w_1 = D\Phi(w_0)$, ζ_0 proyección de w_0 sobre $L(\Sigma'_0)$ (línea central de Σ'_0), ζ_1 proyección de w_1 sobre $L(\Sigma_1)$ (línea central de Σ_1), entonces

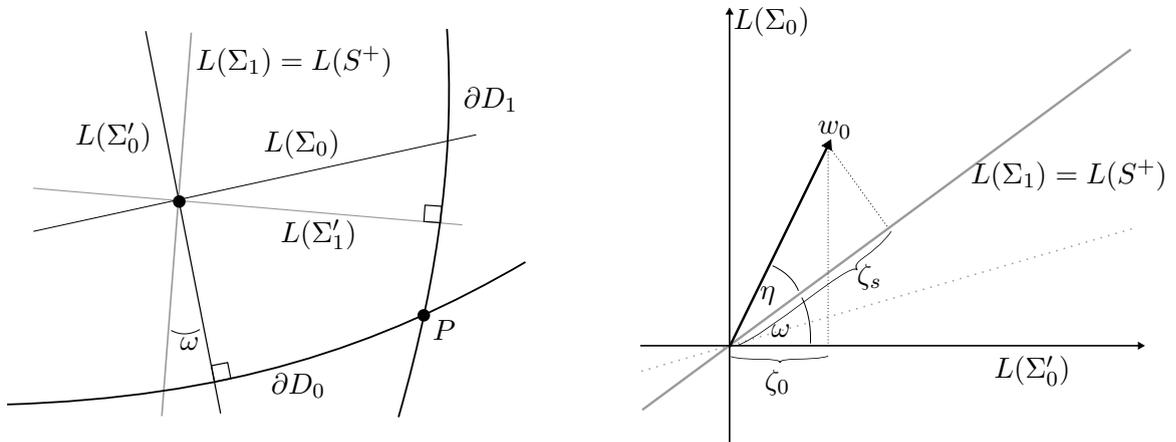
$$|\zeta_1| \geq \delta^{-1/3}|\zeta_0|$$

Para probar la condición iii) basta corroborar el “estiramiento” en la dirección de la línea central $L(\Sigma_1) = L(S^+)$, pues, por simetría, se deduce la condición análoga para Φ^{-1} .

Sea ζ_s proyección de w_0 sobre $L(S^+)$. Podemos suponer que $\|w_0\| = 1$. Si δ suficientemente chico, el ángulo ω entre las líneas centrales $L(\Sigma'_0)$ y $L(S^+)$ es uniformemente pequeño. Además la línea perpendicular a $L(S^+)$ está en Σ_0 y por lo tanto $\zeta_s \neq 0$.

Para terminar la prueba se debe probar que $|\zeta_1| \geq \mu^{-1}|\zeta_s|$ para cierta cte μ .

Consideramos a $L(\Sigma'_0)$ sobre el eje x en \mathbb{R}^2 , y a la línea central $L(S^+)$ en la recta de pendiente $tg(\omega) > 0$. Si $|\zeta_0| \geq |\zeta_s|$ se cumple trivialmente la desigualdad por Lema 6.3.4. Si no se da esta desigualdad, w_0 se encuentra por encima de la recta de pendiente $tg(\omega/2)$ (la bisectriz entre las líneas centrales). Suponemos que el ángulo formado por el eje x y w_0 es mayor o igual a ω (el razonamiento será análogo para ángulos en $(\omega/2, \omega)$). Escribimos a este ángulo como $\omega + \eta$ con $\eta \in [0, \pi/2)$.



Tenemos entonces que $\zeta_s = \cos(\eta)$, y

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= \cos(\omega + \eta) = \cos(\omega)\cos(\eta) - \text{sen}(\omega)\text{sen}(\eta) \\ &> \cos(\eta)(\cos(\omega) + \text{sen}(\omega)) = \zeta_s(\cos(\omega) + \text{sen}(\omega)) > c\zeta_s \end{aligned}$$

Donde c es una constante uniforme para δ chico que depende sólo del ángulo entre ∂D_0 y ∂D_1 . Si definimos $\mu = c^{-1}\delta^{1/3}$:

$$|\zeta_1| \geq \delta^{-1/3}|\zeta_0| \geq \mu^{-1}|\zeta_s|$$

Corroborando la condición iii).

Por Teorema A.2.2 (en Apéndice) se concluye la tesis. □

Construida la conjugación, podemos demostrar que existen órbitas que cumplen una sucesión arbitraria de ciclos:

Demostración de Teorema 6.3.1. Buscamos probar que existe un entero $m = m(\epsilon)$ de tal forma que cualquier sucesión infinita de términos mayores a m , corresponda a una sucesión de ciclos transcurridos entre los momentos que una órbita pasa por $z = 0$.

Algunos aspectos a notar del comportamiento de Φ en el cuadrado R en el teorema 6.3.2 y la conjugación del shift en I en A.2.1 :

- La imagen de R vía Φ se aproxima en forma de espiral a ∂D_1 , cortando a R de un lado a otro en las bandas que llamamos U_k . Si N es la cantidad de “vueltas” que da $\Phi(R)$ para intersectar R en U_1 , entonces en $N + 1$ vueltas intersectará a R en U_2 . Este comportamiento es claro si pensamos la dinámica de Φ como proyecciones de los gráficos de las soluciones vistos en el espacio de fase extendido $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^2$.
- Análogamente, ocurre lo mismo considerando Φ^{-1} y las bandas V_k .
- La conjugación de los sistemas (S, σ) y (I, Φ) está dada por los itinerarios de los puntos de I en las bandas U_k y V_k :

$$s = \{s_n\} \mapsto p_s \in I, \text{ donde } p_s \text{ es el único tal que } \Phi^n(p_s) \in W_{s_n}$$

Con $W_{s_n} = V_{s_n}$ para $n < 0$ y $W_{s_n} = U_{s_n}$ para $n \geq 0$.

Formalmente, con las “vueltas” de $\Phi(R)$ nos referimos a lo siguiente:

Los puntos de U_k corresponden a órbitas tales que el tiempo transcurrido hasta el próximo retorno a $z = 0$ es de la forma

$$t_1 - t_0 = 2\pi(k + N + \vartheta)$$

Donde N dependerá solo del tamaño de R (es decir de δ) y $\vartheta \in (-1/2, 1/2)$. El número de vueltas (o cantidad de ciclos) será $c_1 = \lceil \frac{(t_1 - t_0)}{2\pi} \rceil = k + N$.

Un punto de R que va a parar por Φ a U_k , y por Φ^2 va a parar a U_{k+l} , deberá completar primero $c_1 = k + N$ ciclos para pasar por $z = 0$, y luego $c_2 = k + l + N$ ciclos para pasar nuevamente por $z = 0$.

Los mismos razonamientos se repiten para las bandas V_k y el mapa Φ^{-1} . Siguiendo esta idea es que vamos a identificar las sucesiones de ciclos $\{c_n\}$ con sucesiones de retornos.

Dado $\{\hat{c}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sucesión de naturales con $\hat{c}_n \geq N$ (esta es la sucesión de ciclos), definimos

$$s_n = \hat{c}_n - N$$

Entonces, si $s = \{s_n\}$, p_s es un punto de I tal que $\Phi^n(p_s) \in W_{s_n} = W_{(\hat{c}_n - N)}$.

Si listamos las bandas en la que esta p_s empezando en t_0 , éstas serán

$$\{U_{s_0}, U_{s_1}, \dots, U_{s_n}, \dots\}$$

Por lo visto y por definición de s_n , la sucesión de ciclos asociada a la órbita que empieza en p_s , es

$$c_n = s_n + N = \hat{c}_n - N + N = \hat{c}_n$$

El mismo razonamiento vale a pasado con Φ^{-1} , concluyendo que dada $\{\hat{c}_n\}$ sucesión de ciclos mayores a $N = m(\epsilon)$, p_s es un punto tal que realiza dicha sucesión. \square

Proposición 6.3.1. *Integrabilidad del problema de 3 cuerpos:*

Para excentricidades pequeñas el problema estudiado en este capítulo no admite una cantidad conservada $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ analítica.

Demostración. Supongamos que sí admite tal F analítica.

F induce una función $f : D_0 \rightarrow \mathbb{R}$ también analítica, no constante, que verifica $\forall p \in D_0$ $f(\Phi(p)) = f(p)$. Recordamos que por Teorema 6.3.2, existe $I \subset D_0$ un conjunto invariante para el cual la dinámica Φ es conjugada al shift de infinitos símbolos. Más aún, este conjunto será la intersección transversal de infinitas curvas horizontales $U(s)$ y verticales $V(s)$. Las curvas $U(s)$ surgen de considerar $R \cap_n (\Phi^n(R))$, y las curvas $V(s)$ de considerar $R \cap_n (\Phi^{-n}(R))$. Como I admite una órbita densa, por continuidad f es constante en I .

Necesariamente f debe cumplir que para cualquier punto de p ,

$$D_p(f) \equiv 0$$

Para ver esto, basta con ver que existen dos direcciones l.i en $T_p D_0$ tales que Df se anula. Esto es consecuencia inmediata de que p se encuentra en la intersección de dos curvas transversales $U(p)$ y $V(p)$, pues esto nos permite acercarnos a p por dos sucesiones de elementos de I , una a lo largo de U y otra a lo largo de V . Como f es constante en I , las derivadas direccionales en dirección de U y V en p son nulas.

Observar que el mismo argumento sirve para derivadas de orden superior. Luego, las derivadas de todos los órdenes en los puntos de I son nulas.

Como I es un conjunto que acumula sobre sí, y f analítica, necesariamente $f \equiv 0$ en D_0 , lo que lleva a una contradicción. \square

6.4. Demostración de lemas técnicos

A continuación, estudiaremos la ecuación diferencial asociada a la dinámica en cuestión, para remarcar observaciones, elegir buenas coordenadas y allanar el problema para posteriormente probar los lemas técnicos que se usan en la prueba de la conjugación al shift.

La ecuación a estudiar es

$$\ddot{z} + \frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = 0$$

Con $r(t) = \frac{1}{2}(1 - \epsilon \cos(t)) + O(\epsilon^2)$, que satisface $r(t) = r(-t) = r(t + 2\pi)$. Buscamos estudiar soluciones que partan de $z = 0$ con velocidades cercanas a las de “escape”. Si $(t_0, |v_0|)$ son el tiempo y velocidad de una solución al pasar por $z = 0$, denotamos por $(t_1, |v_1|)$ al próximo tiempo y velocidad en la que la partícula atraviesa el plano $z = 0$.

Por las observaciones al comienzo de la sección, podemos estudiar la dinámica de retorno en coordenadas (t, v) , considerando a $t \bmod(2\pi)$ un ángulo y a $|v| > 0$ un radio del plano \mathbb{R}^2 . La dinámica de retorno la describe el mapa $\Phi : D_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $\Phi(t_0, |v_0|) = (t_1, |v_1|)$, siendo $D_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ el conjunto (que debe ser abierto) de los puntos parametrizados por $(t, |v|)$ que admiten un retorno, agregando el origen $(t_0, 0)$. El objetivo del primer lema (6,1,1) es probar que este dominio es topológicamente un disco abierto cuyo borde es suave.

Primero estudiemos brevemente qué ocurre con los puntos en $\mathbb{R}^2 \setminus D_0$ (los puntos que no regresan). Sea $z(t)$ una solución tal que $z(t_0) = 0$, $\dot{z}(t_0) = v_0 > 0$, y t_1 es $t_1 = \infty$, es decir la solución no regresa y por lo tanto $\forall t > t_0$ $z(t) > 0$. Veamos que también tiene sentido asociar un v_1 :

A partir de t_0 , se deduce de la ecuación dif. que $\ddot{z}(t) < 0$. Esto implica que la velocidad $\dot{z}(t)$ es monótona decreciente. Más aún, $\forall t \geq t_0$ $\dot{z}(t) > 0$, pues si en algún momento $\dot{z} = 0$, se alcanzaría un máximo y la partícula retornaría a $z = 0$.

Además, como $z(t)$ es monótona creciente, podemos afirmar que $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = +\infty$, pues si tendiera a una altura $z = a$, la velocidad decrecería con una tasa mayor a $\frac{a}{(a^2 + (1/2 - \epsilon)^2)^{3/2}}$, que contradice $\dot{z} > 0$ para todo $t > t_0$.

Resumiendo:

- $\forall t \geq t_0$ \dot{z} monótona decreciente.
- $\forall t \geq t_0$ $\dot{z} \in (0, v_0)$.
- $\forall t \geq t_0$ $z(t)$ monótona creciente.
- $z(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$

Por lo que los puntos que escapan “para arriba” divergen a $+\infty$ y su velocidad converge. Llamamos $v_1 = \dot{z}(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{z}(t) \geq 0$. Las soluciones tales que $\dot{z}(+\infty) = 0$, serán las que lograron escapar con la mínima velocidad necesaria: las correspondientes a las condiciones iniciales en ∂D_0 .

Esto motiva el estudio de $+\infty$ para poder escribir a D_0 como aquellas condiciones iniciales tales que sus correspondientes órbitas llegan a ∞ con velocidad asintótica nula.

Recordamos que estudiaremos la dinámica a menos del signo de z y por lo tanto no perdemos generalidad al suponer que $z > 0$.

Consideramos el siguiente cambio de coordenadas para un entorno del infinito que no contenga al 0:

$$z(t(s)) = \frac{2}{q^2(s)}, \quad \dot{z}(t(s)) = -p(s)$$

Con $t(s)$ una reparametrización del tiempo tal que $\frac{\partial t}{\partial s}(s) = \frac{4}{q(s)^3}$, y la variable $q \in (0, +\infty)$, donde $q \rightarrow 0$ corresponde a $z \rightarrow +\infty$.

La ecuación diferencial en estas coordenadas se escribe:

$$\frac{\partial q}{\partial s}(s) = p(s), \quad \frac{\partial p}{\partial s}(s) = q \left(1 + \frac{q^4}{4} r^2\right)^{-3/2}, \quad \frac{\partial t}{\partial s} = \frac{4}{q^3}$$

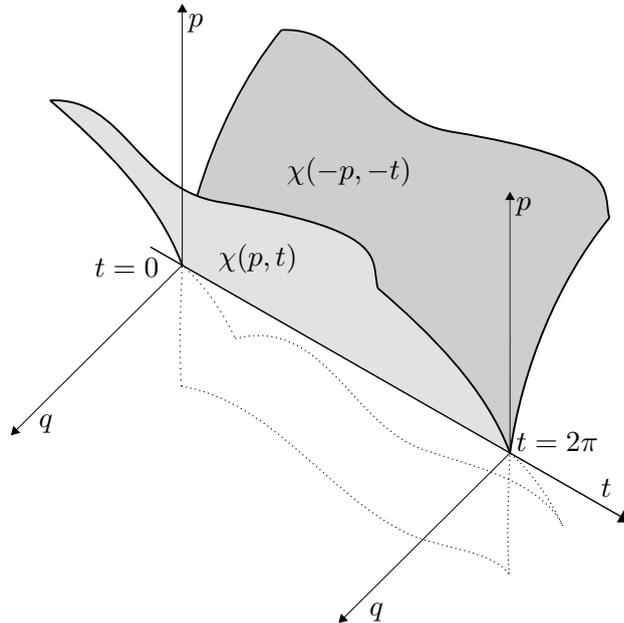
Observamos que si r fuera constante (caso $\epsilon = 0$), la ecuación en (q, p) linealizada en 0 sería $(q'(s), p'(s)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (q, p)$, y por lo tanto, por teorema de Hartman-Grobman, encontraríamos una variedad estable e inestable dadas respectivamente por $q = \pm p + \dots$

Sin embargo, en el caso que nos concierne, r sí depende del tiempo. De todas formas, $q = p = 0$ es una órbita 2π periódica en t y por ella pasan dos variedades invariantes:

$$q = \chi(p, t) = p(1 + a_4 p^4 + a_7(t) p^7 + \dots)$$

$$q = \chi(-p, -t) = -p(1 + a_4(-p)^4 + a_7(-t)(-p)^7 + \dots)$$

La prueba de existencia de estas variedades invariantes se reduce a la prueba de curvas invariantes de $t = 0$ a $t = 2\pi$. Este resultado, que extiende el caso no autónomo, no lo probaremos y se encuentran en el trabajo de McGehee [McG73]. De hecho, observando que la reflexión $(z, \dot{z}, t) \rightarrow (z, -\dot{z}, -t)$ se transforma a $(q, p, t) \rightarrow (q, -p, -t)$, basta con mostrar la existencia de sólo una de las dos variedades invariantes.



Consideremos un nuevo cambio de coordenadas con el fin de “enderezar” a estas variedades invariantes:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}(q - \chi(-p, -t)) = \frac{1}{4}(q + p) + \dots \\ y = \frac{1}{4}(q - \chi(p, t)) = \frac{1}{4}(q - p) + \dots \end{cases}$$

Estudiando el desarrollo de Taylor de $(1 + \frac{r^2}{4}q^4)^{-3/2}$ centrado en $q = 0$, se obtiene:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = x(1 + O_4), \quad \frac{\partial y}{\partial s} = -y(1 + O_4)$$

$$\frac{\partial t}{\partial s} = \frac{1}{2((x+y)^3 + O_4)} = \frac{4}{q^3}$$

Donde O_4 hace referencia a una función tal que evaluada en $(\lambda x, \lambda y, t)$ y dividida por λ^4 está uniformemente acotada cuando $\lambda \rightarrow 0$.

La restricción $q > 0$ en las nuevas coordenadas se traduce a $2(x+y) + O_4 > 0$.

Si volvemos a escribir la ecuación en función de t :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, t) = x(2(x+y)^3 + O_4) \\ \dot{y} = g(x, y, t) = y(-2(x+y)^3 + O_4) \end{cases}$$

La reflexión $(q, p, t) \mapsto (q, -p, -t)$ se traduce a $(x, y, z) \mapsto (y, x, -t)$, por lo que $f(x, y, t) = -g(y, x, -t)$.

Proposición 6.4.1. *Sea $(x(t), y(t))$ una solución para $t = t_0$ en el dominio $q = 2(x+y) + O_4 > 0$, tal que si $|x|, |y| < a$ para un a suficientemente chico, entonces esta solución cumple que:*

$(0, 0)$ es un punto de acumulación de $(x(t), y(t))$ si y solamente si $x(t_0) = 0$. Más aún, si $x(t_0) = 0$, $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$.

En otras palabras, la única forma de permanecer por siempre cerca del infinito es estar en el eje y y tender al infinito (en coordenadas (x, y) tender al origen).

Demostración. Si $x(t) \neq 0$, y a es pequeño:

$$\frac{f(x, y, t)}{x} = 2(x+y)^3 + O_4 = \frac{q^3}{4}(1 + O_4) \geq \frac{q^3}{8}$$

Luego, si $x(t_0) \neq 0$, $\frac{\dot{x}}{x} \geq \frac{q^3}{8}$. Lo que implica $\forall t > t_0$ $|x(t)| > |x(t_0)|$ y por lo tanto no acumula en $(0, 0)$.

Por otro lado, si $x(t_0) = 0$, $\forall t > t_0$ $x(t) = 0$ y a es chico, la ecuación diferencial adquiere la forma

$$\dot{y} = g(0, y, t) = y(-2y^3 + O_4) \leq -y^4$$

Integrando, obtenemos

$$y(t) \geq \frac{1}{(3(t-t_0) + y_0^{-3})^{1/3}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Concluyendo que $y(t) \rightarrow 0$.

□

Veamos que con esta proposición podemos dar una imagen más precisa de la dinámica cercana al infinito ($q = 0$) y podemos hacer un bosquejo del diagrama de fase en las coordenadas (x, y) .

Tenemos:

- Las únicas soluciones que tienden a $(0, 0)$ son las que cumplen $x(t_0) = 0$.
- Si $x(t_0) \neq 0$, $x(t)$ se aleja de 0

- Si $x(t_0) > 0, y(t_0) > 0$:
 $\forall t \geq t_0, y(t) > 0$ (pues $y = 0$ para la solución con $y_0 = 0$) y $x(t)$ monótona creciente estricta (pues $\dot{x} > 2x^4$). Por lo tanto con estas condiciones iniciales, la solución se escapa de cualquier entorno de $(0, 0)$.
- Si $x(t_0) > 0, y(t_0) < 0$:
 $\forall t \geq t_0, y(t) < 0, y$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = p \frac{q^3}{4} = \frac{q^3}{2} (x - y + \dots) > 0$$

Luego $q > q_0$ si $t > t_0$ y $\dot{x} \geq x \frac{q_0^3}{8}$. Por lo tanto la solución escapa de cualquier entorno de $(0, 0)$.

- Si $x(t_0) < 0$:
 $x(t)$ es monótona decreciente. Por la región de definición de estas coordenadas, necesariamente $y(t_0) > 0$. Más aún, $y(t)$ es monótona decreciente pues $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t}$, y $\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{q^3}{4} > 0$.
Argumentando como en el inciso anterior $\frac{\partial q}{\partial t} < 0$, por lo que necesariamente $(x(t), y(t))$ tiende a un punto en la curva $q = 0$.

Para terminar de interpretar la información obtenida, recordamos que si $z = \frac{1}{q^2}$ y $\dot{z} = -p$, las variables x, y están dadas por:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}(q + p) + \dots \\ y = \frac{1}{4}(q - p) + \dots \end{cases}$$

Por lo que en los puntos de la curva $q = 0$:

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow \dot{z} = 0 \\ x < 0 &\Rightarrow \dot{z} > 0 \\ x > 0 &\Rightarrow \dot{z} < 0 \end{aligned}$$

En resumen:

- $x(t_0) > 0, y(t_0) > 0$ corresponden a órbitas que retornan a $z = 0$.
- $x(t_0) > 0, y(t_0) < 0$ corresponden a órbitas que escapan a pasado de $z = 0$ con velocidad asintótica distinta de 0.
- $x(t_0) = 0$ son las órbitas que escapan con velocidad asintótica 0
- $y(t_0) = 0$ son las órbitas que escapan a pasado con velocidad asintótica 0.
- $x(t_0) < 0, y(t_0) > 0$ corresponden a las órbitas que escapan con velocidad asintótica distinta de 0.

Teniendo esta información en cuenta, estamos en condiciones de demostrar los lemas

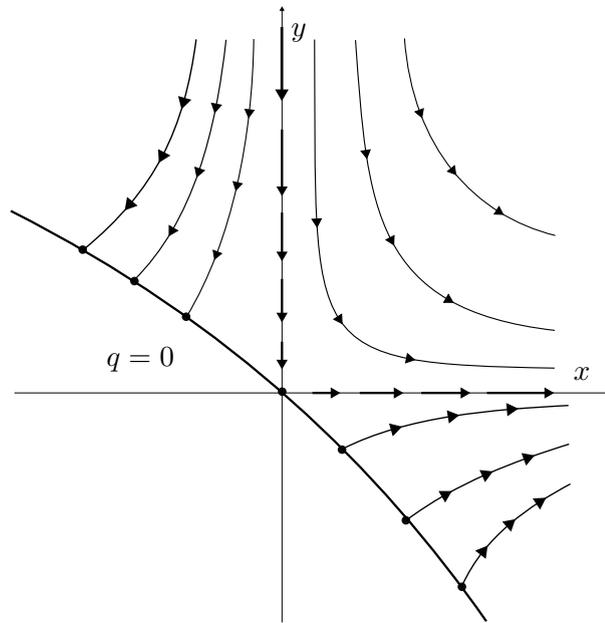


Figura 6.3: Proyección de órbitas sobre el plano (x, y)

Demostración Lema 6.1.1. Sabemos que D_0 es un abierto. Basta con probar que ∂D_0 es una curva cerrada simple analítica, pues por Teorema de Jordan la curva separa al plano en una componente acotada y una no acotada, donde necesariamente $0 \in \mathbb{R}^2$ se encuentra en la componente acotada.

En las coordenadas (x, y) , los puntos de ∂D_0 corresponden a aquellas soluciones tales que $\dot{z}(+\infty) = 0$. Es decir, a los puntos de la forma $(0, y)$ con $y > 0$ y t arbitrario.

Si tomamos un $a > 0$ suficientemente chico, cada órbita que parte de $x = 0$ corta una única vez al plano $y = a$, pues y es monótona decreciente estricta.

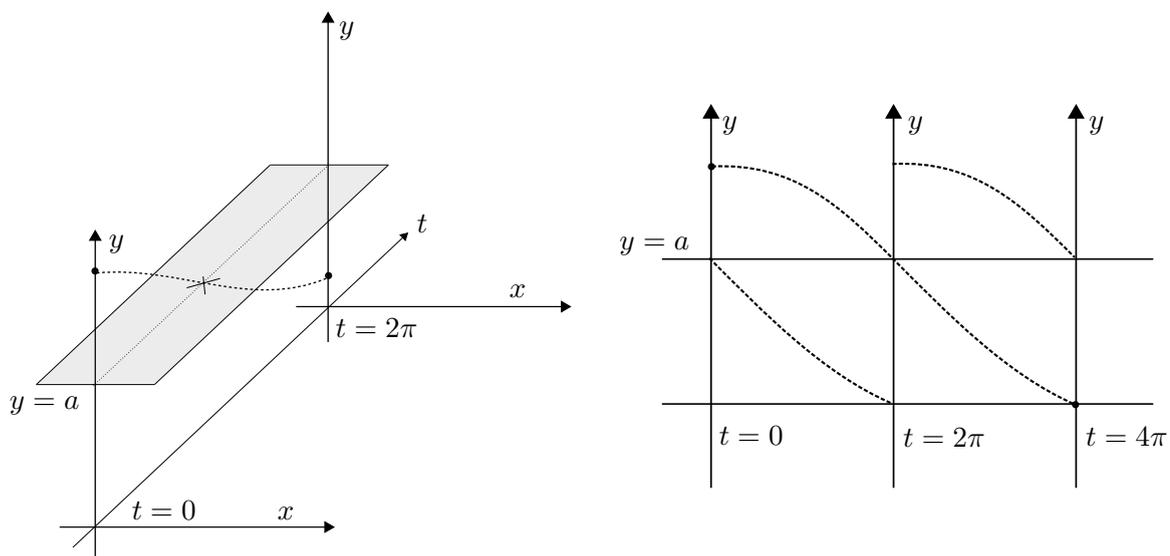


Figura 6.4: Intersección de una solución con el plano $y = a$

Recordamos que, a efectos de ver los retornos en D_0 las órbitas con condición inicial t_0 y $t_0 + 2\pi$ se identifican. Esto implica que los puntos de intersección de las soluciones que

empiezan en $x = 0$ con el plano $y = a$ conforman una curva cerrada analítica y simple.

Identificamos a cada punto de esta curva con el tiempo en el cual la solución que pasa por ahí se encontraba en t_0 (basta correr el tiempo a pasado hasta llegar a $z = 0$).

$$\text{Órbitas con } \dot{z}(+\infty) = 0 \longleftrightarrow \text{Intersección con } y = a \longrightarrow \partial D_0$$

Esta identificación preserva la regularidad de la curva cerrada simple que corresponde a $y = a$ cocientada por $t \sim t + 2\pi$, obteniendo lo que queríamos. Observamos además que la elección de a es arbitraria □

Demostación Lema 6.3.1. Recordamos que dado (t_0, v_0) tiempo y velocidad inicial en $z = 0$, $\Phi(t_0, |v_0|) = (t_1, |v_1|)$, donde si $z(t)$ solución con esas condiciones iniciales, $|\dot{z}(t_1)| = |v_1|$ siendo t_1 el próximo tiempo de retorno. Análogamente, en caso de estar definido, Φ^{-1} le asigna a $(t_0, |v_0|)$ el par $(t_{-1}, |v_{-1}|)$ correspondientes al corte anterior de la órbita con el plano $z = 0$.

La ecuación diferencial es invariante bajo la reflexión $(z, \dot{z}, t) \mapsto (z, -\dot{z}, -t)$. Entonces si $z_{t_0, v_0}(t)$ solución con $z(t_0) = 0$, $\dot{z}(t_0) = v_0$,

$$z_{-t_0, -v_0}(-t) = z_{t_0, v_0}(t)$$

Y de esta igualdad se deduce

$$\Phi\rho(t_0, |v_0|) = \Phi(-t_0, |v_0|) = (-t_{-1}, |v_{-1}|) = \rho\Phi^{-1}(t_0, |v_0|)$$

Pues

$$\begin{cases} z_{-t_0, -v_0}(-t_{-1}) = z_{t_0, v_0}(t_{-1}) = 0 \\ \dot{z}_{-t_0, -v_0}(-t_{-1}) = \dot{z}_{t_0, v_0}(t_{-1}) = v_1 \end{cases}$$

Concluimos que $\rho\Phi\rho = \Phi^{-1}$ y que, si $D_0 = \text{Dom}(\Phi)$, entonces $\rho D_0 = \text{Dom}(\Phi^{-1}) = D_1$ □

Demostación Lema 6.3.2. Probemos que si $\epsilon \neq 0$, $D_1 \neq D_0$ y sus bordes se intersectan transversalmente en el eje de simetría.

Sea $v_0 = \lambda(t_0, \epsilon)$ parametrización analítica de la curva cerrada 2π -periódica ∂D_0 (recordamos que ϵ es la excentricidad de las elipses del plano $z = 0$).

Por Lema 6.3.1, ∂D_1 se parametriza con $\lambda(-t_0, \epsilon)$ y ambas curvas se intersectan en $t_0 = 0$. Para probar que en $t_0 = 0$ con ϵ chico las tangentes son distintas, basta con probar que $\frac{\partial \lambda}{\partial t_0}(0, \epsilon) \neq 0$ (es decir, que el radio varía en función del ángulo cerca de $t_0 = 0$). Para esto, alcanza con probar que para $t = 0$, $\epsilon = 0$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \epsilon \partial t_0} < 0$$

Ya que si $g(\epsilon) = \frac{\partial \lambda}{\partial t_0}(0, \epsilon)$, $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \epsilon \partial t_0}(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial \epsilon} < 0$, entonces g es monótona decreciente cerca de $\epsilon = 0$ y como $g(0) = 0$, necesariamente $\frac{\partial \lambda}{\partial t_0}|_{t_0=0} = g(\epsilon) < 0$ si ϵ chico.

Consideramos $U(z, t) = (z^2 + r^2(t))^{-1/2}$. La ecuación diferencial se escribe como $\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}$. Luego:

$$-\dot{z}\ddot{z} = -\dot{z}\frac{\partial U}{\partial z} \Rightarrow \int \dot{z}d\dot{z} = \int \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z}dt$$

Tomamos como condición inicial un punto de ∂D_0 (cuya solución z cumple $z(t_0) = 0$, $\dot{z}(t_0) = v_0$, $t_1 = +\infty$ y $\dot{z}(+\infty) = 0$). Integrando entre t y $+\infty$ obtenemos:

$$\frac{1}{2}\dot{z}^2 = - \int_t^\infty \frac{\partial U}{\partial z} \dot{z} dt$$

Si $\epsilon = 0$:

$$\frac{1}{2}\dot{z}^2 = - \int_t^\infty \frac{\partial U_0}{\partial z} dz = U_0(z)$$

De aquí se puede despejar una solución $\zeta(t)$ con $\zeta(0) = 0$ y $\dot{\zeta}(0) > 0$. En particular $\dot{z}(0) = 2$ (la velocidad de escape en caso autónomo) y la función $\zeta(t)$ es positiva y monótona creciente para $t > 0$.

Si aproximamos U con su desarrollo de Taylor en función de ϵ , $U = U_0 + \epsilon U_1 + O(\epsilon^2)$, donde

$$U_0 = \frac{1}{(z^2 + 1/4)^{1/2}}$$

$$U_1 = \left. \frac{\partial U}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \frac{\cos(t)}{4(z^2 + 1/4)^{3/2}}$$

Como $v_0 = \lambda(t_0, \epsilon) = \dot{z}(t_0; t_0, \epsilon)$ aproximando con el desarrollo de Taylor según ϵ , la solución se escribe como:

$$z(t; t_0, \epsilon) = \zeta(t - t_0) + \epsilon z_1 + O(\epsilon^2)$$

Y por lo tanto, $\lambda(t_0, \epsilon) = \dot{z}(t_0, t_0, \epsilon) = \dot{\zeta}(0) + \epsilon \dot{z}_1|_{t=t_0} + O(\epsilon^2)$

Observamos que la primer aproximación de λ , como $\dot{\zeta}(0) = 2$, es la parametrización de una circunferencia de radio 2, lo que condice con lo mostrado para el caso autónomo.

Queremos computar la función z_1 , y para esto usando la aproximación de U , compararemos los coeficientes de los desarrollos de Taylor.

Por un lado:

$$\frac{\dot{z}^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\dot{\zeta}(t - t_0)^2 + \epsilon \dot{z}_1(t)^2 + 2\epsilon \dot{z}_1(t) \dot{\zeta}(t - t_0) + O(\epsilon) \right)$$

Y por otro:

$$- \int_t^\infty \frac{\partial U}{\partial z} \dot{z} dt = - \left(\int_t^\infty \frac{\partial U_0}{\partial z} \dot{z} dt + \epsilon \int_t^\infty \frac{\partial U_1}{\partial z} \dot{z} dt + \dots \right)$$

En la última expresión, el término en ϵ es:

$$- \int_t^\infty \frac{\partial U_1}{\partial z} \dot{z} dt = \frac{3}{4} \int_t^\infty \frac{\cos(t) z \dot{z}}{(z^2 + 1/4)^{5/2}} dt$$

Comparando los términos en ϵ de ambas expresiones y evaluando en $\epsilon = 0$, $t = t_0$:

$$\dot{z}_1(t) = \frac{3}{8} \int_{t_0}^\infty \frac{\cos(t) \zeta \dot{\zeta}}{(\zeta^2 + 1/4)^{5/2}} dt = \frac{3}{8} \int_0^\infty \frac{\cos(s + t_0) \zeta \dot{\zeta}}{(\zeta^2 + 1/4)^{5/2}} ds$$

Observando que $\cos(s + t_0) = \cos(s)\cos(t_0) - \sin(s)\sin(t_0)$, si definimos

$$\begin{cases} A = \int_0^\infty \frac{\sin(s) \zeta \dot{\zeta}}{(\zeta^2 + 1/4)^{5/2}} dt \\ B = \int_0^\infty \frac{\cos(s) \zeta \dot{\zeta}}{(\zeta^2 + 1/4)^{5/2}} dt \end{cases}$$

Entonces

$$\lambda(t_0, \epsilon) = 2 + \epsilon \frac{3}{8} (-A \sin(t_0) + B \cos(t_0)) + O(\epsilon^2)$$

Por lo tanto, para probar $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \epsilon \partial t_0} \Big|_{t_0=0, \epsilon=0} < 0$, alcanza con probar $A > 0$.

Como $\zeta(s) > 0$, $\dot{\zeta}(s) > 0$ para $s > 0$ y $\text{sen}(s) > 0$ para $s \in (0, \pi/2)$, por integración por partes:

$$A \geq \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin(s) \zeta \dot{\zeta}}{(\zeta^2 + 1/4)^{5/2}} ds = \int_{\pi/2}^{\infty} \cos(s) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\zeta \dot{\zeta}}{(\zeta^2 + 1/4)^{5/2}} \right) ds$$

Si llamamos $u = \zeta^2 + 1/4$

$$\frac{\partial}{\partial s} (\zeta \dot{\zeta} u^{-5/2}) = \dot{\zeta}^2 u^{-5/2} + \zeta \ddot{\zeta} u^{-5/2} - 5(\zeta \dot{\zeta})^2 u^{-7/2}$$

Recordando que $\ddot{\zeta} = \frac{\partial U_0}{\partial z} = -\zeta u^{-3/2}$ y que $\dot{\zeta}^2 = 2U_0 = 2u^{-1/2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} (\zeta \dot{\zeta} u^{-5/2}) &= 2u^{-6/2} - \zeta^2 u^{-8/2} - 10\zeta^2 u^{-1/2} u^{-7/2} = \\ &u^{-8/2} (-11\zeta^2 + 2u) = u^{-8/2} (-11\zeta^2 + 2\zeta^2 + 1/2) = u^{-8/2} (-9\zeta^2 + 1/2) = f(\zeta) \end{aligned}$$

Como ζ monótona creciente, se tiene que $\zeta^2(s) \geq \zeta^2(\pi/2) > 1$ para $s \geq \pi/2$. Para corroborar la última desigualdad, si esto no ocurriera ($\zeta^2(\pi/2) \leq 1$), tendríamos

$$\dot{\zeta}^2(s) = \frac{2}{(\zeta^2 + 1/4)^{1/2}} \geq \frac{2}{(5/4)^{1/2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} > \frac{4}{3}$$

Pero como $\zeta(0) = 0$, se tiene

$$\zeta^2(\pi/2) > \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 > 1$$

Llegando a una contradicción.

Por lo tanto, $\zeta^2(s) > 1$ implica $\forall s \geq \pi/2$ $f(\zeta) < 0$. Más aún, $f(\zeta)$ es monótona creciente, pues:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s}(\zeta(s)) &= \dot{\zeta}(s) \frac{\partial f}{\partial \zeta}(\zeta) = \dot{\zeta}(s) \left(-8\zeta u^{-10/2} (-9\zeta^2 + 1/2) - u^{8/2} (18\zeta) \right) \\ &= \dot{\zeta}(s) \left(\zeta u^{-10/2} (72\zeta^2 - 4) + \zeta u^{-10/2} (-18\zeta^2 - 9/2) \right) \\ &= \dot{\zeta}(s) \left(\zeta u^{-10/2} (54\zeta^2 - 17/2) \right) > 0 \end{aligned}$$

Concluimos que, como $f(\zeta) < 0$ y $f(\zeta)$ monótona creciente:

$$A > \int_{\pi/2}^{\infty} \cos(s) f(\zeta) ds > 0$$

□

Demostración Lema 6.3.3. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \overline{D_0}$, $\gamma(\lambda) = (v_0(\lambda), t_0(\lambda))$ la curva con $\gamma(0) = p \in \partial D_0 \cap \partial D_1$, $\gamma((0, 1]) \in D_0$ y el corte en p sea no tangencial.

Para estudiar el comportamiento de Φ cerca de ∂D_0 , construiremos un mapa auxiliar Ψ cerca de un entorno del infinito, para interpretar la dinámica de las órbitas que regresan en las coordenadas (x, y) .

Las órbitas que regresan se “aproximarán” al infinito, y cuanto más se acerquen al infinito, más tardarán en volver a $z = 0$. El comportamiento límite, es decir, las soluciones correspondientes a ∂D_0 , como vimos en el lema anterior están en biyección con una curva cerrada cercana al infinito. Lo mismo ocurrirá con ∂D_1 de tal forma que podremos traducir la dinámica Φ a una dinámica Ψ cerca del infinito.

Recordamos que

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, t) = x(2(x + y)^3 + O_4) \\ \dot{y} = g(x, y, t) = y(-2(x + y)^3 + O_4) \end{cases}$$

Como vimos, las órbitas que no escapan a futuro ni a pasado corresponden a la región $x > 0, y > 0$. Las órbitas que escapan con velocidad asintótica nula (las correspondientes a ∂D_0) son aquellas con condiciones iniciales en la región $x = 0$.

Si consideramos $0 < a < 1$ suficientemente chico, tenemos una buena aproximación de la dinámica en la región

$$\begin{cases} 0 < x < a \\ 0 < y < a \\ 0 \geq t < 2\pi \end{cases}$$

Dado $\delta \in [0, a]$, definimos los anillos $A_0(\delta)$ y $A_1(\delta)$ como

$$\begin{aligned} A_0(\delta) &= \{(x, y, t) : x \in (0, \delta), y = a, t \in [0, 2\pi)\} \\ A_1(\delta) &= \{(x, y, t) : x = a, y \in (0, \delta), t \in [0, 2\pi)\} \end{aligned}$$

Observamos que, si a suficientemente chico, las soluciones intersectan a $A_0(a)$ y $A_1(a)$ transversalmente. Probaremos que si δ suficientemente chico, las soluciones que parten de $A_0(\delta)$ pasan por $A_1(a)$.

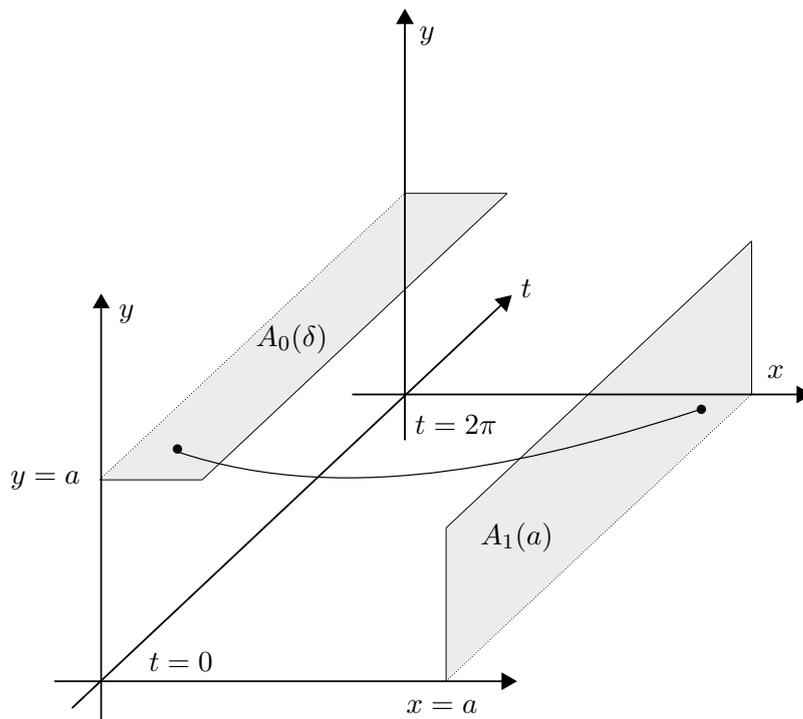


Figura 6.5: Correspondencias definidas por Ψ

Esto nos permite definir el mapa $\Psi : A_0(\delta) \rightarrow A_1(a)$, que le asocia a cada punto su siguiente corte en $A_1(a)$.

Definimos también los mapas:

$$\begin{aligned} \Phi_- : A_0(\delta) &\rightarrow D_0 \quad q \mapsto \text{corte a pasado con } z = 0 \\ \Phi_+ : A_1(a) &\rightarrow D_1 \quad q \mapsto \text{corte a futuro con } z = 0 \end{aligned}$$

Observando que Φ_- y Φ_+ son difeomorfismos sobre su imagen, tenemos que:

$$\Phi|_{\Phi_-(A_0(\delta))} = \Phi_+ \circ \Psi \circ \Phi_-^{-1}$$

El mapa Ψ juega el papel de Φ en regiones cercanas a los bordes de D_0 y D_1 .

Denotamos con (x_0, t_0) a los puntos de A_0 y con (y_1, t_1) a los de A_1 . Probemos lo siguiente:

Afirmación: Sea α tal que $0 < \alpha < 1/2$, si a suf. chico y $\delta^{1-2\alpha} < a$, entonces el mapa Ψ está bien definido y cumple $\Psi(A_0(\delta)) \subseteq A_1(\delta^{1-2\alpha})$

Prueba de la afirmación:

Recordamos que con la reparametrización s del tiempo t , la ecuación diferencial se escribe como:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial s} = x(1 + O_4) \\ \frac{\partial y}{\partial s} = -y(1 + O_4) \\ \frac{\partial t}{\partial s} = \frac{1}{2((x+y)^3 + O_4)} = \frac{4}{q^3} \end{cases}$$

Por lo que si a suficientemente chico, tenemos que

$$(1 - \alpha)x \leq \frac{\partial x}{\partial s} \leq (1 + \alpha)x \Rightarrow x_0 e^{(1-\alpha)s} \leq x(s) \leq x_0 e^{(1+\alpha)s}$$

$$(1 + \alpha)(-y) \leq \frac{\partial y}{\partial s} \leq (1 - \alpha)(-y) \Rightarrow y_0 e^{-(1+\alpha)s} \leq y(s) \leq y_0 e^{-(1-\alpha)s}$$

Tomamos $y_0 = a$.

Necesariamente existe s^* , que depende de (t_0, x_0) , tal que $x(s^*) = a$. Despejando obtenemos:

$$\begin{aligned} e^{(1-\alpha)s^*} \leq \frac{a}{x_0} \leq e^{(1+\alpha)s^*} &\Rightarrow (1 - \alpha)s^* \leq \log\left(\frac{a}{x_0}\right) \leq (1 + \alpha)s^* \\ &\Rightarrow (1 - \alpha)\log\left(\frac{a}{x_0}\right)^{-1} \leq \frac{1}{s^*} \leq (1 + \alpha)\log\left(\frac{a}{x_0}\right)^{-1} \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{1 + \alpha}\right)\log\left(\frac{a}{x_0}\right) \leq s^* \leq \left(\frac{1}{1 - \alpha}\right)\log\left(\frac{a}{x_0}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$y(s^*) < y_0 e^{-(1-\alpha)s^*} = a e^{-(1-\alpha)s^*} \leq a e^{\left(\frac{-1+\alpha}{1-\alpha}\right)\log\left(\frac{a}{x_0}\right)} = a \left(\frac{x_0}{a}\right)^{\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)}$$

Como $x_0 < \delta$

$$y(s^*) \leq a \left(\frac{\delta}{a}\right)^{\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)} < a \left(\frac{\delta}{a}\right)^{(1-2\alpha)} < \delta^{(1-2\alpha)}$$

Pues $\frac{1-\alpha}{1+\alpha} > (1 - 2\alpha)$ y se cumple $a\delta^{1-2\alpha} < a^{1-2\alpha}\delta^{1-2\alpha}$.

Por lo tanto Ψ está bien definida y efectivamente $\Psi(A_0(\delta)) \subseteq A_1(\delta^{1-2\alpha})$

Nos interesa estimar el tiempo que tarda una solución en ir de $(x_0, t_0) \in A_0(\delta)$ a $(y_1, t_1) \in A_1(a)$, es decir, calcular $T = t - t_0$.

Probaremos que si a es suficientemente chico y $0 < \alpha < 1/2$, $T \geq x_0^{\frac{-3}{2}(1-2\alpha)}$:

Si a es chico, $\frac{\partial t}{\partial s} \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(x+y)^3} \right)$. Como habíamos calculado, con la reparametrización temporal, s^* es lo que se tardaba en ir de (x_0, t_0) en (y_1, t_1) . Luego

$$T = t - t_0 \geq \frac{1}{4} \int_0^{s^*} (x+y)^{-3} ds$$

Definimos s_0 como el valor tal que $e^{2s_0} = \frac{y_0}{x_0}$. Además, $s_0 < s^*$, pues:

$$s_0 = \frac{1}{2} \log\left(\frac{y_0}{x_0}\right) < \frac{1}{1+\alpha} \log\left(\frac{a}{x_0}\right) \leq s^*$$

Por lo tanto

$$T = t - t_0 \geq \frac{1}{4} \int_0^{s_0} (x+y)^{-3} ds$$

Recordando que $x(s) \leq x_0 e^{(1+\alpha)s}$ e $y(s) \leq y_0 e^{-(1-\alpha)s}$

$$T \geq \frac{1}{4} \int_0^{s^*} \left(x_0 e^{(1+\alpha)s} + y_0 e^{-(1-\alpha)s} \right)^{-3} ds$$

Si $\sigma = s_0 - s$

$$T \geq \frac{1}{4} \int_0^{s^*} \left(x_0 e^{(1+\alpha)(s_0-\sigma)} + y_0 e^{-(1-\alpha)(s_0-\sigma)} \right)^{-3} d\sigma$$

Pero

$$\begin{aligned} x_0 e^{(1+\alpha)(s_0-\sigma)} &= x_0 (e^{2s_0})^{1/2} (e^{2s_0})^{\alpha/2} e^{-\sigma} e^{-\alpha\sigma} \\ &= x_0 \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{1/2} \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\alpha/2} e^{-\sigma} e^{-\alpha\sigma} = (x_0 y_0)^{1/2} \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\alpha/2} e^{-\sigma} e^{-\alpha\sigma} \end{aligned}$$

Repitiendo el razonamiento para y_0 , obtenemos

$$\begin{cases} x_0 e^{(1+\alpha)(s_0-\sigma)} = (x_0 y_0)^{1/2} \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\alpha/2} e^{-\sigma} e^{-\alpha\sigma} \\ y_0 e^{-(1-\alpha)(s_0-\sigma)} = (x_0 y_0)^{1/2} \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\alpha/2} e^{\sigma} e^{-\alpha\sigma} \end{cases}$$

0 Juntando esto:

$$\begin{aligned} T &\geq \frac{1}{4} (x_0 y_0)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{\frac{3\alpha}{2}} \int_0^{s_0} \frac{1}{(e^\sigma + e^{-\sigma})^3} d\sigma \\ &= \frac{1}{4} (x_0)^{-\frac{3}{2}(1-\alpha)} (y_0)^{-\frac{3}{2}(1+\alpha)} \int_0^{s_0} \frac{1}{(e^\sigma + e^{-\sigma})^3} d\sigma \end{aligned}$$

Como

$$\int_0^{s_0} \frac{1}{(e^\sigma + e^{-\sigma})^3} d\sigma \geq \int_0^{s_0} \frac{1}{(2e^\sigma)^3} d\sigma = \frac{1}{8} \left(\frac{e^{-3\sigma}}{-3} \Big|_0^{s_0} \right)$$

Concluimos en que, si δ suficientemente chico:

$$\begin{aligned} T &\geq \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{24}\right) (x_0)^{-\frac{3}{2}(1-\alpha)} (a)^{-\frac{3}{2}(1+\alpha)} \left[1 - \left(\frac{a}{x_0}\right)^{-3/2} \right] \\ &\geq x_0^{-\frac{3}{2}(1-2\alpha)} \end{aligned}$$

Esto implica que $\lim_{x_0 \rightarrow 0} T = +\infty$. Lo que significa, como esperábamos, que si la condición inicial se encuentra muy cerca de una órbita correspondiente a ∂D_0 , se mantendrá mucho tiempo cerca del infinito ($q = 0$). Si observamos la figura 6.5, este comportamiento nos dice que si comenzamos en un punto cercano a $x = 0$ en A_0 , deberán

cumplirse varios ciclos de tiempo 2π para que la solución corte a A_1 . Esto se traduce al comportamiento cerca de los bordes ∂D_0 y ∂D_1 .

Para finalizar con el Lema 4, consideremos $\hat{\gamma}$ una curva C^1

$$\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \overline{A_0(\delta)}$$

con $\hat{\gamma}(0, 1] \subseteq A_0(\delta)$ tal que el corte con $\partial A_0(\delta) \cap \{x : x = 0\}$ en $\hat{\gamma}(0)$ sea transversal. Podemos describir a la curva $\hat{\gamma}$ como $t_0(x_0)$ con $x_0 \in (0, \delta)$ y asumimos $|t_0(x_0)| < 2\pi$.

Observamos que la imagen de esta curva por Ψ cumple

$$t_1 = t_0 + T(x_0) \xrightarrow{x_0 \rightarrow 0} +\infty$$

Por otro lado, recordando que escribimos a (x_0, t_0) el punto inicial en A_0 y (y_1, t_1) el correspondiente punto de corte en A_1 , obtuvimos que

$$y_1 \xrightarrow{x_0 \rightarrow 0} 0$$

pues $y(s^*) < a \left(\frac{a}{x_0} \right)^{\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right)}$.

Esto implica que la imagen de la curva por Ψ se aproxima a $y = 0$. Pero viendo a A_1 como un anillo, esto quiere decir que la imagen de esta curva se enrolla en forma de espiral en el borde correspondiente a $y = 0$.

Como los mapas Φ_+ , Φ_- son difeos en $\overline{A_1(a)}$ y $\overline{A_0(\delta)}$ respectivamente, y podemos entender a $\hat{\gamma}$ como $\Phi_-(\hat{\gamma}) = \gamma$, obtenemos que la misma propiedad se traslada al mapa $\Phi : D_0 \rightarrow D_1$, lo que termina la prueba.

□

Apéndice A

Preliminares topológicos

A.1. Definiciones

Definición A.1.1. Sean \mathcal{X} y \mathcal{Y} espacios topológicos.

- Llamamos *sistema dinámico discreto* al par (\mathcal{X}, Φ) donde $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ es una función continua.
- Decimos que los sistemas (\mathcal{X}, Φ) y (\mathcal{Y}, Ψ) son conjugados o topológicamente equivalentes si existe $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ homeomorfismo tal que

$$h \circ \Phi \circ h^{-1} = \Psi$$

- El sistema (\mathcal{X}, Φ) es semiconjugado a (\mathcal{Y}, Ψ) si existe $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ mapa continuo sobreyectivo tal que

$$h \circ \Phi = \Psi \circ h$$

- El sistema (\mathcal{X}, Φ) tiene a (\mathcal{Y}, Ψ) como subsistema si existe $T : Y \rightarrow X$ homeomorfismo sobre su imagen tal que

$$\Phi \circ T = T \circ \Psi$$

Definición A.1.2. Llamamos alfabeto a un conjunto de la forma $A = \{1, \dots, n\}$ con $n \in \mathbb{N}$. Definimos el espacio S como espacio de las sucesiones de elementos del alfabeto A :

$$S = \{(\dots, s_{-1}, s_0, s_1, \dots) : s_k \in A\}$$

- Definimos la topología de S como la inducida por la siguiente norma:

$$\text{Si } s = \{s_k\} \in S, \text{ definimos } \|s\| = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^k} (1 - s_k)$$

Observamos que el espacio S con esta topología es compacto.

- Definimos el *shift de Bernoulli* σ como $\sigma : S \rightarrow S$ tal que, si $s = \{s_k\} \in S$

$$(\sigma(s))_k = s_{k+1}$$

Proposición A.1.1. *Propiedades del shift*

El sistema (S, σ) tiene varias propiedades topológicas asociadas al “caos”, por ejemplo:

- *Es transitivo*

- *Es mixing*
- *Es expansivo*
- *Posee intersecciones homoclínicas*
- *Tiene un conjunto denso de puntos periódicos*

Definición A.1.3. *Shift de infinitos símbolos*

Si permitimos que el alfabeto A sea infinito ($A = \mathbb{N}$), podemos redefinir la topología de forma más general, la generada por la siguiente base de entornos:

Dado $\hat{s} = \{\hat{s}_k\} \in S$, $j \in \mathbb{N}$, definimos los entornos de \hat{s} como:

$$U_j(\hat{s}) = \{s \in S : s_k = \hat{s}_k \text{ para } |k| < j\}$$

La misma definición genera la topología métrica en el caso finito. Sin embargo, para el caso del alfabeto infinito, S no será compacto.

Se puede compactificar el espacio S de la siguiente manera: Definimos la compactificación \bar{S} como el conjunto de las sucesiones de elementos del alfabeto y los elementos de la forma

$$\begin{cases} 1) & s^{(\infty, r)} = (\infty, s_r, s_{r+1}, \dots) : r \leq 0 \\ 2) & s^{(m, \infty)} = (\dots, s_{m-1}, s_m, \infty) : m \geq 0 \\ 3) & s^{(\infty, r, m, \infty)} = (\infty, s_r, \dots, s_m, \infty) : r \leq 0, m \geq 0 \\ 4) & s^\infty = (\infty, \infty) \end{cases}$$

Y definimos los entornos de estos nuevos elementos como:

$$\begin{cases} 1) & \text{Si } -j \geq r, \hat{s} = \hat{s}^{(\infty, r)} : U_j(\hat{s}) = \{s \in \bar{S} : s_k = \hat{s}_k \text{ para } r \leq k \leq -j, s_{r-1} \geq j\} \\ 2) & \text{Si } j \leq m, \hat{s} = \hat{s}^{(m, \infty)} : U_j(\hat{s}) = \{s \in \bar{S} : s_k = \hat{s}_k \text{ para } j \leq k \leq m, s_{m+1} \geq j\} \\ 3) & \text{Si } r \leq -j_1 \leq j_2 \leq m, \hat{s} = \hat{s}^{(\infty, r, m, \infty)} : U_{j_1, j_2}(\hat{s}) = \\ & \{s \in \bar{S} : s_k = \hat{s}_k \text{ con } r \leq k \leq -j_1 \text{ o } j_2 \leq k \leq m, s_{r-1} \geq j_1, s_{m+1} \geq j_2\} \\ 4) & U_j(s^\infty) = \{s \in \bar{S} : s_0 > j\} \end{cases}$$

De esta forma \bar{S} contiene a S como subespacio y es compacto. La extensión de σ no estará definida en \bar{S} : Definimos de la misma forma que σ ,

$$\bar{\sigma} : D(\bar{\sigma}) \rightarrow C(\bar{\sigma})$$

Donde $D(\bar{\sigma}) = \{s \in \bar{S} : s_0 \neq \infty\}$ y $C(\bar{\sigma}) = \{s \in \bar{S} : s_1 \neq \infty\}$

A.2. Herradura: shift como subsistema

La construcción de la herradura de Smale es el modelo topológico caótico por antonomasia. En dicha construcción, a grandes rasgos, se define un difeomorfismo T que preserva volumen en $[0, 1]^2$ que hace lo siguiente: Mediante una homotecia lineal se estira al cuadrado hasta llevarlo al rectángulo $[0, 1/3] \times [0, 3]$. Luego, el rectángulo se “dobla” de tal forma que $[0, 1/3] \times [0, 1]$ queda fijo y $[0, 1/3] \times [2, 3]$ va linealmente a $[2/3, 1] \times [0, 1]$.

Resulta que el sistema $([0, 1]^2, T)$ posee al *shift de Bernoulli* de dos símbolos como subsistema: existe un subconjunto compacto e invariante (homeomorfo a un conjunto de Cantor) en $[0, 1]^2$ de tal forma que la acción de T en este subconjunto es conjugada a (S, σ) con S sucesiones del alfabeto $\{1, 2\}$, por lo que se heredan las propiedades caóticas de este mapa (para más detalles ver [Sma98]).

La construcción de este modelo se puede hacer en términos más generales:

Definición A.2.1. Sea $Q = [0, 1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ un cuadrado.

- Decimos que una curva continua $y = u(x)$ en Q es **μ -horizontal** si $u(x) \in [0, 1]$, $x \in [0, 1]$ y $\exists \mu \in [0, 1)$ tal que $\forall x_1, x_2 \in [0, 1] |u(x_1) - u(x_2)| \leq \mu|x_1 - x_2|$
- Si $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son dos curvas horizontales tales que $\forall x \in [0, 1] u_1(x) < u_2(x)$, llamamos **banda horizontal** al conjunto $U = \{(x, y) : x \in [0, 1], y \in [u_1(x), u_2(x)]\}$. A $d(U) = \max_{x \in [0, 1]} (|u_1(x) - u_2(x)|)$ le llamamos **diámetro de U**.
- Análogamente definimos **curvas verticales** y **bandas verticales**.

Lema A.2.1. Si $U_1 \subseteq U_2 \supseteq U_3 \supseteq \dots$ una sucesión monótona de bandas horizontales tales que $d(U_k) \xrightarrow{k} 0$, entonces $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_k$ es una curva horizontal.

Lema A.2.2. Una curva horizontal y vertical se intersectan en un único punto.

Teorema A.2.1. Sea $A = A_N = \{1, \dots, N\}$ con $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\{U_a\}_{a \in A}$, $\{V_a\}_{a \in A}$ bandas horizontales y verticales respectivamente, tales que las bandas U_a son todas disjuntas y así también las bandas V_a .

Sea Φ un homeomorfismo de \mathbb{R}^2 que satisface las siguientes dos condiciones:

- i) $\forall a \in A \Phi(V_a) = U_a$, y por lo tanto $\Phi(\partial V_a) = \partial U_a$.
- ii) Si V banda vertical en $\cup_{a \in A} V_a$, entonces $\forall a \in A \Phi^{-1}(V) \cap V_a = \tilde{V}_a$ es una banda vertical (en particular no vacía), y para cierto ν fijo en $(0, 1)$, $d(\tilde{V}_a) \leq \nu d(V_a)$.
Si U banda horizontal en $\cup_{a \in A} U_a$, entonces $\forall a \in A \Phi(U) \cap U_a = \tilde{U}_a$ es una banda horizontal (en particular no vacía), y para cierto ν fijo en $(0, 1)$, $d(\tilde{U}_a) \leq \nu d(U_a)$.

Entonces Φ tiene al shift σ de N símbolos como subsistema, esto es:

Existe un homeomorfismo $T : S \rightarrow Q$ tal que

$$\Phi \circ T = T \circ \sigma$$

Donde S son las sucesiones del alfabeto A_N y σ el shift de Bernoulli.

Si $N < \infty$, $T(S)$ es un cerrado invariante homeomorfo al conjunto de Cantor. Si N es infinito, podemos extender T al borde: $\bar{T} : D(\bar{\sigma}) \rightarrow \bar{Q}$ con

$$\bar{T} \circ \bar{\sigma} = \Phi \circ \bar{T}$$

La condición ii) suele ser difícil de probar. Para mapas con más regularidad existe una condición alternativa:

Si $\Phi = (f, g)$ es un difeo C^1 de Q , $(x_1, y_1) = (f(x_0, y_0))$, $D\Phi_{(x_0, y_0)}(\zeta_0, \eta_0) = (\zeta_1, \eta_1)$, definimos la condición alternativa:

- iii) Para $\mu \in (0, 1)$, el fibrado de sectores $S^+ : |\eta| \leq \mu|\zeta|$ definido en $\cup_{a \in A} V_a$ se mapea a sí mismo por $D\Phi$: $D\Phi(S^+) \subseteq S^+$

Además, si $(\zeta_0, \eta_0) \in S^+$, $|\zeta_1| \geq \mu^{-1}|\zeta_0|$ (hay estiramiento en la dirección x)

Por otro lado, el fibrado en $\cup_{a \in A} U_a$ definido por $S^- : |\zeta| \leq \mu|\eta|$ se mapea a sí mismo por $D\Phi^{-1}$: $D\Phi^{-1}(S^-) \subseteq S^-$.

Además, si $(\zeta_1, \eta_1) \in S^-$, $|\eta_0| \geq \mu^{-1}|\eta_1|$ (se estira a pasado en dirección y).

Teorema A.2.2. *Sea Φ un difeomorfismo C^1 de Q que satisface las condiciones **i)** y **iii)** con $0 < \mu < \frac{1}{2}$, entonces se cumple también la condición **ii)** para $\nu = \mu(1 - \mu)^{-1}$.*

Por lo tanto Φ tiene al shift de N símbolos como subsistema.

Más aún, el conjunto invariante $I = T(S)$ es un conjunto hiperbólico: para cada $p \in I$ existen dos direcciones l.i en el tangente L_p^+ y L_p^- que varían continuamente con p y verifican:

1. $d\Phi(L_p^+) = L_{\Phi(p)}^+$, $d\Phi(L_p^-) = L_{\Phi(p)}^-$

2. Para cierta constante $\lambda > 1$, considerando la norma $|(\zeta, \eta)| = \max\{|\zeta|, |\eta|\}$ en el tangente, se tiene

$$\begin{cases} |d\Phi(\zeta, \eta)| \geq \lambda|(\zeta, \eta)| & \text{para } (\zeta, \eta) \in L_p^+ \\ |d\Phi^{-1}(\zeta, \eta)| \geq \lambda|(\zeta, \eta)| & \text{para } (\zeta, \eta) \in L_p^- \end{cases}$$

Bibliografía

- [Arn89] V. I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [Che15] Alain Chenciner. Poincaré and the three-body problem. *Progress in Mathematical Physics*, 67:51–149, 10 2015.
- [Fas99] Francesco Fassò. Notes on finite dimensional integrable hamiltonian systems, January 1999.
- [Gia04] Mariano Giaquinta. *Calculus of Variations II*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [KD18] A. Knauf and J. Denzler. *Mathematical Physics: Classical Mechanics*. UNITEXT. Springer Berlin Heidelberg, 2018.
- [McG73] Richard McGehee. A stable manifold theorem for degenerate fixed points with applications to celestial mechanics. *Journal of Differential Equations*, 14(1):70–88, jul 1973.
- [Mos73] Jürgen Moser. *Stable and Random Motions in Dynamical Systems: With Special Emphasis on Celestial Mechanics (AM-77)*. Princeton University Press, rev - revised edition, 1973.
- [Sam05] Martín Sambarino. Tópicos de sistemas dinámicos, 2005.
- [Sma98] Steve Smale. Finding a horseshoe on the beaches of rio. *The Mathematical Intelligencer*, 20(1):39–44, 1998.