Dinámica Estocástica

Introducción a las ecuaciones diferenciales estocásticas y al movimiento Browniano.

Candido Lucas de Oliveira Gaffrée

Monografía de Grado
Licenciatura en Matemática

Orientador:
José Rafael León Ramos

UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Montevideo-Uruguay
Noviembre

Abstract

In this monographic work we study the Wiener process, how to make the construction of such process, and its application on one kind of stochastic differential equations. Once we finish with the differential equation part, we use this knowledge in order to study the harmonic oscillator with white noise as an example.

Resumen

En esta monografía haremos la construcción del proceso de Wiener para luego fundamentar la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas. Y de este hecho estudiar el oscilador armónico con ruido blanco como ejemplo de una dinámica estocástica.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi madre por toda la insistencia que hizo previa a mi ingreso a la licenciatura en pro de mi pasión, siempre sabiendo que mi camino se encuentra dónde está mi amor. Quiero agradecer a mi padre por siempre enseñarme e inculcarme este amor por las matemáticas desde que tengo memoria. Además de bancarme todos estos años, tanto con mis estudios como con mi alimentación y forma de vida.

Agradezco a Chichi por la increíble orientación que hizo en esta monografía, y las increíbles tardes donde discutíamos los resultados. Y por último agradezco a mis tres mejores amigos: Rafael, Santi y Martín, por estar siempre ahí para mi, aunque no impactaron directamente a esta monografía de fin de carrera, si lo hicieron estos años con mi vida entera.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Antes de escribir esta monografía ya sabía aproximadamente el tema del que quería aprender y escribir: "Dinámica Estocástica". Pero... ¿Qué significan estas dos palabras combinadas? Cuando hablamos de un sistema dinámico, estamos hablando de un sistema que varía bajo una transformación T_t con t un índice arbitrario, y T_t representa la ley de dicha transformación al tiempo, o paso, t. O sea, hablamos de estudiar como varia un sistema con unas determinadas hipótesis bajo una transformación de dicho sistema. Por eso lo "Dinámico". El ejemplo más clásico es el de las ecuaciones diferenciales, donde para cada condición inicial x_0 tengo $T_t x_0 = x_t$, y T_t depende de la ecuación diferencial. Si estamos bajo las hipótesis de Picard, entonces estará bien definida esta función. Otro ejemplo interesante y sencillo es el de componer. Por ejemplo, si nos situamos ahora en el plano complejo, podemos definir la siguiente regla:

$$x_0 \in \mathbb{C} \text{ la condicion inicial}$$
$$z_0 = 0 \text{ La posicion inicial}$$
$$z_{n+1} = z_n^2 + x_0$$

En el fondo, sigue existiendo una transformación T_n tal que $T_n x_0 = z_n$. Este bello ejemplo es donde aparece el famoso conjunto de Mandelbrot, el conjunto de los x_0 tales que su orbita, i.e $\{T_n x_0\}$, no tiende a infinito cuando n tiende a infinito. O sea, ∞ no es un atractor de esa órbita.

Ahora, ¿Qué entendemos por 'Estocástico'? Mejor dicho: ¿Qué es un proceso Estocástico? Este término entra dentro de la teoría de la probabilidad, y se refiere a una familia de variables aleatorias $\{X_t\}$ indexadas por un conjunto de indexación arbitrario. Pero a diferencia de los sistemas dinámicos que nombré anteriormente, no tienen porque estar relacionadas, es más, en Estadística es normal tomar una sucesión de variables aleatorias independientes entre ellas. Por ejemplo podemos tener una sucesión $\{X_n\}$ sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, por ejemplo, en el caso de un muestreo aleatorio donde tomamos un montón de muestras, y si tienen segundo momento finito, se llega a conclusiones tan bonitas como la siguiente:

$$\lim_n P\left(\frac{\sum_i^n X_n - n\mathbb{E}X_1}{\sqrt{nVar(X_1)}} \leq z\right) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} dx$$

El famoso teorema central del limite, que justifica gran parte de la estadística utilizada en otras ciencias y muestra que, si tenemos una sucesión de variables aleatorias centradas, con varianza 1, e independientes entre ellas, entonces cuando n es suficientemente grande, la distribución de $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ se aproxima mucho a una normal estándar. En probabilidad el objetivo es conocer distribuciones y medidas de probabilidades, ya que el factor aleatorio, es lo que hace imposible determinar, en el caso de una variable aleatoria, el valor de X, y por lo tanto lo interesante no será pensar a X como una indeterminada que adopta valores, sino como una indeterminada que puede tomar un montón de valores con una cierta distribución. Y un lector poco acostumbrado a esta rama, debe dejar de pensar a las variables como números, sino como funciones con una cierta distribución.

Cuando hablamos entonces de 'Dinámica Estocástica' combinaremos ambos mundos en uno solo. Habrá una ley de cambio T_t y una distribución de probabilidad asociada. O lo que será, un proceso estocástico $\{X_t\}$ con las variables relacionadas en algún sentido, y con alguna condicion inicial X_0. Veamos un ejemplo de dinámica estocástica en la circunferencia S^1 pensada como el intervalo $\mathbb{R}$ modulo 1:

$$X_0 \text{ es una v.a uniforme}$$
$$X_{n+1} = X_n + \theta (\text{mod } 1) \quad \theta \in \mathbb{R}$$

En el caso de que θ sea irracional, entonces si tomamos un conjunto medible $A \subset S^1$, con medida positiva, entonces:

$$P(\exists n / X_n \in A) = 1$$

Y esto es claro, una vez que se sabe que la órbita será irracional para el valor que X_0 tome. Otro ejemplo de una posible 'Dinámica Estocástica' es el paseo al azar, donde a tiempo cero $X_0 = 0$, y lanzo una moneda equilibrada para decidir la siguiente posición, si sale cara le sumo 1 a X_0, si sale cruz, le resto 1. Y por lo tanto:

$$P(X_1 = 1) = \frac{1}{2} = P(X_1 = -1)$$

Y hago lo mismo en cada paso. En esta dinámica se pueden obtener resultados interesantes como que:

$$P(\exists n / X_n > M > 0) = 1 \ \forall M > 0$$

O sea, casi seguramente cualquier trayectoria del proceso superara cualquier barrera.

En esta monografía tocaremos dos formas de dinámica estocástica, en el capítulo 2 estudiaremos el famoso movimiento Browniano, o también conocido como proceso de Wiener, uno de los procesos estocásticos más importantes y según Britannica.com es el proceso más importante de la teoría de la probabilidad. Su comportamiento es idéntico a la de un paseo aleatorio, pero en tiempo continuo, y con trayectorias continuas. La idea primigenia de esta dinámica fue de Robert Brown en 1827 al observar el movimiento irregular de partículas en determinadas condiciones. Y Wiener en 1923 le dio un tratamiento matemático más riguroso a los modelos que ya estaban circulando en esa época sobre ese movimiento. Este proceso cumple una propiedad muy interesante, al pasar de tiempo discreto del paseo aleatorio, a un tiempo continuo, que es su no derivabilidad en todo punto casi seguramente. Además de otras que veremos en dicho capitulo. Por tanto, nuestro objetivo en la primera parte será construir el proceso de Wiener y luego estudiar sus propiedades que serán fundamentales para el capítulo 4: donde se estudiarán las ecuaciones diferenciales estocásticas, nuestra segunda forma de dinámica estocástica. El proceso de Wiener es muy útil para agregarle ruidos aleatorios a ecuaciones diferenciales ya conocidas por el lector. En el capítulo 4 veremos cómo definir una ecuación diferencial estocástica, sobre sus soluciones, una versión estocástica del teorema de Picard, ejemplos y mucho más. Para finalizar la monografía veremos en el capítulo 5 un ejemplo concreto de dinámica estocástica: el oscilador armónico con ruido blanco. Uno cuando estudia el oscilador armónico puede estudiar la dinámica cuando agrega una fuerza externa continua y arbitraria, en este caso la fuerza será una perturbación aleatoria. Al agregar dicho factor aleatorio se termina obteniendo propiedades asintóticas muy interesantes que desembocan en propiedades ergodicas con las que finalizaremos la monografía. Por último, las imágenes presentadas son meramente ilustrativas y para hacer más bonita a la monografía.

1.1. Prerequisitos

Este documento está orientado a una persona con estudios avanzados en matemática. Los conocimientos recomendados necesarios son:

1. Calculo diferencial e integral en varias variables
2. Teoría de la medida e integración
3. Teoría de la probabilidad
4. Ecuaciones diferenciales

Y será más interesante y de mayor provecho para un entendimiento más completo para aquellos que ya tienen conocimientos en:

1. Topología y espacios métricos
2. Análisis funcional
3. Procesos estocásticos

Será fundamental conocer como se define la esperanza condicional a partir de la derivada de Radon-Nykodim, se puede ver más en [7], en las primeras paginas de las notas. O al menos conocer las propiedades que cumple la esperanza condicional, que también se pueden ver en [7]. Y sobre los conocimientos de teoría de la medida, a cuanto más conocimiento mejor se entenderá, principalmente conocer cómo a partir de una premedida definida en un álgebra, se puede obtener una medida definida en la σ-álgebra generada por el álgebra.

1.2. Un aviso personal

Antes de que empieces a leer esta monografía me gustaría contarte como me gustaría que la encares. Siendote muy sincero, mi querido lector, yo desde que entré a la licenciatura me sentí de la misma forma que Harry se sintió al llegar a Hogwarts. Por mis venas recorrian pasión y magia. ¡Era impresionante! Solo con mi capacidad deductiva, y ordenando mis pensamientos creando buenas definiciones, podía deducir resultados impresionantes y muy poco naturales (para mi, en dicho entonces). Cada libro que me devoraba, y cada curso por el que pasaba, me sentía como un explorador, un aventurero indagando por tierras ocultas; un niño investigando una mansión con pasadizos ocultos, un mago aprendiendo nuevos hechizos. Cuando aprendía más por mi cuenta, sentía que entendía más en profundidad los resultados del curso, era como aprender magia oculta.

Y es con esta pasión que me gustaria que leyeras. Poniendote en la piel de ese joven estudiante que eligió ser matematico por la pasión, por el amor a esta ciencia y por el goze que genera aprender y entender más.

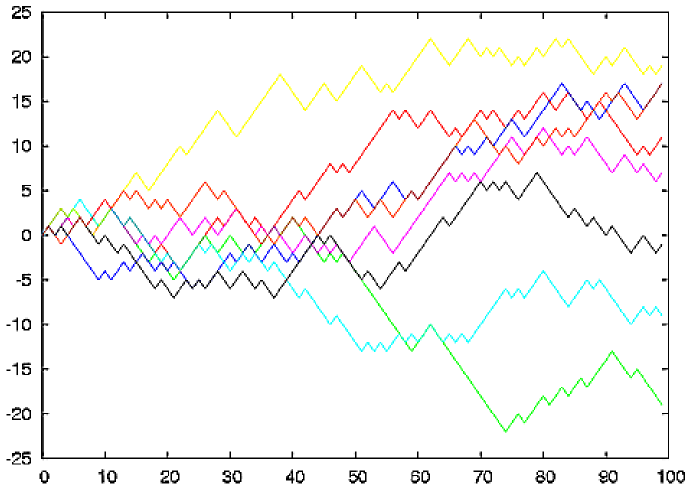
Capítulo 2

Movimiento Browniano

2.1. Introducción

Tomemos como ejemplo el famoso paseo aleatorio simple, donde $X(n)$ con n natural, es la posición a tiempo n de la partícula. Y cumple la siguiente propiedad: Sea $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots$ sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $P(\sigma_n = i) = \mathbb{1}_{i=1} p + \mathbb{1}_{i=-1}(1-p)$. Entonces:

$$X(n) := \sigma_1 + \ldots + \sigma_n \tag{2.1}$$



Esta partícula es un movimiento en los números enteros que parte desde el valor 0. A tiempo 1 hay una probabilidad p de que esté en la posición 1, y una probabilidad $1-p$ de estar en -1. Se puede ver que $X(n)$ cumple la propiedad de que, si conocés $X(n-1)$, entonces $X(n)$ tiene probabilidad p de ser $X(n-1)+1$. Si pedimos $p = \frac{1}{2}$ entonces se tiene que:

$$\mathbb{E}X(n) = 0 \qquad Var(X(n)) = n$$

Y cumple propiedades muy interesantes, por agregarle el factor 'aleatorio' a la dinámica. Cuando tenemos una dinámica determinista en un sistema, por ejemplo en el caso de una ecuación diferencial, el sistema por completo queda determinado por sus condiciones iniciales, pero en el caso de un sistema con dinámica estocástica las condiciones iniciales determinan parte del comportamiento, pero no todo. Y por lo tanto, sistemas como el anterior pueden cumplir propiedades como la "pérdida de memoria", esto es que para conocer el comportamiento de $X(n)$ solo te basta con conocer $X(n-1)$, propiedad que en el caso determinista no tiene sentido de enunciar. Además de esta ultima propiedad cumple la de tener incrementos independientes, o sea:

$$X(n) - X(m) \perp X(n^{'}) - X(m^{'}) \tag{2.2}$$

Si se cumple que $(m, n) \cap (m^{'}, n^{'}) = \emptyset$ y además:

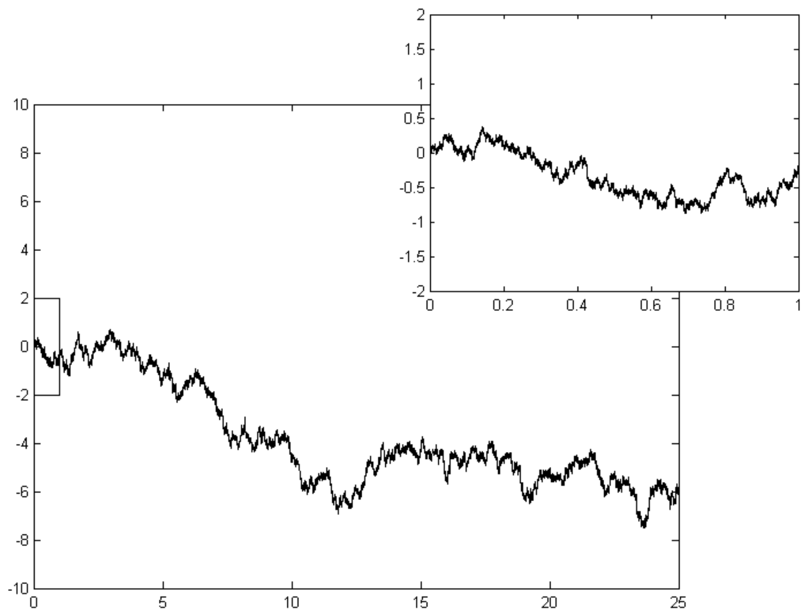
$$Var[X(n) - X(m)] = n - m \tag{2.3}$$

Lo que motiva la siguiente pregunta: Tenemos un paseo aleatorio con tiempo discreto, ¿Podemos construir un "paseo aleatorio" $w(t)$ con tiempo continuo, o sea, indexado en los reales? O sea, un proceso estocástico que cumpla las siguientes propiedades:

1. $\mathbb{E}w(t) = 0 \qquad Var(w(t)) = t$
2. $w(t) - w(s) \perp w(r) - w(z)$ si $(s, t) \cap (z, r) = \emptyset$
3. $Var[w(t) - w(s)] = t - s$
4. los trayectos w son continuos

La respuesta es que si se puede, y la distribución de $w(t)$ tiene que ser Gaussiana centrada en 0 y con varianza t. Y a este "Paseo al azar continuo" se le llama Movimiento Browniano o Proceso de Wiener. Y en este capítulo veremos la construcción de este proceso a partir de las Gaussianas. Mientras que al final del siguiente se verá una justificación porque hacemos la construcción con Gaussianas.

2.2. Construcción del Proceso de Wiener



Construiremos el proceso para $\mathbb{R}$, pero la construcción en $\mathbb{R}^n$ es analoga solo que con algunos detalles a más que veremos al final del capítulo.

Consideremos primero el espacio $C(\mathbb{R})$ de las funciones de $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas. La construcción del movimiento Browniano consiste en definir una probabilidad en este espacio en la $\sigma-$álgebra de los borelianos considerando la topología producto de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ restringida en las funciones continuas. Para esto tomaremos el algebra de los tubos en $C(\mathbb{R})$ y definiremos una premedida de probabilidad. Cabe notar que si $p^t(x)$ y $p^s(x)$ son densidades Gaussianas, centradas y con varianza t y s respectivamente, cumplen que: $p^t * p^s(x) = p^{t+s}(x)$ ($*$ es la convolución). Esto será importante para la construcción.

En este espacio podemos definir las siguientes funciones de dos variables:

$$x : \mathbb{R}^n \times C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$$

$$x_{t_1 t_2 \dots t_n}(w) = (w(t_1), w(t_2), \dots, w(t_n))$$

Sea $\mathcal{C} = \{x_t^{-1}(B) : n \in \mathbb{N} \ , \ t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \ \ t_1 < t_2 < \dots < t_n$ y $B \in Bor(\mathbb{R}^n)\}$

$\mathcal{C}$ es el álgebra que genera la $\sigma-$álgebra de Borel en $C(\mathbb{R})$ y por lo tanto si definimos la premedida de probabilidad en el algebra y vemos que es $\sigma-$finita, quedará unívocamente determinada en la $\sigma-$álgebra generada.

Para definir la probabilidad primero definiremos:

$$g(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{\frac{-(y-x)^2}{4Dt}} \quad t, D > 0 \;\; x, y \in \mathbb{R}$$

Observación. Notar que si dejamos el x fijo entonces esta familia de funciones son las densidades de gaussianas centradas en x. Seria por así decirlo, la probabilidad de que la partícula este en y a tiempo t partiendo desde x en tiempo 0.

Sea $C \in \mathcal{C} \to \exists B \in Bor(\mathbb{R}^n)/C = x_t^{-1}(B) \;\; t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$
Entonces definiremos:

$$P_t(C) = \int_B g(t_1, 0, z_1) g(t_2 - t_1, z_1, z_2) \ldots g(t_n - t_{n-1}, z_{n-1}, z_n) dz_1 dz_2 \ldots dz_n$$

Lemma 2.1. *P_t es una probabilidad en $x_t^{-1}(Bor(\mathbb{R}^n))$*

Demostración. Para ver que está bien definida basta notar que sí

$$x_t^{-1}(B_1) = x_t^{-1}(B_2) \to B_1 = B_2$$

Para ver la aditividad basta notar las siguientes propiedades:

$$x_t^{-1}(B_1) \cap x_t^{-1}(B_2) = \emptyset \to B_1 \cap B_2 = \emptyset$$

$$x_t^{-1}(B_1) \cup x_t^{-1}(B_2) = x_t^{-1}(B_1 \cup B_2)$$

Y haciendo esta ultima cuenta:

$$\int_{\mathbb{R}} g(t,x,y)dy = 2 \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{\frac{-y^2}{4Dt}} dy = 2 \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u^2}{2}} du = 1$$

$$u = \frac{y}{\sqrt{2Dt}}$$

Usando que:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Entonces se concluye que $P_t(x_t^{-1}(\mathbb{R}^n)) = 1$ $\square$

Lemma 2.2. *P_t coincide con P_s en $x_s^{-1}(Bor(\mathbb{R}^m))$ si $s \subset t$ y m es el número de coordenadas el multiíndice s*

Demostración. Primero veremos lo siguiente:

$$\int_{\mathbb{R}} g(t-s, x_0, x_1) g(s, x_1, x_2) dx_1 = \int_{\mathbb{R}} g(t-s, x_0, x_1 + x_2 - x_2) g(s, x_1, x_2) dx_1$$

$$u = x_1 - x_2 \rightarrow du = dx_1$$

$$= \int_{\mathbb{R}} p^{t-s}(u - (x_2 - x_0)) p^s(u) du = p^t(x_2 - x_0) = g(t, x_0, x_2)$$

Tomemos ahora $C = x^{-1}_{t_1 t_2 t_3 \ldots t_n}(B_1) = x^{-1}_{t_1 t_3 \ldots t_n}(B_2)$ $B_1 \in Bor(\mathbb{R}^n)$ $B_2 \in Bor(\mathbb{R}^{n-1})$

$$P_{t_1 t_2 t_3 \ldots t_n}(C)$$

$$= \int_{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in B_1} g(t_1, 0, x_1) g(t_2 - t_1, x_1, x_2) g(t_3 - t_2, x_2, x_3)$$
$$\ldots g(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

$$= \int_{(x_1, x_3, \ldots, x_n) \in B_2} g(t_1, 0, x_1) dx_1 \int_{x_2 \in \mathbb{R}} g(t_2 - t_1, x_1, x_2) g(t_3 - t_2, x_2, x_3)$$
$$\ldots g(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) dx_2 \ldots dx_n$$

$$= \int_{(x_1, x_3, \ldots, x_n) \in B_2} g(t_1, 0, x_1) g(t_3 - t_1, x_1, x_3) \ldots g(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) dx_2 \ldots dx_n$$

$$= P_{t_1 t_3 \ldots t_n}(C)$$

Y aplicando inducción en la cantidad de variables queda demostrado el lema. □

Lemma 2.3. *P definido en $\mathcal{C}$ de la siguiente forma, para el t multiíndice correspondiente:*

$$P(C) = P_t(C)$$

Es una premedida.

Demostración. Solo bastaría demostrar que si $C_n \subset \mathcal{C}$ son disjuntos 2 a 2 y la unión pertenece a $\mathcal{C}$, entonces:

$$P(\bigcup_n C_n) = \sum_n P(C_n) \tag{2.4}$$

La demostración completa es un tanto engorroza y se encuentra en [2], pero dare una idea de como funciona:

Demostrar 2.1 es análogo a demostrar que si $C_{n+1} \subset C_n \forall n$ y $\bigcap_n C_n = \emptyset$, entonces:

$$P(\bigcap_n C_n) = \lim_{n\to\infty} P(C_n) = 0 \tag{2.5}$$

El primer paso es demostrar el contrarrecíproco de esta afirmación, el cual sería:

$$\lim_{n\to\infty} P(C_n) > c_1 > 0 \ \rightarrow \ \bigcap_n C_n \neq \emptyset \tag{2.6}$$

Y la idea es, si $C_n = x_{t_n}^{-1}(B_n)$, aproximar B_n por un compacto K_n de tal forma que $P(\bigcap_m^n x_{t_m}^{-1}(K_m)) > 0$ así se puede concluir que para todo n: $\bigcap_m^n x_{t_m}^{-1}(K_m) \neq \emptyset$. Como los C_n están encajados, se cumple que $t_m \subset t_n \ m < n$. Luego, como la intersección de los compactos es no vacía para todo n, podemos tomar una sucesión que cumpla las siguientes propiedades:

$$\{x(s) : s \in t\} \quad t = \bigcup_n t_n \tag{2.7}$$

$$\{x(s) : s \in t_n\} \in K_n \tag{2.8}$$

El segundo paso está en demostrar que esta sucesión se puede extender a una función continua en $[0, +\infty)$, y como esta función pertenecerá a $\bigcap_n x_{t_n}^{-1}(K_n) \subset \bigcap_n C_n$ y la demostración quedara completa. $\square$

Por lo tanto tenemos definido en el espacio $(C(\mathbb{R}), \mathcal{C})$ una premedida de probabilidad P de la siguiente forma:

$$P(C) = P_t(C) \ \ C \in \mathcal{C}$$

Y por los lemas anteriores, queda bien definida y se puede extender a los borelianos de las funciones continuas. Y a la 3-upla $(C(\mathbb{R}), Bor(C(\mathbb{R})), P)$ le llamaremos: movimiento Browniano estándar empezando en 0, y a P la medida de Wiener.

Tomemos $a \in \mathbb{R}$ y definamos:

$$P_a(C) = \int_B g(t_1, a, z_1)g(t_2 - t_1, z_1, z_2) \dots g(t_n - t_{n-1}, z_{n-1}, z_n)dz_1dz_2 \dots dz_n$$

Como $g(t, a, x) = g(t, 0|x - a|)$ se cumple:

$$P_a(C) = P_0(w + a \in C)$$
$$P_{-a}(C) = P_a(-w \in C)$$

Observación.

$$P_a[w(0) = a] = P_0[w(0) = 0] = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to 0} P_0[|w(t)| < \frac{1}{n}]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to 0} 2 \int_0^{t^{\frac{-1}{2}} n^{-1}} \frac{e^{\frac{-b^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} db = 1$$

Observación. Con esta colección de procesos estocásticos $[(C(\mathbb{R}), Bor(C(\mathbb{R})), P_a) : a \in \mathbb{R}]$ tenemos el denominado movimiento Browniano o también conocido como proceso de Wiener.

2.3. Movimiento browniano: propiedades

Ahora que ya vimos la construcción del movimiento Browniano unidimensional. Veamos sus propiedades más importantes.

Empecemos viendo las propiedades básicas:

$$\mathbb{E}(x(t)) = 0 \qquad var(x(t)) = \mathbb{E}[x^2(t)] = t$$

2.3.1. Propiedad de Markov simple

Del lemma 2.1 se deduce lo siguiente:

$$\int_{x(t_1)\in\mathbb{R}} P_a[x(t_1) \in d(x(t_1))] \ P_{x(t_1)}[x(t - t_1) \in db] \ d(x(t_1)) = P_a[x(t) \in db]$$

Donde $P_a[x(t) \in db] := g(t, a, b)db$ y $t > t_1$

Entonces:

$$\mathbb{E}_{x(t_1)}(P_{x(t_1)}[x(t-t_1)\in B)]) = P_a[x(t)\in B] = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{x(t)\in B\}}(\omega))$$

Tomando esperanza condicional de ambos lados respecto a $x(t_1)$

$$P[x(t)\in B\ \ /x(t_1)] = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{x(t)\in B\}}(x)\ \ /x(t_1)) = P_{x(t_1)}[x(t-t_1)\in B)]$$

Un argumento por inducción permite probar a partir de esto lo siguiente:

$$P_a[x(t)\in db|x(t_1),x(t_2),\dots,x(t_n)] = P_{x(t_n)}[x(t-t_n)\in db] = P_a[x(t)\in db|x(t_n)]$$

La idea es volver a hacer el procedimiento anterior reiteradas veces y usar la propiedad demostrada en el lema 2.1 de la convolución de dos gaussianas. En definitiva, lo que se llama propiedad de Markov simple es lo siguiente:

$$P_a[x(t_2)\in db\ \ |B_{t_1}] = P_{x(t_1)}[x(t_2-t_1)\in db]$$

Donde B_{t_1} es la $\sigma-subalgebra$ generada a partir de los eventos $(w : a\leq x(s) < b)(s\leq t_1)$

Comentando un poco esta propiedad del movimiento Browniano, se ve que si condicionamos en el presente $x(t_1)=b$ entonces la trayectoria futura $x(t+t_1)(t\geq 0)$ es un movimiento Browniano empezando en b independiente del pasado $x(t)$. Por lo tanto, el movimiento tiene pérdida de memoria. Veamos ahora algunas consecuencias de esta propiedad:

Lemma 2.4. *(Diferencias independientes)* $x(t)-x(s)\perp x(t')-x(s')$ *si* $(s,t)\cap(s',t')=\emptyset$

Demostración. Probaremos primero en el caso $s'=0$ y como casi seguramente $x(0)=0$ supondremos este el caso:

$$P(x(t)-x(s)\in B,\ \ x(t')\in B') = P(x(t')\in B')P[x(t)-x(s)\in B\ \ |x(t')]$$

$$= P(x(t')\in B')\mathbb{E}_{x(s)}P[x(t)-x(s)\in B\ \ |x(t'),x(s)]$$

$$P(x(t')\in B')P(x(t)-x(s)\in B)$$

Ahora en el caso s' no necesariamente 0:

$$\mathbb{E}[(x(t)-x(s))\ \ (x(t')-x(s'))]=0$$

Y las variables aleatorias Gaussianas centradas en 0 son independientes si su covarianza es 0.

$\square$

Lemma 2.5. *(Covarianza del movimiento)*

$$\mathbb{E}(x(t)x(s))=s\wedge t=min\{s,t\}$$

Demostración. Supongamos $s\wedge t=s$ entonces:

$$\mathbb{E}(x(t)x(s))=\mathbb{E}[(x(t)-x(s)+x(s))\ \ x(s)]=\mathbb{E}[(x(t)-x(s))x(s)]+\mathbb{E}[x^2(s)]=s$$

$\square$

Lemma 2.6. *(Covarianza de las diferencias)*

$$\mathbb{E}[x(t)-x(s)][x(t')-x(s')]=|(s,t)\cap(s',t')|$$

Demostración. Para el caso donde la intersección es vacía es trivial. Supongamos entonces que la intersección es no vacía. Entonces, supongamos sin pérdida de generalidad $s'<s<t'<t$

$$|(s,t)\cap(s',t')|=t'-s$$

$$\mathbb{E}[x(t)-x(s)][x(t')-x(s')]=\mathbb{E}[x(t)x(t')]+\mathbb{E}[x(s)x(s')]-\mathbb{E}[x(s)x(t')]-\mathbb{E}[x(t)x(s')]$$

$$=t'+s'-s-s'=t'-s$$

$\square$

2.3.2. Definición del Movimiento Browniano

En las secciones anteriores nos tomamos el trabajo de construir el proceso de Wiener y así deducir las propiedades que cumple. Por lo tanto estamos en capacidad de hacer la siguiente definición:

Definición 2.3.1. (Movimiento Browniano Unidimiensional)

Un proceso aleatorio $\{x_t\}$ es un proceso de Wiener, si se verifican las siguientes propiedades:

1. El proceso parte del origen casi seguramente, o sea: $P(x_0 = 0) = 1$

2. Las trayectorias $\{x_t\}$ son funciones continuas casi seguramente

3. Tiene incrementos independientes

4. Dado $0 < t < t + h$, la variable aleatoria $x_{t+h} - x_t$ tiene distribución normal con esperanza nula y $Var(x_{t+h} - x_t) = h$

Observación. Todas las propiedades de la sección anterior se pueden deducir de esta definición. Y por lo tanto es una buena síntesis de la construcción que hicimos. Y como es típico en probabilidad, nos podemos olvidar del espacio de probabilidad, y nos centraremos en que existe este proceso.

Definición 2.3.2. (Parametro de varianza) Si tomamos x_t el proceso de la anterior definición, y σ un número real no nulo, entonces σx_t es una variable aleatoria que cumple los puntos 1,2 y 3 de la definición anterior, pero:

$$Var(\sigma x_t) = \sigma^2 t \tag{2.9}$$

Luego, llamamos a un proceso y_t un proceso de Wiener con factor de varianza σ^2, a un proceso que cumple los puntos del 1 al 3, y que en vez de 4 cumple 2.6

Definición 2.3.3. (Proceso de Wiener multidimensional)

Un proceso aleatorio $\{x_t\}$ es un proceso de Wiener de dimensión n con generador infinitesimal $\sum_{ij}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ definido positivo [Ver capítulo 3], si se verifican las siguientes propiedades:

1. El proceso parte del origen casi seguramente

2. $x_t(w) \in \mathbb{R}^n$

3. Las trayectorias $\{x_t\}$ son continuas casi seguramente

4. Tiene incrementos independientes

5. Dado $0 < t < t + h$, la variable aleatoria $x_{t+h} - x_t$ tiene distribución normal con esperanza nula y la matriz de covarianza es $(2a_{ij}h)_{ij}$

Observación. La existencia de este proceso se puede hacer con una construcción parecida a la del proceso unidimensional, solo que en este caso la densidad p_t será una gaussiana con esperanza nula y matriz de covarianza $(2a_{ij}t)_{ij}$.

Veamos dos ejemplos para dejar más claro lo anterior

1. Tomemos un proceso de Wiener en dos dimensiones con $\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ el generador infinitesimal del proceso. Entonces $x_t = (x_t^1, x_t^2)$ es un proceso de Wiener en dos dimensiones con x_t^1 y x_t^2 procesos de Wiener unidimensionales e independientes.

2. Si ahora la matriz de covarianza es

$$\begin{pmatrix} t & \frac{1}{\sqrt{2}}t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}t & t \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

   Entonces los procesos $x_t^1 + x_t^2$ y $x_t^1 - x_t^2$ son independientes.

Definición 2.3.4. (Proceso de Wiener a dos lados) Si tomamos x_t^1 y x_t^2 dos procesos de Wiener independientes definidos en Ω, podemos construir un proceso x_t con t pudiendo tomar valores negativos también, de la siguiente forma:

$$x_t = x_t^1 \;\; t > 0$$
$$x_t = x_{-t}^2 \;\; t < 0$$
$$x_0(\omega) = 0 \;\; \omega \in \Omega$$

En estas condiciones a x_t se le llama proceso de Wiener a dos lados.

Lemma 2.7. *Si x_t es el proceso de Wiener a dos lados, entonces se cumple que:*

$$\mathbb{E}[x_t - x_s][x_{t'} - x_{s'}] = |(s,t) \cap (s',t')| \tag{2.11}$$

En el caso de que el proceso tenga un factor de varianza σ^2 se cumple:

$$\mathbb{E}[x_t - x_s][x_{t'} - x_{s'}] = \sigma^2|(s,t) \cap (s',t')| \tag{2.12}$$

2.3.3. Construcción con una serie estocástica

Otra construcción del movimiento Browniano que podemos hacer es la que fue hecha por Wiener con una serie estocástica. No lo haremos con exactamente la misma serie que se puede ver en [6] paginas [140 - 162], el capítulo 9 del libro donde habla de funciones aleatorias. Tomemos $\{g_n\}_{n\geq 0}$ sucesión de variables aleatorias gaussianas idénticamente distribuidas con distribución normal estándar. Definimos el siguiente proceso:

$$x(t) = \frac{t}{\sqrt{\pi}} g_0 + \sum_{n \geq 1} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n - 1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{sin(kt)}{k} g_k \tag{2.13}$$

Veamos primero que converge uniformemente en $0 \leq t \leq \pi$ casi seguramente. Para esto tomemos:

$$S_{mn}(t) := \sum_{k=m}^{n-1} \frac{sin(kt)}{k} g_k \qquad t_{mn} = \max_{0 \leq t \leq \pi} |S_{mn}(t)| \tag{2.14}$$

Entoneces se tiene:

$$t_{mn}^2 \leq \max_{0 \leq t \leq \pi} \left| \sum_{k=m}^{n-1} \frac{e^{ikt}}{k} g_k \right|^2 \leq \sum_{k=m}^{n-1} \frac{g_k^2}{k^2} + 2 \sum_{l=1}^{n-m-1} \left| \sum_{j=m}^{n-l-1} \frac{g_j g_{j+l}}{j(j+l)} \right|$$

$$\mathbb{E}(t_{mn})^2 \leq \mathbb{E}(t_{mn}^2) \tag{2.15}$$

Por la desigualdad de Jensen tenemos 1.15 y luego usando otra vez la desigualdad de Jensen, se obtiene 1.16:

$$\leq \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k^2} + 2 \sum_{l=1}^{n-m-1} \left(\mathbb{E} \left| \sum_{j=m}^{n-l-1} \frac{g_j g_{j+l}}{j(j+l)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.16}$$

Usando la hipótesis de independencia de las Gaussianas y que $\mathbb{E} g_j g_{j+1} \leq 1$ se obtiene:

$$\leq \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k^2} + 2 \sum_{l=1}^{n-m-1} \left(\sum_{j=m}^{n-l-1} \frac{1}{j^2 (j+l)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.17}$$

$$\leq \frac{n-m}{m^2} + 2(n-m) \left(\frac{n-m}{m^4} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.18}$$

Por lo tanto: $\mathbb{E}(t_{m,2m}) \leq \sqrt{3} m^{-\frac{1}{4}}$ entonces se concluye directamente que:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n \geq 1} t_{2^{n-1}, 2^n} \right] \leq \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}(t_{2^{n-1}, 2^n}) < +\infty \tag{2.19}$$

Por lo tanto:

$$P \left[\sum_{n \geq 1} t_{2^{n-1}, 2^n} < +\infty \right] = 1 \tag{2.20}$$

De lo que se concluye que converge uniformemente casi seguramente. Entonces casi todos los caminos $x(t)(t \leq \pi)$ son continuos. Y como el límite de gaussianas es gaussiana, entonces $x(t)$ tiene distribución gaussiana con esperanza 0. Se puede ver usando la independencia de las gaussianas g_n que:

$$\mathbb{E}(x(s)x(t)) = \frac{ts}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k \geq 1} \frac{sin(kt)sin(ks)}{k^2} = s \wedge t \tag{2.21}$$

Esto se deduce usando la teoría de series de Fourier, haciendo las siguientes cuentas: sea t fijo:

$$f_t(s) = t \wedge s - \frac{ts}{\pi} \tag{2.22}$$

Esta función en $[-\pi, \pi]$ es impar, luego f_t en series de Fourier no tendrá representación en cosenos, solo en senos.

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f_t(s) sin(ks) ds = \frac{1}{\pi} \int_0^t (s - \frac{ts}{\pi}) sin(ks) ds + \frac{1}{\pi} \int_t^{\pi} (t - \frac{ts}{\pi}) sin(ks) ds \tag{2.23}$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{sin(kt)}{k^2} \tag{2.24}$$

Y por lo tanto se puede ver que $x(t)$ en $[0, \pi]$ es un movimiento Browniano y tomando otra sucesión de variables aleatorias $\{\mu_n\}$ idénticamente distribuidas con distribución normal estándar e independientes de la anterior, y extiendo $x(t)$ al intervalo $[0, 2\pi]$ de la siguiente forma:

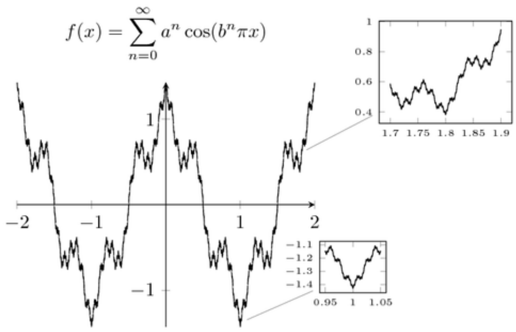
$$x(t) = \frac{t}{\sqrt{\pi}} g_0 + \sum_{n \geq 1} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n - 1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{sin(kt)}{k} g_k \qquad t \in [0, \pi] \tag{2.25}$$

$$= x(\pi) + \frac{t - \pi}{\sqrt{\pi}} \mu_0 + \sum_{n \geq 1} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n - 1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{sin(k(t - \pi))}{k} \mu_k \qquad t \in (\pi, 2\pi] \tag{2.26}$$

Inductivamente se puede definir el movimiento browniano en todo $\mathbb{R}$, tomando una sucesión de sucesiones de variables aleatorias gaussianas $[\{\mu_k^n\}_{k \geq 0}]_{n \geq 0}$ todas independientes entre sí y con distribución normal estándar:

$$x(t) = x(\pi n) + \frac{t - \pi n}{\sqrt{\pi}} \mu_0^n + \sum_{n \geq 1} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n - 1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{sin(k(t - \pi n))}{k} \mu_k^n \qquad t \in (\pi n, 2\pi n] \tag{2.27}$$

2.3.4. Derivabilidad en ningún punto



Otra de las propiedades interesantes del movimiento Browniano es que casi seguramente los caminos son no derivables en todo punto.

Si x es diferenciable para algún tiempo $0 \leq s \leq 1$ entonces se cumple:

$$|x(t) - x(s)| < l(t-s) \qquad s < t < s + \frac{5}{n} \quad \forall n \geq m$$

Para un cierto $l \geq 1$ y $m \geq 1$

Entonces si E es el evento de los caminos en $C(\mathbb{R})$ que son derivables en al menos un punto entre 0 y 1 está incluido dentro de este evento:

$$\bigcup_{l\geq 1} \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq m} \bigcup_{0<i\leq n+2} \bigcap_{i<k\leq i+3} \left[w : \left| x\left(\frac{k}{n}\right) - x\left(\frac{k-1}{n}\right) \right| < \frac{7l}{n} \right]$$

Y además se cumple:

$$P\left[\bigcup_{0<i\leq n+2} \bigcap_{i<k\leq i+3} \left(w : \left| x\left(\frac{k}{n}\right) - x\left(\frac{k-1}{n}\right) \right| < \frac{7l}{n} \right) \right] \leq (n+2) P\left[\left| x\left(\frac{1}{n}\right) \right| < \frac{7l}{n} \right]^3 \tag{2.28}$$

$$= (n+2) \left(\int_{|\zeta| < \frac{7l}{\sqrt{n}}} \frac{e^{\frac{-\zeta^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} d\zeta \right)^3 \downarrow 0 \quad n \to \infty \tag{2.29}$$

Es importante notar donde utilizamos los conocimientos y propiedad anteriormente citadas sobre el movimiento Browniano. En la desigualdad 2.25 utilizamos la independencia de los incrementos y luego en la igualdad 2.26 un cambio de variables lineal. Tiende a 0 obviamente porque la integral en todo el dominio está acotada, y utilizando L'Hopital se ve el límite. Además, solo para comentar y dejarlo más claro, E está incluido en dicho evento, porque que x sea derivable en un punto s entonces en un entorno de ese tiempo las diferencias están acotadas.

Otra propiedad y resultado interesante del movimiento Browniano, es que, para todo intervalo, tiene casi seguramente variación infinita.

Antes de ver este resultado veamos una definición previa:

Definición 2.3.5. Sea $[s, t]$ un intervalo, entonces dado una sucecion de particiones:

$$\lambda^n = \{s = t_1^n < t_2^n < \ldots < t_{k(n)}^n = t\}$$

decimos que estan encajadas si: $\lambda^n \subset \lambda^{n+1}$ y además definimos la norma como:

$$|\lambda^n| = \sup\{t_{k+1}^n - t_k^n : k = 1, \ldots, k(n)\}$$

Teorema 2.8. *Sea x el proceso de Wiener, y λ_n una sucesión de particiones definidas en un intervalo $[s, t]$ tal que su norma tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Entonces se verifica:*

$$V_n = \sum_{i=1}^{k(n)} |x(t_{i+1}) - x(t_i)| \to \infty \;\; c.s \quad n \to \infty$$

Demostración. Primero, como las particiones son crecientes, $V_n \leq V_{n+1}$. Queremos demostrar que $P(V_n \to \infty) = 1$. La demostración de esto es equivalente a verificar que dado $K > 0$ se cumpla:

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} V_m(\omega) > K) = 1 \tag{2.30}$$

Y esto se cumple si y solo si:

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} V_m(\omega) \leq K) = 0 \tag{2.31}$$

Como la sucecion V_n es no decreciente se tiene:

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} V_m(\omega) \leq K) \leq P(\bigcup_{m=n}^{\infty} V_m(\omega) \leq K) = P(V_n(\omega) \leq K) \tag{2.32}$$

Dejando esto en stand-by por un segundo, y tomando en cuenta que los incrementos del movimiento Browniano son independientes, se tiene:

$$Var(V_n) = \sum_{k=1}^{k(n)} Var|x(t_{k+1}^n) - x(t_k^n)| \leq \sum_{k=1}^{k(n)} \mathbb{E}|x(t_{k+1}^n) - x(t_k^n)|^2 = |t-s| \quad (2.33)$$

Además $\mathbb{E}|x(t_{k+1}^n) - x(t_k^n)| = \sqrt{t_{k+1}^n - t_k^n}\mathbb{E}|Z| = \sqrt{t_{k+1}^n - t_k^n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

Donde Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar. Sabiendo que: $\sqrt{t_{k+1}^n - t_k^n} \geq (t_{k+1}^n - t_k^n)/\sqrt{|\lambda^n|}$ se tiene:

$$\mathbb{E}V_n = \sum_{k=1}^{k(n)} \mathbb{E}|x(t_{k+1}^n) - x(t_k^n)| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{k(n)} \sqrt{t_{k+1}^n - t_k^n} \geq \frac{|t-s|\mathbb{E}|Z|}{\sqrt{|\lambda^n|}} \to \infty \quad (2.34)$$

Por lo tanto, para un n suficientemente grande se obtiene $\mathbb{E}V_n > K$. Entonces se tiene:

$$P(V_n \leq K) \leq P(|V_n - \mathbb{E}V_n| \geq \mathbb{E}V_n - K) \quad (2.35)$$

Ya que $V_n \leq K \Rightarrow V_n - \mathbb{E}V_n \leq K - \mathbb{E}V_n \Rightarrow \mathbb{E}V_n - V_n \geq \mathbb{E}V_n - K > 0$

Y utilizando la desigualdad de Chebishev:

$$P(|V_n - \mathbb{E}V_n| \geq \mathbb{E}V_n - K) \leq \frac{1}{(\mathbb{E}V_n - K)^2} VarV_n = \frac{|t-s|}{(\mathbb{E}V_n - K)^2} \to 0 \quad (2.36)$$

□

Corolario 2.8.1. *Existen funciones continuas no derivables en todo punto.*

Demostración. Tomando $x(t)$ la función estocástica construida en la sección 2.3.3, vimos que es un movimiento browniano, entonces existe un ω que hace a $x(t)(\omega)$ una función continua para todo t y no derivable en ningún punto por lo visto en esta sección 1.3.4 □

Observación. La demostración vista del corolario 1.8.1 solo utiliza los conocimientos de la teoría de la medida, y la construcción de sucesiones de variables aleatorias gaussianas normales estándar e independientes entre ellas. Una vía bastante indirecta para demostrar este resultado pero que aún así lo dejo a modo de curiosidad.

2.4. Algunos resultados en problemas de barrera para el proceso de Wiener

Definición 2.4.1. (Proceso de Wiener con tendencia)

Sea x el proceso de Wiener, dado $\theta \in \mathbb{R}$, entonces definimos el proceso de Wiener con tendencia como el siguiente proceso:

$$X_t = x(t) + \theta t \tag{2.37}$$

Lemma 2.9. *El proceso X_t definido anteriormente cumple las siguientes propiedades:*

1. $\mathbb{E}X_t = \theta t$
2. $Var(X_t) = t$
3. X_t *tiene diferencias(incrementos) independientes.*

Demostración.

1. $\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}x(t) + \mathbb{E}\theta t = \theta t$
2. Notar que $X_t - \mathbb{E}X_t = x(t)$
3. $X_t - X_s = x(t) - x(s) + \theta(t - s)$

$$Cov[X_t - X_s][X_{t'} - X_{s'}] = Cov[x(t) - x(s)][x(t') - x(s')] = |[s,t] \cap [s',t']|$$

□

Observación. Se puede ver que X_t cumple la propiedad de Markov simple.

Definición 2.4.2. Dado $\alpha \in \mathbb{R}^+$ decimos que $X_t(\omega)$ alcanza la barrera de nivel α en el intervalo $[t_1, t_2]$ si existe $t \in [t_1, t_2]$ tal que $X_t(\omega) > \alpha$. Esto es equivalente a la siguiente desigualdad:

$$\max_{t_1 \leq t \leq t_2} X_t(\omega) > \alpha$$

Se denomina entonces: el problema de barrera con tiempo finito, al cálculo de la siguiente probabilidad:

$$P\left(\max_{t_1 \leq t \leq t_2} X_t > \alpha\right) = P\left(\exists t \in [t_1, t_2]/X_t > \alpha\right) \tag{2.38}$$

O sea, el cálculo de la probabilidad de que el proceso X_t alcance la barrera de nivel α en el intervalo $[t_1, t_2]$. Análogamente se puede definir el problema con tiempo infinito al cálculo de la siguiente probabilidad:

$$P\left(\max_{0<t} X_t > \alpha\right) = P\left(\exists t > 0/X_t > \alpha\right) \tag{2.39}$$

El siguiente teorema no será demostrado porque su demostración sobrepasa los límites de esta monografía, pero su resultado será utilizado en el siguiente capítulo:

Teorema 2.10. *(Problema de barrera con tiempo finito).*
Sea X_t el proceso estocastico definido anteriormente. Entonces:

$$P\left(\max_{0\leq s\leq t} X_s > \alpha\right) = \Phi\left(\frac{-\alpha + \theta t}{\sqrt{t}}\right) + e^{2\theta\alpha}\Phi\left(\frac{-\alpha - \theta t}{\sqrt{t}}\right) \tag{2.40}$$

Donde $\Phi(x)$ es la distribución normal estándar.

Demostración. De igual forma en [3] se puede encontrar una demostración de este teorema. □

Corolario 2.10.1. *(Principio de Reflexión de D'Andre)*

$$P\left(\max_{0\leq s\leq t} x(s) > \alpha\right) = 2\Phi\left(\frac{-\alpha}{\sqrt{t}}\right) = 2P\left(x(t) > \alpha\right) \tag{2.41}$$

Observación. (Problema de barrera para el valor absoluto del proceso de Wiener)

Se concluye del Corolario anterior lo siguiente:

$$P\left(\max_{0\leq s\leq t} |x(s)| > \alpha\right) = P\left(\max_{0\leq s\leq t} x(s) > \alpha\right) + P\left(\min_{0\leq s\leq t} x(s) < -\alpha\right)$$

Y sabiendo lo siguiente:

$$P\left(\min_{0\leq s\leq t} x(s) < -\alpha\right) = P\left(-\min_{0\leq s\leq t} x(s) > \alpha\right) = P\left(\max_{0\leq s\leq t} -x(s) > \alpha\right) = P\left(\max_{0\leq s\leq t} x(s) > \alpha\right)$$

Y por lo tanto:

$$P\left(\max_{0\leq s\leq t} |x(s)| > \alpha\right) = 2P\left(\max_{0\leq s\leq t} x(s) > \alpha\right) = 4P\left(x(t) > \alpha\right)$$

Corolario 2.10.2. *(Orden cuando $t \to 0$)*

$$P\left(\max_{0\le s\le t}|x(s)|>\alpha\right)=o(t^n)\ \ (t\to 0)\quad \forall n$$

Demostración.

$$P\left(\max_{0\le s\le t}|x(s)|>\alpha\right)=4P\left(x(t)>\alpha\right)=4\int_{\alpha}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{\frac{-\mu^2}{2t}}d\mu=4\int_{\frac{\alpha}{\sqrt{t}}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-\mu^2}{2}}d\mu$$

$$\le\frac{\sqrt{t}}{\alpha}e^{\frac{-\alpha^2}{2t}}=o(t^n)\ \ (t\to 0)\quad\forall n$$

□

Otra consecuencia del teorema 2.10 es la resolución del problema de barrera para tiempo infinito, ya que los sucesos:

$$\{X_t>\alpha : t<N\}(N=1,\ldots)$$

Forman una sucesión creciente en N, que tiene como limite el suceso del problema de barrera en tiempo infinito. Por lo tanto:

$$P\left(\max_{0<t}X_t>\alpha\right)=P\left(\exists t>0/X_t>\alpha\right)=\lim_{N\to\infty}P\left(\exists t<N/X_t>\alpha\right)\quad(2.42)$$

Corolario 2.10.3. *Si $\theta\ge 0$ se cumple:*

$$P\left(\max_{0<t}X_t>\alpha\right)=1\quad(2.43)$$

Demostración. Basta hacer el límite en el teorema 2.10 □

Observación. En particular se tiene:

$$P\left(\max_{0<t}x(t)>\alpha\right)=1\quad(2.44)$$

O sea, el movimiento Browniano en algún momento va a superar cualquier barrera.

Corolario 2.10.4. *Otro caso muy interesante es cuando $\theta<0$, ya que entonces si $\alpha>0$:*

$$P\left(\max_{0<t}X_t>\alpha\right)=e^{2\alpha\theta}\quad(2.45)$$

Y en este caso la variable aleatoria $\max_{0<t}X_t$ tiene distribución exponencial con parámetro -2θ y por lo tanto:

$$\mathbb{E}\max_{0<t}X_t=\frac{-1}{2\theta}\qquad Var(\max_{0<t}X_t)=\frac{1}{4\theta^2}\quad(2.46)$$

Capítulo 3

Unicidad del proceso de Wiener

3.1. Introducción

Son dos los objetivos de este capítulo, el primero es demostrar lo que he bautizado como "Teorema de Unicidad del proceso de Wiener", y el capítulo entero va enfocado en demostrar los resultados necesarios para concluir este teorema al final. Básicamente el teorema dice que, si tenemos una familia de probabilidades $\{P^t\}_{t>0}$ que cumplen:

1. $P^t * P^s = P^{t+s}$
2. $P^t(A) = P^t(-A)$ con $A \in Bor(\mathbb{R})$
3. $P^t(\{x : |x| > \varepsilon > 0\}) = o(t) \;\; t \to 0 \qquad \forall \varepsilon > 0$

Entonces básicamente P^t es una Gaussiana centrada con varianza $\sigma^2 t$ para alguna constante $\sigma^2 > 0$.

El segundo objetivo de este capítulo es introducir los conceptos de Semigrupo markoviano de contracción, generador infinitesimal, etc. Que serán útiles y necesarios para el capítulo siguiente cuando estudiemos ecuaciones diferenciales estocásticas. Este capítulo es, a mi parecer, el que tiene menos cuentas pero el más pesado a nivel teórico. Antes de pasar al siguiente es recomendable al menos entender que es un semigrupo markoviano y su generador infinitesimal.

3.2. Definiciones previas

Definición 3.2.1. Espacio de Banach Decimos que X es un *espacio de Banach* si es un $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ espacio vectorial normado y completo en la métrica inducida por su norma.

Para nosotros en este capítulo los espacio de Banach serán sobre $\mathbb{R}$ pero algunas de las definiciones abajo son análogas para los complejos.

Definición 3.2.2. Semigrupo de contracción Sea X un espacio de Banach, un *semigrupo de contracción* en X es una familia de transformaciones lineales acotadas P^t de X en si mismo con t un valor real positivo y de tal forma que se cumpla:

1. $P^0 = 1$
2. $P^t P^s = P^{t+s} \qquad \forall t, s \;\; 0 < t, s \leq \infty$
3. $\|P^t f - f\| \to 0 \qquad t \to 0 \qquad \forall f \in X$
4. $\|P^t\| \leq 1 \;\; \forall t$

Definición 3.2.3. Generador infinitesimal Sea P^t semigrupo de contracción en X el *generador infinitesimal* de P^t se define como:

$$Af = \lim_{t \to 0^+} \frac{P^t f - f}{t}$$

En el dominio $\mathcal{D}(A)$ de todas las f donde el límite existe.

Definido estos tres conceptos me gustaría remarcar que $C(X)$ lo notaré cómo el espacio de Banach de todas las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ con X un espacio topológico Hausdorff localmente compacto, f *tendiendo a 0 en el infinito* y con la siguiente norma:

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

Observación. Decimos que f *tiende a 0 en el infinito* si $\forall \epsilon > 0 \; \exists K \subset X$ *compacto tal que* $\forall x \in X \backslash K \;\; \to \;\; |f(x)| < \epsilon$

Observación. Dejo como ejercicio al lector demostrar que efectivamente $C(X)$ es un espacio de Banach con esa norma.

También voy a escribir $\dot{X}$ para la compactificación de X por un punto. A su vez notaré $C^2_{com}(\mathbb{R}^n)$ la clase de todas las funciones C^2 con soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ y a $C^2(\mathbb{R}^n)$ a su completación en esta norma:

$$\|f\|^* = \|f\| + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial x^i} \right\| + \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right\|$$

Análogamente se define $C^2(\dot{\mathbb{R}^n})$ como la completación de $C^2_{com}(\dot{\mathbb{R}^n})$. Ver detalles en [1]

Definición 3.2.4. Semigrupo Markoviano Sea P^t semigrupo de contracción en $C(X)$ decimos que es un semigrupo Markoviano en $C(X)$ si

1. $f \geq 0$ *implica* $P^t f \geq 0 \qquad 0 \leq t < \infty$
2. $\forall x \in X$ *y* $\forall t \;\; 0 \leq t < \infty$ *se cumple* :

$$\sup_{0 \leq f \leq 1 \;\; f \in C(X)} P^t f(x) = 1$$

En el caso de que X sea compacto, la última condición es equivalente a pedir $P^t 1 = 1 \;\; \forall t \;\; 0 \leq t < \infty$.

Observación. Por el teorema de Riesz, existe una única probabilidad $p^t(x, \cdot)$ regular definida en los borelianos tal que

$$P^t f(x) = \int f(y) p^t(x, dy)$$

Para toda función con soporte compacto. Y a p^t se le llama el núcleo de P^t

3.3. Resultados importantes el teorema de unicidad

Habiendo visto las definiciones anteriores, es momento de nombrar algunos resultados previos para nuestra construcción del proceso de Wiener.

Teorema 3.1. *Sea P^t un semigrupo markoviano en $C(\dot{\mathbb{R}}^n)$ conmutando con la traslación y sea A el generador infinitesimal de P^t. Entonces se cumple*

$$C^2(\dot{\mathbb{R}}^n) \subseteq \mathcal{D}(A)$$

Para demostrar este teorema utilizaré el siguiente lema que dejaré como ejercicio para el lector. La prueba no es complicada y se puede ver en [1]. De igual forma daré una idea de por donde sale:

Lemma 3.2 (Aproximación en un denso)**.** *Sea X un espacio de Banach real, $f \in X$ y $\mathcal{D}$ subespacio lineal denso de X. Y sea además $u_1, ..., u_n$ funcionales lineales continuos en X. Entonces: $\forall \delta > 0 \;\; \exists g \in \mathcal{D}$ tal que:*

$$u_1(f) = u_1(g), ..., u_n(f) = u_n(g)$$
$$\|f - g\| < \delta$$

Idea de la demostración: La prueba sale por inducción. Y basta con demostrar que, si X es un espacio de Banach real, $\mathcal{D}$ denso y convexo subconjunto, $\mathcal{M}$ un hiperplano afín y cerrado, entonces $\mathcal{D} \cap \mathcal{M}$ es denso en $\mathcal{M}$.

Entonces el caso general queda resuelto por inducción, ya que los núcleos de cada operador lineal tiene co-dimensión 1, luego la intersección de todos esos núcleos tendrá co-dimensión finita.

□

Demostración del teorema 3.1: Para empezar tenemos que notar lo siguiente: como P^t conmuta con la traslación, entonces

$$P^t(C^2(\dot{\mathbb{R}}^n)) \subseteq C^2(\dot{\mathbb{R}}^n)$$

O sea, el semigrupo markoviano se puede restringir a $C^2(\dot{\mathbb{R}}^n)$. Ahora bien, para demostrar esto haremos sin pérdida de generalidad la demostración para el caso de $\mathbb{R}$: Sea $f \in C^2(\dot{\mathbb{R}})$

$$\frac{P^t f(x+h) - P^t f(x)}{h} = \frac{T_h P^t f(x) - P^t f(x)}{h} = \frac{P^t T_h f(x) - P^t f(x)}{h} \tag{3.1}$$

$$= P^t \left[\frac{T_h f - f}{h}\right](x) \to P^t f'(x) \quad h \to 0 \tag{3.2}$$

Por lo tanto:

$$(P^t f)'(x) = P^t f'(x) \tag{3.3}$$

Con un argumento análogo:

$$(P^t f)''(x) = P^t f''(x) \tag{3.4}$$

Veamos que es continua:

$$P^t f''(x+h) - P^t f''(x) = T_h P^t f''(x) - P^t f''(x) = P^t T_h f''(x) - P^t f''(x) \tag{3.5}$$

$$= P^t[T_h f'' - f''](x) \to 0 \quad h \to 0 \tag{3.6}$$

Esto último sale por la continuidad de f''. Luego $(P^t f)''$ es continua y queda demostrado que se puede restringir el semigrupo a las funciones con segunda derivada continua.

Bien, notemos ahora A^* el generador infinitesimal de P^t en $C^2(\dot{\mathbb{R}}^n)$, claramente A^* es la restricción de A en $C^2(\dot{\mathbb{R}}^n)$ por lo tanto es evidente que: $\mathcal{D}(A^*) \subseteq \mathcal{D}(A)$. Y como el dominio de un generador infinitesimal es siempre denso, se tiene que: $\mathcal{D}(A) \cap C^2(\dot{\mathbb{R}}^n)$ es denso en $C^2(\dot{\mathbb{R}}^n)$.

Usaremos esto para probar que toda función en $C^2(\dot{\mathbb{R}^n})$ tiene generador infinitesimal.

Para esto sea $\psi \in C^2(\dot{\mathbb{R}^n})$ tal que $\psi = \|x\|^2$ en un entorno de 0 y $\psi = 1$ en un entorno de infinito con ψ estrictamente positiva en $\dot{\mathbb{R}^n} - \{0\}$

Ahora aplicaremos el Lema anterior. Si tomamos como X al espacio $C^2(\dot{\mathbb{R}^n})$ y al subespacio lineal denso como: $\mathcal{D}(A) \cap C^2(\dot{\mathbb{R}^n})$ y a nuestra función f del lema como ψ. Si juntamos a los siguientes operadores lineales:

$$\varphi \to \varphi(0)$$

$$\varphi \to \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(0) \;\; i \in \{1, ..., n\}$$

$$\varphi \to \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(0) \;\; i \in \{1, ..., n\} \;\; j \in \{1, ..., n\}$$

Estamos dentro de las hipótesis del lema, por lo tanto $\forall \delta > 0 \; \exists \varphi \in \mathcal{D}(A) \cap C^2(\dot{\mathbb{R}^n})$ tal que:

$$\|\varphi - \psi\|^* < \delta \tag{3.7}$$

$$\varphi(0) = \psi(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(0) = 0 \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(0) = 2\delta ij \tag{3.9}$$

Sabiendo que:

$$\|\varphi - \psi\|^* = \|\varphi - \psi\| + \sum_i \left\| \frac{\partial(\varphi - \psi)}{\partial x_i} \right\| + \sum_{ij} \left\| \frac{\partial^2(\varphi - \psi)}{\partial x_i \partial x_j} \right\| < \delta \tag{3.10}$$

Veamos que existe un intervalo $[0, \delta_1]$ tal que, si $\delta \in [0, \delta_1]$ entonces φ es estrictamente positiva fuera del 0. Para esto usaremos fuertemente que acotar $\|\varphi - \psi\|^*$ no solo implica acotar $\|\varphi - \psi\|$ sino que también controlar las derivadas primera y segunda. Esto combinando que ψ es una función cuadrática cerca del 0 nos permitirá demostrar esto. Empecemos viendo los siguientes tres puntos;

1. $\exists B$ bola centrada en 0 donde $\psi|_B = ||x||^2$
2. $\exists B'$ bola centrada en 0 tal que $\psi|_{B'^c} = 1$
3. $\overline{B'} - B$ es compacto

De los que concluimos de cada uno:

1. $||\psi||^* \geq 2$ en B
2. $||\psi||^* \geq 1$ en B'^c
3. $||\psi||^* \geq \text{mín}_{x\in\overline{B'}-B}\,\psi(x) > 0$

Por lo tanto si tomamos $\delta < \text{mín}\{\frac{1}{2}, \frac{\text{mín}_{x\in\overline{B'}-B}\,\psi(x)}{2}\}$, entonces si φ cumple $\|\varphi - \psi\|^*$ luego será estrictamente positiva fuera del cero. La única región del espacio donde no es trivial es en B. Y es porque tenemos que utilizar la hipótesis extra de que coinciden las derivadas primera y segunda en cero, y justamente por esto $\exists B_1 \subset B$ una bola centrada en 0 donde:

$$||\varphi|_{B_1}||^* > \frac{3}{2} \tag{3.11}$$

Y por lo tanto si existiera un punto $x_1 \in B$ donde $\varphi(x_1) < 0$ significaría que alguna derivada parcial se volvió negativa en algún momento, pero esto no puede pasar ya que $\|\varphi - \psi\|^* < \delta$ implica que las diferencias entre las derivadas segundas no puede ser mayor a δ y por lo tanto no pueden ser negativas en B. Luego φ es estrictamente positiva fuera del cero.

Ahora fijemos φ: Sea ahora $\epsilon > 0$ y $f \in C^2(\dot{\mathbb{R}^n})$ y los mismos funcionales de antes, entonces existe una función $g \in \mathcal{D}(A) \cap C^2(\dot{\mathbb{R}^n})$ que cumple la tesis del Lema y la siguiente desigualdad:

$$\|f - g\|^* < \epsilon$$

Queremos ver que se tiene $|f(y) - g(y)| < \epsilon\varphi(y)$. Sea $\theta > 0$ tal que para $y \in B(0, \theta)$ se tiene:

$$\varphi(y) = 2||y||^2 + H(y) \tag{3.12}$$

Donde H satisface la desigualdad $|H(y)| \leq \theta||y||^2$. Obtenemos, por lo tanto:

$$|\varphi(y) - 2||y||^2| = |H(y)| \leq \theta||y||^2 \tag{3.13}$$

$$-\theta||y||^2 \leq \varphi(y) - 2||y||^2 \leq \theta||y||^2 \tag{3.14}$$

$$\varphi(y) \geq (2 - \theta)||y||^2 \tag{3.15}$$

Y por lo tanto:

$$\varphi(y) \geq (2 - \theta)||y||^2 \Rightarrow ||y||^2 \leq \frac{1}{2 - \theta}\varphi(y) \tag{3.16}$$

Ahora bien, si denotamos por D_f^2 la matriz Hessiana, se tiene por el teorema de Taylor:

$$|f(y)-g(y)| < \left|< D_f^2(\theta_1)y, y > - < D_g^2(\theta_2)y, y >\right| \leq ||D_f^2 - D_g^2||^* ||y||^2 \leq \frac{\epsilon}{2-\theta}\varphi(y) \tag{3.17}$$

Supongamos que $y \in B(0,\theta)^c$, entonces φ esta acotado inferiormente por $\min_{z\in B(0,\theta)^c} \varphi(z)$. De esta forma:

$$|f(y) - g(y)| < \epsilon = \frac{\epsilon}{\min_{z\in B(0,\theta)^c} \varphi(z)} \min_{z\in B(0,\theta)^c} \varphi(z) < \frac{\epsilon}{\min_{z\in B(0,\theta)^c} \varphi(z)}\varphi(y) \tag{3.18}$$

Y como θ solo depende de φ entonces se tiene que $\epsilon^{'} = \max\{\frac{\epsilon}{\min_{z\in B(0,\theta)^c} \varphi(z)}, \frac{\epsilon}{2-\theta}\}$ tiende a 0 cuando ϵ tiende a 0. Y además:

$$|f(y) - g(y)| < \epsilon^{'}\varphi(y) \qquad \forall y \tag{3.19}$$

Ahora que tenemos este resultado, se sigue lo siguiente:

$$\frac{1}{t}\int |f(y) - g(y)|p^t(0, dy) \leq \frac{\epsilon^{'}}{t}\int \varphi(y)p^t(0, dy)$$

Si observamos atentamente, y tenemos bien claro las hipótesis, nos acordamos que $\varphi \in \mathcal{D}(A)$, y además $\varphi(0) = 0$ por lo que se concluye que el lado derecho de la desigualdad tiene límite cuando $t \to 0$, luego es un $O(t)$, o sea, si lo multiplicamos por t el límite tiende a 0.

Sabiendo esto y haciendo un par de cuentas, es inmediato que:

$$\frac{1}{t}\int (f(y) - f(0))p^t(0, dy)$$

$$\frac{1}{t}\int (g(y) - g(0))p^t(0, dy)$$

Difieren en un $O(t)$. Y como $g \in \mathcal{D}(A)$ tiene limite cuando $t \to 0$. Luego se concluye que, como $\epsilon^{'}$ es tan pequeño como se quiera, tiene límite cuando $t \to 0$. Por lo tanto, si t es muy chico, está acotado.

Como esto es verdad para toda $f \in C^2(\dot{\mathbb{R}}^n)$, por el principio de la cota uniforme, existe una constante K tal que, para toda $f \in C^2(\dot{\mathbb{R}}^n)$ y $t > 0$

$$\frac{1}{t}(P^t f - f)(0) \leq K \left\|f\right\|^*$$

Ahora, si hacemos unas cuentas:

$$\left|\frac{1}{t}(P^t f - f)(x)\right| = \left|\frac{1}{t}(P^t f(x) - f(x))\right| = \left|\frac{1}{t}(T_x P^t f(0) - T_x f(0))\right|$$

$$\leq \|T_x\| \left|\frac{1}{t}(P^t f - f)(0)\right| \leq K \|f\|^*$$

$\square$

Teorema 3.3. *Sea P^t un semigrupo markoviano en $C(\dot{\mathbb{R}}^n)$ no necesariamente conmutando con la traslación tal que $C^2_{com}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(A)$ donde A es el generador infinitesimal de P^t.*

Si para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para todo $\epsilon > 0$

$$p^t(x, y : |y - x| \geq \epsilon) = o(t) \ \ t \to 0$$

Entonces se cumple:

$$Af(x) = \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) + \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x)$$

Para todo $f \in C^2_{com}(\mathbb{R}^n)$ donde a^{ij} y b^i son funciones reales y continuas y para todo x la matriz $a^{ij}(x)$ es de tipo positivo.

Observación. La matriz a^{ij} es de tipo positivo en el caso de que para todo número complejo ζ_i se cumple

$$\sum_{i,j=1}^{n} \overline{\zeta_i} a^{ij} \zeta_j \geq 0$$

Además, si P^t conmuta con la traslación entonces a^{ij} y b^i son constantes. Esto último se entenderá porqué una vez veamos la demostración.

Demostración. Sea $f \in C^2_{com}(\mathbb{R}^n)$ y supongamos que su primera y segunda derivada se desvanecen en x_0, y puedo asumir sin pérdida de generalidad que $f(x_0) = 0$

Sea ahora $g \in C^2_{com}(\mathbb{R}^n)$ positiva y que para un cierto entorno B de x_0 la función vale:

$$g = |y - x_0|^2 \ \ \forall y \in B$$

Sea $\epsilon > 0$ y $U = \{y : |f(y)| \leq \epsilon g(y)\}$ por la hipótesis anterior sobre las derivadas de f, se deduce que es un entorno de x_0.

Afirmo lo siguiente: $p^t(x, \mathbb{R}^n - U) = o(t)$. Esto es claro ya que existe un $\delta > 0$ tal que $\mathbb{R}^n - U \subset \{y : |x - y| > \delta\}$ y por lo tanto

$$p^t(x, \mathbb{R}^n - U) \leq p^t(x, \{y : |x - y| > \delta\})$$

De esto último se deduce:

$$\frac{1}{t}|\int_U f(y)p^t(x_0, dy)| \leq \frac{1}{t}\int_U |f(y)|p^t(x_0, dy) \leq ||f||_\infty \frac{1}{t}\int_U p^t(x_0, dy) \to 0 \ \ cuando \ \ t \to 0$$

Y por lo tanto

$$|Af(x_0)| = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}|\int f(y)p^t(x_0, dy)| = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}|\int_U f(y)p^t(x_0, dy)| \leq \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_U |f(y)|p^t(x_0, dy)$$

$$\leq \lim_{t\to 0^+} \frac{\epsilon}{t}\int_U g(y)p^t(x_0, dy) = \epsilon Ag(x_0)$$

Notar que tomamos una g fija y este resultado es $\forall \epsilon > 0$, luego:

$$Af(x_0) = 0$$

Cabe notar que a partir de este resultado se deduce que si las derivadas parciales primeras y segundas de f y g coinciden en x_0 entonces:

$$Af(x_0) = Ag(x_0)$$

Por lo tanto dado un $x \in \mathbb{R}^n$ fijo y arbitrario podemos definir $\sim_x$ en $C^2_{com}(\mathbb{R}^n)$ de la siguiente relación de equivalencia:

$$f \sim_x g \leftrightarrow las \ \ derivadas \ \ primera \ \ y \ \ segunda \ \ de \ \ f \ \ y \ \ g \ \ coinciden \ \ en \ \ x$$

A partir de ahora trabajaremos con ese x fijo.

Ahora notare f^* a un representante arbitrario de la clase de equivalencia de f respecto a la relación anterior. Por la observación dada anteriormente $Af^*(x)$ está bien definido.

Dicho esto, notare $(y_i - x_i)^*$ a un representante arbitrario de la clase de equivalencia de todas las funciones $f \in C^2_{com}(\mathbb{R}^n)$ que coinciden sus primeras y segundas derivadas con la función $(y_i - x_i)^*$ en x.

Entonces si ahora $f \in C^2_{com}(\mathbb{R}^n)$ tomamos, motivados por Taylor:

$$H(x,y) = f(y) - f(x) - \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^* \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) + \sum_{i,j=1}^{n} (y_i - x_i)^* (y_j - x_j)^* \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x)$$

Entonces para cada x fijo, llamemos $G_x(y) = H(x,y)$, como función en la variable y entra dentro de las hipótesis anteriores, luego:

$$AG_x(x) = 0$$

$$AG_x(y) = Af(y) - \sum_{i=1}^{n} A(y_i - x_i)^* \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) + \sum_{i,j=1}^{n} A[(y_i - x_i)^* (y_j - x_j)^*] \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x)$$

$$Af(x) = \sum_{i=1}^{n} A(y_i - x_i)^* \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) + \sum_{i,j=1}^{n} A[(y_i - x_i)^* (y_j - x_j)^*] \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x)$$

Podemos ver por la definición de A y de que las funciones tienen derivada primera y segunda continua, que $b_i(x)$ y $a_{ij}(x)$ son funciones continuas.

Si ademas suponemos $f(x) = 0$ entonces $\frac{\partial f^2}{\partial x^i}(x) = 0$

$$0 \leq \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_U f^2(y) p^t(x, dy) = Af^2(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f^2}{\partial x^i \partial x^j}(x) = 2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \frac{\partial f}{\partial x^j}(x)$$

Notar que de la definición de los a_{ij} se tiene que $a_{ij} = a_{ji}$ y como $\frac{\partial f}{\partial x^j}(x)$ puede tomar cualquier valor real $\forall j \in 1, ..., n$ entonces se deduce que la matriz de los a_{ij} es de tipo positivo.

Veamos ahora porque si P^t conmuta con la translación entonces b_i y a_{ij} son funciones constantes. Esto sale de las siguientes cuentas:

Notemos primero, dado x, $\overrightarrow{x_i}$ el vector que vale 0 en todas las coordenadas excepto en la i-esima, donde toma el mismo valor que x. Y notare $\overrightarrow{x_{ij}}$ al vector que vale 0 en todas las coordenadas excepto en la i-esima y j-esima, donde en esas coordenadas toma el mismo valor que x.

Entonces tenemos la siguiente situación:

$$b_i(x) = A(y_i - x_i)^*(x) = AT_{-\overrightarrow{x_i}}(y_i)^*(x) = T_{-\overrightarrow{x_i}}A(y_i)^*(x) = A(y_i)^*(x - \overrightarrow{x_i})$$
$$= A(y_i)^*(0) = b_i(0)$$

$$a_{ij}(x) = A[(y_i - x_i)(y_j - x_j)]^*(x) = AT_{-\overrightarrow{x_{ij}}}[(y_i)(y_j)]^*(x) = T_{-\overrightarrow{x_{ij}}}A[(y_i)(y_j)]^*(x)$$
$$= A[(y_i)(y_j)]^*(x - \overrightarrow{x_{ij}}) = A[(y_i)(y_j)]^*(0)$$

$\square$

Teorema 3.4. *Sea P^t un semigrupo markoviano en $C(\mathbb{R}^n)$ conmutando con la traslación y sea A el generador infinitesimal de P^t. Entonces:*

$$C^2(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{D}(A)$$

y P^t esta determinado por A en $C^2_{com}(\mathbb{R}^n)$

Demostración. Por el teorema 3.1 se tiene que $C^2(\dot{\mathbb{R}}^n) \subseteq \mathcal{D}(A)$ luego $C^2(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{D}(A)$ y además A es continua como función de $C^2_{com}(\mathbb{R}^n)$ en $C^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces A queda determinada en $C^2(\mathbb{R}^n)$ por los valores que toma en $C^2_{com}(\mathbb{R}^n)$ por continuidad.

Como P^t conmuta con T_x entonces deja $C^2(\mathbb{R}^n)$ invariante.

Afirmo ahora lo siguiente:
Sea $\lambda \geq 0$ entonces $(\lambda - A)C^2(\mathbb{R}^n)$ es denso en $C(\mathbb{R}^n)$

Supongamos por absurdo lo contrario, entonces $\exists z \neq 0$ un funcional lineal tal que

$$z((\lambda - A)f) = 0 \;\; \forall f \in C^2(\mathbb{R}^n)$$

Esto se puede ver tomando $w \in [C(\mathbb{R}^n) - (\lambda - A)C^2(\mathbb{R}^n)]^\circ$ y definiendo el siguiente funcional en $z(w) = 1$ y $z((\lambda - A)C^2(\mathbb{R}^n)) = \{0\}$. Este funcional existe como consecuencia del Teorema de separación (o la versión geométrica del teorema de extensión de Hahn-Banach).

Como $C^2(\mathbb{R}^n)$ es denso en $C(\mathbb{R}^n)$ entonces $\exists g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ con $z(g) \neq 0$
Entonces:

$$\frac{d}{dt} z(P^t g) = z(AP^t g) = z(\lambda P^t g)$$

Luego como $P^t g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ se puede resolver esta ecuación diferencial y se obtiene que $z(P^t g) = e^{\lambda t} z(g)$. Que no esta acotado, y esto es una contradicción, ya que z es continuo, y toda función lineal definido con dominio y codominio seminormados, es acotado.

Luego si tengo Q^t otro semigrupo con generador infinitesimal B de tal forma que $A = B$ en $C^2_{com}(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$(\lambda - B)^{-1} = (\lambda - A)^{-1} \ \forall \lambda > 0$$

Pero estas son las transformadas de Laplace de los semigrupos Q^t y P^t y por el teorema de unicidad de las transformadas de Laplace se tiene $P^t = Q^t$. Esto se puede ver más en el apendice, en la sección de Semigrupos y generadores infinitesimales.

$\square$

Observación. Con todos estos teoremas ahora estamos listo para demostrar el teorema más importante de este capítulo. La demostración la haré para una dimensión, pero existe una versión para más de una dimensión y la demostración es un poco más complicada.

3.4. Teorema de Unicidad del Proceso de Wiener

Teorema 3.5. ***(Teorema de Unicidad del Proceso de Wiener)*** *Sea p^t, $0 \leq t < \infty$ una familia de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$ tal que:*

$$p^t * p^s = p^{t+s}, \ \ 0 \leq t, s < \infty$$

donde $*$ es el producto de convolución, y para todo ϵ positivo se tiene

$$p^t(\{x : |x| > \epsilon\}) = o(t) \ \ t \to 0$$

Y además p^t es invariante bajo la transformación $x \to -x$.
Entonces se tiene lo siguiente:

$$\exists D > 0 / \ p^t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} e^{\frac{-x^2}{4Dt}}$$

Y se cumple la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial p^t}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p^t}{\partial x^2} \ \ t > 0$$

Y además $p^0 = \delta_0$, la delta de Dirac en 0

Antes de empezar esta prueba empezare dando un repaso y resumen rápido sobre transformadas de Fourier, que serán muy útiles para demostrar este teorema, ya que, resolveremos un sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

Enunciare primero que es una transformada de Fourier y luego enlistare algunas propiedades. Las necesarias y útiles que usare en la demostración.

Definición 3.4.1. Transformada de Fourier

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ entonces la transformada de Fourier de f, que notaremos f^*, queda definida de la siguiente forma:

$$f^*(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi x\gamma}dx \;\; \gamma \in \mathbb{R}$$

Y si tanto f como su transformada son integrables en el sentido de Lebesgue, entonces a partir de f^* se puede volver a obtener f mediante:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f^*(\gamma)e^{2i\pi x\gamma}d\gamma$$

Lemma 3.6. ***de la Paridad*** *Si f es una función par e integrable entonces su transformada de Fourier también será una función par.*

Lemma 3.7. ***Sobre la transformada de una función dilatada*** *Si f es una función integrable y $g(x) = f(\delta x)$ con $\delta \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces se cumple:*

$$g^*(\gamma) = \frac{1}{\delta}f^*(\frac{\gamma}{\delta})$$

Lemma 3.8. ***Transformada de Fourier de una Gaussiana*** *Si $f(x) = e^{-\pi x^2}$ entonces $f^* = f$*

Lemma 3.9. ***Transformada de la derivada*** *Si f es una función integrable, entonces se cumple:*

$$(f')^*(\gamma) = 2\pi i\gamma f^*(\gamma)$$

Lemma 3.10. ***Transformada del producto de convolución dos funciones*** *Si f y g son integrables entonces:*

$$(f * g)^*(\gamma) = f^*(\gamma)g^*(\gamma)$$

Demostración. Sea $f \in C^2_{com}(\mathbb{R}^n)$ Definiremos $P^t f(x) = \int f(x-y)p^t(dy)$. Es fácil ver que definiéndolo así P^t es un semigrupo markoviano definido en $C(\mathbb{R}^n)$.

Lo primero que tenemos que checkear es que conmute con la traslación.

$$T_z P^t f(x) = P^t f(x+z) = \int f(z+x-y)p^t(dy) = \int T_z f(x-y)p^t(dy) = P^t T_z f(x)$$

Entonces por los teoremas anteriores se tiene que el generador infinitesimal tiene la siguiente forma:

$$Af(x) = b(x)\frac{df}{dx}(x) + a(x)\frac{d^2 f}{dx^2}(x)$$

Con b y a constantes. Además, si usamos la invarianza de p^t bajo la reflexión $x \to -x$ entonces $b = 0$ por lo siguiente:

$$\int f(y)p^t(dy) = \int f(-u)p^t(-du) = \int f(-u)p^t(du) = \int f(-y)p^t(dy)$$

Y usando que

$$b = A(y-x)^*(0) = A(y)^*$$

Entonces $b = 0$

Luego

$$Af(x) = a\frac{d^2 f}{dx^2}(x)$$

Haciendo un cambio de notación, notaré D en vez de a

$$Af(x) = D\frac{d^2 f}{dx^2}(x)$$

$$u(t,x) = P^t f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \lim_{t_0 \to 0} \frac{u(t+t_0,x) - u(t,x)}{t_0} = \lim_{t_0 \to 0} \frac{P^{t+t_0}f(x) - P^t f(x)}{t_0}$$

$$= AP^t f(x) = Au(t,x) = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$$

Luego tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$$

$$u(0,x) = f(x)$$

Si le aplicamos la transformación de Fourier en la variable x entonces tenemos un nuevo sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t}(t,\gamma) = -4D\pi\gamma^2 u^*(t,\gamma)$$

$$u^*(0,\gamma) = f^*(\gamma)$$

Para cada γ fijo tenemos un sistema de ecuaciones en la variable t y una única solución.

Se ve entonces fácilmente que la solución única es:

$$u^*(t,\gamma) = f^*(\gamma)e^{-4\pi D\gamma^2 t}$$

Como las funciones f y gaussiana son integrables, entonces se puede aplicar el teorema de inversión de la transformada de Fourier y se tiene lo siguiente:

$$(f^*)^{-*} = f$$
$$(e^{-4\pi D\gamma^2 t})^{-*} = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{\frac{-x^2}{4Dt}}$$

Y usando que la transformada de la convolución es el producto de las transformadas, aplicando el teorema de inversión se tiene que la transformada inversa del producto es la convolución de las transformadas inversas, esto es:

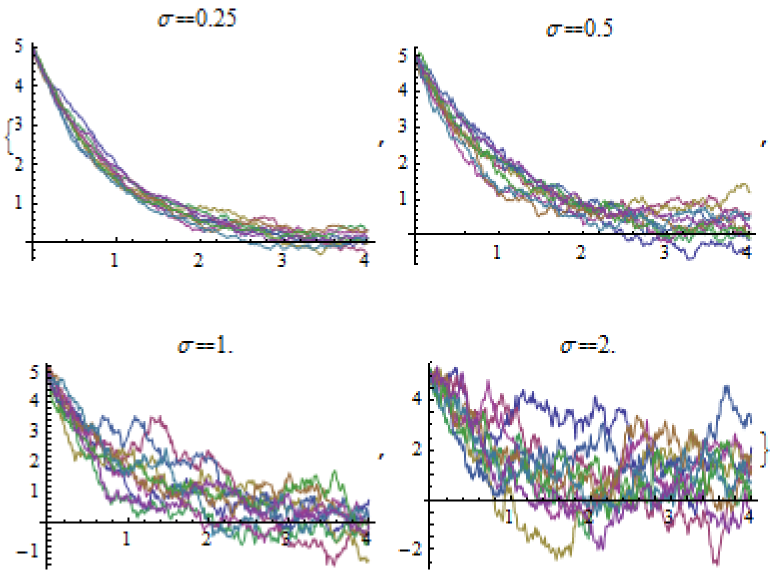
$$(f^*(\gamma)e^{-4\pi D\gamma^2 t})^{-*}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\int f(x-y)e^{\frac{-x^2}{4Dt}}dx$$

Y como P^t queda determinado por $C^2_{com}(\mathbb{R}^n)$ entonces se tiene que $p^t = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{\frac{-x^2}{4\pi Dt}}$ Es claro ver que cumple la ecuación de Difusión, así que lo dejare para el lector curioso y desconfiado.

$\square$

Capítulo 4

Ecuaciones Diferenciales Estocásticas



$$dx(t) = -x(t)dt + \sigma dw(t)$$

4.1. Introducción

Si queremos estudiar sistemas dinámicos lo más natural históricamente es estudiar sistema de ecuaciones diferenciales. Estos sistemas tienen un fuerte interés en física, ya que, ¡la mayoría de los sistemas son dinámicos! Desde, por ejemplo, soltar una piedra a una altura determinada, analizar cual es el camino más eficiente entre dos puntos a diferentes altitudes para que una partícula llegue lo más rápido posible, como es el movimiento de un cuerpo rígido, etc. Estos estudios utilizan fundamentalmente la teoría de las ecuaciones diferenciales, ya que, en ella se puede poner en un sistema de ecuaciones a la posición, la velocidad y la aceleración de una partícula en relación mutua. Por ejemplo:

$$x^{''}(t) = -\kappa x(t) \tag{4.1}$$

Nos transmite que la aceleración depende de la posición de la partícula. Este es un sistema que se encuentra en una partícula atada por un resorte sin rozamiento y sin fuerza externa. El simple hecho de conocer esta relación entre aceleración y posición nos permite conocer el comportamiento total del sistema. Si conocemos la posición y velocidad inicial, entonces tendremos $x(t)$ y $v(t)$ unívocamente determinados. Ahora surge la pregunta: ¿Y si agrego una fuerza externa y aleatoria? El proceso de Wiener nos permitirá definir una clase de ecuaciones diferenciales (más bien integrales) estocásticas de la siguiente forma: Tener una ecuación diferencial como 4.1 es lo mismo que tener la siguiente ecuación integral:

$$x^{'}(t) = x^{'}(0) - \kappa \int_0^t x(s)ds \tag{4.2}$$

Y si $F(t)$ es una fuerza externa, entonces resolver $x^{''}(t) = -\kappa x(t) + F(t)$ es equivalente a resolver:

$$x^{'}(t) = x^{'}(0) - \kappa \int_0^t x(s)ds + \int_0^t F(s)ds \tag{4.3}$$

Y como $F(t) = \frac{dP}{dt}(t)$ con $P(t)$ el momento de la particula asociado a esa fuerza:

$$x^{'}(t) = x^{'}(0) - \kappa \int_0^t x(s)ds + P(t) - P(0) = x^{'}(t) = x^{'}(0) - \kappa \int_0^t x(s)ds + \Delta P \tag{4.4}$$

$$= x^{'}(0) - \kappa \int_0^t x(s)ds + \int_0^t dP(s) \tag{4.5}$$

Ahora, si cambio P por w, el proceso de Wiener, claramente me queda una ecuación diferencial estocástica:

$$x^{'}(t) = x^{'}(0) - \kappa \int_0^t x(s)ds + \int_0^t dw(s) := x^{'}(0) - \kappa \int_0^t x(s)ds + w(t) - w(0) \tag{4.6}$$

Y nuestro objetivo al resolverla no será encontrar $x(t)$ y $x^{'}(t)$ como normalmente uno esta acostumbrado a hacer con una ecuación diferencial, sino encontrar la distribución de $x(t)$ y $x^{'}(t)$. En este sencillo ejemplo veremos que las distribuciones son normales, y la media es exactamente el movimiento determinístico. Antes de empezar a resolver ecuaciones, primero daremos sentido a la siguiente expresión:

$$\int F(s)dw(s)$$

Con $F \in L^2(\mathbb{R})$ A la que llamaremos Integral de Wiener. Que a diferencia de la integral que estamos acostumbrados, en vez de ser una función que toma valores reales, será una función que toma valores en variables aleatorias. Por lo tanto $\int F(s)dw(s)$ será una variable aleatoria. Empecemos viendo cómo definirla y luego pasemos a la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas.

4.2. Integral de Wiener

Teorema 4.1. *Sea Ω el espacio de probabilidad de las diferencias del proceso de Wiener a dos lados. Entonces existe un único operador isométrico*

$$T : L^2(\mathbb{R}, \sigma^2 dt) \to L^2(\Omega)$$
$$T(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)dw(t)$$

De tal forma que si $-\infty < a \leq b < \infty$ entonces se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[a,b]} dw(t) = w(b) - w(a) = \int_a^b dw(t)$$

Demostración. Claramente $w(b) - w(a)$ está en $L^2(\Omega)$. Entonces definamos esta integral como siempre se define una integral:

Sea $f = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{[a_i,b_i]}$ una función escalón. Entonces definimos:

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)dw(t) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{[a_i,b_i]}(t)dw(t) = \sum_{i=1}^n c_i[w(b_i) - w(a_i)] \in L^2(\Omega)$$

Ahora tomemos otra función escalón:

$$g = \sum_{j=1}^{m} e_j \mathbb{1}_{[c_j,d_j]}$$

$$\mathbb{E}[\int_{\mathbb{R}} f(t)dw(t) \int_{\mathbb{R}} g(t)dw(t)] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} c_i(w(b_i)-w(a_i)) \sum_{j=1}^{m} e_j(w(d_j)-w(c_j))]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i e_j \sigma^2 |[a_i,b_i] \cap [c_j,d_j]| = \sigma^2 \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)dt$$

Por lo tanto tengo una función definida en las funciones escalones y que es continua en ese dominio (por la isometría demostrada) y por lo tanto, como el dominio es denso en $L^2(\mathbb{R}, \sigma^2 dt)$ tiene una extensión isométrica. Y como el límite de variables aleatorias gaussianas es gaussiana, entonces la variable aleatoria:

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)dw(t)$$

Es Gaussiana □

Observación.

$$\mathbb{E}(\int_{\mathbb{R}} f(t)dw(t)) = 0$$

$$Var(\int_{\mathbb{R}} f(t)dw(t)) = \sigma^2 \int_{\mathbb{R}} f^2(t)dt = ||f||_{L^2}$$

Por lo tanto se concluye:

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)dw(t) \sim \mathcal{N}(0, ||f||_{L^2})$$

Este argumento anterior se puede replicar para una versión más general, pero por razones didácticas no lo enunciare en esta monografía, ya que no utilizaremos esa generalidad acá, para el lector curioso se puede ver en el capítulo 7 en [1].

Veremos ahora un teorema interesante y útil para el siguiente apartado, que utiliza la hipótesis de que f sea de variación acotada, e incluso absolutamente continua.

Teorema 4.2. *Sea f de variación acotada en $\mathbb{R}$ con soporte compacto. Entonces:*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)dw(t) = -\int_{\mathbb{R}} w(t)df(t) \ \ c.s$$

En el caso de que f sea absolutamente continua en $[a,b]$ entonces se tiene:

$$\int_a^b f(t)dw(t) = -\int_a^b f'(t)w(t)dt \ \ + f(b)w(b) - f(a)w(a) \ \ c.s$$

Demostración. Veamos primero que funciona el argumento para las funciones escalón:

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{[a_i,b_i]}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)dw(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i[w(b_i) - w(a_i)] = -\sum_{i=1}^{n} f(a_i)w(a_i) - f(b_i)w(b_i) = -\sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} w(t)df(t)$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} w(t)df(t) \ \ c.s$$

El casi seguramente viene de que para que tenga sentido esta integral usamos que el movimiento Browniano es continuo casi seguramente.

Si ahora tomamos una sucesión de funciones escalón $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ tal que $f_n \to f$ en L^2 entonces veamos si $g \in C^1_{com}(\mathbb{R})$ entonces es diferenciable en casi todo punto y se cumple:

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)df_n(x) = -\int_{\mathbb{R}} g'(x)f_n(x)dx$$

Esto se puede ver de lo anterior, ya que $dg(x) = g'(x)dx$. A partir de esta observación se puede ver qué $df_n \to^{w^*} df$ ya que:

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)df_n(x) = -\int_{\mathbb{R}} g'(x)f_n(x)dx \to -\int_{\mathbb{R}} g'(x)f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)df(x) \forall g \in C^1_{com}(\mathbb{R})$$

Y como $C^1_{com}(\mathbb{R})$ es denso en las funciones de variación acotada, entonces se tiene que $df_n \to^{w^*} df$. Entonces tendriamos que:

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dw(x) = -\int_{\mathbb{R}} w(x)df_n(x) \to_{n\to\infty} -\int_{\mathbb{R}} w(x)df(x) \ \ c.s$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dw(x) \to \int_{\mathbb{R}} f(x)dw(x)$$

Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dw(x) = -\int_{\mathbb{R}} w(x)df(x) \;\; c.s$$

Y además si f es absolutamente continua en $[a,b]$ entonces es derivable en casi todo punto, luego se tiene: $df(x) = f'(x)dx$ y se cumple:

$$\int_a^b f(t)dw(t) = -\int_{\mathbb{R}} w(t)d\mathbb{1}_{[a,b]}f(t)dt = -\int_{\mathbb{R}} w(t)f'(t)dt \;+\; f(b)w(b) - f(a)w(a) \;\; c.s$$

$\square$

4.3. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

A partir de ahora consideraremos el proceso de Wiener en $\mathbb{R}^l$ con generador infinitesimal:

$$C = \sum_{i,j=1}^{l} c^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}$$

En este caso vale recordar que entonces $w(t) - w(s)$ son Gaussianas independientes cuando los intervalos temporales son disjuntos, esperanza 0 y matriz de covarianza $2c^{ij}|t-s|$

Con esto vayamos a un teorema de "Picard"pero versión estocástico:

Teorema 4.3. *Sea b:$\mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ una función globalmente Lipschitz. Sea w el movimiento Browniano en $\mathbb{R}^l$ con generador infinitesimal C. Entonces para todo $x_0 \in \mathbb{R}^l$ existe un único proceso estocástico $x(t)$ tal que para todo t se cumple:*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t b(x(s))ds + w(t) - w(0)$$

En este caso diremos que x(t) es el proceso solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dx(t) = b(x(t))dt + dw(t)$$

Y además el proceso es continuo con probabilidad uno.

Demostración. Con probabilidad uno los caminos son continuos, entonces basta probar la existencia de dicho proceso y la unicidad. Bastará con fijar w una función continua en t.

Sea $\lambda > \kappa \geq 0$, con κ la constante de Lipschitz de b y sea $\mathcal{X}$ el espacio de Banach de todas las funciones continuas con dominio $[0, t]$ y codominio $\mathbb{R}^l$ y con la siguiente norma:

$$||\zeta|| = \sup_{0 \leq s \leq t} e^{-\lambda s} |\zeta(s)| \ \ \forall \zeta \in \mathcal{X}$$

Definimos ahora el siguiente mapa no lineal $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ de la siguiente forma:

$$T\zeta(s) = \zeta(0) + \int_0^s b(\zeta(r))dr + w(s) - w(0)$$

El argumento siguiente es muy similar al que se hace para demostrar Picard:

$$\begin{aligned}
||T\zeta - T\eta|| &\leq |\zeta(0) - \eta(0)| + \sup_{0 \leq s \leq t} e^{-\lambda s} |\int_0^s [b(\zeta(r)) - b(\eta(r))]dr| \\
&\leq |\zeta(0) - \eta(0)| + \sup_{0 \leq s \leq t} e^{-\lambda s} \kappa \int_0^s |\zeta(r) - \eta(r)|dr \\
&\leq |\zeta(0) - \eta(0)| + \sup_{0 \leq s \leq t} e^{-\lambda s} \kappa \int_0^s e^{\lambda r} ||\zeta - \eta||dr \\
&= |\zeta(0) - \eta(0)| + \frac{\kappa}{\lambda} ||\zeta - \eta||
\end{aligned}$$

Entonces si admitimos solo las funciones que coinciden en 0, entonces para cada x_0 tenemos:

$$\mathcal{X}_{x_0} = \{\zeta \in \mathcal{X} / \zeta(0) = x_0\}$$

Si restringimos T a este espacio, es claramente una contracción, y como $\mathcal{X}_{x_0}$ es completo con la norma que venimos trabajando, entonces $\exists x \in \mathcal{X}_{x_0}$ punto fijo de T $\square$

Observación. Tambien diremos que un proceso solución de esta ecuación $dx(t) = b(x(s))ds + dw(t)$ es un proceso que cumple:

$$x(t) - x(s) = \int_s^t b(x(r))dr + w(t) - w(s)$$

Lemma 4.4. *$x(t)$ el proceso solución de $dx(t) = b(x(s))ds + dw(t)$ con condición inicial x_0 y las mismas hipótesis sobre b, cumple la propiedad de Markov simple de perdida de memoria, esto es:*

$$P(x(t) \in A \mid x(r) \ \ 0 \leq r \leq s) = P(x(t) \in A \mid x(s))$$

Demostración. Por unicidad de la solución, existe el proceso $x(t)$ es de la forma:

$$x(t) = x(s) + \int_s^t b(x(r))dr + w(t) - w(s)$$

Entonces como el proceso queda unívocamente determinado solo por cuánto vale $x(s)$, entonces solo depende de los tiempos $s \leq r \leq t$ y con esto queda demostrado.

□

Teorema 4.5. *Sea x solución a $dx(t) = b(x(s))ds + dw(t)$ con $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^l$ con las mismas hipótesis del teorema anterior.*
Si definimos $P^t f(x_0) = \mathbb{E}[f(x(t))]$ $f \in C(\mathbb{R}^l)$ entonces se cumple lo siguiente:

1. *$P^t : C(\mathbb{R}^l) \to C(\mathbb{R}^l)$ es un semigrupo Markoviano en $C(\mathbb{R}^l)$*
2. *$C^2_{com}(\mathbb{R}^l) \subset \mathcal{D}(A)$ con A el generador infinitesimal de P^t*
3. *$Af = b \cdot \bigtriangledown f + Cf \quad \forall f \in C^2_{com}(\mathbb{R}^l)$*

Demostración. Tomando T la misma contracción del teorema anterior, w continuo y fijo , y aplicando inducción a la desigualdad obtenida se obtiene fácilmente la siguiente desigualdad:

$$||T^n\zeta - T^n\eta|| \leq [1 + \frac{\kappa}{\lambda} + \ldots + (\frac{\kappa}{\lambda})^{n-1}]|\zeta(0) - \eta(0)| + (\frac{\kappa}{\lambda})^n||\zeta - \eta|| \quad (4.7)$$

Más aún: $x = \lim_{n\to\infty} T^n x_0$
Entonces por 4.7 tenemos:

$$||T^n x_0 - T^n y_0|| \leq [1 + \frac{\kappa}{\lambda} + \ldots + (\frac{\kappa}{\lambda})^{n-1}]|x_0 - y_0| + (\frac{\kappa}{\lambda})^n||x_0 - y_0||$$

Aplicando límite de ambos lados:

$$||x - y|| \leq \left[\frac{1}{1 - (\frac{\kappa}{\lambda})}\right] |x_0 - y_0| \quad (4.8)$$

Poniendo $\beta = \left[\frac{1}{1-(\frac{\kappa}{\lambda})}\right]$ se tiene de la ecuacion 4.8:

$$|x(t) - y(t)| \leq e^{\lambda t}\beta|x_0 - y_0| \tag{4.9}$$

Tomemos ahora f Lipschitz en $\mathbb{R}^l$ con constante κ entonces se tiene:

$$|f(x(t)) - f(y(t))| \leq \kappa e^{\lambda t}\beta|x_0 - y_0|$$

Como esto es cierto para cada w fijo y continuo (tienen probabilidad 1) entonces se cumple:

$$|P^t f(x_0) - P^t f(y_0)| \leq \kappa e^{\lambda t}\beta|x_0 - y_0| \tag{4.10}$$

Y por lo tanto podemos deducir que si $f \in C(\mathbb{R}^l)$ es Lipschitz, entonces $P^t f$ es una función continua, y acotada. Esto último sale de hacer memoria de que las funciones que están en $C(\mathbb{R}^l)$ son las que tienden a 0 en el infinito.

Las funciones Lipschitz son densas en $C(\mathbb{R}^l)$ por lo tanto P^t es un operador lineal y acotado, luego continuo. Veamos ahora que manda a $C(\mathbb{R}^l)$ en si mismo, esto es lo mismo que mostrar que $P^t f(x) \to 0 \quad x \to \infty$ Veamos eso:

Para todo s tal que $0 \leq s \leq t$ y con t tal que $\kappa t < 1$

$$x(t) = x(s) + \int_s^t b(x(r))dr + w(t) - w(s)$$

$$|x(t) - x(s)| = |\int_s^t [b(x(r)) - b(x(t))]dr + (t-s)b(x(t)) + w(t) - w(s)|$$

$$\leq \kappa \int_s^t |(x(r) - x(t)|dr + t|b(x(t))| + |w(t) - w(s)|$$

$$\leq \kappa(t-s) \sup_{0 \leq r \leq t} |x(r) - x(t)| + t|b(x(t))| + \sup_{0 \leq r \leq t} |w(t) - w(r)|$$

Como esta desigualdad es para cualquier s que cumple $0 \leq s \leq t$ entonces se tiene lo siguiente:

$$\sup_{0 \leq s \leq t} |x(t) - x(s)| \leq \kappa(t-s) \sup_{0 \leq r \leq t} |x(r) - x(t)| + t|b(x(t))| + \sup_{0 \leq r \leq t} |w(t) - w(r)|$$

$$\leq \kappa t \sup_{0 \leq s \leq t} |x(s) - x(t)| + t|b(x(t))| + \sup_{0 \leq r \leq t} |w(t) - w(r)|$$

Y despejando esta ecuación se obtiene:

$$\sup_{0\leq s\leq t}|x(t)-x(s)| \leq \left[\frac{1}{1-\kappa t}\right]\left[t|b(x(t))| + \sup_{0\leq r\leq t}|w(t)-w(r)|\right] \tag{4.11}$$

Es importante notar que en esta desigualdad usamos que $\kappa t < 1$. Hará un cambio de notacion para facilitar y llamaré $\gamma = \left[\frac{1}{1-\kappa t}\right]$. De 4.11 se ve que en particular:

$$|x(t)-x_0| \leq \gamma\left[t|b(x(t))| + \sup_{0\leq r\leq t}|w(0)-w(r)|\right] \tag{4.12}$$

Una vez obtenida la ecuación 4.12 tomemos $f \in C_{com}(\mathbb{R}^l)$ y sea $\delta = \sup_{z_0\in sopp(f)}|b(z_0)|$. Entonces se cumple que $f(x(t)) = 0$ a menos que:

$$\inf_{z_0\in sopp(f)}|z_0-x_0| \leq \gamma\left[t\delta + \sup_{0\leq r\leq t}|w(t)-w(r)|\right]$$

Ya que si:

$$\inf_{z_0\in sopp(f)}|z_0-x_0| > \gamma\left[t\delta + \sup_{0\leq r\leq t}|w(t)-w(r)|\right]$$

Entonces si supongo que $x(t) \in sopp(f)$ por 3.6 se tiene el siguiente absurdo:

$$|x(t)-x_0| \leq \gamma\left[t\delta + \sup_{0\leq r\leq t}|w(t)-w(r)|\right] < \inf_{z_0\in sopp(f)}|z_0-x_0| < |x(t)-x_0|$$

Tomemos ahora:

$$A = \{w \in C^0(\mathbb{R}) : \inf_{z_0\in sopp(f)}|z_0-x_0| \leq \gamma\left[t\delta + \sup_{0\leq r\leq t}|w(t)-w(r)|\right]\}$$

$$= \{w \in C^0(\mathbb{R}) : \inf_{z_0\in sopp(f)}|z_0-x_0| \leq \gamma\left[t\delta + M_w\right]\}$$

Con M_w una constante que depende de w.

Entonces se cumple:

$$P(A) \to 0 \quad x_0 \to \infty$$

Esto se deduce usando que $P(\sup_s|w(t)-w(s)| > M) \to 0$ cuando $M \to \infty$. Como f esta acotada entonces:

$$\mathbb{E}f(x(t)) = \int_A f(x(t))dP + \int_{A^c} f(x(t))dP$$

Si $w \in A^c \to f(x(t)) = 0$ luego se deduce que:

$$\mathbb{E}f(x(t)) = \int_A f(x(t))dP \leq ||f||_\infty P(A) \to 0 \quad x_0 \to \infty$$

$$P^t f(x_0) \to 0 \quad x_0 \to \infty$$

Por lo tanto $P^t f \in C(\mathbb{R}^l)$ cuando $f \in C_{com}(\mathbb{R}^l)$. Usando que P^t es un operador lineal y continuo y que $C_{com}(\mathbb{R}^l) \subset C(\mathbb{R}^l)$ es denso, entonces P^t manda $C(\mathbb{R}^l)$ en si mismo. Y queda entonces bien definido como operador de $C(\mathbb{R}^l)$ en si mismo.

Cabe notar que aún tenemos la restricción de $\kappa t < 1$ pero esto no importa ya que veremos que P^t es un semigrupo a continuación:

$$\mathbb{E}\left[f(x(t)) \mid x_r,\ 0 \leq r \leq s\right] = \mathbb{E}\left[f(x(t)) \ |x_s\right] = P^{t-s} f(x(s)) \ \forall f \in C(\mathbb{R}^l) \ 0 \leq s \leq t$$

$$P^{t+s} f(x_0) = \mathbb{E}_{x_s}\mathbb{E}\left[f(x(t+s) \ |x(s))\right] = \mathbb{E}P^t f(x(s)) = P^s P^t f(x_0)$$

Cuando noto $\mathbb{E}_{x_s}$ estoy integrando respecto a esa variable. Por lo tanto, queda claro que es un semigrupo y por lo tanto la hipótesis inicial de $\kappa t < 1$ no es perdida de generalidad. Es además claro que:

$$\sup_{0 \leq f \leq 1} P^t f(x_0) = 1 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^l \ \forall t$$

Ahora demostraremos el punto 3 del teorema, con $f \in C^2_{com}(\mathbb{R}^l)$ y como este espacio es denso en $C(\mathbb{R}^l)$ esto implicará que $P^t f \to f$ cuando $t \to 0 \quad \forall f \in C(\mathbb{R}^l)$ y por lo tanto quedará demostrado que P^t es un semigrupo markoviano.

Sea $f \in C^2_{com}(\mathbb{R}^l)$ y $K \subset \mathbb{R}^l$ compacto y tal que $sopp(f) \subset K^\circ$. Haciendo las mismas cuentas que hicimos para obtener 4.12 se puede obtener:

$$|x(t) - x_0| \leq \gamma \left[t|b(x(x_0))| + \sup_{0 \leq r \leq t} |w(0) - w(r)|\right] \tag{4.13}$$

Simplemente agregando una suma y una resta del factor $b(x_0)$ en vez de $b(x(t))$. Asumiremos otra vez que $\kappa t < 1$. Sea ahora $x_0 \in K^c$, entonces $f(x_0) = 0$ y $f(x(t)) \neq 0$ solo si:

$$d(K^c, sopp(f)) \leq |x(t) - x_0|$$

Haciendo un cambio de notación para facilitar $\varepsilon = d(K^c, sopp(f))$ sucede lo siguiente:

$$P(\varepsilon \leq \gamma[t|b(x(x_0))| + \sup_{0\leq r\leq t} |w(0) - w(r)|]) = o(t^n) \quad t \to 0 \ \forall n \tag{4.14}$$

Esto sale de que:

$$P(\varepsilon \leq \gamma[t|b(x(x_0))| + \sup_{0\leq r\leq t} |w(0)-w(r)|]) = P(\frac{\varepsilon}{\gamma} - t|b(x(x_0))| \leq \sup_{0\leq r\leq t} |w(0)-w(r)|)$$

$$= P(\frac{\varepsilon}{\gamma} - t|b(x(x_0))| \leq \sup_{0\leq r\leq t} |w(r)|) \leq P(M \leq \sup_{0\leq r\leq t} |w(r)|) = o(t^n) \quad t \to 0 \ \forall n$$

Esta M es una cierta constante que acota inferiormente. Ya que la función $t|b(x(x_0))|$ esta acotada, de igual forma que $\frac{\varepsilon}{\gamma}$. Y la última igualdad se vio en el capítulo 2 cuando se habló del principio de reflexión de D'Andre. Por lo tanto, como f esta acotada, $P^t f$ es uniformemente $o(t^n)$ $\forall x_0 \in K^c$, ya que:

$$\mathbb{E}f(x(t)) \leq ||f||_\infty P(\varepsilon \leq \gamma[t|b(x(x_0))| + \sup_{0\leq r\leq t} |w(0) - w(r)|])$$

Y por lo tanto:

$$\frac{P^t f(x_0) - f(x_0)}{t} \to 0 = b(x_0) \bigtriangledown f(x_0) + Cf(x_0) \tag{4.15}$$

Ahora, sea $x_0 \in K$, entonces:

$$P^t f(x_0) = \mathbb{E}f(x(t)) = \mathbb{E}f\left[x_0 + \int_0^t b(x(s))ds + w(t) - w(0)\right]$$

Aplicando Taylor a $f(x_0 + \int_0^t b(x(s))ds + w(t) - w(0))$:

$$= f(x_0) + \bigtriangledown f(x_0) \cdot \int_0^t b(x(s))ds + \bigtriangledown f(x_0) \cdot [w(t) - w(0)]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{ij} [w^i(t) - w^i(0)][w^j(t) - w^j(0)] \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} f(x_0) + r(t)$$

Ahora agregamos la siguiente cuenta: $tb(x_0) - \int_0^t b(x_0)ds$. Entonces la igualdad anterior la ponemos de la siguiente forma:

$$= f(x_0) + \bigtriangledown f(x_0) \cdot tb(x_0) + \bigtriangledown f(x_0) \cdot [w(t) - w(0)]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{ij}[w^i(t) - w^i(0)][w^j(t) - w^j(0)]\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} f(x_0) + R(t)$$

Y ahora $R(t) = o(\int_0^t [b(x(s)) - b(x_0)]ds) + o(|w(t) - w(0)|^2)$
Además $\mathbb{E}(|w(t) - w(0)|^2) \leq t$ Y además:

$$\mathbb{E} \sup_{x_0 \in K} \left[\frac{1}{t}\int_0^t |b(x(s)) - b(x_0)|ds\right] \leq \mathbb{E} \sup_{x_0 \in K} \left[\frac{\kappa}{t}\int_0^t |x(s) - x_0|ds\right]$$

$$\leq \mathbb{E} \sup_{x_0 \in K} \kappa\gamma \left[t[b(x_0)] + \sup_{0 \leq s \leq t} |w(s) - w(0)|\right] \to 0 \;\; t \to 0$$

Entonces :

$$\frac{P^t f(x_0) - f(x_0)}{t} = \bigtriangledown f(x_0) \cdot b(x_0) + \frac{1}{t} \bigtriangledown f(x_0) \cdot \mathbb{E}[w(t) - w(0)]$$

$$+\frac{1}{2t}\sum_{ij}\mathbb{E}[w^i(t) - w^i(0)][w^j(t) - w^j(0)]\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} f(x_0) + \frac{1}{t}\mathbb{E}[R(t)]$$

$$= \bigtriangledown f(x_0) \cdot b(x_0) + Cf(x_0) + \frac{1}{t}\mathbb{E}[R(t)] \to \bigtriangledown f(x_0) \cdot b(x_0) + Cf(x_0) \quad t \to 0$$

$\square$

Teorema 4.6. *Sea $A : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ lineal, sea w un movimiento Browniano en R^l con generador infinitesimal C, y sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^l$ continua. Entonces la solución de:*

$$dx(t) = Ax(t)dt + f(t)dt + dw(t) \;\; , \;\; x(0) = x_0$$

Para todo $t \geq 0$ es:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds + \int_0^t e^{A(t-s)}dw(s)$$

Demostración. Primero, una solución de esa ecuación existe por el teorema anterior, es única y de la forma:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t Ax(s)ds + \int_0^t f(s)ds + w(t) - w(0)$$

Tomemos por otro lado:

$$y(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds + \int_0^t e^{A(t-s)}dw(s)$$

$$\int_0^t e^{A(t-s)}dw(s) = \int_0^t Ae^{(t-s)}w(s)ds + e^{A(t-s)}w(s)\Big|_0^t = \int_0^t Ae^{(t-s)}w(s)ds + w(t) - e^{At}w(0)$$

Luego $y(t) - w(t)$ es una función derivable.

$$\frac{d}{dt}(y(t) - w(t)) = Ae^{At}[x_0 - w(0)] + \frac{d}{dt}\int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds + \frac{d}{dt}\int_0^t Ae^{A(t-s)}w(s)ds$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds = \frac{d}{dt}e^{At}\int_0^t e^{-As}f(s)ds = Ae^{At}\int_0^t e^{-As}f(s)ds + e^{At}e^{-At}f(t)$$

$$= A\int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds + f(t)$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^t Ae^{A(t-s)}w(s)ds = \frac{d}{dt}e^{At}\int_0^t Ae^{-As}w(s)ds = Ae^{At}\int_0^t Ae^{-As}w(s)ds + Aw(t)$$

Entonces:

$$\frac{d}{dt}(y(t) - w(t)) = Ax(t) + f(t)$$

Luego

$$y(t) = y(0) + \int_0^t Ax(s) + f(s)ds + w(t) - w(0)$$

Y por unicidad: $y(t) = x(t)$ □

Corolario 4.6.1. *Supongamos que $x(t)$ es el proceso del teorema anterior. Entonces:*

$$\mathbb{E}[x(t)] = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)ds$$

O sea, la esperanza del movimiento es el movimiento determinístico.

Y si $t \geq s$:

$$\mathbb{E}\left[(x(t) - \mathbb{E}x(t))(x(s) - \mathbb{E}x(s))^T\right] = e^{A(t-s)} \int_0^s e^{Ar} 2Ce^{A^T r} dr$$

Demostración. Primero, cuando escriba $[x(t) - \mathbb{E}x(t)]$ sera un vector columna. Y $[x(t) - \mathbb{E}x(t)]^T$ un vector fila. La covarianza esta dada por:

$$\mathbb{E}\left[(x(t) - \mathbb{E}x(t))(x(s) - \mathbb{E}x(s))^T\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t e^{A(t-t_1)} dw(t_1) (\int_0^s e^{A(s-s_1)} dw(s_1))^T\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\int_0^t \sum_k (e^{A(t-t_1)})_k dw_k(t_1) (\int_0^s \sum_h (e^{A(s-s_1)})_h dw_h(s_1))^T\right]$$

Esto da una matriz de covarianza, analicemos la fila k y la columna h:

$$\mathbb{E}x_k(t)x_h(s) - \mathbb{E}x_k(t)\mathbb{E}x_h(s) = \mathbb{E}\left[\int_0^t (e^{A(t-t_1)})_k dw_k(t_1) \int_0^s (e^{A(s-s_1)})_h dw_h(s_1)\right]$$

$$= \int_0^s (e^{A(t-r)})_k 2c_{kh} (e^{A(s-r)})_h dr = (e^{A(t-s)} \int_0^s e^{Ar} 2Ce^{A^T r} dr)_{kh}$$

□

4.3.1. Ejemplos de ecuaciones diferenciales estocásticas

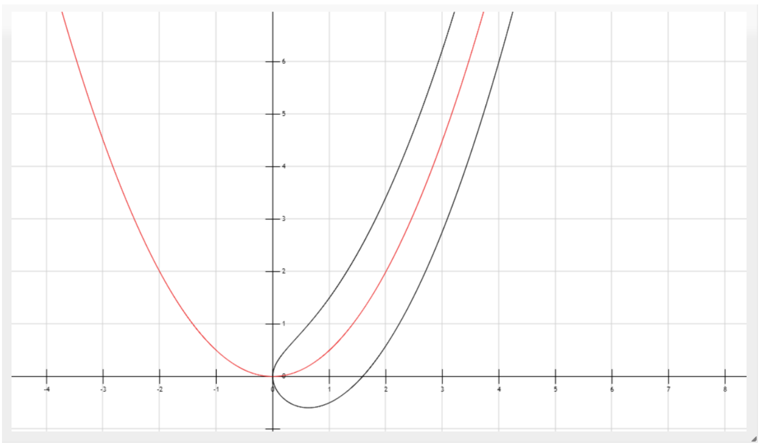
Veremos tres ejemplos sencillos de ecuaciones diferenciales estocásticas y en el capítulo siguiente profundizaremos más en otro ejemplo, un poco más delicado.

Al final de cada ejemplo incluiré una gráfica de la posición media $\mathbb{E}x(t)$ en rojo. Y en negro se podrá ver $\mathbb{E}x(t) \pm \sqrt{Var(x(t))}$, para así tener una idea visual de por donde andarán los caminos con mayor probabilidad, ya que la probabilidad de que a tiempo t un camino se encuentre a una distancia $\pm\sqrt{Var(x(t))}$ de $\mathbb{E}x(t)$ es de 0.68 aproximadamente. Para tener un 0.95 de probabilidad basta tomar $\pm 2\sqrt{Var(x(t))}$.

1. $dx(t) = tdt + dw(t)$ El proceso solución se consigue facílmente integrando ambos lados de la expresión:

$$x(t) = x_0 + \frac{t^2}{2} + w(t) \tag{4.16}$$

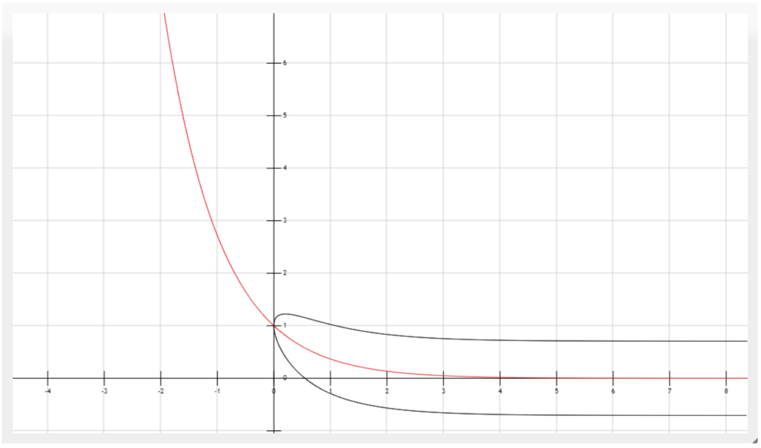
   Por lo tanto $x(t)$ tiene ley $\mathcal{N}(x_0 + \frac{t^2}{2}, t)$ En el caso que $x_0 = 0$ se puede ver en la siguiente gráfica en rojo el camino medio y en negro el camino medio mas la raiz de la varianza.



2. $dx(t) = -x(t)dt + dw(t)$ El proceso solución es también sencillo de encontrar aplicando los resultados obtenidos en esta sección:

$$x(t) = x_0 e^{-t} + \int_0^t e^{s-t} dw(s) \tag{4.17}$$

   En este caso $x(t)$ tiene como ley $\mathcal{N}\left(x_0 e^{-t}, \frac{1}{2} - \frac{e^{-2t}}{2}\right)$



3. $dx(t) = v(t)dt$ y $dv(t) = -x(t)dt + dw(t)$ Oscilador armónico sin rozamiento con ruido blanco. Este ejemplo es genial para ver en acción todo lo visto anteriormente. Primero veamos el sistema como queda si lo vemos como vectores:

$$d\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} dt + d\begin{pmatrix} 0 \\ w(t) \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

Y como sabemos que:

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} cos(t) & sin(t) \\ -sin(t) & cos(t) \end{pmatrix}$$

Se obtiene que el camino medio de $x(t)$ y $v(t)$ es:

$$\mathbb{E}x(t) = x_0 cos(t) + v_0 sin(t) \tag{4.19}$$

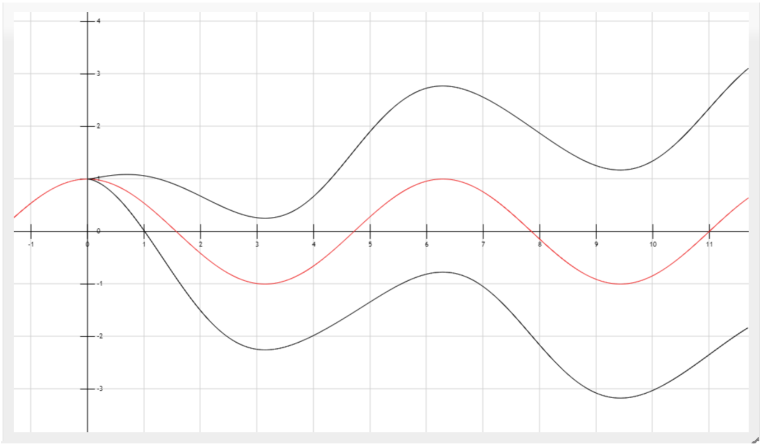
$$\mathbb{E}v(t) = -x_0 sin(t) + v_0 cos(t) \tag{4.20}$$

Haciendo las cuentas correspondientes para obtener la matriz de covarianza, se llega a que:

$$Var(x(t)) = \frac{t}{2} - \frac{sin(2t)}{4} \tag{4.21}$$

$$Var(v(t)) = \frac{t}{2} + \frac{sin(2t)}{4} \tag{4.22}$$

Y por lo tanto, la grafica para $x_0 = 1$ y $v_0 = 0$ de $x(t)$ es la siguiente:



4.4. Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Teorema 4.7. *Sea D y β constantes positivas, w proceso de Wiener en $\mathbb{R}$ con el parametro de varianza: $2\beta^2 D$. Entonces la solución para $t > 0$ de:*

$$dv(t) = -\beta v(t)dt + dw(t) \qquad v(0) = v_0$$

Es:

$$v(t) = e^{-\beta t}v_0 + \int_0^t e^{-\beta(t-s)}dw(s)$$

Con:

$$\mathbb{E}v(t) = e^{-\beta t}v_0$$
$$\mathbb{E}[v(t) - \mathbb{E}v(t)][v(s) - \mathbb{E}v(s)] = \beta D\left[e^{-\beta|t-s|} - e^{-\beta(t+s)}\right]$$

Y $v(t)$ son variables aleatorias de un proceso de Markov en $\mathbb{R}$ con generador infinitesimal:

$$-\beta v\frac{d}{dv} + \beta^2 D\frac{d^2}{dv^2}$$

Demostración. La demostración de esto es la aplicación directa de todos los teoremas vistos en este capítulo. Veré el caso de la covarianza por ser el menos trivial: Sea $t \geq s$

$$\mathbb{E}\left[e^{-\beta t}\int_0^t s^{\beta t_1}dw(t_1)e^{-\beta s}\int_0^s s^{\beta s_1}dw(s_1)\right] = e^{-\beta(t+s)}\int_0^s e^{2\beta r}\sigma^2 dr$$

$$= e^{-\beta(t+s)}\sigma^2 \frac{e^{-2\beta s}-1}{2\beta} = \beta D \left[e^{-\beta|t-s|} - e^{-\beta(t+s)}\right]$$

□

Observación. Cabe notar que $C^2_{com}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(A)$ y el núcleo del semigrupo P^t esta dado por:

$$p^t(v_0, dv) = [2\pi\beta D(1-e^{-\beta t})]^{-\frac{1}{2}} e^{\left[-\frac{(v-e^{-\beta t}v_0)^2}{2\beta D(1-e^{2\beta t})}\right]} dv$$

Al $v(t)$ ser Gaussianas basta con conocer su esperanza y varianza para que p^t quede únicamente determinado. Además la distribución límite de p^t cuando $t \to \infty$ es la siguiente:

$$\mu = [2\pi\beta D]^{-\frac{1}{2}} e^{\left[-\frac{v^2}{2\beta D-}\right]} dv$$

Y cumple además que $(P^t)^*(\mu) = \mu \circ P^t = (\text{lím}_{s\to\infty} P^s) \circ P^t = \text{lím}_{s\to\infty} P^{s+t} = \mu$. O sea, es invariante al operador $(P^t)^*$.

Definición 4.4.1. Al proceso v se le llama el proceso de Ornstein-Uhlenbeck de la velocidad, con coeficiente de difusión D y de relajacion β^{-1}.

El correspondiente proceso de la posición de Ornstein-Uhlenbeck, x, es el siguiente:

Teorema 4.8. *Sea $v(t)$ el proceso de Ornstein-Uhlenbeck de la velocidad, entonces, sea:*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(s)ds$$

Se cumple que $x(t)$ es un proceso Gaussiano con media:

$$\mathbb{E}x(t) = x_0 + \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta} v_0$$

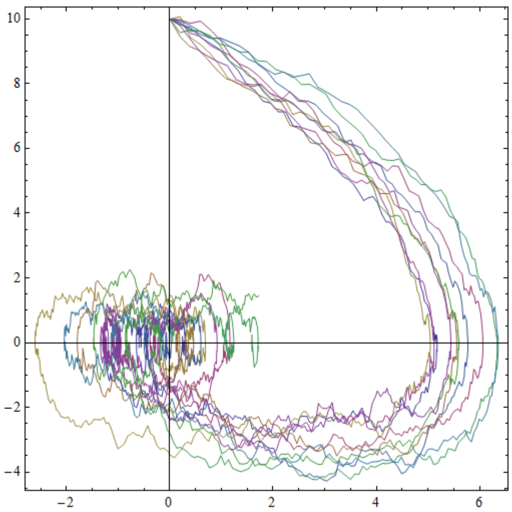
y covarianza:

$$cov(x(t), x(s)) = 2Dmin(t,s) + \frac{D}{\beta}(-2 + 2e^{-\beta t} + 2e^{-\beta s} - e^{-\beta|t-s|} - e^{-\beta(t+s)})$$

Demostración. La demostración se la dejaré al lector, ya que solamente basta integrar. □

Capítulo 5

Oscilador Armónico con ruido blanco



Para terminar esta monografía me gustaría aplicar todos los resultados anteriores a este capítulo para el siguiente ejemplo. Trataremos con el Oscilador Armónico con ruido blanco:

$$dx(t) = v(t)dt$$

$$dv(t) = -w^2 x(t)dt - \beta v(t)dt + dw(t)$$

5.1. Oscilador Armónico sin ruido blanco

Empezare primero analizando el caso del Oscilador Armónico sin el ruido blanco como primer paso para entender la dinámica de este sistema. Las ecuaciones son las mismas, solo que sin el movimiento Browniano:

$$dx(t) = v(t)dt$$

$$dv(t) = -w^2 x(t)dt - \beta v(t)dt$$

O poniéndolo de forma matricial:

$$d\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} dt \tag{5.1}$$

En este caso no hay una fuerza externa al sistema, simplemente están actuando: w^2 la constante de restitución y β la constante de amortiguamiento. En el caso de un resorte, se puede pensar en w^2 la constante de restitución del resorte mientras que β seria por ejemplo el rozamiento de un fluido ambiente del sistema, considerando una partícula con masa $m = 1$.

Esta es una ecuación homogénea de segundo orden, luego la solución empieza encontrando las raíces de la ecuación característica de la matriz de 5.1

$$\mu_1 = -\frac{1}{2}\beta + (\frac{1}{4}\beta^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}} \tag{5.2}$$

$$\mu_2 = -\frac{1}{2}\beta - (\frac{1}{4}\beta^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}} \tag{5.3}$$

Entonces hay tres posibles casos:

1. $\beta > 2\omega$ caso sobreamortiguado, donde $\mu_1 \neq \mu_2 \in \mathbb{R}$
2. $\beta = 2\omega$ el caso del amortiguamiento critico
3. $\beta < 2\omega$ amortiguamiento débil o subcrítico, en este caso hay oscilacion y μ_1 y $\mu_2 \in \mathbb{C}$

Analicemos el primer caso:

$\mu_1 > \mu_2$ son constantes negativas, y la solución del sistema de ecuaciones diferenciales 4.1 será:

$$x(t) = a_1 e^{\mu_1 t} + a_2 e^{\mu_2 t} \tag{5.4}$$

Con a_1 y a_2 constantes que dependen de la condición inicial del sistema. Ya se puede ver por la forma de la solución que habrá un decaimiento asintótico. El sistema tiende a la posición 0 cuando $t \to \infty$. Poniendo 5.4 en 5.1 se puede obtener:

$$a_1 = -\frac{x_0\mu_2 - v_0}{\mu_1 - \mu_2} \qquad a_2 = \frac{x_0\mu_1 - v_0}{\mu_1 - \mu_2} \tag{5.5}$$

El diagrama de fases de arriba se puede ver el comportamiento del sistema sobreamortiguado.

Supongamos ahora $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ el caso de amortiguamiento debil.En este caso μ_1 es el conjugado de μ_2. En este caso habra una oscilacion que asintoticamente convergera a 0. La soluciones seran de esta forma:

$$x(t) = e^{\frac{-\beta t}{2}}[c_1 e^{\mu i t} + c_2 e^{-\mu i t}]$$

Con $\mu = \sqrt{\omega^2 - \frac{1}{4}\beta^2}$ y $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

Es más, haciendo unas cuentas que se escapan de esta monografía, se puede obtener:

$$x(t) = A e^{\frac{-\beta t}{2}} \cos(\mu t + \phi)$$

Donde A y ϕ son constantes que dependen de las condiciones iniciales. Como se puede ver, en este caso si hay oscilación.

En el caso $\sqrt{\omega^2 - \frac{1}{4}\beta^2} = 0$ se tiene que las soluciones son de la forma:

$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\frac{\beta}{2}t} = [x_0 + (v_0 + \frac{\beta}{2}x_0)t]e^{-\frac{\beta}{2}t}$ Donde tiene un comportamiento parecido al sobreamortiguado.

5.1.1. Oscilador Armónico con fuerza externa

En la sección anterior estudiamos el comportamiento dinámico del oscilador armónico sin una fuerza externa. Pero ahora resolveremos el siguiente sistema:

$$d\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & -\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ F(t) \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

En este caso el sistema de ecuaciones diferenciales ya no es homogéneo, y el método que tendremos que utilizar es el de variación de constantes. Estudiaremos el caso del oscilador sobreamortiguado. Entonces supondremos que las soluciones son de esta forma:

$$x(t) = a_1(t)e^{\mu_1 t} + a_2(t)e^{\mu_2 t} \tag{5.7}$$

Pero en este caso a_1 y a_2 son funciones en el tiempo, en vez de constantes. Y que además cumplen la siguiente ecuación:

$$\frac{da_1}{dt}e^{\mu_1 t} + \frac{da_2}{dt}e^{\mu_2 t} = 0 \tag{5.8}$$

De la ecuación 5.8 haciendo un par de cuentas previas, se puede obtener sin dificultad:

$$\mu_1 e^{\mu_1 t}\frac{da_1}{dt} + \mu_2 e^{\mu_2 t}\frac{da_2}{dt} = F(t) \tag{5.9}$$

Despejando estas ecuaciones se obtiene:

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{1}{[\mu_1 - \mu_2]}e^{-\mu_1 t}F(t) \qquad \frac{da_2}{dt} = -\frac{1}{[\mu_1 - \mu_2]}e^{-\mu_2 t}F(t)$$

Integrando de ambos lados:

$$a_1 = a_{10} + \frac{1}{[\mu_1 - \mu_2]}\int_0^t e^{-\mu_1 t}F(t)dt \qquad a_2 = a_{20} - \frac{1}{[\mu_1 - \mu_2]}\int_0^t e^{-\mu_2 t}F(t)dt \tag{5.10}$$

Con a_{10} y a_{20} constantes que dependen de los valores iniciales x_0 e v_0. Mas en específico, evaluando la ecuación 5.7 en $t = 0$ y sabiendo 5.10 se obtiene:

$$a_{10} = -\frac{x_0\mu_2 - v_0}{\mu_1 - \mu_2} \qquad a_{20} = \frac{x_0\mu_1 - v_0}{\mu_1 - \mu_2} \tag{5.11}$$

Y con esto obtenemos totalmente la solución a la ecuación diferencial:

$$x(t) = \frac{(x_0\mu_1 - v_0)e^{\mu_2 t} - (x_0\mu_2 - v_0)e^{\mu_2 t}}{\mu_1 - \mu_2} + \int_0^t \psi(s)F(s)ds \tag{5.12}$$

$$v(t) = \frac{\mu_2(x_0\mu_1 - v_0)e^{\mu_2 t} - \mu_1(x_0\mu_2 - v_0)e^{\mu_2 t}}{\mu_1 - \mu_2} + \int_0^t \phi(s)F(s)ds \tag{5.13}$$

Donde:

$$\psi(s) = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\left[e^{\mu_1(t-s)} - e^{\mu_2(t-s)}\right] \tag{5.14}$$

$$\phi(s) = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\left[\mu_1 e^{\mu_1(t-s)} - \mu_2 e^{\mu_2(t-s)}\right] \tag{5.15}$$

Se puede verificar sin mayor dificultad que $x(t)$ y $v(t)$ son solución de 5.6 y por el Teorema de Picard entonces es la única solución.

5.2. Solución a la ecuación diferencial estocástica

Ser solución de la ecuación diferencial 4.6 implica ser solución de la ecuación integral correspondiente. Por lo tanto, el proceso solución de la siguiente ecuación:

$$d\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} dt + d\begin{pmatrix} 0 \\ B(t) \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

Con $B(t)$ el proceso de Wiener. Entonces el proceso solución, utilizando lo visto en la sección anterior con $\mu_1 \neq \mu_2$, es el siguiente:

$$x(t) = \frac{(x_0\mu_1 - v_0)e^{\mu_2 t} - (x_0\mu_2 - v_0)e^{\mu_2 t}}{\mu_1 - \mu_2} + \int_0^t \psi(s)dB(s) \tag{5.17}$$

$$v(t) = \frac{\mu_2(x_0\mu_1 - v_0)e^{\mu_2 t} - \mu_1(x_0\mu_2 - v_0)e^{\mu_2 t}}{\mu_1 - \mu_2} + \int_0^t \phi(s)dB(s) \tag{5.18}$$

Y por lo visto en el capítulo anterior:

$$\mathbb{E}x(t) = \frac{(x_0\mu_1 - v_0)e^{\mu_2 t} - (x_0\mu_2 - v_0)e^{\mu_2 t}}{\mu_1 - \mu_2} \to 0 \qquad t \to \infty \tag{5.19}$$

$$\mathbb{E}v(t) = \frac{\mu_2(x_0\mu_1 - v_0)e^{\mu_2 t} - \mu_1(x_0\mu_2 - v_0)e^{\mu_2 t}}{\mu_1 - \mu_2} \to 0 \qquad t \to \infty \tag{5.20}$$

Además la varianza y covarianza del proceso quedará determinada por las siguientes integrales:

$$Var(v(t)) = \int_0^t \phi^2(s)ds \qquad Var(x(t)) = \int_0^t \psi^2(s)ds \qquad Cov(x(t), v(t)) = \int_0^t \psi(s)\phi(s)ds \tag{5.21}$$

Se puede obtener una expresión explicita de cada una de esas integrales, pero prefiero dejar esta referencia y las cuentas para el lector curioso, ya que poco aporta más que dolores de cabeza, ya que las integrales quedan de la siguiente forma:

$$\int_0^t \psi^2(s)ds = \frac{1}{2\omega^2\beta} - f(t) \tag{5.22}$$

$$\int_0^t \phi^2(s)ds = \frac{1}{2\beta} - g(t) \tag{5.23}$$

$$\int_0^t \phi(s)\psi(s)ds = h(t) \tag{5.24}$$

Con $f(t), g(t), h(t)$ funciones que tienden a 0 cuando $t \to +\infty$. Esto incluso es cierto para el caso $\mu_1 = \mu_2$, dejare más información en esta referencia. Por lo tanto, tenemos en resumen lo siguiente:

$$x(t) \sim \mathcal{N}\left(\frac{(x_0\mu_1 - v_0)e^{\mu_2 t} - (x_0\mu_2 - v_0)e^{\mu_2 t}}{\mu_1 - \mu_2}, \int_0^t \psi^2(s)ds\right)$$

$$v(t) \sim \mathcal{N}\left(\frac{\mu_2(x_0\mu_1 - v_0)e^{\mu_2 t} - \mu_1(x_0\mu_2 - v_0)e^{\mu_2 t}}{\mu_1 - \mu_2}, \int_0^t \phi^2(s)ds\right)$$

Y asintóticamente x y v tienden a lo siguiente:

$$x(+\infty) \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2\omega^2\beta})$$

$$v(+\infty) \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2\beta})$$

y además $\lim_{t\to+\infty} Cov(x(t), v(t)) = 0$ Y en el infinito tienden a ser dos Gaussianas independientes.

5.3. Propiedades Ergódicas

Consideremos la medida Gaussiana $\mu \overset{d}{=} \mathcal{N}(0, \Sigma(\omega^2, \beta))$. Donde hemos definimos la matriz

$$\Sigma(\omega^2, \beta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\omega^2\beta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\beta} \end{bmatrix}.$$

Esta medida resulta ser la medida invariante de proceso Gaussiano $(x(t), v(t))$. Ya hemos visto este suceso cuando vimos el proceso de Ornstein-Uhlenbeck, pero veamos con más detalles en este caso. Hemos definido el semigrupo:

$$P_t(f)(x, y) = \mathbb{E}_{(x,y)}[f(x(t), v(t))] \tag{5.25}$$

Por dualidad podemos introducir el semigrupo dual P_t^*, actuando sobre las medidas finitas de $\mathbb{R}^2$ denotadas por $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, de la siguiente manera:

$$P_t^* : \mathcal{M}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$$

$$< f, P_t^*(\nu) >=< P_t(f), \nu >, \forall f \in C(\mathbb{R}^2) \text{ y } \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2).$$

Veamos que $P_t^*(\mu) = \mu$ y de allí el nombre de medida invariante. En efecto para toda f continua y acotada se tiene:

$$< f, P_t^*\mu >= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} f(x_2, y_2) p^t((x_1, y_1), (x_2, y_2)) dx_2 dy_2 \right) d\mu(x_1, y_1)$$

Aplicando la convergencia de p_t a μ

$$= \lim_{s \to \infty} (\int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} f(x_2, y_2) p_t((x_1, y_1), (x_2, y_2)) dx_2 dy_2 \right) p_s((x_3, y_3), (x_1, y_1)) dx_1 dy_1$$

$$= \lim_{s \to \infty} (\int_{\mathbb{R}^2} f(x_2, y_2) \left(\int_{\mathbb{R}^2} p_t((x_1, y_1), (x_2, y_2)) p_s((x_3, y_3), (x_1, y_1)) dx_1 dy_1 \right) dx_2 dy_2$$

Usando la propiedad de semigrupo:

$$= \lim_{s \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x_2, y_2) p_{t+s}((x_3, y_3), (x_2, y_2)) dx_2 dy_2 =< f, \mu > .$$

Esta ultima igualdad se obtiene usando nuevamente la convergencia p_t a μ. Por lo que se obtiene el resultado de que μ es la medida invariante.

Lemma 5.1. *Si la distribucion de $(x(0), v(0))$ es la ley μ, entonces el proceso $(x(t), v(t))$ es estacionario, i.e la ley de $(x(t), v(t))$ es μ para todo t.*

Demostración. En efecto, para f continua se tiene:

$$\mathbb{E}[f(x(t), v(t))] = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}_{(x,y)}[f(x(t), v(t)) | x(0) = x, \, v(0) = y] d\mu(x, y) =< P_t(f), \mu > \tag{5.26}$$

$$=< f, P_t^*\mu >=< f, \mu >= \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\mu(x, y). \tag{5.27}$$

□

Para ubicar este desarrollo dentro del Teorema Ergódico, debemos estudiar la convergencia cuando $t \to \infty$ de la funcional

$$F(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(x(s), v(s)) ds.$$

Supondremos que partimos con la ley invariante μ. Esto significa que el proceso $X(t) = (x(t), v(t))$ es estacionario. Como consecuencia:

$$\mathbb{E}[F(t)] = \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}[f(x(s), v(s)] ds = \mathbb{E}_\mu[f] := \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\mu(x, y). \tag{5.28}$$

Por otra parte

$$Var(F(t)) = 2 \int_0^t (t - s) Cov(f(0, 0), f(x(s), v(s)) ds. \tag{5.29}$$

Para esta igualdad hemos usado la estacionaridad, Fubini y un cambio de variables. El vector cuatro dimensional $(x(0), v(0), x(s), v(s))$ es Gaussiano y centrado con matriz de covarianza $A := A(s)$. Entonces

$$Cov(f(0, 0), f(x(s), v(s)) = \mathbb{E}\big([f(x(0), v(0)) - \mathbb{E}_\mu(f)][f(x(s), v(s)) - \mathbb{E}_\mu(f)]\big). \tag{5.30}$$

Supondremos, sin pérdida de generalidad, y para aligerar la notación, que $\mathbb{E}_\mu[f] = 0$. De esta forma tenemos que

$$Cov(f(0, 0), f(x(s), v(s))) = \mathbb{E}\big(f(x(0), v(0)) f(x(s), v(s))\big) = \mathbb{E}[f(X(0)) f(X(s))]. \tag{5.31}$$

Se demuestra, usando la desigualdad de Arcones, que

$$|\mathbb{E}[f(X(0)) f(X(s))]| \leq Const ||f||^2 \sup\{|\mathbb{E}[x(0)x(s)]|, |\mathbb{E}[v(0)x(s)]|, |\mathbb{E}[v(s)x(0)]|\} := \rho(s). \tag{5.32}$$

Entonces

$$tVar(F(t)) \leq Const ||f||^2 \int_0^t (1 - \frac{s}{t}) \rho(s) ds \to Const ||f||^2 \int_0^t \rho(s) ds < \infty. \tag{5.33}$$

Hemos demostrado así que $Var(F(t)) \to 0$ cuando $t \to \infty$. De lo que se desprende

Teorema 5.2. *(Teorema Ergódico con convergencia en probabilidad)*

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(x(s),v(s))ds \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)d\mu(x,y) = \mathbb{E}_\mu[f] \tag{5.34}$$

Un resultado más fino que es cierto es el siguiente:

Teorema 5.3. *(Teorema Ergódico con convergencia casi segura)*

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(x(s),v(s))ds \xrightarrow{c.s} \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)d\mu(x,y) = \mathbb{E}_\mu[f] \tag{5.35}$$

Por lo tanto como corolario tenemos lo siguiente:

Corolario 5.3.1.

$$\frac{1}{t}\int_0^t x(s)ds \xrightarrow{c.s} 0 \qquad \frac{1}{t}\int_0^t v(s)ds \xrightarrow{c.s} 0 \tag{5.36}$$

$$\frac{1}{t}\int_0^t x^2(s)ds \xrightarrow{c.s} \frac{1}{2\omega^2\beta} \qquad \frac{1}{t}\int_0^t v^2(s)ds \xrightarrow{c.s} \frac{1}{2\beta} \tag{5.37}$$

Capítulo 6

Apéndice

6.1. Desigualdad de Arcones

Recordemos la función generatriz de los polinomios de Hermite

$$e^{tx-\frac{t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k(x)t^k}{k!}.$$

Observando la serie de la derecha, resulta ser la serie de Maclaurin de la función $e^{tx-\frac{t^2}{2}}$. De esta forma

$$H_0(x) = e^{tx-\frac{t^2}{2}}|_{t=0} = 1 \text{ y además } H_k(x) = \frac{d^k}{dt^k} e^{tx-\frac{t^2}{2}}|_{t=0}.$$

Se puede demostrar que $H_k(x) = (-1)^k e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^k}{dt^k}(e^{-\frac{x^2}{2}})$. Probémoslo por inducción. Supongamos la fórmula válida para k. Entonces

$$\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} e^{tx-\frac{t^2}{2}} = \frac{d^k}{dt^k}\frac{d}{dt}(e^{tx-\frac{t^2}{2}}) = \frac{d^k}{dt^k}[(e^{tx-\frac{t^2}{2}})(x-t)]$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}}(e^{tx-\frac{t^2}{2}})\frac{d^j}{dt^j}(x-t) = \frac{d^k}{dt^k}(e^{tx-\frac{t^2}{2}})(x-t) - k\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(e^{tx-\frac{t^2}{2}}).$$

Evaluando la expresión anterior en $t = 0$ obtenemos

$$H_{k+1}(x) = xH_k(x) - kH_{k-1}(x),$$

sustituyendo y usando la hipótesis de inducción se obtiene

$$H_{k+1} = (-1)^{k+1} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}(e^{-\frac{x^2}{2}}).$$

Los polinomios H_k resultan ser ortogonales en el $\mathbb{L}^2(\varphi(x)dx)$, donde φ denota la densidad de la Gaussiana estándar. Además su norma en ese espacio es

$$||H_k||^2 = \int_{\mathbb{R}} H_k^2(x)\varphi(x)dx = \mathbb{E}[H_k^2(X)] = k!.$$

En la línea de arriba X es una v.a. Gaussiana estándar. Además estos polinomios resultan ser un conjunto ortogonal completo tal que para toda $f \in \mathbb{L}^2(\varphi(x)dx)$ el siguiente desarrollo es convergente en norma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)H_k(x), \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{k!}\int_{\mathbb{R}} f(x)H_k(x)\varphi(x)dx = \frac{1}{k!}\mathbb{E}[f(X)H_k(X)].$$

Observemos que $\hat{f}(0) = \mathbb{E}[f(X)]$. La función generatriz nos sirve para demostrar estas relaciones de ortogonalidad. En efecto

$$e^{tX-\frac{t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k(X)t^k}{k!}.$$

Tomando esperanzas y al usar que $\mathbb{E}[e^{tX}] = e^{\frac{t^2}{2}}$ tenemos

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[H_k(X)]t^k}{k!}.$$

Esto implica que $\mathbb{E}[H_k(X)] = 0$. No olvidemos que $H_0(x) = 1$. Además si (X, Y) es un vector Gaussiano con coordenadas estándar y correlación ρ tenemos

$$\mathbb{E}[e^{t_1X+t_2Y}] = e^{\frac{1}{2}(t_1^2+t_2^2)}e^{\rho(t_1t_2)}.$$

Así despejando obtenemos

$$\mathbb{E}[e^{t_1X-\frac{1}{2}t_1^2}e^{t_2Y-\frac{1}{2}t_2^2}] = e^{\rho(t_1t_2)}.$$

desarrollando la exponencial del lado derecho y usando la definición de la función generatriz del lado izquierdo se obtiene

$$\sum_{k_1}^{\infty}\sum_{k_2}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[H_{k_1}(X)H_{k_2}(Y)]t_1^{k_1}t_2^{k_2}}{k_1!k_2!} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(\rho t_1t_2)^q}{q!}.$$

Igualando términos en la expansión se obtiene

$$\mathbb{E}[H_k(X)H_l(Y)] = \delta_{k,l}k!\rho^k, \tag{6.1}$$

donde $\delta_{k,l}$ denota la delta de Kronecker. En particular si $X = Y$ entonces

$$\mathbb{E}[H_k(X)H_l(X)] = \delta_{k,l}k!$$

ortogonalidad que habíamos afirmado. Podemos ahora utilizar la relación (6.1) para obtener la covarianza entre dos funciones no lineales de Gaussianas. En efecto sean f, g dos funciones de $\mathbb{L}^2(\varphi(x)dx)$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[g(Y)] = 0$ para X e Y Gaussianas estándar. Suponemos que el vector Gaussiano (X, Y) posee correlación ρ. Entonces se tiene

$$Cov(f(X), g(Y)) = \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty} \hat{f}(k_1)\hat{g}(k_2)\mathbb{E}[H_{k_1}(X)H_{k_2}(Y)] = \sum_{k=1}^{\infty} k!\hat{f}(k)\hat{g}(k)\rho^k.$$

De esta manera

$$|Cov(f(X), g(Y))| \leq \rho||f||||g||.$$

Para obtener esta desigualdad hay que usar la desigualdad de Cauchy–Schwarz y que

$$||f||^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k!\hat{f}^2(k).$$

Vamos a demostrar la desigualdad de Arcones. Previamente calcularemos los momentos de los polinomios de Hermite evaluados en un vector Gaussiano cuatro dimensional. Supondremos ahora que (X_1, X_2, X_3, X_4) es un vector Gaussiano centrado y con matriz de covarianza

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & r_{13} & r_{14} \\ 0 & 1 & r_{23} & r_{24} \\ r_{13} & r_{23} & 1 & 0 \\ r_{14} & r_{24} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si calculamos su transformada de Laplace obtenemos

$$\mathbb{E}[e^{t_1X_1+t_2X_2+t_3X_3+t_4X_4}] = e^{\frac{1}{2}\mathbf{t}^t A\mathbf{t}}.$$

Donde hemos puesto $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3, t_4)$. Procediendo de la misma manera que antes obtenemos

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_3=0}^{\infty}\sum_{k_4=0}^{\infty}\frac{\mathbb{E}[H_{k_1}(X_1)H_{k_2}(X_2)H_{k_3}(X_3)H_{k_4}(X_4)]t_1^{k_1}t_2^{k_2}t_3^{k_3}t_4^{k_4}}{k_1!k_2!k_3!k_4!}$$

$$=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(r_{13}t_1t_3+r_{14}t_1t_4+r_{23}t_2t_3+r_{24}t_2t_4)^q}{q!}. \tag{6.2}$$

Y además la serie del lado derecho es

$$=\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{l_1+l_2+l_3+l_4=q}\frac{r_{13}^{l_1}r_{14}^{l_2}r_{23}^{l_3}r_{24}^{l_4}}{l_1!l_2!l_3!l_4!}t_1^{l_1+l_2}t_2^{l_3+l_4}t_3^{l_1+l_3}t_4^{l_2+l_4}.$$

De aquí se desprende que la esperanza es cero salvo si

$$(\mathbf{H}),\ l_1+l_2=k_1,\ l_3+l_4=k_2,\ l_1+l_3=k_3,\ l_2+l_4=k_4.$$

Se ve también que

$$k_1+k_2=k_3+k_4=q. \tag{6.3}$$

Si denotamos por

$$Z(q,k_1,k_2,k_3,k_4)=\{(l_1,l_2,l_3,l_4):\ l_i\geq 0 \text{ y verifica } (\mathbf{H})\}.$$

$$\frac{\mathbb{E}[H_{k_1}(X_1)H_{k_2}(X_2)H_{k_3}(X_3)H_{k_4}(X_4)]}{k_1!k_2!k_3!k_4!}=\sum_{Z(q,k_1,k_2,k_3,k_4)}\frac{r_{13}^{l_1}r_{14}^{l_2}r_{23}^{l_3}r_{24}^{l_4}}{l_1!l_2!l_3!l_4!}.$$

Y usando las relaciones (6.3) finalmente obtenemos

$$\mathbb{E}[H_{k_1}(X_1)H_{q-k_1}(X_2)H_{k_3}(X_3)H_{q-k_3}(X_4)]=k_1!(q-k_1)!k_3!(q-k_3)!\sum_{\tilde{Z}(q,k_1,k_3)}\frac{r_{13}^{l_1}r_{14}^{l_2}r_{23}^{l_3}r_{24}^{l_4}}{l_1!l_2!l_3!l_4!} \tag{6.4}$$

donde hemos definido $\tilde{Z}(q,k_1,k_3)=Z(q,k_1,q-k_1,k_3,q-k_3)$. Esta igualdad es la misma que aparece en el libro de Azaiz & Wschebor "Level sets and extrema of random processes and fields", Capítulo 10 página 269, sólo se ha cambiado alguna notación.

Consideremos ahora una función de dos variables perteneciente a $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2,\varphi(x_1)\varphi(x_2)dx_1dx_2)$. Entonces como $H_{k_1}(x_1)H_{k_2}(x_2)$ es una base ortogonal para ese espacio se tiene

$$f(x_1,x_2)=\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{k_1+k_2=q}c_{k_1,q-k_1}H_{k_1}(x_1)H_{q-k_1}(x_2),$$

donde la serie converge en norma y además

$$c_{k_1,k_2} = \frac{1}{k_1!k_2!}\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)\varphi(x_1)\varphi(x_2)H_{k_1}(x_1)H_{k_2}(x_2)dx_1dx_2,$$

observemos que $c_{0,0} = \mathbb{E}[f(X_1,X_2)]$ donde (X_1,X_2) es un vector Gaussiano estándar. Además

$$||f||^2 = \sum_{q=0}^{\infty}\sum_{k_1+k_2=q} c^2_{k_1,q-k_1}k_1!(q-k_1)!$$

Para un vector Gaussiano (X_1,X_2,X_3,X_4) como el definido arriba, queremos encontrar una cota para la $|Cov(f(X_1,X_2),f(X_3,X_4))|$. En principio la desigualdad de Cauchy–Schwarz implica trivialmente

$$|Cov(f(X_1,X_2),f(X_3,X_4))| \leq ||f||^2.$$

Miguel Arcones en el artículo: "Limit theorems for non linear functionals of a stationary sequence of Gaussian vectors" Annals of Probability Vol. 22 No. 4 2242-2274 (1994), precisó esta acotación. En lo que sigue daremos una demostración algo distinta y menos general.

$$|Cov(f(X_1,X_2),f(X_3,X_4))|$$

$$\leq \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{k_1+k_2=q}\sum_{k_3+k_4=q}|c_{k_1,q-k_1}c_{k_3,q-k_3}||\mathbb{E}[H_{k_1}(X_1)H_{q-k_1}(X_2)H_{k_3}(X_3)H_{q-k_3}(X_4)]|.$$

Arriba hemos usado las relaciones de ortogonalidad. Luego al utilizar (6.4) se obtiene

$$\leq \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{k_1+k_2=q}\sum_{k_3+k_4=q}|c_{k_1,q-k_1}c_{k_3,q-k_3}|k_1!(q-k_1)!k_3!(q-k_3)!\sum_{\tilde{Z}(q,k_1,k_3)}\frac{|r_{13}^{l_1}r_{14}^{l_2}r_{23}^{l_3}r_{24}^{l_4}|}{l_1!l_2!l_3!l_4!}.$$

Podemos ahora acotar

$$|c_{k_1,q-k_1}c_{k_3,q-k_3}k_1!(q-k_1)!k_3!(q-k_3)!| \leq \frac{1}{2}(c^2_{k_1,q-k_1}(k_1!(q-k_1)!)^2+c^2_{k_3,q-k_3}(k_3!(q-k_3)!)^2).$$

De esta forma debemos considerar sólo uno de los términos de esta suma el segundo es completamente similar. Esto es

$$\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{k_1+k_2=q} c^2_{k_1,q-k_1}(k_1!(q-k_1)!)^2\sum_{\tilde{Z}(q,k_1,k_3)}\frac{|r_{13}^{l_1}r_{14}^{l_2}r_{23}^{l_3}r_{24}^{l_4}|}{l_1!l_2!l_3!l_4!}.$$

Sea $\psi = (|r_{13}| + |r_{14}| + |r_{23}| + |r_{24}|)$, entonces la expresión de arriba es menor o igual a

$$\sum_{q=1}^{\infty} \sum_{k_1+k_2=q} c^2_{k_1,q-k_1} (k_1!(q-k_1)!)^2 \sum_{k_3+k_4=q} \sum_{\tilde{Z}(q,k_1,k_3)} \frac{|r_{13}|^{l_1} |r_{14}|^{l_2}}{l_1! l_2!} \frac{|r_{23}|^{l_3} |r_{24}|^{l_4}}{l_3! l_4!}. (6.5)$$

Usemos ahora que $l_1 + l_3 = k_3$ y además $l_2 + l_4 = k_4 = q - k_3$.

$$\sum_{l_1+l_3=k_3} \frac{|r_{13}|^{l_1} |r_{23}|^{l_3}}{l_1! l_3!} = \frac{(|r_{13}| + |r_{23}|)^{k_3}}{k_3!} \quad \text{y} \quad \sum_{l_2+l_4=k_4} \frac{|r_{14}|^{l_2} |r_{24}|^{l_4}}{l_2! l_4!} = \frac{(|r_{14}| + |r_{24}|)^{q-k_3}}{(q-k_3)!}$$

Entonces (6.5) es

$$\leq \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{k_1+k_2=q} c^2_{k_1,q-k_1} (k_1!(q-k_1)!)^2 \sum_{k_3+k_4=q} \frac{(|r_{13}| + |r_{23}|)^{k_3} (|r_{14}| + |r_{24}|)^{q-k_3}}{k_3!(q-k_3)!}$$

$$= \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{k_1+k_2=q} c^2_{k_1,q-k_1} (k_1!(q-k_1)!)^2 \frac{1}{q!} \psi^q \leq \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{k_1+k_2=q} c^2_{k_1,q-k_1} (k_1!(q-k_1)!) \psi^q$$

Concatenando las desigualdades para cada uno de los términos de la suma obtenemos

$$Cov(f(X_1, X_2), f(X_3, X_4))| \leq \psi \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{k_1+k_2=q} c^2_{k_1,q-k_1} k_1!(q-k_1)! = \psi ||f||^2.$$

Esta desigualdad lleva el nombre de desigualdad de Arcones.

Veamos una aplicación directa. Sea $(X_1(t), X_2(t))$ un proceso Gaussiano, centrado y estacionario. Supongamos además que para t fijo

$$\mathcal{L}(X_1(t), X_2(t)) = N(0, I_2),$$

donde I_2 es la matriz identidad. Definamos $r_{ij}(t) = \mathbb{E}[X_i(0) X_j(t)]$. Al igual que antes pongamos $\psi(t) = |r_{11}(t)| + |r_{12}(t)| + |r_{21}(t)| + |r_{22}(t)|$. Aplicaremos la desigualdad de Arcones al vector $(X_1(0), X_2(0), X_1(t), X_2(t))$.

Sea f perteneciente a $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2, \varphi(x_1)\varphi(x_2) dx_1 dx_2)$ entonces la siguiente igualdad es inmediata al aplicar la de Arcones

$$Cov(f(X_1(0), X_2(0)), f(X_1(t), X_2(t)))| \leq 2\psi(t) ||f||^2.$$

Supongamos que $\psi \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^+)$ y $\mathbb{E}[f(X_1(t), X_2(t))] = \mathbb{E}[f(X_1(0), X_2(0)))] = 0$, entonces si definimos

$$\zeta(T) = \frac{1}{T} \int_0^T f(X_1(s), X_2(s)) ds.$$

$$\begin{aligned} Var(\zeta(T)) &= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \mathbb{E}[f(X_1(s),X_2(s))f(X_1(u),X_2(u))]dsdu \\ &= \frac{2}{T^2}\int_0^T (T-u)\mathbb{E}[f(X_1(0),X_2(0))f(X_1(t),X_2(t))]dt. \end{aligned}$$

Para esta igualdad hemos usado la estacionaridad, Fubini y el cambio de variable $s-u=t$. Así tenemos

$$TVar(\zeta(T)) = \int_0^T (1-\frac{t}{T})\mathbb{E}[f(X_1(0),X_2(0))f(X_1(t),X_2(t))]dt.$$

La función dentro de la integral la podemos acotar por

$$|(1-\frac{t}{T})\mathbb{E}[f(X_1(0),X_2(0))f(X_1(t),X_2(t))]| \leq 2\psi(t)||f||^2$$

Por otra parte

$$\lim_{T\to\infty}(1-\frac{t}{T})\mathbb{E}[f(X_1(0),X_2(0))f(X_1(t),X_2(t))] = \mathbb{E}[f(X_1(0),X_2(0))f(X_1(t),X_2(t))].$$

Por consiguiente el Teorema de la Convergencia Dominada permite concluir

$$\lim_{T\to\infty} TVar(\zeta(T)) = 2\int_0^\infty \mathbb{E}[f(X_1(0),X_2(0))f(X_1(t),X_2(t))]dt.$$

Para la aplicación a nuestro proceso recordemos que para t fijo $X(t)$ y $X'(t)$ son independientes, pero no tienen varianza uno. Si σ_i^2, $i=1,2$ son las respectivas varianzas escribamos

$$\zeta(T) = \frac{1}{T}\int_0^T f(\sigma_1\frac{X_1(s)}{\sigma_1},\sigma_2\frac{X_2(s)}{\sigma_2})ds = \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{f}(\frac{X_1(s)}{\sigma_1},\frac{X_2(s)}{\sigma_2})ds.$$

Hemos puesto $\tilde{f}(x_1,x_2) = f(\sigma_1 x_1, \sigma_2 x_2)$. Podemos aplicar Arcones y obtener

$$\lim_{T\to\infty} TVar(\zeta(T)) = 2\int_0^\infty \mathbb{E}[\tilde{f}(\frac{X_1(0)}{\sigma_1},\frac{X_2(0)}{\sigma_2})\tilde{f}\frac{X_1(s)}{\sigma_1},\frac{X_2(s)}{\sigma_2})]dt.$$

Pero

$$\mathbb{E}[\tilde{f}(\frac{X_1(0)}{\sigma_1},\frac{X_2(0)}{\sigma_2})\tilde{f}(\frac{X_1(s)}{\sigma_1},\frac{X_2(s)}{\sigma_2})] = \mathbb{E}[f(X_1(0),X_2(0))f(X_1(t),X_2(t))].$$

6.2. Sobre semigrupos y generadores infinitesimales

Denotemos por $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ el espacio de las funciones continuas de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, provisto de la norma supremo. Consideremos P_t un semigrupo de Markov definido en ese espacio. También sea A su generador infinitesimal y denotemos por $\mathcal{D}(A)$ su dominio. Definiremos el resolvente del semigrupo G_α al operador

$$G_\alpha(f)(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t(f)(x) dt.$$

Para darle sentido a la integral podemos considerar la función $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definida por $u(t,x) = P_t(f)(x)$. Esta función es continua así que existe la integral

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} u(t,x) dt = G_\alpha(f)(x).$$

Además, así es inmediato demostrar que G_α es un operador acotado y que

$$||G_\alpha|| \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Veamos una propiedad importante de este operador. Consideremos $f \in \mathcal{D}(A)$

$$\lim_{h\to 0} \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{P_{t+h}f(x) - P_t f(x)}{h} dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t(Af)(x) dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t} u_t(t,x) dt$$

Integrando por partes se obtiene que esta integral es igual a

$$-u(0,x) + \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t} u(t,x) dt = -f(x) + \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t(f)(x) dt.$$

De aquí se ve que

$$G_\alpha((A - \alpha I)f)(x) = -f(x). \tag{6.6}$$

Veamos el recíproco. En primer lugar consideremos

$$P_s(G_\alpha(f))(x) = G_\alpha(P_s(f))(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t(P_s(f))(x) dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_{t+s}(f)(x) dt$$

$$= \int_s^\infty e^{-\alpha(t-s)} P_t(f)(x) dt = e^{\alpha s} \int_s^\infty e^{-\alpha t} P_t(f)(x) dt = .$$

Consideremos ahora

$$\frac{P_s(G_\alpha(f))(x) - G_\alpha(f)(x)}{s} = \frac{e^{\alpha s} - 1}{s} \int_s^\infty e^{-\alpha t} P_t(f)(x) dt - \int_0^s e^{\alpha t} P_t(f)(x) dt.$$

Tomando límite cuando $s \to 0$ obtenemos

$$A(G_\alpha(f)) = \lim_{t\to 0} \frac{P_t(G_\alpha(f))(x) - G_\alpha(f)(x)}{t} = \alpha G_\alpha(f)(x) - f(x).$$

De aquí se desprende que $G_\alpha(f) \in \mathcal{D}(A)$

$$(A - \alpha I)(G_\alpha(f)) = -f(x).$$

Esto implica que $\operatorname{Im} G_\alpha \subset \mathcal{D}(A)$. Sea α_n una sucesión que tiende a cero y definamos $\frac{1}{\alpha_n} G_{\alpha_n}$ y sabemos que $\cup_{n=1}^{\infty} G_{\alpha_n} \subset \mathcal{D}(A)$. Consideremos $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$

$$\frac{1}{\alpha_n} G_{\frac{1}{\alpha_n}}(f)(x) = \frac{1}{\alpha_n} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{\alpha_n}t} P_t(f)(x)dt = \int_0^\infty e^{-t} P_{\alpha_n t}(f)(x)dt \to f(x).$$

Esto demuestra que $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} G_{\alpha_n}} = \mathbf{C}(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Y de aquí

$$G_\alpha = -(\alpha - A)^{-1}.$$

Ahora enunciaremos el teorema de unicidad para la transformada de Laplace. Recordemos la definición de la transformada de u una función continua y acotada $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

$$\hat{u}(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} u(t)dt.$$

Teorema 6.1. *Sean u_1 y u_2 dos funciones acotadas y continuas. Si las transformadas de Laplace de esas funciones $\hat{u}_1(\alpha)$ y $\hat{u}_2(\alpha)$ coinciden para un $\alpha > \alpha_0 \geq 0$. Entonces $u_1(t) = u_2(t)$.*

Este teorema se aplica a las funciones $u_1(t, x) = P_t(f)(x)$ y $u_2(t, x) = Q_t(f)(x)$ con generadores A y B respectivamente. Suponemos que

$$(\alpha - A)^{-1}(f) = (\alpha - B)^{-1}(f),$$

esto implica

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} u_1(t, x)dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t} u_2(t, x)dt,$$

entonces por el teorema de unicidad se tiene $u_1(t, x) = u_2(t, x)$ para todo $t \geq 0$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$, luego $P_t = Q_t$.

Bibliografía

[1] Edward Nelson. *Dynamical Theories of Brownian Motion*. Departament of Mathematics, Princeton University.

[2] K.Ito H.P.McKean, Jr. *Diffusion Processes and their Sample Paths*. Second Printing, Springer-Velag, Berlin Heidelberg New York 1974.

[3] Valentin V.Petrov, Ernesto Mordecki. *Teoria de la probabilidad*. segunda edicion, DIRAC, Facultad de Ciencias 2008.

[4] S. Chandrashekhar. *Reviews of Modern Physics*. volumen 15, numero 1, Yerkes Observatory, The University of Chicago, Enero 1943.

[5] Georg Lindgren. *Stationary Stochastic Processes Theory and Applications* , 2013 by Taylor and Francis Group, LLC

[6] R.Paley, N.Wiener. *Fourier Transforms In The Complex Domain* New York, 1934.

[7] Mario Wschebor *Notas para el curso de introducción a los procesos estocásticos*

Link: http://www.cmat.edu.uy/ mordecki/courses/procesos-2010/Wschebor-Procesos-Estocasticos.pdf