TRABAJO MONOGRÁFICO

Dinámica en el Anillo

Marina Gardella

Orientador: Jorge Iglesias

Licenciatura en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

If you want to go fast, go alone.
If you want to go far, go together.

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas y cada una de las personas que, de una forma u otra, han formado parte de este proceso. En especial, quiero dar gracias a mi familia por haberme apoyado siempre y a Jorge por su dedicación y paciencia.

Abstract

Let f be a covering map of the annulus $A = S^1 \times (0,1)$ of degree d with $|d| > 1$ such that there exists an essential (meaning not contained in a disk of A) and connected compact subset K with $f(K) \subset K$, then, f has at least the same number of periodic points in each period as the map z^d in S^1.

(J. Iglesias, A. Portela, A. Rovella. and J. Xavier. *"Dynamics of covering maps of the annulus I: Semiconjugacies".*)

Key Words: Covering maps, periodic points, Nielsen theory.

Resumen

Sea f un mapa de recubrimiento del anillo $A = S^1 \times (0,1)$ de grado d con $|d| > 1$ tal que existe un compacto, conexo y esencial (es decir, no contenido en ningún disco de A) K con $f(K) \subset K$ entonces f tiene, al menos, la misma cantidad de puntos periódicos en cada período que el mapa z^d en S^1.

(J. Iglesias, A. Portela, A. Rovella. y J. Xavier. *"Dynamics of covering maps of the annulus I: Semiconjugacies".*)

Palabras Claves: Mapas de recubrimientos, puntos periódicos, teoría de Nielsen.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de este trabajo es el estudio de la existencia de puntos periódicos para mapas de recubrimiento f del anillo $A = S^1 \times (0, 1)$ de grado d con $|d| > 1$.

Para ello, comenzaremos con un capítulo que resume los conceptos de Topología Algebraica que son necesarios para comprender las herramientas que serán desarrolladas más adelante. Este capítulo, a su vez, cumplirá la función de ir introduciendo la notación que será utilizada a lo largo del trabajo.

A continuación, dedicamos un capítulo al estudio de la Teoría de Nielsen. Comenzaremos definiendo las clases de equivalencia de Nielsen de puntos periódicos e introduciremos el concepto de "mapa completo"siendo éste aquel mapa f de grado d cuyo número de clases de Nielsen en cada período coincide con el del mapa z^d en S^1 y probaremos que si para todo k entero positivo, todo levantado de f^k tiene un punto fijo, entonces f es completa.

El siguiente capítulo estará enteramente dedicado a probar que si $f : A \to A$ es un mapa de recubrimiento de grado d con $|d| > 1$ y existe un compacto, conexo y esencial (es decir, no contenido en ningún disco de A) K tal que $f(K) \subset K$ entonces f es completa. Este es el resultado principal del trabajo ya que a partir de él concluiremos que si $f : A \to A$ es un mapa de recubrimiento de grado d con $|d| > 1$ y existe un compacto, esencial, es decir, no contenido en ningún disco de A y conexo, K tal que $f(K) \subset K$ entonces f tiene, al menos, la misma cantidad de puntos periódicos en cada período que el mapa z^d en S^1.

Luego abordamos el estudio de la ubicación de los puntos periódicos cuya existencia fue probada al haber probado que f es completa. El resultado que obtendremos en este capítulo afirma que cada clase de Nielsen debe tener un representante en el relleno de K siendo el relleno la unión de K con las componentes acotadas de $A \setminus K$.

Finalmente, en el último capítulo se presentarán ejemplos acerca de lo que ocurre si quitamos ciertas hipótesis de los teoremas utilizados.

Capítulo 2

Conceptos básicos de Topología Algebraica

Comencemos definiendo nuestro conjunto de interés: el Anillo. A lo largo de todo la monografía, A denotará el anillo abierto: $S^1 \times (0,1)$ o $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, siendo ambos conjuntos homeomorfos.

Definición. 0.1 *Decimos que dos curvas $\alpha, \beta : [0,1] \to A$ son homotópicas si existe una función continua $H : [0,1] \times [0,1] \to A$ tal que $H(0,t) = \alpha(t)$ y $H(1,t) = \beta(t)$ para todo $t \in [0,1]$.*

Observación. 0.2 *La relación de equivalencia por homotopía es una relación de equivalencia. Notaremos $[\alpha]$ a la clase de α.*

Nos va a interesar particularmente un tipo especial de homotopías: las homotopías de curvas cerradas (loops) con punto base $a \in A$.

Definición. 0.3 *Decimos que dos curvas cerradas $\alpha, \beta : [0,1] \to A$ son homotópicas con punto base $a \in A$ si $\alpha(0) = \alpha(1) = \beta(0) = \beta(1) = a$ y existe una función continua $H : [0,1] \times [0,1] \to A$ tal que $H(0,t) = \alpha(t)$, $H(1,t) = \beta(t)$ para todo $t \in [0,1]$ y $H(s,0) = a$ para todo $s \in [0,1]$.*

Cuando una homotopía verifica que para algún $a \in A$, $H(s,0) = a$ para todo $s \in [0,1]$ se dice que es una homotopía con extremo fijo.

Definición. 0.4 *Decimos que una curva cerrada $\alpha : [0,1] \to A$ es homotópicamente trivial si es homotópicamente equivalente con extremos fijos a una curva $\beta : [0,1] \to A$ constante, i.e. $\beta(t) = b$ para todo $t \in [0,1]$ y para cierto $b \in A$ fijo.*

Existen ciertos espacios especiales que verifican que toda curva cerrada en el espacio es homotópicamente trivial. A estos espacios los llamamos *simplemente conexos*. Algunos ejemplos de espacions simplemente conexos son: $\mathbb{R}^n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ para $n > 2$, la esfera n-dimensional S^n para $n \geq 2$.

Definición. 0.5 *Si $\alpha : [0,1] \to A$ y $\beta : [0,1] \to A$ son dos curvas tales que $\alpha(1) = \beta(0)$, definimos la concatenación $\alpha.\beta : [0,1] \to A$ por*

$$\alpha.\beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) \ \textit{si}\ t \in [0,1/2] \\ \beta(2t-1) \ \textit{si}\ t \in [1/2,1] \end{cases}$$

Como mencionamos anteriormente, nuestro interés se encuentra en las curvas $\alpha : [0,1] \to A$ con $\alpha(0) = \alpha(1) = a$ para cierto $a \in A$ fijo. En esta clase de curvas, la concatenación de dos curvas está siempre definida y por tanto, si consideramos las clases de equivalencia por la relación de homotopía de las curvas cerradas basadas en un punto, podemos definir la siguiente operación: dadas dos curvas γ y β con $\gamma(0) = \gamma(1) = \beta(0) = \beta(1)$ definimos $[\gamma] \cdot [\beta] = [\gamma.\beta]$. Esto motiva la siguiente definición:

Definición. 0.6 *El grupo fundamental de A con base $a \in A$ es el grupo $\pi_1(A,a)$ formado por las clases de equivalencia por homotopía de los loops (curvas cerradas) basadas en a con la operación $\cdot : \pi_1(A,a) \times \pi_1(A,a) \to \pi_1(A,a)$, $[\gamma] \cdot [\beta] = [\gamma.\beta]$ para toda $[\gamma], [\beta] \in \pi_1(A,a)$.*

Se puede verificar que la definición de $\cdot : \pi_1(A,a) \times \pi_1(A,a) \to \pi_1(A,a)$ no depende del respresentante, es decir, que $\cdot : \pi_1(A,a) \times \pi_1(A,a) \to \pi_1(A,a)$ est/'a bien definida. Para ver este resultado, se puede consultar la Proposición 1.3, en la página 26, del libro [H].

Observación. 0.7 *Como A es arcoconexo, el grupo fundamental no depende del punto base elegido, por tanto, de ahora en adelante, notaremos simplemente $\pi_1(A)$. Para ver una demostración formal de este hecho, se puede consultar las Proposiciones 1.5 y 1.6, en la página 28, de [H].*

El Grupo Fundamental del Anillo. Elijamos un punto cualquiera $a \in A$ y consideremos γ y β dos loops basados en a. ¿Qué deben cumplir γ y β para ser homotópicos? Para que los loops sean homotópicos, deben dar la misma cantidad de vueltas alrededor del $(0,0)$, contando positivamente las vueltas en sentido antihorario y negativamente las vueltas en sentido horario.

Por tanto, tendremos una clase de equivalente por homotopía por cada entero. Habiendo observado esto, es sencillo ver que $\pi_1(A, a) \simeq \mathbb{Z}$ donde el isomorfismo está dado por:

$$[\gamma] \mapsto \ \textit{cantidad de vueltas alrededor de } (0,0).$$

Definición. 0.8 *Sea $f : A \to A$ una función continua. El morfismo inducido por f en el grupo fundamental es $f_* : \pi_1(A) \to \pi_1(A)$ dado por $f_*([\gamma]) = [f(\gamma)]$.*

No es dificil ver que la definición anterior no depende del representante de la clase de equivalencia elegido, para ello, se puede ver la Sección 'Induced Homomorphisms', en la página 34, de [H].

Observación. 0.9 *Como se vio, $\pi_1(A) \simeq \mathbb{Z}$ por lo que el morfismo inducido recién definido es, en realidad, un morfismo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$. Ahora bien, todos los morfismos en $\mathbb{Z}$ son de la forma $n \mapsto dn$, lo que le da sentido a la siguiente definición:*

Definición. 0.10 *Dada una función continua $f : A \to A$, llamamos grado de f al entero d tal que $f_*(n) = dn$.*

Observación. 0.11 *Grado de la composición de funciones.*

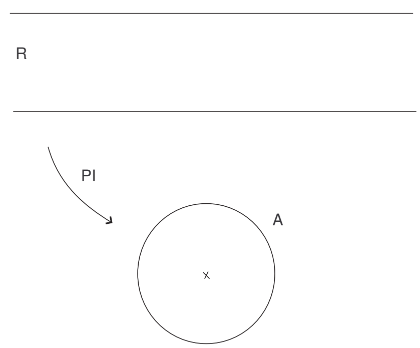
Si $f, g : A \to A$, se tiene que $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$. Por tanto, el grado de la composición es el producto de los grados.

Definición. 0.12 *Un recubrimiento de A es un par $(\tilde{A}, \pi)$ donde $\pi : \tilde{A} \to A$, que verifican que existe un cubrimiento por abiertos de A, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tal que para todo $\alpha \in I$, $\pi^{-1}(U_\alpha)$ es unión disjunta de abiertos, cada uno de los cuales es mapeado homeomórficamente por π sobre U_α.*

Dentro de estos recubrimientos hay uno especial, llamado *recubrimiento universal*, que es aquel que verifica que $\tilde{A}$ es simplemente conexo. Para ver una prueba de su existencia se puede consultar la Proposición 1.36 en la página 66 conjuntamente con la Proposición 1.6 en la página 28 del libro [H].

El recubrimiento universal del Anillo. El recubrimiento universal de A que utilizaremos es el par $(\tilde{A}, \pi)$ donde $\tilde{A} = \mathbb{R} \times (0, 1)$ y $\pi : \mathbb{R} \times (0, 1) \to A$ está dada por $\pi(t, s) = (e^{2\pi it}, s)$.

Las funciones continuas $f : A \to A$ también inducen funciones en el recubrimiento universal, pero antes de poder definirlas correctamente necesitamos el siguiente teorema que nos permite levantar curvas.



Teorema. 0.13 *Sea* $\gamma : [0,1] \to A$ *una curva en* A *con* $\gamma(0) = x_0$ *y sea* $\tilde{x_0}$ *un levantado de* x_0 *(es decir, un punto del conjunto* $\pi^{-1}(x_0)$*). Entonces, existe una única curva* $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \tilde{A}$ *tal que* $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x_0}$ *y* $\pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$ *para todo* $t \in [0,1]$.

Para ver una prueba de este resultado consultar la Proposición 1.30, en la página 60, de [H].

Otra característica fundamental del recubrimiento es la posibilidad de levantar homotopías. Respecto a esto, tenemos el siguiente teorema:

Teorema. 0.14 *Sea* $\pi : \tilde{A} \to A$ *un recubrimiento,* $H : [0,1] \times [0,1] \to A$ *una homotopía y sea* $\tilde{G_0}$ *un levantado de* H_0 *siendo* $H_0(x) = H(0,x)$ *para todo* $x \in [0,1]$*. Entonces, existe una única homotopía* $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \tilde{A}$ *tal que* $\pi\tilde{H}_t = H_t$ *y* $\tilde{H}_0 = \tilde{G}_0$*, donde* $\tilde{H}_t(x) = \tilde{H}(t,x)$ *para todo* $x \in [0,1]$.

Este teorema nos permite caracterizar en el recubrimiento universal curvas homotópicas en A.

Proposición. 0.15 *Sea* $\pi : \tilde{A} \to A$ *con* $\pi(\tilde{x_0}) = x_0$ *y sean* $\alpha, \beta : [0,1] \to A$ *con* $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ *y* $\alpha(1) = \beta(1)$*. Consideremos* $\tilde{\alpha}$ *y* $\tilde{\beta}$ *levantados de* α *y* β *respectivamente con* $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = \tilde{x_0}$*. Entonces, si* α *y* β *son homotópicas,* $\tilde{\alpha}$ *y* $\tilde{\beta}$ *también lo serán. Y en particular,* $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$.

Dem. Sea $H : [0,1] \times [0,1] \to A$ la homotopía entre α y β. Sea $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \tilde{A}$ un levantado de H con $\tilde{H}(0 \times [0,1]) = \tilde{x_0}$. Ahora bien, $\tilde{H}(1 \times [0,1])$ es un sólo punto, $\tilde{x_1}$. La restricción de $\tilde{H}$ a $[0,1] \times 0$ es un levantado de α que comienza en $\tilde{x_0}$, por el Teorema 0.13, la unicidad nos garantiza $\tilde{H}|_{[0,1]\times 0} = \tilde{\alpha}$. Análogamente, $\tilde{H}|_{[0,1]\times 1} = \tilde{\beta}$. Por tanto, $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ son homotópicas y $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1) = \tilde{x_1}$. $\square$

Corolario. 0.16 *Si γ es una curva homotópicamente trivial en A, y $\tilde{\gamma}$ es un levantado de γ, entonces $\tilde{\gamma}$ es una curva cerrada.*

Definición. 0.17 *Dada una función continua $f : A \to A$, decimos que $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$ es un levantado de f si verifica $\pi F = f\pi$.*

Observación. 0.18 *Construcción de los levantados de una función.*

Primero construyamos uno y luego veamos qué relación guarda éste con los demás. Sea $f : A \to A$ una función continua, $x_0 \in A$ y $f(x_0) = y_0$. Veamos que si $\tilde{x_0}$ es un levantado de x_0 e $\tilde{y_0}$ es un levantado de y_0 podemos construir un levantado $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$ de f de forma que $F(\tilde{x_0}) = \tilde{y_0}$. Comencemos definiendo $F(\tilde{x_0}) = \tilde{y_0}$. Sea $\tilde{x_1}$ otro punto de $\tilde{A}$, para definir $F(\tilde{x_1})$ tomemos una curva $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \tilde{A}$ que una $\tilde{x_0}$ con $\tilde{x_1}$. Al proyectar esta curva, obtenemos una curva γ en A, a esta curva le aplicamos f y obtenemos una curva $f\gamma$ cuyo extremo inicial es y_0 y llamamos y_1 al extremo final. Por el Teorema 0.13, existe una única curva $\tilde{f\gamma}$ en $\tilde{A}$ tal que $\tilde{f\gamma}(0) = \tilde{y_0}$. Luego, definimos $F(\tilde{x_1}) = \tilde{f\gamma}(1)$. Es importante observar que esta definición no depende de la curva *gam̃ma* escogida. En efecto, si elegimos otra curva $\tilde{\gamma_0} : [0,1] \to \tilde{A}$ que una $\tilde{x_0}$ con $\tilde{x_1}$, como $\tilde{A}$ es simplemente conexo, la concatenación $\tilde{\gamma_0} \cdot -\tilde{\gamma}$ es una curva homotópicamente trivial por lo que, al proyectarlas al anillo, las curvas que obtendremos tendrán el mismo extremo final.

Ahora observemos que si F_0 es otro levantado de f y $\tilde{x}$ es un punto cualquiera de $\tilde{A}$ entonces se tiene que $F(\tilde{x}) - F_0(\tilde{x}) = k(\tilde{x})$ con $k(\tilde{x}) \in \mathbb{Z}$, ya que $F(\tilde{x})$ y $F_0(\tilde{x})$ son ambos levantados de $f(\pi(\tilde{x}))$ y por tanto deben diferir en un entero. Por tanto, la función $k(\tilde{x})$ toma valores en $\mathbb{Z}$ y, además, es continua por ser F y F_0 funciones continuas definidas en un conjunto conexo por lo que $k(\tilde{x})$ debe ser constante. Concluímos entonces que todo levantado de f es de la forma $F + k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Recíprocamente, notar que $F + k$ es un levantado de f para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.

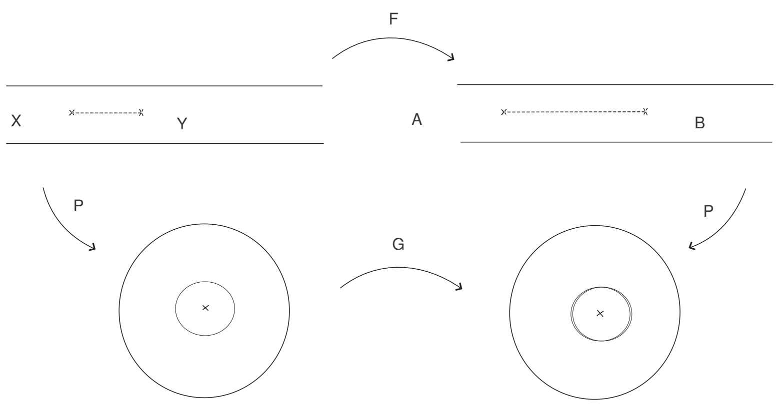
Proposición. 0.19 *Sea $f : A \to A$ una función continua de grado d y $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$ un levantado de f al recubrimiento universal. Entonces, para todo $(x, y) \in \tilde{A}$ se verifica:*

$$F(x+1, y) = F(x, y) + (d, 0)$$

.

Dem. Sea (x, y) un punto del recubrimiento universal. Considero $\tilde{\gamma}$ una curva en el recubrimiento universal que una (x, y) con $(x + 1, y)$.

Al proyectar esta curva sobre el anillo, obtengo una curva γ que da una vuelta alrededor del $(0, 0)$. Al aplicarle f a γ, como f tiene grado d, obtenemos una curva $f(\gamma)$ que da d vueltas alrededor del $(0, 0)$. Al levantar la curva $f(\gamma)$ al recubrimiento universal comenzando en $F(x, y)$, los extremos distan d uno del otro. Por lo tanto, $F(x + 1, y) - F(x, y) = (d, 0)$.



□

Corolario. 0.20 *Si* $[\gamma] = d$ *entonces* $\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) = (d, 0)$.

Dem. El hecho de que $[\gamma] = d$ significa que γ es homotópica a una curva γ' que da d vueltas alrededor del $(0, 0)$. Como se mostró en la demostración de la Proposición 0.19, al levantar la curva γ' que da d vuelta alrededor del $(0, 0)$, obtenemos una curva $\tilde{\gamma'}$ cuyos extremos distan una distancia d uno del otro. Como γ y γ' son homotópicas, aplicando la Proposición 0.15, obtenemos que $\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) = (d, 0)$. □

De ahora en más, notaremos $\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) = (d, 0)$ como $\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) = d$.

Definición. 0.21 *Diremos que p es un punto fijo para f si $f(p) = p$.*

Proposición. 0.22 *Si p es un punto fijo de f y $\tilde{p}$ es un levantado de p, existe F levantado de f con $F(\tilde{p}) = \tilde{p}$.*

Dem. Sea F_0 un levantado de f. Como p es un punto fijo, $\pi(F_0(\tilde{p})) = \pi\tilde{p}$ por tanto, $F_0(\tilde{p}) = \tilde{p} + l$ con $l \in \mathbb{Z}$. Ahora, basta aplicar la Observación 0.18 y definir otro levantado de f trasladando F_0. En efecto, si definimos $F = F_0 - l$, $F(\tilde{p}) = \tilde{p}$. $\square$

Adoptaremos la notación $Fix(f)$ para designar el conjunto de puntos fijos de f.

Proposición. 0.23 *Si $f : A \to A$ es recubrimiento entonces todo levantado $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$ es un homeomorfismo.*

Dem. Observemos que si f es un recubrimiento, F también lo es, lo cual nos garantiza la sobreyectividad y la continuidad de F.

Para ver que F es inyectiva, sean $x \neq y \in \tilde{A}$ tales que $F(x) = F(y)$. Sea γ una curva de x a y. Como $F(x) = F(y)$, $F(\gamma)$ es una curva cerrada y, por ende, homotópicamente trivial. Por tanto, si levantamos $F(\gamma)$ por x, obtenemos que γ es homotópicamente trivial lo cual es absurdo pues γ es una curva abierta. Por tanto, F debe ser inyectiva.

Finalmente, para probar que F^{-1} es continua, basta ver que F es una función abierta, por ser un homeomorfismo local, y continua. A partir de esto, se concluye la continuidad de F^{-1}.

$\square$

Definición. 0.24 *Decimos que un subconjunto abierto y conexo $U \subset A$ es esencial si $i_*(\pi_1(U)) = \mathbb{Z}$, donde $i_* : \pi_1(U) \to \pi_1(A)$ es el mapa inducido por la inclusión $i : U \to A$. Decimos que un subconjunto cualquiera de A es esencial si cualquier entorno abierto de él es esencial. Decimos que un subconjunto es inesencial si no es esencial o, equivalentemente, si está contenido en un disco de A.*

Definición. 0.25 *Sea $f : A \to A$, decimos que un subconjunto $K \subset A$ es f-invariante si se cumple que $f(K) \subset K$.*

Proposición. 0.26 *Dado $K \subset A$ no esensial, conexo, f-invariante y $\tilde{K}$ una componente conexa de $\pi^{-1}(K)$, existe $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$ levantado de f tal que $F(\tilde{K}) \subset \tilde{K}$.*

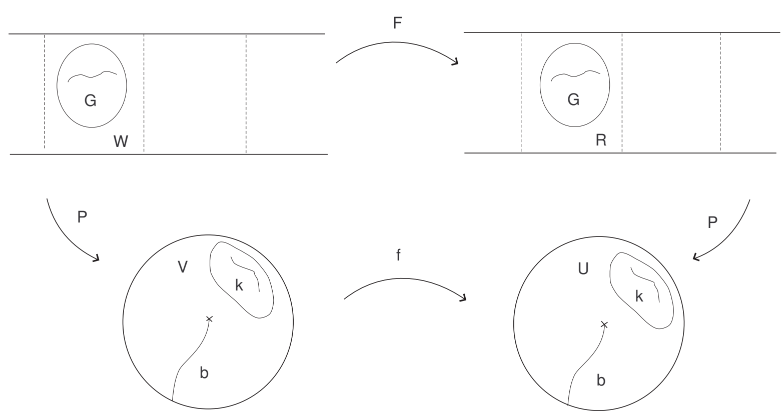
Dem.

Sea $x \in K$, veamos que podemos elegir levantados de x y $f(x)$ en $\tilde{K}$. En efecto, como K es no esencial, podemos tomar una curva β que una los bordes de A de forma que $Im(\beta) \cap K = \emptyset$. Observemos que al levantar β, $\tilde{A}$ nos queda dividido en franjas dentro de las cuales tenemos una copia de $\tilde{K}$. Si restringimos π a cada una de estas franjas, la restricción resulta un homeomorfismo por lo que, basta tomar la franja que contiene a $\tilde{K}$ y elegir $\tilde{x}$ y $\widetilde{f(x)}$ como la preimagen a través de la restriccion de π de x y $f(x)$ respectivamente.

A partir de esto podemos considerar $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$ el levantado de f que verifica $F(\tilde{x}) = \widetilde{f(x)}$.

Ahora veamos que sucede con los restantes puntos de $\tilde{K}$: sea $y \in K$ e $\tilde{y}$ el levantado de y que pertenece a $\tilde{K}$. Queremos ver que $F(\tilde{y})$ pertenece a $\tilde{K}$ también. Para ello, sea $U \subset A$ un disco que contiene a K y sea $U' \subset U$ otro disco de forma que $f(U') \subset U$. Observemos que U' es también no esencial.

Como U es no esencial, podemos tomar nuevamente una curva β que una los bordes de A de forma que $Im(\beta) \cap U = \emptyset$ y, por ende también se cumple $Im(\beta) \cap U' = \emptyset$. Sean $\tilde{U}$ y $\tilde{U'}$ los levantados que contienen a $\tilde{K}$ de U y U' respectivamente. Nuevamente, al levantar β, $\tilde{A}$ nos queda dividido en franjas dentro de las cuales tenemos una copia de $\tilde{K}$, $\tilde{U}$ y $\tilde{U'}$. Esto nos garantiza que los levantados de U y U' son disconexos y por tanto, para ver que $F(\tilde{y}) \in \tilde{K}$ basta probar que está en la misma componente conexa que $\tilde{y}$.



Sea $\tilde{\alpha} \subset \tilde{U'}$ una curva que une $\tilde{x}$ con $\tilde{y}$. Sabemos que $\alpha = \pi(\tilde{\alpha})$ está contenida en U' y, por tanto, $f(\alpha)$ está contenida en U. Como la imagen de β no intersecta U, las curvas $f(\alpha)$ y β tampoco se intersectarán. Esto implica que al levantar $f(\alpha)$ con punto inicial $F(\tilde{x})$, ésta estará en la misma componente conexa del levantado de U que α, es decir, en $\tilde{U}$.

□

Capítulo 3

Teoría de Nielsen

Definición. 0.27 *Sea $f : A \to A$ una función continua. Si p y q son puntos fijos de f, diremos que son Nielsen equivalentes si existe una curva γ de p a q tal que $f(\gamma)$ es homotópica a γ. Si en lugar de ser puntos fijos p y q son puntos periódicos de f, diremos que son Nielsen equivalentes si son puntos fijos Nielsen equivalentes para f^k, para algún $k > 0$.*

Esta definición no depende del k elegido en virtud del lema que probaremos a continuación.

Lema 0.28 *Sean p, q puntos fijos de f y γ una curva de p a q. Si $\gamma \sim f^k(\gamma)$ para algún $k \geq 1$, entonces $\gamma \sim f(\gamma)$.*

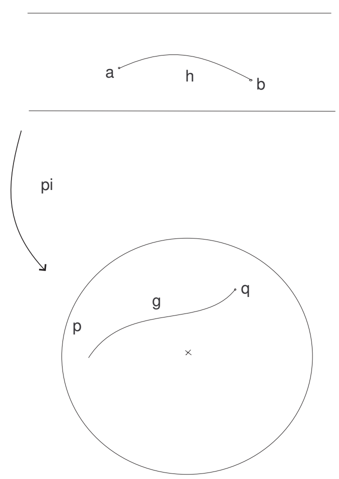
Dem. Sea $\tilde{p}$ un levantado de p y F un levantado de f que fija $\tilde{p}$. Sea $\tilde{\gamma}$ el levantado de γ que comienza en $\tilde{p}$ y llamemos $\tilde{q}$ al extremo final de $\tilde{\gamma}$. Claramente, $\tilde{q}$ es un levantado de q.

Supongamos por absurdo que $\gamma \nsim f(\gamma)$. Esto implica que $F(\tilde{q}) \neq \tilde{q}$.

Como $F(\tilde{q}) \neq \tilde{q}$, existe un entero l distinto de 0 tal que $F(\tilde{q}) = \tilde{q} + l$, esto sucede en virtud de que $F(\tilde{q})$ se proyecta en q y por tanto, debe ser un trasladado de $\tilde{q}$.

Ahora bien, calculemos $F^k(\tilde{q})$. Usando el hecho de que $F(\tilde{q}+l) = F(\tilde{q}) + ld = \tilde{q} + l + ld$ repetidas veces obtenemos:

$$F^k(\tilde{q}) = F^{k-1}(\tilde{q} + l) = F^{k-2}(\tilde{q} + l + ld) = \cdots = \tilde{q} + \sum_{i=0}^{k-1} d^i l.$$



Como l es distinto de 0, concluímos que $F^k(\tilde{q}) \neq \tilde{q}$, por tanto, $\gamma \nsim f^k(\gamma)$. Esto es absurdo, por ende, $\gamma \sim f(\gamma)$.

□

Ahora veamos una caracterización de los puntos fijos Nielsen equivalentes en el recubrimiento universal:

Lema 0.29 *Sea $f : A \to A$ continua y sean p y q puntos fijos de f. Son equivalentes:*

1. *p y q son Nielsen equivalentes.*
2. *Si F es un levantado de f y $\tilde{p}$ es un levantado de p, entonces existe $\tilde{q}$ levantado de q tal que $F(\tilde{p}) - \tilde{p} = F(\tilde{q}) - \tilde{q}$.*

Dem.

$(1 \Rightarrow 2)$ Sea F un levantado de f y $\tilde{p}$ un levantado de p. Como p es un punto fijo de f, $F(\tilde{p}) = \tilde{p} + l$ con $l \in \mathbb{Z}$ dado que $F(\tilde{p})$ se proyecta en p. Considero γ la curva que une p con q dada por la equivalencia de Nielsen. Sea $\tilde{\gamma}$ el levantado de γ que comienza en $\tilde{p}$ y sea $\tilde{q}$ el extremo final de $\tilde{\gamma}$.

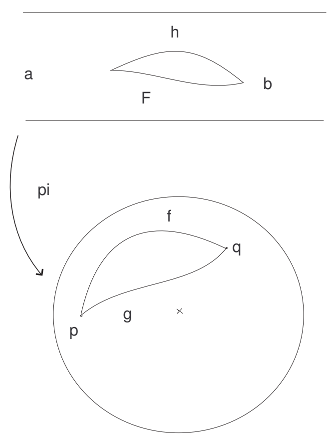
Sabemos que $f\gamma$ es homotópica a γ. Ahora consideremos el levantado de $f\gamma$ que comienza en $\tilde{p} + l$, a este levantado le llamaremos $\tilde{f\gamma}$.

La curva $\tilde{f\gamma}$ debe finalizar en $\tilde{q} + l$, en efecto, si no fuese así, al proyectar $\tilde{f\gamma}$ obtendríamos una curva no homotópica a γ lo cual es absurdo pues $\pi(\tilde{f\gamma}) = f\gamma$.

Por otro lado, como $f\pi = \pi F$, debe ser $F(\tilde{q}) = \tilde{q} + l$. Por tanto,

$$l = F(\tilde{q}) - \tilde{q} = F(\tilde{p}) - \tilde{p}.$$

$(2 \Rightarrow 1)$ Sea $\tilde{p}$ un levantado de p y F un levantado de f tal que $F(\tilde{p}) = \tilde{p}$. Por hipótesis, existe $\tilde{q}$ un levantado de q con $F(\tilde{q}) = \tilde{q}$. Sea $\tilde{\gamma}$ cualquier curva que una $\tilde{p}$ con $\tilde{q}$. En este contexto, tenemos que $\tilde{\gamma}$ y $F\tilde{\gamma}$ son homotópicas con extremos fijos. Como la concatenación de $F\tilde{\gamma}$ y $-\tilde{\gamma}$ (recorrida en sentido contrario) es una curva cerrada, su proyección es una curva homotópicamente trivial, que coincide con la concatenación de $f\gamma$ y $-\gamma$.



Por tanto, γ y $f\gamma$ son homotópicas, lo que implica que p y q son Nielsen equivalentes.

$\square$

Ejemplo. 1 *Calculemos el número de clases de Nielsen de puntos fijos del mapa* $m_d : S^1 \to S^1$ *siendo* $m_d(z) = z^d$ *con* $d > 1$.

En primer lugar, observemos que la Definición 0.27 se puede adaptar fácilmente a funciones $f : S^1 \to S^1$ como sigue: si p y q son puntos fijos de f, diremos que son Nielsen equivalentes si existe una curva γ de p a q tal que $f(\gamma)$ es homotópica a γ. Si en lugar de ser puntos fijos p y q son puntos periódicos de f, diremos que son Nielsen equivalentes si son puntos fijos Nielsen equivalentes para f^k, para algún $k > 0$.

Ahora bien, grafiquemos m_d representando S^1 como el intervalo $[0, 1]$ con extremos identificados.

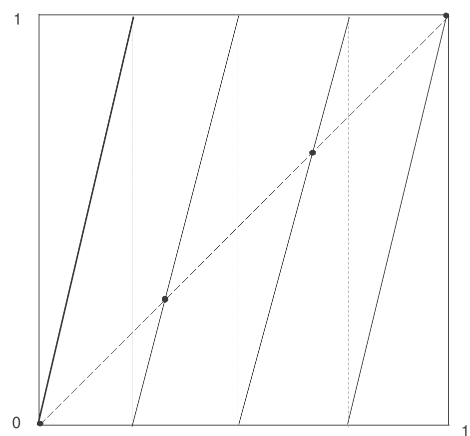


Figura 3.1: Gráfica de m_4

En el gráfico en $[0, 1] \times [0, 1]$ aparecen d puntos fijos pero, teniendo en cuenta que los extremos están identificados, podemos apreciar que el primero y el último son el mismo punto fijo. Por tanto, tenemos $d - 1$ puntos fijos.

Veamos que no son Nielsen equivalentes: elijamos uno de ellos y llamémosle $\tilde{p}$. Consideremos un levantado $\tilde{m_d}$ de m_d a $\mathbb{R}$ (el recubrimiento universal de S^1) que fije $\tilde{p}$. Basta observar que ningún levantado de los restantes puntos fijos queda fijo por $\tilde{m_d}$. En efecto, $\tilde{m_d}$ es de la forma $\tilde{m_d}(z) = dz + k$ con $k \in \mathbb{Z}$ por lo que sólo puede tener un punto fijo.

Teorema. 0.30 *Si $f : A \to A$ es un mapa de grado d con $|d| > 1$, entonces el número de clases de Nielsen de puntos fijos de f es menor o igual a $|d-1|$.*

Dem.

Sea p un punto fijo de f y sea F un levantado de f. Como p es fijo, si $\tilde{p}$ es un levantado de p entonces existe $l_{\tilde{p}} \in \mathbb{Z}$ tal que $F(\tilde{p}) = \tilde{p} + l_{\tilde{p}}$.

Veamos que podemos tomar otro levantado de p, $\tilde{p}'$ de forma que

$$0 \leq l_{\tilde{p}'} < |d-1|.$$

Para ello, hagamos la división entera de $l_{\tilde{p}}$ entre $1-d$, de esta forma, obtenemos j y L enteros tales que:

$$l_{\tilde{p}} = j(1-d) + L \text{ con } 0 \leq L < |d-1|.$$

Sea $\tilde{p}' = \tilde{p} + j$, tenemos que:

$$F(\tilde{p}') = F(\tilde{p}+j) = F(\tilde{p})+jd = \tilde{p}+l_{\tilde{p}}+jd = \tilde{p}+l_{\tilde{p}}+j(d-1)+j = \tilde{p}+j+L = \tilde{p}'+L.$$

De esta forma, obtuvimos $0 \leq L = l_{\tilde{p}'} < |d-1|$. Observar que $l_{\tilde{p}'}$ está únicamente determinado por p y F.

Ahora bien, sea q otro punto fijo de f y tomemos $\tilde{q}$ un levantado de q de forma tal que:

$$F(\tilde{q}) = \tilde{q} + l_{\tilde{q}} \text{ con } 0 \leq l_q < |d-1|.$$

Los puntos p y q serán Nielsen equivalentes si y sólo si:

$$F(\tilde{q}) - \tilde{q} = F(\tilde{p}') - \tilde{p}' \text{ , es decir, si } l_{\tilde{p}'} = l_{\tilde{q}}.$$

Como $0 \leq l_{\tilde{p}'} < |d-1|$ y $0 \leq l_{\tilde{q}} < |d-1|$, esto implica que podemos tener a lo sumo $|d-1|$ puntos fijos no relacionados. □

Ejemplo. 2 *Mapa en el anillo de grado 3 sin clases de Nielsen:*

Sea $f : A \to A$ dada por $f(z) = z^3$. Para cada $z \in A$, f rota el punto y luego le realiza una homotecia de razón menor que 1. Por tanto, f no tiene puntos fijos en A, lo que implica que tiene 0 clases de Nielsen.

Definición. 0.31 *Definimos el período de una clase de Nielsen como el mínimo de los períodos de los puntos periódicos en la clase. Llamaremos $N_k(f)$ al número de clases de Nielsen de período k de f.*

Definición. 0.32 *Si f es un mapa de grado d, $|d| > 1$,en el anillo, decimos que f es completo si para cada k entero positivo se tiene $N_k(f) = N_k(m_d)$, donde $m_d : S^1 \to S^1$, $m_d(z) = z^d$.*

El Teorema 0.30 nos permite observar que un mapa en el anillo f será completo si tiene la cantidad máxima de clases de Nielsen de cada período.

Lema 0.33 *Un mapa f es completo si y sólo si $N_1(f^k) = N_1(m_d^k)$ para todo k positivo.*

Dem.

($\Leftarrow$) Procederemos por inducción: Para $k = 1$ (paso base) basta evaluar la igualdad de nuestra hipótesis global en $k = 1$. Supongamos que el resultado es válido para $k < n$ y procedamos a probarlo para $k = n$. Utilizaremos la siguiente igualdad, $N_1(f^n) = N_n(f) + \sum_{n'|n} N_{n'}(f)$ pero despejando el término de nuestro interés: $N_n(f) = N_1(f^n) - \sum_{n'|n} N_{n'}(f)$. Observemos que en el primer término del lado derecho de la igualdad es, por hipótesis, igual a $N_1(m_d^n)$; mientras que el segundo término de la derecha es, por hipótesis de inducción, igual a $\sum_{n'|n} N_{n'}(m_d)$. Sustituyendo estas expresiones y observando que la descomposición es también válida para m_d obtenemos:

$$N_n(f) = N_1(f^n) - \sum_{n'|n} N_{n'}(f) = N_1(m_d^n) - \sum_{n'|n} N_{n'}(m_d) = N_n(m_d).$$

($\Rightarrow$) Por hipótesis, f es completo, por tanto, $N_k(f) = N_k(m_d)$ para todo k positivo. Para probar nuestra tesis, procedemos a descomponer $N_1(f^k)$ en dos sumandos donde usaremos, en cada uno de ellos, nuestra hipótesis de completitud:

$$N_1(f^k) = N_k(f) + \sum_{k'|k} N_{k'}(f) = N_k(m_d) + \sum_{k'|k} N_{k'}(m_d) = N_1(m_d^k).$$

$\square$

Lema 0.34 *Si $Fix(F) \neq \emptyset$ para todo F levantado de f, entonces f tiene $|d-1|$ clases de Nielsen de puntos fijos, siendo d el grado de f.*

Dem. Sea F_0 un levantado de f fijo. Definimos, para todo k entero, $F_k(x) = F(x) + k$ y observemos que cada F_k es un levantado de f y, viceversa, todo levantado de f se escribe como F_k para algún k.

Para cada $k \in \mathbb{Z}$, sea $x_k \in \tilde{A}$ tal que $F_k(x_k) = x_k$. Sabemos que estos existen pues todo levantado de f posee puntos fijos.

Queremos mostrar que hay $|d-1|$ clases de Nielsen de puntos fijos. Para ello, supongamos que existe $i \neq 0$ tal que $\pi(x_i)$ y $\pi(x_0)$ son Nielsen equivalentes.

Por el Lema 0.29 sabemos que existe $x_i + l$ otro levantado de $\pi(x_i)$ tal que $0 = F_0(x_0) - x_0 = F_0(x_i + l) - x_i + l$, en otras palabras, $F_0(x_i + l) = x_i + l$.

Por otra parte, por la forma en que definimos las F_k, $F_i(x_i) = F_0(x_i) + i$ lo que implica que $F_0(x_i) = F_i(x_i) - i = x_i - i$.

Combinando ambas expresiones y usando que $F_0(x_i + l) = F_0(x_i) + ld$ obtenemos:

$$x_i + l = F_0(x_i + l) = F_0(x_i) + ld = x_i - i + ld$$

Por lo tanto, si $\pi(x_i)$ y $\pi(x_0)$ son Nielsen equivalentes, i debe verificar la siguiente ecuación: $i = l(d-1)$. Observemos que esta ecuación no se verifica para $i = 1, ..., d-2$ ya que el caso $i = 0$ es F_0, el levantado con el cual estamos comparando.

Haciendo variar el levantado con el cual estamos comparando, obtenemos que si $k = 0, \cdots d-2$ los puntos fijos de cada F_k se proyectan en puntos fijos de f que no son Nielsen equivalentes. Por tanto, f tiene, al menos, $|d-1|$ clases de Nielsen de puntos fijos. Aplicando el Teorema 0.30, conclúımos que f tiene $|d-1|$ clases de Nielsen de puntos fijos. $\square$

Corolario. 0.35 *Si para todo k entero positivo, todo levantado de f^k tiene un punto fijo, entonces f es completa.*

Dem. Sea d, $|d| > 1$, el grado de f. Por la Observación 0.11, f^k tiene grado d^k. Como para todo k entero positivo, todo levantado de f^k tiene un punto fijo, aplicando el Lema 0.34, f^k tiene $|d^k - 1|$ clases de Nielsen de puntos fijos. Por tanto, para todo k entero positivo se tiene que $N_1(f^k) = |d^k - 1| = N_1({m_d}^k)$. En virtud del Lema 0.33, esto implica que f es completa. $\square$

Ejemplo. 3 *El hecho de que un levantado de f tenga un punto fijo no implica que todos los levantados tengan puntos fijos.*

Para mostrar esto vamos a introducir una pequeña perturbación en el mapa $f : A \to A$ dado por $f(r,\theta) = (r^3, 3\theta)$. Primero observemos que este mapa deja invariantes los rayos $R_1 = \{(r,0) \text{ con } 0 < r < 1\}$ y $R_2 = \{(r,\pi) \text{ con } 0 < r < 1\}$. Como vimos en el Ejemplo 2, este mapa no posee puntos fijos en A pero podemos modificar la función en el rayo R_1 para que aparezca allí un punto fijo, llamemos f' a este nuevo mapa. Más concretamente, escribamos $f'(r,0) = (\varphi(r), 0)$ donde φ es como en la figura.

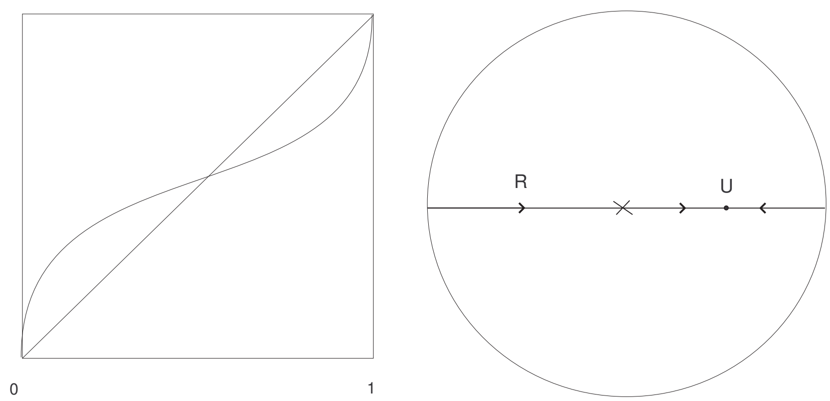


Figura 3.2: Dinámica en R_1 de f'.

Consideremos un primer levantado F_1 de f' que fije un levantado de R_1. Este levantado tendrá puntos fijos. Sin embargo, si consideramos otro levantado de f', llamémosle F_2 que fije un levantado de R_2, este levantado no posee puntos fijos.

Capítulo 4

Prueba de Completitud

El objetivo de este capítulo es probar el siguiente teorema:

Teorema. 0.36 *Sea $f : A \to A$ un mapa de recubrimiento de grado d con $|d| > 1$. Si existe un compacto, conexo y esencial K tal que $f(K) \subset K$ entonces f es completa.*

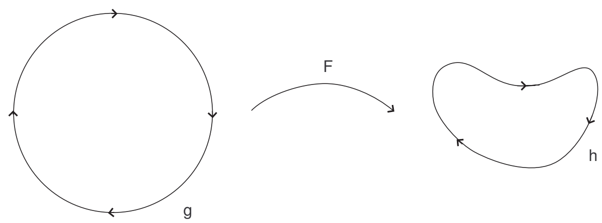
Para ello, probaremos que si f tiene un compacto, conexo y esencial invariante entonces todos los levantados de f^k con k entero positivo tienen al menos un punto fijo, por el Corolario 0.35 esto es suficiente para afirmar que f es completa. Procederemos a dividir esta prueba en dos casos para lo cual necesitamos primero algunas definiciones.

Recordemos que, al ser $f : A \to A$ un mapa de recubrimiento, cualquier levantado de f será un homeomorfismo en virtud de la Proposición 0.23.

Definición. 0.37 *Decimos que un homeomorfismo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ preserva orientación si para toda curva γ cerrada orientada de forma que al recorrerla la componente acotada esté del lado derecho, al recorrer la curva $F\gamma$ la componente acotada también está del lado derecho.*

Definición. 0.38 *Decimos que $f : A \to A$ preserva orientación si todos sus levantados preservan orientación.*

Observación. 0.39 *Basta ver que un levantado preserve orientación ya que los demás son traslaciones de éste y las traslaciones preservan orientación.*



4.1. Caso 1: f preserva orientación

Para probar este caso, nos basaremos en el Teorema de traslación de Brouwer cuya prueba se puede consultar en [Brou]. Pero antes de enunciar este teorema, debemos ver una definición.

Definición. 1.1 *Dada una función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, decimos que un punto $x \in \mathbb{R}^2$ es un punto no errante si para todo entorno U de x se cumple que existe $m \geq 1$ tal que $F^m(U) \cap U \neq \emptyset$. Al conjunto de puntos no errantes de F lo denotamos $\Omega(F)$ y lo llamamos conjunto no errante.*

Teorema. 1.2 (Teorema de traslación de Brouwer) *Si $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo que preserva orientación tal que $\Omega(F) \neq \emptyset$, entonces F tiene un punto fijo.*

La idea de la prueba de el Teorema 0.36 consiste en demostrar que si f está en las hipótesis entonces todos sus levantados tienen conjunto no errante no vacío y de esta forma garantizar la existencia de puntos fijos para todos los levantados de f. Para probar que dado un levantado F de f el conjunto no errante de F es no vacío, construiremos un compacto F- invariante. Para realizar la construcción de este compacto F-invariante, primero debemos construir la semiconjugada de F que es por donde empezaremos.

Para la prueba del siguiente lema, utilizaremos un resultado previo:

Definición. 1.3 *Sea (M, d) un espacio métrico. Decimos que $T : M \to M$ es contractiva si existe $K < 1$ tal que $d(T(H_1), (H_2)) \leq Kd(H_1, H_2)$ para toda $H_1, H_2 \in M$.*

Teorema. 1.4 (Teorema de Punto Fijo de Banach) *Si (M, d) es un espacio métrico completo y $T : M \to M$ es una aplicación contractiva entonces existe un único punto fijo de T en M.*

Lema 1.5 *Sea $f : A \to A$ una función continua de grado d con $|d| > 1$ y sea $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$ un levantado de f. Sea $K \subset A$ un compacto f-invariante y $\tilde{K} = \pi^{-1}(K)$. Entonces existe un mapa continuo $H_F : \tilde{K} \to \mathbb{R}$ tal que:*

1. *$H_F(x+1, y) = H_F(x, y) + 1$,*
2. *$H_F F = dH_F$,*
3. *$|H_F(x, y) - x|$ está acotado en $\tilde{K}$,*
4. *$H_F(x) = lim_{n\to\infty} \frac{(F^n(x))_1}{d^n}$ donde $()_1$ denota la proyección sobre la primer coordenada.*

Llamaremos semiconjugada de F a esta función H_F.

Dem. Consideremos el conjunto

$M = \{H : \tilde{K} \to \mathbb{R}$ tal que H es continua y $H(x+1, y) = H(x, y)+1$ para todo $(x, y) \in \tilde{K}\}$

y definamos $d : M \times M \to \mathbb{R}$ por $d(H_1, H_2) = sup_{x\in\tilde{K}}\{|H_1(x) - H_2(x)|\}$ para toda $H_1, H_2 \in M$.

Debemos probar que d está bien definida, es decir, que $d(H_1, H_2) < \infty$ para toda $H_1, H_2 \in M$.

Para ello demostraremos una afirmación más general que luego usaremos para probar el ítem 3:

Afirmación: Si $G : \tilde{K} \to \mathbb{R}$ verifica $G(x + 1, y) = G(x, y)$ entonces G está acotada. En efecto, miremos $K' = \tilde{K} \cap [[0, 1] \times (0, 1)]$. El conjunto K' es cerrado y acotado, por ende, compacto. Luego, $|G(x', y')| < C$ para todo $(x', y') \in K'$. Ahora bien, sea $(x, y) \in \tilde{K}$, podemos escribir (x, y) como $(x, y) = (x' + n, y')$ con $(x', y') \in K'$ y $n \in \mathbb{Z}$. Tenemos que $|G(x, y)| = |G(x' + n, y')| = |G(x', y')| < C$ ya que $(x', y') \in K'$.

Ahora bien, si H_1, H_2 pertenecen a M, tomemos $G : \tilde{K} \to \mathbb{R}$ como $G(x, y) = H_1(x, y) - H_2(x, y)$ y apliquemos la afirmación recién probada. De esta forma obtenemos que $H_1(x, y) - H_2(x, y)$ está acotada y, por tanto,

$$d(H_1, H_2) = sup_{x\in\tilde{K}}\{|H_1(x) - H_2(x)|\} < \infty.$$

Esto nos permite afirmar que d está bien definida y, por tratarse de la distancia del supremo, ya sabemos que verifica las propiedades de distancia.

Queremos ver que (M, d) es un espacio métrico completo. Para ello, observemos que M es no vacío ya que $H : \tilde{K} \to \mathbb{R}$, $H(x, y) = x$ pertenece a

M. Ahora tomemos $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en M. Por tratarse de una sucesión de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq n_0$ se verifica que $d(H_n, H_m) < \varepsilon$. Como consecuencia, para todo $x \in \tilde{K}$, $|H_n(x) - H_m(x)| \leq d(H_n, H_m) < \varepsilon$. La sucesión $\{H_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión real y, por ser de Cauchy, convergente para todo $x \in \tilde{K}$. Llamando $H(x)$ a este límite, queda definida $H : \tilde{K} \to \mathbb{R}$.

Para ver que H pertenece a M, debemos ver que:

(I) H es continua,

(II) $H(x+1, y) = H(x, y) + 1$ para todo (x, y) $\tilde{K}$.

Veamos que H es continua: sea $\varepsilon > 0$, como $\{H_n\}$ es uniformemente continua, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$ entonces $|H_n(x) - H_m(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in \tilde{K}$. Fijando n y haciendo tender $m \to \infty$ obtenemos $|H_n(x) - H(x)| < \varepsilon$ para todo $n > N$ y para todo $x \in \tilde{K}$. Esto implica que $\{H_n\}$ converge uniformemente a H y, al ser H_n continua para todo $n \in \mathbb{N}$, H también lo es.

Ahora veamos que $H(x+1, y) = H(x, y) + 1$ para todo $(x, y) \in \tilde{K}$:

$$H(x+1, y) = lim_{n\to\infty} H_n(x+1, y) = lim_{n\to\infty} H_n(x, y) + 1 = H(x, y) + 1.$$

Consideremos ahora la aplicación $T : M \to M$ dada por $T(H) = \frac{1}{d} H \circ F$. Veamos que está bien definida, es decir, que para toda $H \in M$, $\frac{1}{d} H \circ F \in M$:

(I) $\frac{1}{d} H \circ F$ es continua por ser composición de funciones continuas.

(II) Probemos que $\frac{1}{d} H \circ F(x+1, y) = \frac{1}{d} H \circ F(x, y) + 1$: en efecto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} H \circ F(x+1, y) &= \frac{1}{d}[H \circ F(x, y) + d] \\ &= \frac{1}{d} H \circ F(x, y) + 1. \end{aligned}$$

Ahora veamos que T es contractiva, es decir, que $d(T(H_1), (H_2)) \leq K d(H_1, H_2)$ con $K < 1$ para toda $H_1, H_2 \in M$. Efectivamente,

$$sup_{x\in K}\{|\frac{1}{d} H_1 \circ F(x) - \frac{1}{d} H_2 \circ F(x)|\} \leq |\frac{1}{d}| sup_{y\in K} |H_1(y) - H_2(y)|.$$

Luego, tomando $K = |\frac{1}{d}|$, obtenemos la condición de contractividad.

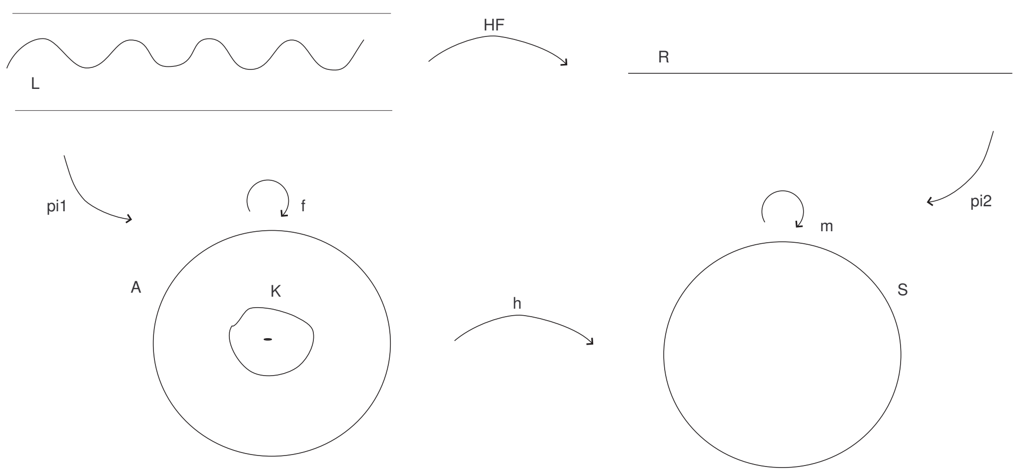
Aplicando el Teorema 1.4 a T, obtenemos que existe una única función $H_F \in M$ tal que $T(H_F) = H_F$, o sea, $\frac{1}{d} H_F \circ F = H_F$. Operando, obtenemos la condición del ítem 2: $H_F \circ F = dH_F$. Observemos que la condición del ítem 1 se satisface trivialmente por cómo definimos M.

Para probar que ítem 3 basta observar que $G(x,y) = H(x,y) - x$ verifica $G(x+1,y) = G(x,y)$, luego G está acotada en $\tilde{K}$ lo cual implica directamente la afirmación del ítem 3.

Resta probar que $H_F(x) = lim_{n\to\infty} \frac{(F^n(x))_1}{d^n}$ donde $()_1$ denota la proyección sobre la primer coordenada. Para ello, observemos que la condición 3 evaluando en $x = (F^n(x)_1)$ obtenemos que $|H_F(F^n(x)) - (F^n(x))_1| < C$ para cierta constante C y para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando la condición 2, $H_F \circ F^n = d^n H_F$, sustituyendo, $|d^n H_F(x) - (F^n(x))_1| < C$. Luego, dividiendo por d^n, $|H_F(x) - \frac{(F^n(x))_1}{d^n}| < \frac{C}{d^n}$. Tomando límite cuando $n \to \infty$, $H_F(x) = lim_{n\to\infty} \frac{(F^n(x))_1}{d^n}$.

□

Una vez construída $H_F : \tilde{K} \to \mathbb{R}$ la semiconjugada de F, veamos que ésta induce una función $h_f : K \to S^1$ que verifica $h \circ f = m_d \circ h$. Esta h se construye de forma tal que el siguiente diagrama conmute:



donde π_1 corresponde a la proyección asociada a recubrimiento universal de A y π_2 corresponde a la proyección asociada al recubrimiento universal de S^1.

Observando el diagrama podemos ver que para que éste conmute, es necesario definir para cada $x \in K$, $h_f(x) = \pi_2(H_F(\tilde{x}))$ donde $\tilde{x}$ es un levantado cualquiera de x. En virtud de que $H(x+1,y) = H(x,y)$ esta definición no dependerá del levantado que elijamos.

Nuestro siguiente objetivo es probar que H_F es sobreyectiva y para ello, nos apoyaremos en la función asociada h_f recién construída. Antes de probar este resultado, debemos introducir algunos resultados previos.

Definición. 1.6 *Decimos que un espacio* U *es normal si dados dos subconjuntos* $E, F \subset U$ *cerrados y disjuntos, existen entornos* V *de* E *y* W *de* F *también disjuntos.*

Teorema. 1.7 (Teorema de extensión de Tietze) *Si* K *es un subconjunto cerrado de un espacio normal* U *y* $h : K \to \mathbb{R}$ *es una función continua, entonces existe una función continua* $h' : U \to \mathbb{R}$ *tal que* $h'(x) = h(x)$ *para todo* $x \in K$.

Aplicando el Teorema de extensión de Tietze, podemos extender $h_f : K \to S^1$ a una función $h' : U \to S^1$ donde U es un entorno de K. Observemos que dado que U es conexo por arcos, tiene sentido considerar $h'_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Proposición. 1.8 *Sea* $f : A \to A$, K *un compacto esencial y* f*-invariante de* A. *Consideremos la extensión* $h' : U \to S^1$ *de* $h_f : K \to S^1$ *donde* U *es un entorno de* K. *Entonces,* $h'_* = id$. *En particular,* h' *es sobreyectiva.*

Dem. Por la Proposición 0.19, basta con probar que para todo $(x, y) \in \tilde{U}$, el levantado de h', que llamaremos H', verifica $H'(x + 1, y) = H'(x, y) + 1$. Para ver esto, observemos que H' verifica $H'(x + 1, y) = H'(x, y) + n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$ fijo y que, a su vez, H' coincide con H_F en $\tilde{K}$. Como H verifica que $H_F(x+1, y) = H_F(x, y)+1$ y $H' = H_F$ en $\tilde{K}$, debe ser $H'(x+1, y) = H'(x, y)+1$ para todo $(x, y) \in \tilde{U}$.

□

Ahora sí, estamos en condiciones de probar que H_F es sobreyectiva:

Lema 1.9 *Si* K *es un compacto esencial,* f*-invariante, entonces, para cualquier levantado* F *de* f *se tiene que* H_F *es sobreyectiva.*

Dem. Basta con probar que $h_f : K \to S^1$ es sobreyectiva. En efecto, el hecho de que h_f sea sobreyectiva implica que $[0, 1] \subset Im(H_F)$ pero como $H_F(x + 1, y) = H_F(x, y) + 1$ para todo $(x, y) \in \tilde{K}$, obtendremos que $Im(H_F) = \mathbb{R}$. Sea $y \in S^1$. Queremos ver que y está en la imagen de h_f. Para ello, consideremos U_1 y $h' : U_1 \to S^1$ como en el Teorema 1.7. Consideremos la familia de entornos decrecientes consideremos una familia de entornos decrecientes de K: $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_n \supset \cdots$ y tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = K$.

Por la Proposición 1.8 sabemos que h' es sobreyectiva por lo que podemos tomar una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de forma que $h'(x_n) = y$, el límite x de esta sucesión pertenece a K y verifica $h_f(x) = y$. Luego, h_f es sobreyectiva y, en consecuencia, H_F también lo es.

$\square$

Lema 1.10 *Sea K es un compacto esencial, f-invariante y F un levantado de f. Entonces, se tiene que $H_F^{-1}(0)$ es un compacto, no vacío y F-invariante.*

Dem. Por el Lema 1.9 se tiene que $H_F^{-1}(0)$ es no vacío. Para ver que es F-invariante, observemos que $H_F \circ F(H_F^{-1}(0)) = d0 = 0$, por lo tanto, $F(H_F^{-1}(0)) \subset H_F^{-1}(0)$. Para probar que $H_F^{-1}(0)$ es compacto, observemos que por ser preimagen de un conjunto cerrado, $H_F^{-1}(0)$ es cerrado. Para ver que es acotado, sea $(x, y) \in H_F^{-1}(0)$, sabemos por el Lema 1.5 que $|H_F(x, y) - x| < C$ para cierta constante C, luego si $(x, y) \in H_F^{-1}(0)$, $|x| < C$. Por otro lado, $y \in (0, 1)$, lo cual nos garantiza que $H_F^{-1}(0)$ es un conjunto acotado. $\square$

Corolario. 1.11 *Sea K es un compacto esencial, f-invariante y F un levantado de f. Entonces, $Fix(F) \neq \emptyset$.*

Dem. Por el Lema 1.10, sabemos que $H_F^{-1}(0)$ un compacto, no vacío, F-invariante. Probemos que este hecho implica que el conjunto no errante de F es no vacío. Para ello, sea $y \in H_F^{-1}(0)$ y consideremos la sucesión $\{f^n(y)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Por ser $H_F^{-1}(0)$ compacto, $\{f^n(y)\}$ tiene una subsucesión convergente, llamemosle x al límite de ésta. Entonces, $x \in \Omega(F)$ por lo que el conjunto no errante de F es no vacío. Ahora, aplicando el Teorema 1.2, concluímos que $Fix(F) \neq \emptyset$.

$\square$

Ahora estamos en condiciones de probar el Teorema 0.36 para el caso en que f preserva orientación:

Teorema. 1.12 *Sea $f : A \to A$ un mapa de recubrimiento que preserva orientación de grado d con $|d| > 1$. Si existe un compacto, conexo y esencial K tal que $f(K) \subset K$ entonces f es completa.*

Dem. Por el Corolario 0.35, basta probar que para todo n entero positivo, todo levantado de f^n tiene un punto fijo. Para ello, observemos que para cualquier n entero positivo, f^n está en las hipótesis de el Corolario 1.11. Para probar esto, es suficiente con observar que K es f^n-invariante. Esto nos garantiza que para cada n entero positivo podemos aplicar el Corolario 1.11 y concluir que todo levantado de f^n tiene un punto fijo. Luego, f es completa.

$\square$

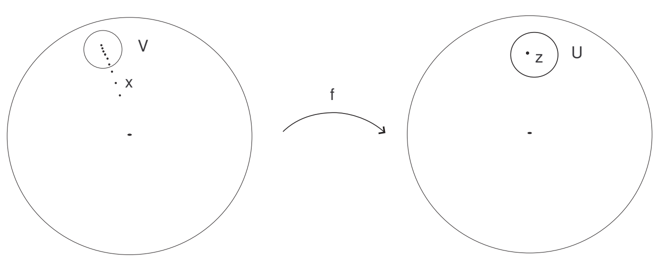
4.2. Caso 2: f revierte orientación

Para probar este caso lo primero que haremos es ver que si f revierte orientación entonces o bien f deja fijos los bordes de A o bien f los intercambia. Formalmente, si llamamos $B_0 = S^1 \times \{0\}$ y $B_1 = S^1 \times \{1\}$, lo que queremos ver es que para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que tienda a B_0 y para toda sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que tienda a B_1 o bien $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a B_0 y $\{f(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a B_1, o bien $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a B_1 y $\{f(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a B_0. Ésta será nuestra primera proposición y nos resultará de utilidad para poder reducir las restantes pruebas a solamente estos dos casos.

Proposición. 2.1 *Sea $f : A \to A$ un mapa de recubrimiento. Entonces o bien f deja fijos los bordes de A o bien f los intercambia.*

Dem. Primero veamos que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a B_i con $i = 0$ ó 1 entonces $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a B_j con $j = 0$ ó 1, es decir, que si tomamos una sucesión que tiende al borde, su imagen tiende al borde.

Supongamos por absurdo que existe una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que llamaremos $\{x_{n_k}\}_{n_k\in\mathbb{N}}$ tal que $lim_n f(x_{n_k}) = z \in A$. Como f es un mapa de recubrimiento, existe un entorno U de z tal que $f^{-1}(U)$ es unión disjunta de abiertos $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ y $f|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$ es un homeomorfismo. De estos abiertos preimágenes de U, elegimos aquel V para el cual $x_{n_k} \in V$ para todo n_k mayor a cierto $N \in \mathbb{N}$.



Podemos achicar U y V de forma que la distancia entre V y el borde de A sea positiva y, como $f : V \to U$ es un homeomorfismo, esto significa que $\{x_{n_k}\}_{n_k\in\mathbb{N}}$ no tiende al borde, lo cual es absurdo. Por tanto, $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a B_j con $j = 0$ ó 1.

Ahora bien, probemos que si tenemos dos sucesiones que tienden al mismo borde, sus imágenes también tienen que tender al mismo borde. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tienden a B_1. Por absurdo, supongamos que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a B_0 y $\{f(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a B_1. Consideremos el subconjunto del anillo $S^1 \times \{1/2\}$. Como $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a B_0 y $\{f(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a B_1 podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, 1/2) \times S^1$ y $\{f(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (1/2, 1) \times S^1$.

Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos un arco α_n en A que una x_n con y_n y tal que $d(\alpha_n, B_1) \leq mx\{d(x_n, B_1), d(y_n, B_1)\}$. La curva $f(\alpha_n)$ intersecta al subconjunto $S^1 \times \{1/2\}$ ya que une $f(x_n)$ con $f(y_n)$. Llamemos z_n de α_n tal que $f(z_n)$ pertenece a $S^1 \times \{1/2\}$.

Observemos que $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a B_1 y $f(z_n)$ pertenece a $S^1 \times \{1/2\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, tiene una subsucesión convergente y ésta debe converger a un punto de $S^1 \times \{1/2\}$. Esto es absurdo por lo primero que probamos. Luego concluímos que si tenemos dos sucesiones que tienden al mismo borde, sus imágenes también tienen que tender al mismo borde.

□

Antes de comenzar la prueba de el Teorema 0.36 para el caso en que f revierte orientación, debemos ver algunos resultados previos. En primer lugar, veremos un lema de extensión que nos permitirá modificar los mapas del anillo abierto para convertirlos en mapas del anillo cerrado. Previo a este lema, necesitamos el siguiente resultado preliminar:

Teorema. 2.2 (Teorema de Jordan-Schönflies) *Fijada una curva cerrada simple del plano, existe un homeomorfismo del plano en sí mismo de modo que la imagen de dicha curva sea S^1 y que el interior de la misma se mapee en el interior de S^1.*

Observemos que, componiendo homeomorfismos, mediante el Teorema de Jordan-Schönflies, podemos concluir que el dadas dos curvas cerradas simples en el plano, podemos encontrar un homeomorfismo del plano que lleve una en la otra y que lleve el interior de una en el interior de la otra.

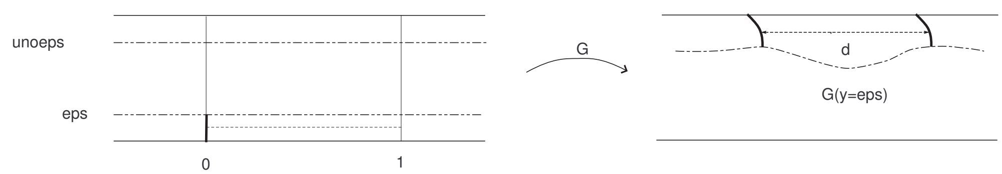
Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente lema de extensión:

Lema 2.3 *Sea $f : A \to A$ un mapa de recubrimiento y $K \subset A$ un subconjunto compacto. Entonces, existe $f' : \bar{A} \to \bar{A}$ mapa de recubrimiento tal que $f' = f$ en K y $f'|_{\partial A} = z^d$ siendo d el grado de f.*

Dem. Haremos la prueba para el caso en que f intercambia los bordes de A. El caso en que f deja fijos los bordes se prueba con la misma técnica. Construíremos un homeomorfismo F' en la clausura de $\tilde{A}$ de forma que al proyectarlo obtengamos

f' como en la tesis. Sea F un levantado de f y $\tilde{K} = \pi^{-1}(K)$. Consideremos $V_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, 1) : \varepsilon < y < 1 - \varepsilon\}$ siendo $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ de forma que V_ε resulte un entorno de $\tilde{K}$.

Definimos $F' = F$ en $\overline{V_\varepsilon}$ y $F'(x, y) = (dx, 1 - y)$ en $y = 0$ e $y = 1$, siendo d el grado de f. Dado que queremos construir F' como un mapa de recubrimiento, deberá ser $F'(x+1, y) = F'(x, y) + d$ por lo que basta definir F' en los rectángulo $R_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \varepsilon\}$ y $R_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - \varepsilon\}$. Definiremos F' en R_1 siendo la otra construcción análoga. Procederemos definiendo primeramente F' en los bordes de R_1. Observemos que en $y = 0$ e $y = \varepsilon$ ya la tenemos definida. Ahora consideremos una curva α simple que una $F'(0, 0)$ con $F'(0, \varepsilon)$ y que no intersecte $F'(y = \varepsilon)$. Definamos F' en $(0, y)$ con $0 \leq y \leq \varepsilon$ mediante un homeomorfismo entre este segmento y la curva α. Para definir F' en $x = 1$ y $0 \leq y \leq \varepsilon$ basta imponer que $F'(x + 1, y) = F'(x, y) + d$.



Ahora bien, tenemos definida la imagen del borde de R_1, que es una curva cerrada, como otra curva cerrada que llamaremos β. Por el Teorema 2.2, podemos extender F' al interior de R_1 de forma que sea un homeomorfismo que manda el interior de R_1 en el interior de β.

De esta forma, construímos F' un homeomorfismo de la clausura de $\tilde{A}$ en sí misma. Proyectando F' obtenemos el mapa de recubrimiento $f' : \bar{A} \to \bar{A}$ deseado. $\square$

Este lema nos permite modificar cada mapa de recubrimiento f en A de forma tal que podamos extenderlo a su clausura. Para realizar la prueba del caso en que f revierte orientación, deberemos también compactificar $\mathbb{R} \times [0, 1]$ y modificar los levantados para tenerlos definidos en la compactificación.

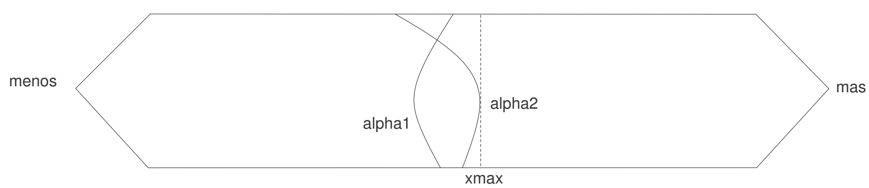
Para compactificar $\mathbb{R} \times [0, 1]$, agregamos dos puntos: $+\infty$ y $-\infty$. Para definir bases de los entornos de $+\infty$ y $-\infty$, observemos que dada una curva simple α en $\mathbb{R} \times [0, 1]$ que conecta $\mathbb{R} \times \{0\}$ con $\mathbb{R} \times \{1\}$ ésta divide la banda en dos componentes, una a la izquierda y otra a la derecha. Si consideramos todas las curvas que verifican lo anterior, la base de los entornos de $-\infty$ estará formada las regiones que queden a la izquierda de estas curvas y la base de los entornos de $+\infty$ estará formada por las regiones que queden a la derecha. Llamemos $E_{-\infty}$ y $E_{+\infty}$ a las bases de los entornos de $-\infty$ y $+\infty$ respectivamente.

Probemos que una base de la topología en $\mathbb{R} \times [0,1] \cup \{+\infty, -\infty\}$ es $B = B' \cup E_{-\infty} \cup E_{+\infty}$ donde B' denota la base de la topología usual de $\mathbb{R} \times [0,1]$.

Para ello, sean A_1 y A_2 elementos de B y sea $x \in A_1 \cap A_2$. Debemos probar que existe $A_3 \in B$ tal que $x \in A_3$ y $A_3 \subset A_1 \cap A_2$. Discutiremos según x:

- Si $x \in \mathbb{R} \times [0,1]$, observemos que cualquiera sean A_1 y A_2, su intersección $A_1 \cap A_2$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R} \times [0,1]$ por lo que, dado $x \in A_1 \cap A_2$, x es interior, lo que significa que existe una bola centrada en x que está contenida en $A_1 \cap A_2$, lo que concluye la prueba en este caso.

- Si $x = +\infty$, observemos que la única forma en que $x \in A_1 \cap A_2$ es que $A_1, A_2 \in E_{+\infty}$. Por tanto, existen α_1 y α_2 tales que A_1 es la región que queda a la derecha de α_1 y A_2 es la región que queda a la derecha de α_2. Si proyectamos estas curvas a $\mathbb{R} \times \{0\}$, obtenemos un valor máximo x_{max}:

  Definiendo A_3 como la región que queda a la derecha de la curva $\alpha_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [0,1] : x = x_{max}\}$, obtenemos el resultado deseado.

- Si $x = -\infty$, procedemos de igual forma que el caso anterior.

El borde de la compactificación de $\mathbb{R} \times [0,1]$ es una curva cerrada simple que podemos pensar como S^1 en virtud de el Teorema 2.2.

Para probar el caso en que f revierte orientación, haremos uso del siguiente teorema de punto fijo:

Teorema. 2.4 (Teorema de Kuperberg) *Si F es un homeomorfismo del plano en sí mismo que revierte orientación y C es un continuo F- invariante, entonces F tiene un punto fijo en C.*

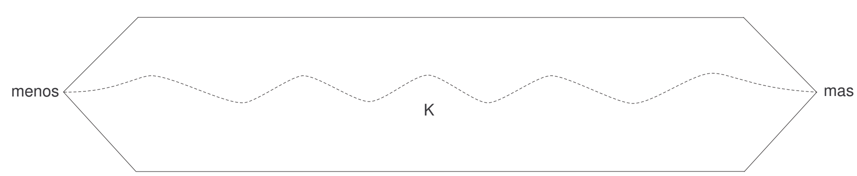
Pero para hacer uso de este teorema debemos modificar los levantados de f de forma de extenderlos a todo el plano. Como ya vimos, podemos modificarlos y extenderlos al disco unitario. Para extender un homeomorfismo $F : D_1 \to D_1$, donde D_1 denota el disco unitario, con $F(\partial D_1) = \partial D_1$ a un homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ usemos coordenadas polares: supongamos que $F : D_1 \to D_1$ está dada por $F(r, \theta) = (F_1(r, \theta), F_2(r, \theta))$. Como $F(\partial D_1) = \partial D_1$, si $(r, \theta) \in \partial D_1$ entonces $r = 1$ y podemos escribir $F(r, \theta) = (r, F_2(\theta))$. Queremos definir $F' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de forma que $F'|_{D_1} = F$. Para ello, lo que haremos es definir F' en los puntos con $r > 1$. Estos puntos los podemos escribir como kr donde $r = 1$ y $k \in \mathbb{R}$ con $k > 1$, luego, basta con definir $F'(kr, \theta) = (kr, F_2(\theta))$.

Lema 2.5 *Sea $f : A \to A$ un mapa de recubrimiento que revierte orientación de grado d con $|d| > 1$ y sea K un continuo esencial f-invariante. Entonces, todo levantado de f al recubrimiento universal tiene un punto fijo.*

Dem. En virtud de la Porposición 2.1, tenemos sólo dos casos posibles:

(I) f **deja fijos los bordes de** A**.**

Notar que en este caso, como f fija los bordes y revierte orientación, $F(+\infty) = -\infty$ y $F(-\infty) = +\infty$. Sea F un levantado de f. Por el Lema 2.3 podemos modificar F fuera de $\pi^{-1}(K)$ de forma de obtener un mapa, que también denotaremos por F, que se extienda a la clausura del recubrimiento universal de A, $\mathbb{R} \times [0, 1]$. A su vez, esta extensión induce un homeomorfismo a la compactificación de $\mathbb{R} \times [0, 1]$ de forma que $F(+\infty) = -\infty$ y $F(-\infty) = +\infty$. Ahora procedemos a extender este homeomorfismo a todo el plano y aplicamos el Teorema 2.4 donde el continuo invariante es $\pi^{-1}(K) \cup \{+\infty, -\infty\}$. Luego, F tiene un punto fijo en $\pi^{-1}(K) \cup \{+\infty, -\infty\}$ que deberá pertenecer a $\pi^{-1}(K)$ dado que $F(+\infty) = -\infty$ y $F(-\infty) = +\infty$.

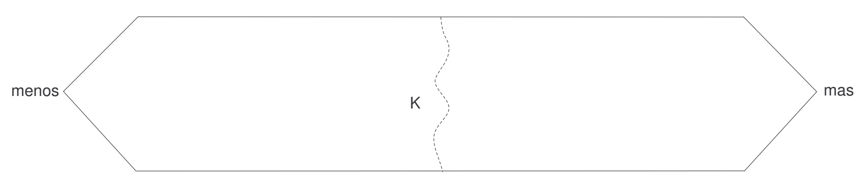


(II) f **intercambia los bordes de** A**.**

Para realizar la demostración de este caso, haremos uso de la siguiente definición:

Definición. 2.6 *Llamaremos conector a un continuo* K_1 *no esencial del anillo cerrado que conecta ambos bordes y tal que* $f(K_1) \subset K_1$

Notar que en este caso, como f intercambia los bordes y revierte orientación, $F(+\infty) = +\infty$ y $F(-\infty) = -\infty$. Sea F un levantado de f. Como f intercambia los bordes existe $\varepsilon > 0$ tal que f no tiene puntos fijos en $(0, \varepsilon) \times S^1 \cup (1 - \varepsilon, 1 \times S^1)$, luego, aplicando el Lema 2.3 podemos modificar el mapa f de forma que se extienda al anillo cerrado sin modificar el conjunto de puntos fijos de f. Utilizaremos el Lema 5 de [IPRX] que afirma que f tiene un conector invariante, que llamaremos K_1, y más aún, si consideramos h la proyección de la semiconjugada de F, todas las preimagenes de los puntos fijos de m_d por h contienen un conector invariante. Esto nos garantiza que, cualquiera sea el levantado F que elegimos, siempre habrá un conector $\widehat{K_1}$ que quede invariante por F. Una vez obtenido el conector invariante, extendemos F a un homeomorfismo del plano y aplicamos el Teorema 2.4 donde el continuo invariante es el conector $\widehat{K_1}$ que queda invariante por F. Luego, F tiene un punto fijo en $\widehat{K_1}$. Para ver que este punto fijo no está en $\widehat{K_1} \cap (\mathbb{R} \times \{1\})$ o en $\widehat{K_1} \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$, basta observar que, como f intercambia los bordes de A, $F(\mathbb{R} \times \{0\}) = \mathbb{R} \times \{1\}$ y $F(\mathbb{R} \times \{1\}) = \mathbb{R} \times \{0\}$.



□

Ahora estamos en condiciones de probar el Teorema 0.36 para el caso en que f revierte orientación:

Teorema. 2.7 *Sea $f : A \to A$ un mapa de recubrimiento que revierte orientación de grado d con $|d| > 1$. Si existe un continuo esencial K tal que $f(K) \subset K$ entonces f es completa.*

Dem. Por el Corolario 0.35, basta probar que para todo n entero positivo, todo levantado de f^n tiene un punto fijo. Para ello, observemos que si n es par, f^n está en las hipótesis de el Corolario 1.11 y por tanto, todo levantado de f^n tiene un punto fijo. Para las potencias impares, aplicamos el Lema 2.5 y concluímos que todo levantado de f^n, con n impar, tiene un punto fijo. Luego, f es completa.

□

Capítulo 5

Ubicación de los puntos periódicos

El objetivo de esta sección es el de obtener información acerca de la ubicación de los puntos periódicos cuya existencia fue probada en el capítulo anterior. El resultado fundamental que probaremos a lo largo del capítulo es el Teorema 0.10. Pero antes de enunciarlo, procedamos a definir el relleno de un conjunto.

Definición. 0.8 *Un subconjunto* $S \subset A$ *se dice no acotado si* $\overline{S} \cap \partial\overline{A} = \emptyset$ *donde* $\overline{S}$ *denota la clausura de* S *y* $\partial\overline{A}$ *denota el borde de la clausura de* A*.*

Definición. 0.9 *Llamaremos relleno de un conjunto* $K \subset A$ *al conjunto* $Fill(K)$ *dado por la unión de* K *y las componentes conexas acotadas de* $A \setminus K$*.*

Teorema. 0.10 *Sea* $f : A \to A$ *un mapa de recubrimiento de grado* d *con* $|d| > 1$*. Si existe un continuo esencial* $K \subset A$ *tal que* $f(K) \subset K$ *entonces existe un representante* $x \in Fill(K)$ *de cada clase de Nielsen de puntos periódicos.*

Recordemos que bajo estas hipótesis, aplicando el Teorema 0.36, tenemos garantizada la completitud de f.

Si llamamos $\hat{K} = \pi^{-1}(Fill(K))$, entonces para probar el Teorema 0.10 basta con probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, F^n tiene un punto fijo en $\hat{K}$. Para ello, probaremos el siguiente Lema que al aplicarlo a F^n para cada $n \in \mathbb{N}$ nos permite concluir la prueba de el Teorema 0.10.

Lema 0.11 *Sea $f : A \to A$ un mapa de recubrimiento de grado d con $|d| > 1$ y sea K un continuo esencial tal que $f(K) \subset K$. Entonces, todo levantado de f al recubrimiento universal tiene un punto fijo en $\hat{K}$.*

Dem. Dividiremos esta demostración en tres casos:

- Caso 1: f preserva orientación.

  Sea F un levantado de f y $H_F : \hat{K} \to \mathbb{R}$ el mapa de el Lema 1.5. Recordemos que, en virtud de el Lema 1.10, $K_0 = H_F^{-1}(0)$ verifica: $K_0 \neq \emptyset$, $K_0 \subset \hat{K}$, K_0 es compacto y $F(K_0) \subset K_0$. Supongamos por absurdo que $Fix(F) \cap \hat{K} = \emptyset$.

  Llamemos D a la compactificación de $\mathbb{R} \times [0, 1]$ con dos puntos: $+\infty$ y $-\infty$ y sea K' la clausura de $\hat{K}$ en D, observemos que K' es un subconjunto conexo de D. Por el Lema 2.3, podemos modificar F fuera de $\hat{K}$ de forma que se extienda al borde de D. Para simplificar la notación, seguiremos llamando F a este mapa.

  Llamemos P al conjunto de puntos fijos de F en el interior de D. Este conjunto no acumula en $+\infty$ ni en $-\infty$ ya que $F(x + 1, y) = F(x, y) + d$.

  Como por absurdo supusimos que $Fix(F) \cap \hat{K} = \emptyset$, hay una componente conexa de $D \setminus P$ que contiene a K', la llamaremos U. Observemos que U es F-invariante y consideremos $(\mathbb{R}^2, p)$ el recubrimiento universal de U. Probemos que existe $\tilde{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un levantado de $F|_U$ que tiene un compacto invariante. Para ello, consideremos $V \subset U$ un entorno conexo y simplemente conexo de K'. Cada componente conexa de $p^{-1}(V)$ se mapea homeomórficamente en V y dentro de cada una de estas componentes conexas hay una componente conexa de $p^{-1}(K')$. Fijemos una de estas componentes conexas K'' y tomemos $\tilde{F}$ de forma que $\tilde{F}(K'') \subset K''$. Ahora basta con observar que $p^{-1}(H_F^{-1}(0)) \cap K''$ es F- invariante y compacto. Aplicando el Teorema de Brouwer 1.2, $\tilde{F}$ debe tener un punto fijo en el interior de $\tilde{U}$ lo cual es absurdo pues supusimos que no había puntos fijos en el interior de U.

  Concluimos entonces que F tiene un punto fijo en $\hat{K}$.

- Caso 2: f revierte orientación y fija los bordes de A.

  Observemos que, al realizar la prueba de el Lema 2.5, probamos que todo levantado de f tiene un punto fijo en $\hat{K}$.

- Caso 3: f revierte orientación e intercambia los bordes de A.

Sea F un levantado de f y sean U_1 y U_2 las componentes conexas de $\tilde{A} \setminus \tilde{K}$. Como f intercambia los bordes y $\tilde{K}$ es F- invariante, se tiene que $F(U_i) \cap U_i = \emptyset$ para $i = 1, 2$. Luego, $Fix(F) \subset \tilde{K}$. Por el Teorema 0.36, sabemos que $Fix(F) \neq \emptyset$, por tanto, F tiene un punto fijo en $\tilde{K}$.

□

Capítulo 6

Ejemplos

El objetivo de este capítulo es presentar ejemplos acerca de lo que ocurre si levantamos ciertas hipótesis de los resultados que hemos probado.

Ejemplo 1:

En este ejemplo construiremos un mapa de recubrimiento $f : (0, +\infty) \times S^1 \to (0, +\infty) \times S^1$ de grado 2 con un compacto K tal que $f(K) = K$ sin puntos fijos. Recordemos el Teorema 0.36 en virtud del cual, para hacer esta construcción deberemos pensar en un compacto no esencial y/o no conexo.

Cabe notar que en este caso trabajaremos con el anillo como $(0, +\infty) \times S^1$ en lugar de $(0, 1) \times S^1$ como se venía haciendo.

Nuestro recubrimiento $f : (0, +\infty) \times S^1 \to (0, +\infty) \times S^1$ será de la forma $f(r, \theta) = (\phi(r, \theta), g(\theta))$. La construcción de f, por tanto, consistirá en definir g y ϕ.

Comenzaremos construyendo un mapa g de recubrimiento de S^1 de grado 2. Para ello, consideremos un homeomorfismo de Denjoy $h_1 : S^1 \to S^1$ con intervalo errante I. Para que el recubrimiento efectivamente sea de grado 2, debemos definir otro mapa: sea $I_0 \subset I$ un intervalo abierto y definamos $h_2 : I \to S^1$ de forma que h_2 sea creciente, $h_2|_{I \setminus I_0} = h_1$ y $h_2(I_0) = S^1$.

Sea entonces $g : S^1 \to S^1$ dada por $g(x) = \begin{cases} h_1(x) & si \quad x \notin I \\ \\ h_2(x) & si \quad x \in I \end{cases}$

Notemos que g (ver Figura 6.1) es un mapa de recubrimiento de S^1, es de grado 2 en virtud de que h_1 es un homeomorfismo y $h_2(I_0) = S^1$ y que $h_1(I)$ es un intervalo errante de g pues $h_1(I) \cap I = \emptyset$ y, fuera de I, $g = h_1$ que, recordemos,

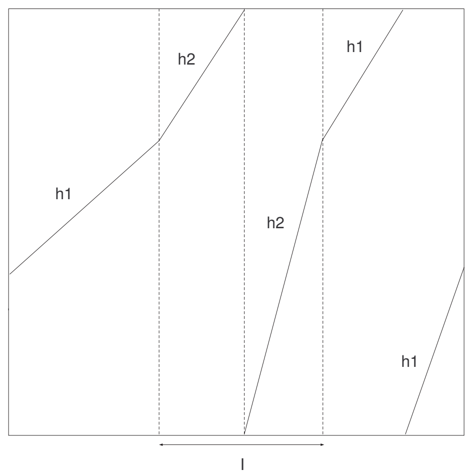


Figura 6.1: Gráfica de g.

es un homeomorfismo de Denjoy con intervalo errante I. Además, si $x_0 \in h_1(I)$ entonces el conjunto K_1 de puntos de acumulación de $\{g^n(x_0) : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto compacto, g-invariante y tal que $K_1 \cap Per(g) = \emptyset$.

Ahora procedamos en la construcción de ϕ. Para ello, consideremos $\psi : S^1 \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(\theta) = dist(\theta, K_1)$ y $\varphi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ como en la Figura 6.2.

Luego, definamos $\phi : (0, +\infty) \times S^1 \to (0, +\infty)$ por $\phi(r, \theta) = \varphi(r) + r\psi(\theta)$.

Ahora tenemos definida f. Observemos que $K = \{1\} \times K_1$ es compacto y verifica $f(K) = K$, en efecto, si $(1, x) \in K$, entonces $g(x) \in K_1$ por ser K_1 g-invariante y $\phi(1, x) = 1$ ya que $\varphi(1) = 1$ y $\psi(x) = 0$. Además f verifica que $Per(f) = \emptyset$, en efecto, basta notar que si $r \neq 1$, $\varphi(r) > r$ y $dist(\theta, K_1) > 0$ si $\theta \notin K_1$, luego, si $(r, \theta) \in Per(f)$, para ser ϕ-periódico debe ser $r = 1$ y $\theta \in K_1$ pero si $\theta \in K_1$, θ no puede ser g-periódico ya que $Per(g) \cap K_1 = \emptyset$. ·

Ejemplo 2:

En este ejemplo construiremos una función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\Omega(F) \neq \emptyset$ pero $Per(F) = \emptyset$. Recordando el Teorema 1.2, observemos que F no podrá ser un homeomorfismo.

Sea $g : S^1 \to S^1$ el mapa de recubrimiento de S^1 construído en el ejemplo anterior y K el compacto tal que $g(K) \subset K$ y $K \cap Per(g) = \emptyset$.

Existe h_1 semiconjugada creciente entre g y q siendo $q(z) = z^2$. En otras palabras, existe h_1 creciente y sobreyectiva que verifica $h_1 g = q h_1$. Para ver la

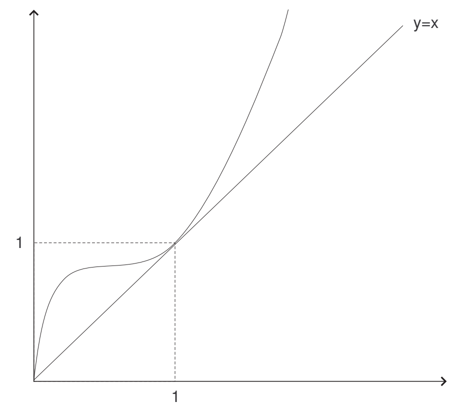


Figura 6.2: Gráfica de φ.

prueba de existencia, se puede consultar [IPRX].

Luego, $h_1(K)$ es compacto por ser K compacto y h_1 continua. Por otro lado, $h_1(K)$ es q-invariante ya que $q(h_1(K)) = h_1(g(K)) \subset h_1(K)$ donde, para obtener la última igualdad, usamos que $g(K) \subset K$.

Además, se cumple que $Per(q) \cap h_1(K) = \emptyset$, en efecto, supongamos por absurdo que existe $x \in K$ tal que $h_1(x) \in Per(q)$, luego, para cierto $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $q^n(h_1(x)) = h_1(x)$. Usando que $qh_1 = h_1 g$, obtenemos que $h_1 g^n(x) = h_1(x)$. Tomando preimagen a través de h_1 a ambos lados y usando que h_1 es creciente, $h_1^{-1}h_1 g^n(x) = h_1^{-1}h_1(x)$ es un intervalo J que debe cumplir $g^n(J) \subset J$. Consideremos ahora $z \in K \setminus \{g^k(J) \text{ con } k = 1, \ldots, n-1\}$, observemos que tal z debe existir pues $\{g^k(J) \text{ con } k = 1, \ldots, n-1\} \subsetneq S^1$ ya que en caso contrario, h_1 no sería sobreyectiva. Luego, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ e $y \in J$ tal que $|g^N(y) - z| < \varepsilon$. Por tanto, tomando ε menor a la distancia entre z y $\{g^k(J) \text{ con } k = 1, \ldots, n-1\}$, llegamos a un absurdo.

Ahora consideremos los mapas $h_2 : S^1 \to [-2, 2]$, $h_2(z) = z + \frac{1}{z}$ y $p : [-2, 2] \to [-2, 2]$, $p(z) = z^2 - 2$. Observemos que, si escribimos $z = e^{i\theta}$, obtenemos que:

$$h_2(z) = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2cos(\theta).$$

Por tanto, h_2 es continua y sobreyectiva. Además, $h_2 q = p h_2$, en efecto,

$$h_2(q(z)) = h_2(z^2) = z^2 + \frac{1}{z^2} = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2 - 2 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 = p(z + \frac{1}{z}) = p(h_2(z)).$$

Por otra parte, si definimos $K_1 = h_2(h_1(K))$, tenemos que K_1 es compacto por ser imagen a través de funciones continuas de un compacto, $p(K_1) \subset K_1$ ya que $p(h_2(h_1(K)) = h_2(q(h_1(K)) = h_2(h_1(K))$ donde para obtener la última igualdad usamos que $h_1(K)$ es q-invariante. A su vez, $Per(p) \cap K_1 = \emptyset$, en efecto, supongamos por absurdo que existe $x \in K_1$ tal que $p^n(x) = x$, luego, existe $y \in K$ tal que $p^n(h_2(h_1(y))) = h_2(h_1(y))$. Usando que $ph_2 = h_2q$, la igualdad anterior se puede reescribir como $h_2(q^n(h_1(y))) = h_2(h_1(y))$. Luego, tomando preimagen por h_2 del conjunto $\{h_2(h_1(y)), h_2(q(h_1(y))), \cdots, h_2(q^n(h_1(y)))\}$ obtenemos un conjunto de $2n$ puntos ya que cada punto tiene, por h_2 dos preimágenes. Observemos que en este conjunto tenemos incluídos a los puntos $h_1(y), q(h_1(y)), \cdots, q^n(h_1(y))$. Ahora bien, como el conjunto $\{h_2(h_1(y)), h_2(q(h_1(y))), \cdots, h_2(q^n(h_1(y)))\}$ constituye una órbita de orden n , en la preimagen de este conjunto debemos tener órbitas lo cual es absurdo pues $h_1(K)$ es q-invariante y $Per(q) \cap h_1(K) = \emptyset$.

Ahora bien, definiremos $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como $F(x, y) = (f(x), \phi(x, y))$ donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es como en la Figura 6.3 , de forma tal que $f|_{[-2,2]} = z^2 - 2$ y $\phi(x, y) = \varphi(y) + dist(x, K_1)$ donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es como en la Figura 6.3.

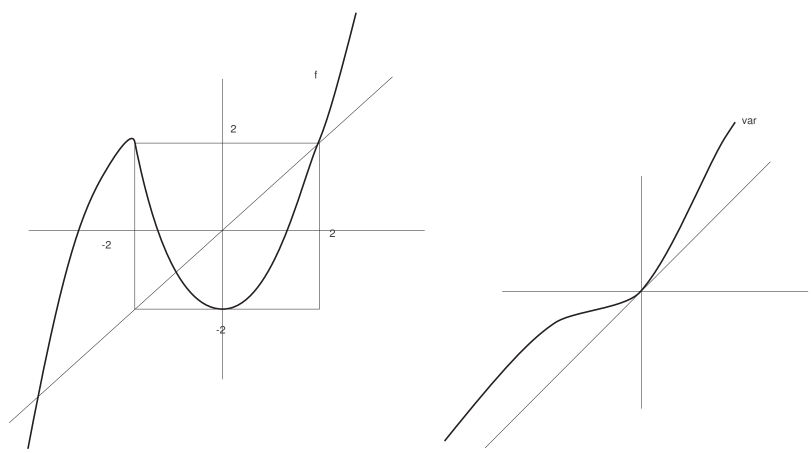


Figura 6.3: Gráfica de f y de φ.

Observemos que $K_2 = K_1 \times \{0\}$ es compacto y F-invariante, por lo tanto, $\Omega(F) \neq \emptyset$. Sin embargo, $Per(F) = \emptyset$. En efecto, basta notar que si $y \neq 0$, $\varphi(y) > y$ y $dist(x, K_1) > 0$ si $x \notin K_1$ luego, si $(x, y) \in Per(F)$, para ser ϕ-periódico debe ser $y = 0$ y $x \in K_1$ pero si $x \in K_1$, x no puede ser f-periódico ya que $Per(p) \cap K_1 = \emptyset$.

Bibliografía

[Be] H. Bell. A fixed point theorem for planar homeomorphisms. Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976), 778-780.

[Brou] L.E.J. Brouwer. Beweis des ebenen Translationssatzes. Math. Ann. 72,37-54, 1912.

[Brow] M. Brown. A short proof of the Cartwright-Littlewood fixed point Theorem. Proc. Amer. Math. Soc. 65 (1977), 372.

[CL] M. Cartwright, J. Littlewood. Some fixed points theorems.Ann. of Math. 54 (1951), 1-37.

[H] A. Hatcher. Algebraic Topology. Cornell University, 3rd Edition.

[IPRX] J. Iglesias, A. Portela, A. Rovella. and J. Xavier. Dynamics of covering maps of the annulus I: Semiconjugacies. http://arxiv.org/pdf/1402.2317.pdf.

[J] B. Jiang. A primer of Nielsen Fixed Point Theory. Handbook of Topologiocal Fixed Point Theory, Springer 2005.

[K] K. Kuperberg. Fixed points of orientation reversing homeomorphisms of the plane. Proc. Am. Math.Soc. , 112, (1991), 223-229.