Un Modelo de ZFC en Teoría de Topos

Luis Rosa Ferrari
Orientador: Walter Ferrer
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

29 de Septiembre de 2016

Índice general

Introducción

La teoría de categorías es una rama de la matemática que estudia las clases formadas por dos nociones no definidas de *objeto* y *morfismo* con una estructura similar. Pocos año después de su invención a mediados de los años 50 del siglo pasado matemáticos como Lawvere comenzaron a estudiar la posibilidad de fundamentar la matemática mediante esta teoría, surgiendo con este programa una alternativa a la fundamentación clásica vía teoría de conjuntos. Una de las diferencias fundamentales de la teoría de categorías con respecto a la teoría de conjuntos es la ausencia del concepto de pertenencia como noción fundamental. En este trabajo presentaremos una axiomática de primer orden para la teoría general de categorías, luego presentaremos una axiomática de primer orden para un tipo particular de categoría llamada Topos, y asumiendo la consistencia de esta teoría construiremos un modelo de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, recíprocamente asumiendo la consistencia de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, construiremos un modelo de la teoría de topos, estos resultados pretenden mostrar la plausibilidad de la tesis que afirma la "equivalencia fundacional" entre la teoría de conjuntos y la teoría de categorías.

Salvo la parte de la axiomática de la teoría de conjuntos, los dos primeros capítulos pueden ser omitidos si el lector esta familiarizado con los rudimentos básicos de la teoría de conjuntos y la teoría de modelos.

Capítulo 1

Teoría de Conjuntos

1.1. Lenguaje de primer orden para la teoría de conjuntos ZF

Sea L_{set} un lenguaje lógico de primer orden formado por las siguientes condiciones:

variables x_1, x_2 . . . x_n para cada i número natural.

símbolos lógicos $\neg$, $\wedge$, $=$

símbolo cuantificacional $\forall$

predicado binario $\in$

Definición 1.1 ***fórmulas*** *Definimos inductivamente el conjuntos de las formulas de* L_{set}*:*

1. $(x_i = x_j)$ *es una fórmula para toda variable* x_i, x_j.

2. $(x_i \in x_j)$ *es una fórmula para toda variable* x_i, x_j.

3. φ *es una fórmula entonces* $(\neg\varphi)$ *es una fórmula.*

4. *si* φ_1 *y* φ_2 *son fórmulas entonces* $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ *es una fórmula.*

5. *si* φ *es una fórmula, y* x *una variable, entonces* $(\forall x\varphi)$ *es una fórmula.*

1.2. Axiomas de ZFC

Definición 1.2 ***Axiomas Z***

1. ***Axioma de existencia***
   $\exists x(x = x)$.

2. ***Axioma de extensionalidad***
   $\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$.

3. ***Axioma esquema de comprensión***
   Para cada fórmula φ *tal que* $FV(\varphi) = \{x, w_1, ...w_n\}$,
   $\forall z \forall w_1....w_n \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi)$.

4. ***Axioma de par***
   $\forall x \forall y \exists z(x \in z \wedge y \in z)$.

5. ***Axioma de la unión***
   $\forall z \exists w \forall y \forall x((x \in y \wedge y \in z) \rightarrow x \in w))$.

6. ***Axioma esquema de reemplazo***
   Para cada fórmula φ *tal que* $FV(\varphi) = \{x, y, w_1, \ldots .w_n\}$,
   $\forall w_1 \ldots w_n(\forall x \forall y \forall z(\varphi(x, y, \vec{w}) \wedge \varphi(x, z, \vec{w}) \rightarrow y = z) \rightarrow \forall t \exists u \forall v(v \in u \leftrightarrow \exists s(s \in t \wedge \varphi(s, v, \vec{w})))$.

7. ***Axioma de la potencia*** $\forall x \exists y \forall z(z \subset x \rightarrow z \in y)$.

8. ***Axioma de fundación*** $\forall x(\exists y(y \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg \exists z(z \in x \wedge z \in y)))$.

Teorema 1.1 *El Axioma de reemplazo implica el axioma de comprensión.*

Demostración 1.1.1 *Sea* $\varphi(x, \vec{w})$ *como en la hipótesis del axioma de comprensión, consideremos la siguiente fórmula* $\psi(x, y, \vec{w}) = (x = y) \wedge \varphi(x, \vec{w})$, *es claro que* $\forall \vec{w} \forall x \forall y \forall z(\psi(x, y, \vec{w}) \wedge \varphi(x, z, \vec{w}) \rightarrow y = z)$, *entonces por el axioma de reemplazo* $\forall t \exists u \forall v(v \in u \leftrightarrow \exists(s \in t \wedge s = v \wedge \varphi(s, \vec{w})$, *entonces* $\forall t \exists u \forall v(v \in u \leftrightarrow v \in t \wedge \varphi(v, \vec{w}))$.
□

Definición 1.3 *Sea* $\varphi(x, z, w_1, ..., w_n)$ *fórmula de* $\mathcal{L}_{set}$ *utilizaremos* $\{x \in z : \varphi(x, z, w_1, ..., w_n)\}$ *para referirnos al conjunto definido por el axioma de comprensión.*

Definición 1.4 *Sea* x *conjunto (variable) definimos* $\{x\}$ *como un conjunto que verifica que* $y \in \{x\} \leftrightarrow y = x$.

Observación 1.1 *Para todo conjunto* x *existe* $\{x\}$, *es decir la fórmula* $\forall x(\exists z(\forall y(y \in z \leftrightarrow y = x))$ *es derivable de los axiomas de Z.*

Demostración 1.1.1 *Por el axioma de par sabemos que existe* z *tal que* $x \in z$, *consideremos la fórmula* $\varphi(y, x) \equiv (y = x)$ *entonces por comprensión existe* $\{x\}$ *tal que para todo* y $y \in \{x\}$ *sii* $y \in x \wedge y = x$. □

Proposición 1.1.1 *Para todo x, y conjuntos existe un conjunto $x \cap y$ tal que para todo z $z \in x \cap y$ sii $z \in x \wedge z \in y$.*

Demostración 1.1.1.1 *Simplemente consideramos el conjunto definido por comprensión $\{w \in x : w \in x \wedge w \in y\}$.qed*

Proposición 1.1.2 *Para todo x, y conjuntos existe un conjunto $x \cup y$ tal ue para todo z $z \in x \cup y$ sii $z \in x \vee z \in y$.*

Demostración 1.1.2.1 *Simplemente aplicamos el axioma de la unión al conjunto $\{x, y\}$.$\square$*

Definición 1.5 *Por el axioma de comprensión sabemos que existe un conjunto x tal existe el conjunto $\{y \in x : y \neq y\}$ existe, definimos ϕ como $\phi := \{y \in x : y \neq y\}$.*

Definición 1.6 *Sea x conjunto, definimos $suc(x) := x \cup \{x\}$.*

Definición 1.7 ***Axiomas ZF*** *Los axiomas de ZF son los axiomas de Z mas el axioma siguiente:*
Axioma del infinito $\exists x(\phi \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow suc(y) \in x))$.

1.2.1. Ordenes parciales

Definición 1.8 *Una relación binaria $(<)$ sobre un conjunto P es un orden parcial si verifica:*

i) $x \not< x$ para todo $x \in P$.

ii)$(x < y) \wedge (y < z) \rightarrow x < z$.

En ese caso decimos que $(P, <)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Definición 1.9 *Decimos que $x \leq y$ si $x < y$ o $x = y$.*

Definición 1.10 *Sea $A \subset P$, con P orden parcial, decimos que $x \in A$ es cota superior de A si para todo $a \in A$, $a \leq x$.*

Definición 1.11 *Sea $A \subset P$, con P orden parcial, decimos que $x \in A$ es cota inferior de A si para todo $a \in A$, $x \leq a$.*

Definición 1.12 *Sea $A \subset P$, con P orden parcial, decimos que $a \in A$ es el mínimo de A si para todo $x \in a$ tenemos que $a \leq x$.*

Definición 1.13 *Sea $A \subset P$, con P orden parcial, decimos que $a \in A$ es el máximo de A si para todo $x \in a$ tenemos que $a \geq x$.*

Definición 1.14 *Sea $A \subset P$, con P orden parcial, decimos que A es una cadena en P, si para todo $a, b \in A$, $a \leq b$ o $b \leq a$.*

Definición 1.15 *Sean $(P, <)$, $(Q, <)$ ordenes parciales y $f : P \rightarrow Q$ función, decimos que f preserva el orden si para todo $x, y \in P$ se verifica que $x < y \rightarrow f(x) < f(y)$.*

Definición 1.16 *(*orden lineal*) decimos que* $(P,<)$ *es un orden lineal si es un orden parcial y para todo* $x,y \in P$ *se cumple* $x<y$ *o* $x>y$ *o* $x=y$.

Definición 1.17 *Sea* $(P,<)$, $(Q,<)$ *ordenes parciales, decimos que* $f: P \rightarrow Q$ *es un isomorfismo de orden si* f *preserva el orden y es biyectiva.*

Buen Orden

Definición 1.18 *(*Buen Orden *Sea* $(P,<)$ *orden lineal, decimos que es un buen orden si es un orden lineal y para todo* $A \subset P$, $A \neq \emptyset$ *existe* $m \in A$ *mínimo*

Proposición 1.1.3 *Sea* $W,<)$ *buen orden y* $f: W \rightarrow W$ *creciente, entonces* $f(x) \geq x$ *para todo* $x \in W$.

Demostración 1.1.3.1 *Sea* $A=\{x \in W : f(x)<x\}$. *Si* $A \neq \emptyset$ *entonces existe* $a \in A$ *mínimo entonces* $f(a)<a$ *y como* f *es creciente tenemos que* $f(f(a))<f(a)$ *entonces* $f(a) \in A$ *absurdo.* $\square$

Proposición 1.1.4 *Sea* W *conjunto bien ordenado y* $f: W \rightarrow W$ *isomorfismo, entonces* $f=Id$

Demostración 1.1.4.1 *Por la proposición anterior* $f(x) \geq x$ *entonces* $f^{-1}(f(x) \geq f^{-1}$ *entonces* $x \geqq f^{-1}$, *pero* $f^{-1}(x) \geq x$ *por la proposición anterior entonces* $x=f^{-1}(x)$ *entonces* $x=f(x)$. $\square$

Proposición 1.1.5 *Si* W_1 *y* W_2 *son buenos ordenes isomorfos, entonces el isomorfismo es único.*

Demostración 1.1.5.1 *Sean* $f: W_1 \rightarrow W_2$ *y* $g: W_1 \rightarrow W_2$ *isomorfismos entonces* $g^{-1}.f: W_1 \rightarrow W_2$ *es isomorfismo, entonces por la proposición anterior* $g^{-1}.f=Id$ *entonces* $f=g$.
$\square$

Definición 1.19 *Sea* W *buen orden,* $u \in W$, *definimos el segmento inicial con respecto a* u *como* $W(u)=\{x \in W : x<u\}$

Proposición 1.1.6 *Ningún conjunto bien ordenado es isomorfo a uno de sus segmentos iniciales.*

Demostración 1.1.6.1 *Sea* W *conjunto bien ordenado tal que* $W \cong W(u)$ *con* $u \in W$, *entonces* $Im(f)=\{x \in W : x<u\}$ *entonces* $f(u)<u$ *absurdo.*
$\square$

Teorema 1.2 *Sean* W_1 *y* W_2 *buenos ordenes, entonces vale una y sólo una de las siguientes afirmaciones:*

1. W_1 *es isomorfo a* W_2

2. W_1 *es isomorfo a un segmento inicial de* W_2.

3. W_2 *es isomorfo a un segmento inicial de* W_1.

Demostración 1.2.1 *Sea* $f = \{(x, y) \in W_1 \times W_2 : W_1(x) \cong W_2(y)\}$
f *es inyectiva: Si* $y = y`$ *entonces* $W_2(y) = W_2(y`)$ *entonces* $W_1(x) \cong W_1(x`)$, *pero* $x < x`$ *o* $x > x`$ *o* $x = x`$, *si* $x < x`$ *o* $x > x`$ *tendríamos un buen orden isomorfo a un segmento inicial, entonces* $x = x`$.

f *preserva el orden : Si* $x < x`$ *entonces* $W_1(x) < W_2(x`)$, *pero* $W_1(x) \cong W_2(y)$, $W_1(x`) \cong W_2(y`)$ *entonces* $W_2(y)$ *es isomorfo a un subconjunto de* $W_2(y`)$ *entonces* $y < y`$
Si $W_1 = dom(f)$ *y* $W_2 = im(f)$, *entonces vale el caso 1).*

Si $W_1 \neq dom(f)$ *y* $W_2 \neq im(f)$, *sean* $x_0 = min(W_1 - dom(f)$ *y* $y_0 = min(W_2 - im(f))$ *entonces para todo* $x < x_0$ $x \in dom(f)$, *para todo* $y < y_0$ $y \in im(f)$ *entonces tenemos la función* $f \restriction W_1(x_0) : W_1(x_0) \to W_2(y_0)$ *entonces* $W_1(x_0) \cong W_1(y_0)$ *entonces* $x_0 \in dom(f)$ *entonces si* $W_1 \neq dom(f)$ *entonces* $W_2 = im(f)$.

Si $W_1 \neq dom(f)$, *y* $x_0 = min(W_1 - dom(f)$ *entonces si* $x > x_0$ *entonces* $x \notin dom(f)$, *porque si* $x \in dom(f)$ *entonces existe* y *tal que* $W_1(x) \cong W_2(y)$ *entonces* $W_1(x_0) \hookrightarrow W_2(y)$, *sea* y_0 *el mínimo de* $W_1(y) -$ "$W_1(x_0)$" *entonces* $W_1(x_0) \cong W_1(x_0)$ *absurdo, entonces* $dom(f) \cong W_1(x_0)$, $dom(f) \cong im(f)$ *entonces* $W_1(x_0) \cong W_2)$.

Ídem el otro caso.
□

Axioma de elección(AC) Sea $\{x_i : i \in I\}$, con $I \neq \emptyset$, y $x_i \neq \emptyset$ para todo i, entonces $\prod_{i \in I} x_i \neq \emptyset$.

Definición 1.20 ***Axiomas ZFC*** *Los axiomas de ZFC son los axiomas de ZF mas el axioma de elección.*

1.3. Ordinales

Definición 1.21 *Sea* T *conjunto decimos que es* transitivo *si para todo* $x \in T$ *se cumple que* $x \subset T$.

Definición 1.22 ***(ordinal)*** *Un conjunto* α *es un ordinal si:*

1. α *es transitivo.*

2. α *es un buen orden con la relación de pertenencia* $(\in)$.

Definición 1.23 *Definimos* ON *como la clase de todos los ordinales.*
Si α *y* β *son ordinales y* $\alpha \in \beta$ *lo notaremos* $\alpha < \beta$.

Proposición 1.2.1 1. $\emptyset$ *es un ordinal.*

2. Si α es un ordinal y $\beta \in \alpha$ entonces β es un ordinal.

3. Si $\alpha \neq \beta$ ordinales y $\alpha \subset \beta$ entonces $\alpha \in \beta$.

4. Si α, β ordinales entonces $\alpha \subset \beta$ o $\beta \subset \alpha$.

Demostración 1.2.1.1 *1) $\emptyset$ es claramente transitivo y bien ordenado por la pertenencia.*

2) Si $\beta \in \alpha$ entonces $\beta \subset \alpha$ entonces β es un buen orden.
β transitivo: Sea $\gamma \in \beta$ entonces $\gamma \in \alpha$ entonces $\gamma \subset \alpha$.
Supongamos que $\gamma - \beta \neq \emptyset$, $\gamma - \beta \subset \alpha$ entonces existe $\delta = min(\gamma - \beta)$, como $\delta \in \gamma - \beta$ tenemos que $\delta \notin \beta$ entonces como $\beta, \delta \in \alpha$ y α buen orden $\beta = \delta$ o $\beta \in \delta$
Si $\beta = \gamma$ entonces $\beta \in \gamma \in \beta$ entonces $\{\gamma, \beta\} \subset \alpha$ no tendría mínimo, absurdo.
Si $\beta \in \delta$ entonces $\beta \in \delta \in \gamma \in \beta$ entonces $\{\beta, \delta, \gamma\} \subset \alpha$ no tendría mínimo, absurdo, conclusión $\gamma - \beta = \emptyset$, entonces β es transitivo.

3) Sea $\alpha \subset \beta$ y $\alpha \neq \beta$ entonces α segmento inicial entonces existe $\gamma \in \beta$ tal que $\alpha = \{\zeta \in \beta : \zeta < \gamma\} = \gamma$.

4) Si α y β son ordinales claramente $\alpha \cap \beta$ es un ordinal, además $\alpha \cap \beta \subset \beta$ y $\alpha \cap \beta \subset \alpha$. Si $\alpha \cap \beta \neq \alpha$ y $\alpha \cap \beta \neq \beta$ entonces por la parte 3) $\alpha \cap \beta \in \alpha$ y $\alpha \cap \beta \in \beta$ entonces $\alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta$ absurdo, entonces $\alpha \cap \beta = \alpha$ o $\alpha \cap \beta = \beta$ entonces $\alpha \subset \beta$ o $\beta \subset \alpha$.
□

Proposición 1.2.2 *1. ON es una clase ordenada linealmente por $<$.*

2. Si $\mathcal{A}$ es una clase no vacía de ordinales entonces $\cap\mathcal{A}$ es un ordinal, $\cap\mathcal{A} \in \mathcal{A}$ y además $\cap\mathcal{A}$ es el mínimo de la clase $\mathcal{A}$.

3. Si X es un conjunto de ordinales no vacío, entonces $\cup X$ es un ordinal y $\cup X$ es el supremo de X.

4. Para todo α ordinal tenemos que $\alpha \cup \{\alpha\}$ es un ordinal y además $\alpha \cup \{\alpha\}$ es el ínfimo de $\{\beta : \beta > \alpha\}$.

Demostración 1.2.2.1 *1. Sea α, β ordinales, si $\alpha \neq \beta$ entonces por la parte 4 de la prop anterior tenemos que $\alpha \subset \beta$ o $\beta \subset \alpha$ y por la parte 3 de la prop anterior $\alpha \in \beta$ o $\beta \in \alpha$,entonces es orden total.*
Es un orden transitivo: Si $\alpha \in \beta$ y $\beta \in \gamma$, entonces $\beta \subset \gamma$ entonces $\alpha \in \gamma$.

2. Sea $x \in \cap\mathcal{A}$, entonces $x \in \alpha$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, entonces $x \subset \alpha$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, entonces $x \subset \cap\mathcal{A}$ entonces $\cap\mathcal{A}$ es transitivo, y es un buen orden porque es un subconjunto de un conjunto bien ordenado.
Sea $\alpha \in \mathcal{A}$,entonces $\cap\mathcal{A} \subset \alpha$. Consideremos el conjunto $C = \{\zeta \in \alpha : \zeta \in \mathcal{A}\}$.Si $C = \emptyset$ entonces para todo $\beta \in \mathcal{A}$, $\beta = \alpha$ o $\beta \supset \alpha$ entonces $\alpha = \cap\mathcal{A}$.
Si $C \neq \emptyset$ entonces consideremos δ el mínimo de C, sabemos que $\cap\mathcal{A} \subset \delta$, veamos que $\delta \subset \cap\mathcal{A}$: Sea $\gamma \in \mathcal{A}$,tenemos que $\gamma \in \alpha$ o $\alpha \in \gamma$ o $\alpha = \gamma$.

Si $\gamma \in \alpha$ entonces $\gamma \in C$ entonces $\delta \in \gamma$ entonces $\delta \subset \gamma$.
Si $\alpha \in \gamma$ entonces $\alpha \subset \gamma$ entonces $\delta \in \gamma$ entonces $\delta \subset \gamma$.
Si $\alpha = \gamma$ entonces como $\delta \in \alpha$ tenemos que $\delta \subset \alpha = \delta$.Conclusión $\delta \subset \gamma$ para todo $\gamma \in \mathcal{A}$ entonces $\delta \subset \cap\mathcal{A}$ entonces $\delta = \cap\mathcal{A}$, t obviamente es el ínfimo.

3. Sea X conjunto de ordinales, si $x \in \cup X$ entonces existe $\alpha \in X$ tal que $x \in \alpha \in X$, sea $y \in x \subset \alpha$ entonces $y \in \alpha \in X$ entonces $y \in \cup X$ entonces $x \subset \cup X$ entonces $\cup X$ es transitivo.
Sea $x, y \in \cap X$ entonces existe $\alpha, \beta \in X$ ordinales tales que $x \in \alpha \wedge y \in \beta$ entonces $x \neq y \wedge x < y \wedge y < x$, es claramente un orden lineal porque es un conjunto de ordinales.Veamos que es un buen orden: Sea $A \subset \cup X$ con $A \neq \emptyset$,A es una clase de ordinales, entonces $\cap A$ es el mínimo.

4. Si α es un buen orden con la pertenencia entonces es evidente que $\alpha \cup \{\alpha\}$ también y claramente $\alpha \cup \{\alpha\}$ es un buen orden. $\square$

Proposición 1.2.3 *ON no es un conjunto.*

Demostración 1.2.3.1 *Si ON fuera un conjunto entonces ON sería un ordinal, entonces $ON \in ON$ absurdo.* $\square$

Teorema 1.3 *Todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal.*

Demostración 1.3.1 *Ya vimos que si W_1 y W_2 son buenos ordenes isomorfos, el isomorfismo es único.Veamos la existencia:*
Sea W buen orden, si existe algún ordinal α tal que W es isomorfo a un segmento inicial de α entonces tenemos el resultado, de lo contrario $W = \alpha$ para algún ordinal α en cuyo caso también tenemos el resultado o para todo $\alpha \in ON$ α es isomorfo a un segmento inicial de W, en este caso consideremos la siguiente relación funcional. $F : W \to ON$, $F(x) = \alpha$ donde α es isomorfo al segmento inicial de W definido por x, $\alpha \cong \{y \in W : y < x\}$, por reemplazo $F(W)$ es un conjunto entonces $F(W) = ON$ entonces ON es un conjunto, absurdo.
$\square$

Definición 1.24 *Sea α ordinal, decimos que α es un* ordinal sucesor *si existe β ordinal tal que $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$, en este caso decimos que α es el sucesor de β y escribimos $\alpha = \beta + 1$. En caso contrario decimos que es un* ordinal límite.

Observación 1.2 *ω es un ordinal límite.*

Demostración 1.2.1 *Simplemente porque para todo $n \in \omega$ tenemos $n+1 \in \omega$.*
$\square$

Proposición 1.3.1 *α es un ordinal límite sii $\alpha = Sup(\alpha) = Sup\{\beta : \beta < \alpha\}$*

Demostración 1.3.1.1 *(Reciproco):Si α no fuera ordinal límite tendríamos un ordinal γ tal que $\alpha = \gamma \cup \{\gamma\}$ entonces $Sup\{\beta : \beta < \alpha\} = \gamma$*

(Directo) : Sea $\gamma = Sup\{\beta : \beta < \alpha\}$, como α es cota superior $\gamma = \alpha$ o $\gamma \in \alpha$, si pasa lo último tenemos $\gamma \subset \alpha$ entonces $\gamma \cup \{\gamma\} \subset \alpha$,y como α no es ordinal sucesor tenemos que $\gamma \cup \{\gamma\} \neq \alpha$ entonces $\gamma \cup \{\gamma\} \in \alpha$ entonces $\gamma \cup \{\gamma\} \leqslant \gamma$ absurdo, entonces $\gamma = \alpha$.
$\square$

Teorema 1.4 *(Inducción en ordinales, primera versión) Sea $\mathcal{C}$ una clase de ordinales que verifica:*
i) $0 \in C$.

ii) Si $\alpha \in C$ *entonces* $\alpha + 1 \in C$.

iii) Si α *es un ordinal límite tal que para todo* $\beta < \alpha$ *se cumple que* $\beta \in C$ *entonces* $\alpha \in C$.

Entonces $\mathcal{C} = ON$.

Demostración 1.4.1 *Sea* $\alpha = min(ON - \mathcal{C})$ *entonces como* $0 \notin ON - \mathcal{C}$ *tenemos que* $\alpha \neq 0$ *entonces* $\alpha = \beta + 1$ *en cualquier caso por i),ii) tenemos que* $\alpha \in C$ *absurdo.*
□

Teorema 1.5 *(Inducción en ordinales, segunda versión) Sea* α *ordinal,* φ *una fórmula con una variable libre, que verifica:*

1. $\varphi(0)$.

2. $\varphi(\alpha)$ *entonces* $\varphi(\alpha + 1)$.

3. *si para todo* $\beta < \alpha$ $\varphi(\beta)$ *entonces* $\varphi(\alpha)$.

entonces para todo $\alpha \in ON$ *se cumple* $\varphi(\alpha)$.

Demostración 1.5.1 *Sea* $C = \{\alpha \in ON : \varphi(\alpha)\}$, *y aplicamos al teorema anterior a* C. □

Teorema 1.6 *(Inducción en ordinales, tercera versión) Sea* α *ordinal,* φ *fórmula con una variable libre, tal que para todo* $\beta \in \alpha$ *si para todo* $\gamma < \beta$ $\varphi(\gamma)$ *implica* $\varphi(\beta)$, *entonces para todo* $\beta \in \alpha$ $\varphi(\beta)$.

Demostración 1.6.1 *Sea* $C = \{\beta \in \alpha : \neg\varphi(\beta)\}$, *supongamos que* $C \neq \emptyset$, *sea* β *mínimo de* C, *entonces* $\forall \gamma < \beta$ $\varphi(\gamma)$, *entonces por hipótesis* $\varphi(\beta)$ *absurdo.*
□

Teorema 1.7 *(Inducción en ordinales, cuarta versión) Sea* φ *fórmula, tal que si para todo* $\beta < \alpha$ $\varphi(\beta)$ *implica* $\varphi(\alpha)$, *entonces para todo* α *ordinal* φ.

Demostración 1.7.1 *Simplemente considerar* $C = \{\beta \in ON : \neg\varphi(\beta)\}$, *y usar el mismo argumento del teorema anterior.* □

1.3.1. Equivalencias del Axioma de Elección

Principio del buen orden(**PBO**) Todo conjunto admite un buen orden, es decir para todo x conjunto, existe α ordinal y $f : \alpha \longrightarrow x$ biyectiva.

Principio maximal de Hausdorff(**PMH**)

Toda cadena no vacía en un conjunto parcialmente ordenado, puede ser extendida a una cadena maximal.

Lema de Zorn(LZ) .
Si toda cadena cadena no vacía en un conjunto parcialmente ordenado P tiene una cota superior, entonces P tienen un elemento maximal.

Teorema 1.8 ***AC*** *sii* ***PBO*** *sii* ***LZ*** *sii* ***PMH****.*

Demostración 1.8.1 *Veamos que $AC \Rightarrow PBO \Rightarrow LZ \Rightarrow PMH \Rightarrow AC$.*
$AC \Rightarrow PBO$: Sea x conjunto queremos encontrar un ordinal α y una función $f : \alpha \longrightarrow x$ biyectiva.
Consideremos $I = \mathcal{P}(x) - \{x\}$, para cada $i \in I$ definimos $y_i = x - i$, por el axioma de elección sabemos que existe $g \in \prod_{i \in I} y_i$, definamos la siguiente función. $f : \mathcal{P}(x) \longrightarrow x \cup \{x\}$, como $f(i) = g(i)$ para $i \in I$, y $f(x) = x$, ahora vamos a definir una relación $h : ON \longrightarrow x$, inductivamente
$h(0) = f(\emptyset)$, si conocemos $h \restriction \alpha$ vamos a definir $h(\alpha)$, de la siguiente manera.
$h(\alpha) = \begin{cases} f(h[\alpha]) & si \;\; h[\alpha] \neq x \\ x \;\; si \;\; h[\alpha] = x \end{cases}$,
observemos que si $h[\alpha] \neq x$ entonces si $\beta < \alpha$ entonces $h(\beta) \in h(\alpha)$, por lo tanto $h \restriction \alpha$ es inyectiva, por lo tanto si $h[\alpha] \neq x$ para todo α ordinal tenemos que h es una relación funcional, pero entonces por el axioma de reemplazo ON sería un conjunto, absurdo, por lo tanto existe α ordinal tal que $h[\alpha] = x$, consideremos el mínimo de esos α, entonces $h \restriction \alpha \longrightarrow x$ es sobreyectiva e inyectiva.

$PBO \Rightarrow LZ$: Sea P conjunto parcialmente ordenado por la relación $<_P$, entonces por PBO existe α ordinal tal que $P = \{p_\beta : \beta < \alpha\}$, definamos una función $f : \alpha \longrightarrow P$ inductivamente de la siguiente manera; $f(\beta) = p_\gamma$ si γ es el menor ordinal tal que $p_\gamma >_P p$ para todo p, $p \in f[\beta]$, entonces $f[\alpha$ es una cadena, por lo tanto por hipótesis existe p cota superior, queremos ver que p es maximal, supongamos que no lo es, entonces $p < p_\gamma$ para algún $\gamma < \alpha$, entonces $p_\gamma > q$ para todo $q \in f[\gamma]$, entonces $f(\gamma) = p_\gamma \leq p$ absurdo.

$LZ \Rightarrow PMH$: Sea P conjunto parcialmente ordenado, sea C una cadena no vacía de P, consideremos $\mathcal{S} = \{D : D \;\; es \;\; cadena \;\; en \;\; P \;\; y \;\; C \subset D\}$, podemos ver a $\mathcal{S}$ como un conjunto parcialmente ordenado por la inclusión, sea $\mathcal{C}$ cadena en $\mathcal{S}$, pero entonces $\bigcup \mathcal{C}$ es una cadena en $\mathcal{S}$ por lo tanto tiene una cota superior, ahora por el lema de Zorn, existe $\mathcal{C}$ cadena maximal en $\mathcal{S}$, y $\bigcup \mathcal{C}$ es una cadena en P que extiende a C. Veamos ahora que $\bigcup \mathcal{C}$ es cadena maximal en P. Si no lo fuera existiría $p \in P$ tal que $\{p\} \cup \bigcup \mathcal{C}$ cadena, entonces tenemos que $\mathcal{C} \cup \{p\} \cup \bigcup \mathcal{C}$ pertenece a $\mathcal{S}$, por lo tanto $\mathcal{C}$ no es maximal en $\mathcal{S}$ absurdo.

$PMH \Rightarrow AC$: Sea $\{x_i\}_{i \in I}$ donde $x_i \neq \emptyset$ y $I \neq \emptyset$.
Sea $\mathcal{F} = \{f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} x_i : f, \;\;$ función parcial tal que para todo $\; i \in I, f(i) \in x_i\}$, sea $k \in I$, $a \in x_k$ y $\{(k, a)\}$, como es una cadena pude ser extendida por el PMH a una cadena maximal en $\mathcal{F}$, consideremos $f = \bigcup F$, probemos que f es función. Si $i \in dom(f)$ entonces existe $g \in \mathcal{F}$ tal que $f(i) = g(i)$, supongamos que $i \in dom(g')$ entonces $g \subset g'$ o $g' \subset g$ en cuyo caso $g'(i) = g(i)$.

Veamos ahora que f es total, es decir $dom(f) = I$, si no fuera el caso existiría $j \in I - dom(f)$, sea $b \in x_j$, entonces $f \subsetneq f \cup \{(j, b)\}$ por lo que f no sería maximal, absurdo, por lo tanto $f \in \prod_{i \in I} x_i$. qed

1.4. Cardinales

Definición 1.25 *Sean A y B conjuntos, decimos que tienen la misma cardinalidad ($card(A) = card(B)$) si existe $f : A \to B$ función biyectiva.*

Definición 1.26 *Sea A conjunto definimos el cardinal de A como $card(A) = min\{\beta \in ON : card(\beta) = card(A)\}$, el mínimo existe porque A admite un buen orden, por lo tanto existe α ordinal tal que es isomorfo a A con ese buen orden.*

1.5. Relaciones bien fundadas

Definición 1.27 *Sea A conjunto, decimos que $R \subset A \times A$ es una relación* bien fundada *si para todo $X \subset A$, X tiene un elemento R-minimal, es decir existe $a \in X$ tal que no existe $x \in X$ con xRa.*

Teorema 1.9 *Sea R una relación bien fundada sobre A, entonces existe una única relación funcional $\rho : A \to ON$ tal que para todo $x \in A$ se cumpla que $\rho(x) = Sup\{\rho(y) + 1 : yRx\}$.*
$Im(\rho)$ es un ordinal al que llamaremos la altura *de R.*

Demostración 1.9.1 *Existencia: Definamos inductivamente una familia de conjuntos de la siguiente manera:*
$A_0 = \emptyset$.
$A_{\alpha+1} = \{x \in A : \forall y(yRx \to y \in A_\alpha)\}$.
$A_\alpha = \cup_{\zeta<\alpha} A_\zeta$, *si α es un ordinal límite.*

Sea $\mathcal{H}$ la clase de los ordinales α tales que $A_\alpha = A_\alpha$. Entonces $\mathcal{H}$ es una clase no vacía , de lo contrario tendríamos una función biyectiva $\{A_\alpha\}_{\alpha \in ON} \subset P(A) \to ON$ definida por la correspondencia $A_\alpha \to \alpha$, entonces ON seria un conjunto.
Sea $\theta = min\mathcal{H}$.
Afirmación 1 $A_\alpha \subset A_{\alpha+1}$: Sea $C = \{\alpha \in ON : A_\alpha \subset A_{\alpha+1}\}$.Demostremos esta afirmación por inducción.
Si $\alpha = 0$ entonces $A_0 = \emptyset \subset A_1$.
Si $\alpha = \beta + 1$ entonces $A_{\beta+1} = \{x \in A : \forall y(yRx \to y \in A_\beta)\}$. sea $x \in A_{\beta+1}$ entonces si yRx tenemos que $y \in A_\beta$ pero por hipótesis de inducción $A_\beta \subset A_{\beta+1} = A_\alpha$ entonces $x \in A_{\alpha+1}$.
Si α es ordinal límite; Sea $x \in A_\alpha = \cup_{\zeta<\alpha} A_\zeta$ entonces existe $\zeta < \alpha$ tal que $x \in A_\zeta \subset A_{\zeta+1} \subset A_\alpha$,entonces para todo yRx tenemos que $y \in A_\alpha$ entonces $x \in A_{\alpha+1}$.

Afirmación 2 $A = A_\theta$: Supongamos que $A - A_\theta \neq \emptyset$, entonces existe $a \in A - A_\theta$ elemento R-minimal, entonces si xRa necesariamente $x \in A_\theta$ entonces $a \in A_{\theta+1} = A_\theta$ absurdo.

Definimos $\rho : A \to ON$, como $\rho(x) = \alpha$, $\alpha = min\{\beta \in ON : x \in A_{\beta+1}\}$.
Afirmación: 3 $xRy \to \rho(x) < \rho(y)$: Inducción en $\rho(y)$.
Sea $\rho(x) = \alpha$, $\rho(y) = \beta$ entonces $y \in A_{\beta+1}$, si $xRy \wedge y \in A_{\beta+1}$ entonces $x \in A_\beta$, por lo tanto que $\beta = 0$ tenemos $x \in A_0 = \emptyset$ absurdo.

Si β es ordinal límite entonces $A_\beta = \cup_{\zeta<\beta} A_\zeta$ entonces $x \in A_\zeta \subset A_{\zeta+1}$ entonces $\alpha \leqslant \zeta \leqslant \beta$.

Si $\beta = \gamma + 1$ entonces $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$.

Afirmación 4 $\rho(x) = Sup\{\rho(y) + 1 : yRx\}$: $xRy \to \rho(x) < \rho(y)$ entonces $\rho(y) + 1 \leqslant \rho(x)$ entonces $\rho(x)$ es cota superior de $\{\rho(y + 1 : yRx\}$.
Sea γ tal que $\rho(y)+1 \leqslant \gamma$, como $\rho(\beta) \in \beta$ tenemos que $y \in A_{\beta+1} \subset A_\gamma$ entonces para todo yRx tenemos que $y|inA_\gamma \to x \in A_{\gamma+1}$ entonces $\rho(x) \leqslant \gamma$ entonces $\rho(x) = Sup\{\rho(y) + 1 : yRx\}$.

Afirmación 5 $Im(\rho) = \theta$: Sea $\alpha \in Im(\rho)$ entonces existe $x \in A$ tal que $\rho(x) = \alpha$, como $x \in A = A_\theta$ tenemos que si θ es límite $A_\theta = \cup_{\zeta<\theta} A_\zeta$ entonces $x \in A_\zeta$, con $\zeta < \theta$ entonces $x \in A_\zeta \subset A_{\zeta+1}$ entonces $\alpha \leqslant \zeta < \theta$ entonces $\alpha < \theta$ entonces $\alpha \in \theta$.
Si $theta = \gamma + 1$ entonces $x \in A_{\gamma+1}$ entonces $\rho(x) = \alpha \leqslant \gamma$ entonces $\alpha < \theta$.
Si$\theta = 0$ entonces $A_0 = A$ entonces $A = \emptyset$ absurdo, entonces $\alpha \in \theta$ entonces $Im(\rho) \subset \theta$.

Sea $\alpha < \theta$ ¿Existe $x \in A$ tal que $\rho(x) = \alpha$?
Sea $D = A_{\alpha+1} - A_\alpha$, si $D = \emptyset$ entonces $A_{\alpha+1} = A_\alpha$ con $\alpha < \theta$ absurdo. Si $D \neq \emptyset$, sea $x \in A_{\alpha+1} - A_\alpha$ entonces $\rho(x) = \alpha$ entonces $\theta \subset Im(\rho)$ entonces $Im(\rho) = \theta$.
□

1.6. Algunas consecuencias del axioma de regularidad

Proposición 1.9.1 *No existe una sucesión de conjuntos de la forma $x_0 \ni x_1 \ni \dots x_{n-1} \ni x_n \dots$*

Demostración 1.9.1.1 *Sea $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ entonces por el axioma de fundación existe $x_i \in A$ tal que $x_i \cap A = \emptyset$ entonces $x_j \notin x_i$ para todo j natural.*
□

Observación 1.3 *En particular, para todo conjunto x se cumple que $x \notin x$.*

Demostración 1.3.1 *Simplemente aplicar la proposición anterior al conjunto $\{x\}$.*
□

Proposición 1.9.2 *Para todo conjunto A existe T conjunto transitivo tal que $A \subset T$.*

Demostración 1.9.2.1 *Consideremos la siguiente sucesión de conjuntos.*
$A_0 = A$
$A_{n+1} = \cup A_n$
Definimos $T = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$*,veamos que* T *verifica la tesis.*
Sea $x \in T$ *entonces* $x \in A_k$ *para algún* k *natural, si* $y \in x$ *entonces* $y \in \bigcup A_k$ *entonces* $y \in A_{k+1} \subset T$ *entonces* $x \subset T$.
□

Definición 1.28 *Sea* A *conjunto, definimos la clausura transitiva como:*

$$CT(A) = \bigcap \{T : A \subset T, T \quad transitivo\}$$

.

Proposición 1.9.3 *Toda clase* $\mathcal{C}$ *no vacía tiene un elemento* $\in$*-minimal.*

Demostración 1.9.3.1 *Sea* $A \in \mathcal{C}$*, si* $A \cap \mathcal{C} = \emptyset$ *entonces* A *es* $\in$*-minimal, de lo contrario* $CT(A) \cap \mathcal{C} = X$*,* X *conjunto no vacío por lo tanto existe* $x \in X$ *tal que* $x \cap X = \emptyset$ *por el axioma de fundación.Entonces si* $x \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ *entonces existe* $y \in x \wedge y \in \mathcal{C}$ *entonces* $y \in CT(A)$ *entonces* $y \in x \cap CT(A) \cap \mathcal{C} = x \cap X$ *absurdo, entonces* $x \cap \mathcal{C} = \emptyset$*, entonces* x *es* $\in$*-minimal.*
□

1.7. La jerarquía acumulativa

Definición 1.29 *Definimos la siguiente familia de conjuntos inductivamente.*

$V_0 = \emptyset$.

$V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$.

$V_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} V_\beta$*, si* α *es un ordinal límite.*

Teorema 1.10 *La sucesión definida anteriormente cumple con las siguientes propiedades:*
i) V_α *es transitivo para todo ordinal* α.

ii) Si $\alpha < \beta$ *entonces* $V_\alpha \subset V_\beta$.

ii) $\alpha \subset V_\alpha$ *para todo ordinal* α.

Demostración 1.10.1 *i) Sea* $\mathcal{C} = \{\alpha \in ON : V_\alpha \text{ es transitivo}\}$
Observemos que $0 \in \mathcal{C}$ *,entonces* $\mathcal{C} \neq \emptyset$.
Si $\alpha \in \mathcal{C} \to \alpha+1 \in \mathcal{C}$*: Sea* $x \in V_{\alpha+1}$ *entonces* $x \in P(V_\alpha$ *entonces* $x \subset V_\alpha$ *entonces si* $y \in x$ *tenemos que* $y \in V_\alpha$ *entonces* $y \subset V_\alpha$ *entonces* $y \in P(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$.
Si α *es ordinal límite entonces si* $x \in V_\alpha$ *tenemos que* $x \in V_\zeta$ *para algún* $\zeta < \alpha$*, entonces* $x \subset V_\zeta$ *entonces* $x \in P(V_\zeta = V_{\zeta+1}$*.Por lo tanto tenemos* $x \subset V_{\zeta+1} \subset V_\alpha$ *entonces* $\alpha \subset V_\alpha$.

ii) Sea $\mathcal{H} = \{\alpha \in ON : \forall\zeta \in ON,\ \alpha < \zeta \to V_\alpha \subset V_\beta\}$.
$0 \in \mathcal{H}$, $V_0 = \emptyset$, $\emptyset \subset V_\zeta$ *para todo* $\zeta \in ON$.

Si $\beta \in \mathcal{H} \to \beta + 1 \in \mathcal{H}$: *Sea* ζ *tal que* $\beta + 1 < \zeta$, *entonces* $\beta < \zeta$, *entonces* $V_\beta \subset V_\zeta$, *entonces* $V_\beta \in V_\zeta$, *entonces* $V_\beta \subset V_{\zeta+1}$. *Por lo tanto para todo* $A \subset V_\beta$, $A \subset V_{\zeta+1}$ *entonces* $A \in V_{\zeta+1}$, *por lo tanto para todo* $A \subset V_\beta$, $A \in V_{\zeta+1} \to A \in P(V_\beta)$, $A \in V_{\zeta+1}$, *entonces* $P(V_\beta) \subset V_{\zeta+1} \to V_{\beta+1} \subset V_{\zeta+1}$, *entonces* $V_{\beta+1} \in V_{\zeta+1} = P(V_\zeta$, *entonces* $V_{\beta+1} \subset V_{\zeta+1}$.

Sea α *ordinal límite, entonces* $\alpha = sup\{\beta : \beta < \alpha\}$, $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$ *entonces si*$\alpha < \zeta$ *implica que* $\beta < \zeta$ *para todo* $\beta < \alpha$, *entonces* $V_\beta \subset V_\zeta$, *para todo* $\beta < \alpha$, *entonces* $V_\alpha \subset V_\zeta$.

iii) Sea $\mathcal{C} = \{\alpha \in ON : \alpha \subset V_\alpha\}$.
$0 \in \mathcal{C}$, $0 \subset V_0 = \emptyset$.

Si $\beta \in \mathcal{C} \to \beta + 1 \in \mathcal{C}$: $\beta \subset V_\beta$ *entonces* $\beta \in P(V_\beta) = V_{\beta+1}$, *entonces* $\beta \in V_{\beta+1}$, *entonces* $\beta \subset V_{\beta+1}$, *entonces* $\beta \cup \{\beta\} \subset V_{\beta+1}$, *entonces* $\beta + 1 \subset V_{\beta+1}$.

Si α *es ordinal límite* $\alpha = sup\{\zeta : \zeta < \alpha\}$, $V_\alpha = \bigcup_{\zeta<\alpha} V_\zeta$, $\zeta \subset V_\zeta$, *entonces* $\zeta \in V_{\zeta+1}$, *entonces* $\zeta \in V_\alpha$, *entonces* $\{\zeta : \zeta < \alpha\} \subset V_\alpha$, *entonces* $\alpha \subset V_\alpha$.
□

Proposición 1.10.1 *Para todo conjunto* x *existe* α *ordinal tal que* $x \in V_\alpha$, *es decir,*

$$V = \bigcup_{\alpha\in ON} V_\alpha$$

, donde $V = \{x : x = x\}$.

Demostración 1.10.1.1 *Sea la clase* $\mathcal{C} = \{x : x \notin V_\alpha, \forall\alpha \in ON\}$, *si* $\mathcal{C}$ *es no vacía existe* $x \in \mathcal{C}$, x $\in$*-minimal, entonces* $\forall y \in x$*entonces* $y \in V_\alpha$ *para algún* $\alpha \in ON$ *entonces* $x \subset \bigcup_{\alpha\in ON} V_\alpha$, *entonces* $x = x \cap (\bigcup_{\alpha\in ON} V_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in ON} x \cap V_\alpha$.
Si $x \cap V_\alpha \neq \emptyset$ *para todo* α *entonces por reemplazo* ON *sería un conjunto.Sea* $\gamma = min\{\gamma : x \cap V_\alpha \neq \emptyset\}$ *entonces* $x \subset \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha$ *entonces* $x \subset V_\gamma$ *entonces* $x \in V_{\gamma+1}$, *absurdo, por lo tanto* $\mathcal{C}$ *es una clase vacía.*
□

Definición 1.30 *Sea* x *conjunto, definimos el rango del conjunto* x, *de la siguiente manera:*

$$Rank(x) := min\{\alpha : x \in V_{\alpha+1}\}$$

.

Proposición 1.10.2 *Sean* x, y *conjuntos,* α *ordinal, entonces:*

i) Si $x \in y \implies Rank(x) < Rank(y)$.

ii) $\alpha = Rank(\alpha)$.

Demostración 1.10.2.1 *i) Sea* $\mathcal{C} = \{\alpha \in ON : \exists y$ *tal que* $Rank(y) = \alpha \wedge \forall x(x \in y \to Rank(x) < Rank(y)\}$. *Veamos que* $\mathcal{C} = ON$.

$0 \in \mathcal{C}$, $0 = \emptyset \in P(\emptyset)$.

Si $\alpha = \beta + 1$, *sea* y *tal que* $Rank(y) = \alpha$, *entonces* $y \in V_{\alpha+1}$, *por lo tanto si* $x \in y \subset V_\alpha$ *tenemos que* $x \in V_\alpha = V_{\beta+1}$, *entonces* $Rank(x) \leqslant \beta < \alpha$.

Si α *ordinal límite: Sea* y *tal que* $Rank(y) = \alpha$, *entonces para todo* $x \in y \subset V_\alpha$ *tenemos que* $x \in V_\alpha$, *pero* $V_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} V_\beta$ *entonces* $x \in V_\beta$, $\beta < \alpha$, *entonces* $Rank(x) \leqslant \beta < \alpha$.

ii) Sea $\mathcal{C} = \{\alpha \in ON : Rank(\alpha) = \alpha\}$.
$0 \in \mathcal{C}$ $Rank(0) = 0$.

Si $\alpha = \beta + 1$ $Rank(\beta) = \beta$, $\beta \in V_{\beta+1}$, *como* $\beta < \alpha$, *entonces* $Rank(\beta) < Rank(\alpha)$,$Rank(\alpha) > \beta$, *entonces* $Rank(\alpha) \geqslant \alpha$, *y* $\alpha \in \{\beta : \alpha \in V_{\beta+1}\}$ *porque* $\alpha \subset V_\alpha$, *entonces* $\alpha \in V_{\alpha+1}$, *entonces* $Rank(\alpha) \leqslant \alpha$, *entonces* $\alpha = Rank(\alpha)$.

Si α *es ordinal límite:* $\alpha = sup\{\beta : \beta < \alpha\}$, *entonces* $V_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} V_\beta$. *Si* $Rank(\alpha) \leqslant \alpha$, *entonces existe* $\beta < \alpha$ *tal que* $Rank(\alpha) = \beta$, *entonces* $\alpha \in V_{\beta+1}$, *entonces* $\alpha \subset V_\beta$, *entonces* $\beta + 2 \in \alpha \subset V_\beta$, *entonces* $\beta + 2 \in V_\beta$, *entonces* $Rank(\beta + 2) \leqslant \beta + 1$ *absurdo.*
□

1.8. El teorema del colapso de Mostowski

Definición 1.31 *Sea* A *conjunto,* $R \subset A \times A$ *relación,* $x \in A$, *definimos:*

$$ext_R(x) = \{y \in A : yRx\}$$

.

Definición 1.32 *Sea* A *conjunto,* $R \subset A \times A$, *decimos que* R *es una relación extensional si para todo* $x, y \in A$, *se verifica* $x \neq y \Longrightarrow ext_R(x) \neq ext_R(y)$.

Teorema 1.11 *(*R-inducción*) Sea* R *una relación bien fundada sobre* A *y* ϕ *una fórmula tal que si* $x \in A$ *y* $\forall z((zRx \wedge \phi(z)) \to \phi(x))$, *entonces* $\forall x \in A$ *vale* $\phi(x)$

Demostración 1.11.1 *Sea* $\mathcal{C} = \{x \in A : \neg\phi(x)\}$
Si $\mathcal{C} \neq \emptyset$, *entonces existe* $a \in \mathcal{C}$ *R-minimal, entonces para todo* yRa, *y verifica* ϕ, *entonces por hipótesis* a *verifica* ϕ, *absurdo, entonces* $\mathcal{C} = \emptyset$.
□

Definición 1.33 *Sea* $D \subset A$, R *relación sobre* A, *decimos que* D *es cerrado por* R *si* $\forall x \in D \;\; ext_R(x) \subset D$.

Definición 1.34 *Sea* A *conjunto y* R *relación sobre* A, *definimos:*

$$\overline{ext_R(x)} := ext_R \cup \{x\}$$

.

Definición 1.35 *Sea A conjunto R relación sobre A, $x \in A$, definimos los siguientes conjuntos inductivamente:*
1. $(x]^0 = \overline{ext_R(x)}$.

$$(x]^{n+1} = \bigcup_{y \in (x]^n} \overline{ext_R(y)}.$$

2. $(x] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (x]^n$.

Observación 1.4 *Sea x conjunto, para todo* $y \in (x]$ $ext_R(y) \subset (x]$, *es decir para todo* $x \in A$, $(x]$ *es R cerrado.*

Demostración 1.4.1 *Si* $y \in (x]$, *entonces existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $y \in (x]^k$, *entonces* $\overline{ext_R(y)} \subset (x]^{k+1}$, *entonces* $ext_R(y) \subset \overline{ext_R(y)} \subset (x]^{k+1} \subset (x]$.
□

Observación 1.5 $\forall y \in (x]$ $(y] \subset (x]$.

Demostración 1.5.1 *Veamos por inducción que para todo* $n \in \mathbb{N}$ $(y]^n \subset (x]$.
$n = 0$: $(y]^0 = \overline{ext_R(y)} = ext_R(y) \cup \{y\}$, *entonces si* $y \in (x]$ *por la observación anterior* $ext_R(y) \subset (x]$, *entonces* $(y]^0 \subset (x]$.

Si $(y]^k \subset (x] \rightarrow (y]^{k+1} \subset (x]$: $(y]^{k+1} = \bigcup_{\zeta \in (y]^k} \overline{ext_R(\zeta)}$, *entonces* $\zeta \in (y]^k$, *entonces* $\zeta \in (x]$, *entonces* $ext_R(\zeta) \subset (x]$, *entonces* $\overline{ext_R(\zeta)}$ *para todo* $\zeta \in (y]^k$, *entonces* $\bigcup_{\zeta \in (y]^k} \overline{ext_R(\zeta)} \subset (x]$, *entonces* $(y]^{k+1} \subset (x]$.
□

Teorema 1.12 *(*Colapso de Mostowski*)*
Sea A conjunto, $R \subset A \times A$ *relación bien fundada y extensional, entonces existe un conjunto T transitivo y un isomorfismo entre* (A, R) *y* $(T, \in)$.

Demostración 1.12.1 *Afirmación 1: Sean* D_1 , D_2 *conjuntos R cerrados y* $\pi_1 : D_1 \rightarrow V$, $\pi_2 : D_2 \rightarrow V$ *relaciones funcionales tales que* $\pi_i(x) = \{\pi_i(y) : yRx\}$ *para* $i = 1, 2$, *entonces* $\forall x \in D_1 \cap D_2 \rightarrow \pi_1(x) = \pi_2(x)$
Demostración afirmación 1:
Sea $\mathcal{C} = \{x \in A : x \in D_1 \cap D_2 \rightarrow \pi_1(x) = \pi_2(y)\}$, *si* $x \in A$ *es tal que* $\forall yRxy \in \mathcal{C}$. *En el caso de que* $x \notin D_1 \cap D_2$, *entonces* $x \in \mathcal{C}$, *de los contrario* $x \in D_1 \cap D_2$, *entonces* $\forall yRxy \in D_1 \cap D_2$, *entonces* $\pi_1(y) = \pi_2$, *entonces* $\pi_1(x) = \{\pi_1(y) : yRx\} = \pi_2(y) : yRx\} = \pi_2(x)$.

Afirmación 3: Sea $x \in A$, *entonces* $\forall y \in (x]$ *con* $y \neq x$ *existe* zRx *tal que* $y \in (z]$.
Demostración afirmación 2:
Veamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ *si* $y \in (x]^n$ *con* $y \neq x$, *existe* zRx *tal que* $y \in (z]$.
Inducción en n:
Si $n = 0$ *y* $\in \overline{ext_R(x)}$, *entonces* yRx, $y \in (y]$.

Sea $y \in (x]^{k+1}$, entonces $y \in \overline{\zeta}$ para algún $\zeta \in (x]^k$, si $\zeta = x$ tenemos el resultado, de los contrario por hipótesis de inducción $\exists zRx$ tal que $\zeta \in (z]$ entonces $\overline{ext_R(\zeta)} \subset (z]$ entonces $y \in (z]$.

Afirmación 3: Para todo $x \in A$ existe $\pi_x : (x] \to V$ tal que $\pi_x(y) = \{\pi_x(\zeta) : \zeta Ry\}$ para todo $y \in (x]$.
Demo afirmación 3:
Lo demostraremos por inducción. Sea $x \in A$ tal que $\forall yRx$ existe π_y, entonces definimos $\pi_x = \bigcup_{yRx} \pi_y \cup \{(x, \{\pi_\zeta : \zeta Rx\})\}$.
Sea $\gamma \in (x]$, si $\gamma \neq x$, entonces por la afirmación 3 sabemos que existe yRx, $\gamma \in (y]$, entonces $\gamma \in dom\pi_y$ que cumple con la propiedad pedida.
Si $\gamma = x$ $\pi_x(\gamma) = \{\pi_\zeta : \zeta R\gamma\}$ es función por la afirmación 1.

Veamos que $\pi : A \to V$ definida por $\pi(x) = \pi_x(x)$ es la función que buscamos.
Si xRy, entonces $\pi(x) \in \pi(y)$, evidente porque $\pi(y) = \{\pi(\zeta) : \zeta Ry\}$

π es mono : Sea $\mathcal{C} = \{x \in A : \exists y \in Ax \neq y \wedge \pi(x) = \pi(y)\}$
Si $\mathcal{C} \neq \emptyset$, entonces existe $x_0 \in \mathcal{C}$ minimal, entonces $\exists y \in Ay \neq x_0 \wedge \pi(x_0) = \pi(y)$, entonces existe z tal que $zRx_0 \wedge \neg(zRy) \vee \neg(zRx_0) \wedge zRy$.
En el primer caso zRx implica $z \notin \mathcal{C}$ y $\pi(z) \in \pi(x_0)$ implica $\pi(z =\in \pi(y)$, pero por la construcción de π existe z'Ry tal que $\pi(y) = \pi(z')$, pero como $z \notin \mathcal{C}$ tenemos que $z' = y$ absurdo.
Si existe z tal que $zRy \wedge \neg(zRx)$, entonces $\pi(z) \in \pi(y) = \pi(x)$, entonces $\pi(z) \in \pi(x)$, entonces existe z' tal que $z'Rx$ $\pi(z') = \pi(z)$, con $z' \notin \mathcal{C}$, entonces $z' = z$ entonces $z' \in \mathcal{C}$, absurdo.

$\pi(A)$ es transitivo: Sea $b \in \pi(a)$, entonces existe $x \in A$ tal que $b = \pi(x) = \{\pi(y) : yRx\} \subset \pi(A)$.
$\square$

Capítulo 2

Teoría de Modelos

2.1. Lenguajes y estructuras

2.1.1. Sintaxis para la lógica de primer orden

Fijar un lenguaje $\mathcal{L}$ (o ”tipo de similaridad”) consiste en:

1. Un conjunto $ct(\mathcal{L})$ de símbolos de constante
2. Un conjunto $Rel(\mathcal{L})$ de símbolos de relación
3. Un conjunto $Func(\mathcal{L})$ de símbolos de función
4. Una función (aridad) $\alpha : Rel(\mathcal{L}) \cup Func(\mathcal{L}) \to \mathbb{N} - \{0\}$
5. Paréntesis (,)
6. variables $x_0, x_1 \ldots$
7. Cuantificador $\forall$
8. Un símbolo de relación binario $=$

Términos

Definición 2.1 *Definimos el conjunto ($Term(\mathcal{L})$) de términos de $\mathcal{L}$ inductivamente:*

1. *Las variables son términos ($x_i \in Term(\mathcal{L})$) para todo i*

2. *Las constantes son términos ($c_i \in Term(\mathcal{L})$ para todo i)*

3. *Si $F \in Func(\mathcal{L})$ símbolo de función n-ario y $t_1 \ldots, t_n \in Term(\mathcal{L})$, entonces $F(t_1, \ldots, t_n) \in Term(\mathcal{L})$*

4. *No hay otros términos*

Fórmulas atómicas

Definición 2.2 *Definimos el conjunto de fórmulas atómicas de manera inductiva:*

1. *Si $t_1, t_2 \in Term(\mathcal{L})$ entonces $(t_1 = t_2)$ es atómica*

2. *Si $R \in Rel(\mathcal{L})$ símbolo de relación n-ario y $t_1, \ldots, t_n \in Term(\mathcal{L})$, entonces $R(t_1, \ldots, t_n)$ es fórmula atómica*

3. *No hay otras fórmulas atómicas*

Fórmulas

Definición 2.3 *Definimos el conjunto de fórmulas ($Form(\mathcal{L})$) de $\mathcal{L}$ inductivamente:*

1. *Las fórmulas atómicas pertenecen a $Form(\mathcal{L})$*

2. *Si $\varphi, \psi \in Form(\mathcal{L})$ entonces $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$ pertenecen a $Form(\mathcal{L})$*

3. *Si $\varphi \in Form(\mathcal{L})$, x variable, entonces $(\forall x\varphi) \in Form(\mathcal{L})$*

4. *No hay otras fórmulas*

Definición 2.4 $(\varphi \vee \psi)$ *es una abreviatura para la formula* $(\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

$(\varphi \to \psi)$ *es una abreviatura para la formula* $(\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$

$\exists x\varphi$ *es una abreviatura para la formula* $\neg\forall x\neg\varphi$

Definición 2.5 ***Variables libres en un término***
Definimos el conjunto $Vl(t)$ para todo término inductivamente

Si $t = x_i$ entonces $Vl(t) = \{x_i\}$
Si $t = F(t_1, \ldots, t_n)$ entonces $Vl(t) = Vl(t_1) \cup \ldots Vl(t_n)$

Definición 2.6 ***Variables libres en una fórmula***
Definimos el conjunto $Vl(\varphi)$ para toda fórmula φ inductivamente

Si $\varphi = (t_1 = t_2)$ *entonces* $Vl(\varphi) = Vl(t_1) \cup Vl(t_2)$
Si $\varphi = R(t_1, \ldots, t_n)$ *entonces* $Vl(\varphi) = Vl(t_1) \cup \ldots \cup Vl(t_n)$
Si $\varphi = \neg\varphi_1$ *entonces* $Vl(\varphi) = Vl(\varphi_1)$
Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ *entonces* $VL(\varphi) = Vl(\varphi_1) \cup Vl(\varphi_2)$
Si $\varphi = (\forall x\varphi_1)$ *entonces* $Vl(\varphi) = Vl(\varphi_1) - \{x\}$

Definición 2.6.1 ***Lenguaje proposicional***

Definimos PROP como el lenguaje con el siguiente alfabeto

Símbolos proposicionales A_i *para todo i número natural*

Símbolos lógicos $\neg$, $\wedge$

Símbolos de puntuación (,)

Definición 2.6.1.1 ***Fórmulas en PROP***
Definimos el conjunto de fórmulas en PROP inductivamente

Si A_i *es un símbolo proposicional entonces* A_i *es una fórmula*
Si Φ_1 *y* Φ_2 *son fórmulas entonces* $(\neg\Phi_1)$ *y* $(\Phi_1 \wedge \Phi_2)$ *son fórmulas No hay más fórmulas.*

Definición 2.6.1.2 ***Valuaciones en PROP***
Sea $v : \{A_i\}_{i\in N} \longrightarrow \{0,1\}$ *una función*
Definimos una función ,que llamaremos valuación asociada a v $[[]]_v$ $PROP \longrightarrow \{0,1\}$ *inductivamente*

Si $\Phi = A_i$ *entonces* $[[\Phi]]_v = v(A_i)$

Si $\Phi = \neg\Phi_1$ *entonces* $[[\Phi]]_v = 1 - [[\Phi_1]]_v$

Si $\Phi = (\Phi_1 \wedge \Phi_1)$ *entonces* $[[\Phi]]_v = [[\Phi_1]]_v \times [[\Phi_2]]_v$

Definición 2.6.1.3 *Una fórmula* Φ *en PROP es una Tautología si para toda función* $v : \{A_i\}_{i\in N} \longrightarrow \{0,1\}$
$[[\Phi]]_v = 1$

Definición 2.7 ***Sustitución de fórmulas de PROP por fórmulas de*** $\mathcal{L}$
Sea Φ *fórmula de PROP,* φ_i *fórmulas de C y* A_i *símbolos proposicionales*

Definimos $\Phi(A_1/\varphi_1; ....A_n/\varphi_n)$ *inductivamente*

Si $\Phi = A_j$ *entonces* $\Phi(A_1/\varphi_1; ....A_n/\varphi_n) = \begin{cases} \varphi_i & si \quad i = j \quad para \quad algun \quad i = 1, ...n \\ A_j & si \quad i \neq j \quad para \quad todo \quad i = 1, ...n \end{cases}$

Si $\Phi = \neg\Phi_1$ *entonces* $\Phi(A_1/\varphi_1; ...A_n/\varphi_n) = \neg\Phi_1(A_1/\varphi_n; ...A_n/\varphi_n)$

Si $\Phi = \Phi_1 \wedge \Phi_2$ *entonces* $\Phi(A_1/\varphi_1; .....A_n/\varphi_n) = \Phi_1(A_1/\varphi_1; .....A_n \;\; \varphi_n) \wedge \Phi_2(A_1/\varphi_1; ....A_n/\varphi_n)$

Definición 2.8 *Sea φ fórmula de L decimos que es una Tautología,si existen φ_i formulas de C para $i = 1, ...n$ y Φ fórmula de PROP, tautológica, tal que $\varphi = \Phi(A_1/\varphi_1; ....A_n/\varphi_n)$*

Definición 2.9 ***Sustitución en términos***
Sean τ , t términos y x variable
definimos $\tau(x/t)$ inductivamente:

Si $\tau = y$ *entonces* $\tau(x/t) = \begin{cases} t & si \quad x = y \\ \tau & si \quad x \neq y \end{cases}$

Si $\tau = F(t_1, \ldots, t_n)$ *entonces* $\tau(x/t) = F(t_1(x/t), \ldots, t_n(x/t))$

Definición 2.10 ***Sustitución en fórmulas***
Sea φ fórmula, t un termino y x una variable , definimos $\varphi(x/t)$ inductivamente
Si $\varphi = (t_1 = t_2)$ *entonces* $\varphi(x/t) = (t_1(x/t) = t_2(x/t))$

Si $\varphi = R(t_1, \ldots, t_n)$ *entonces* $\varphi(x/t) = R(t_1(x/t), \ldots, t_n(x/t))$

Si $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ *entonces* $\varphi = \varphi_1(x/t) \wedge \varphi_2(x/t)$

Si $\varphi = \neg\varphi_1$ *entonces* $\varphi(x/t) = \neg\varphi_1(x/t)$

Si $\varphi = \forall y \varphi_1$ *entonces* $\varphi(x/t) = \begin{cases} \forall y \varphi_1(x/t) & si \quad x \neq y \\ \forall y \varphi_1 & si \quad x = y \end{cases}$

Definición 2.11 ***Término libre para una variable en una fórmula***
Sea t término x variable, φ fórmula, definimos t es libre para la variable x en φ inductivamente
Si $\varphi = (t_1 = t_2)$ entonces t es libre para la variable x en φ

Si $\varphi = R(t_1, \ldots, t_n)$ entonces t es libre para la variable x en φ

Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ entonces t es libre para la variable x en φ si t es libre para la variable x en φ_1 y t es libre para la variable x en φ_2

Si $\varphi = \neg\varphi_1$ entonces t es libre para la variable x en φ si t es libre para la variable x en φ_1

Si $\varphi = \forall y \varphi_1$ entonces t es libre para la variable x si x no pertenece a $Vl(\varphi_1)$ o si x pertenece a $Vl(\varphi_1)$ e y no pertenece a $Vl(t)$ y t es libre para x en φ_1

Definición 2.12 *El conjunto de variables libres de una fórmula φ se notara como $Vl(\varphi)$*

Convención notacional: $t(x_1, \ldots, x_n)$ significa que las variables del término t están incluidas en $\{x_1, \ldots, x_n\}$

$\varphi(x_1, \ldots; x_n)$ significa que $Vl(\varphi) \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$

Definición 2.13 *Definimos $Term_n(\mathcal{L})$ como el conjunto de términos con una cantidad de variables menor o igual a n. Si pérdida de generalidad se puede asumir que estas están incluidas en $\{x_1, \ldots, x_n\}$.*
En particular $Term_0(\mathcal{L})$ es el conjunto de términos constantes.

Definición 2.14 *Definimos $Form_n(\mathcal{L})$ análogamente contando las variables libres.*
En particular $En(\mathcal{L}) := Form_0(\mathcal{L})$ conjunto de enunciados *o* sentencias

Axiomas proposicionales

Las tautologías, o un subconjunto generador.

Axiomas cuantificacionales

1. Si $x \notin Vl(\varphi)$ la formula $(\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\psi))$ es un axioma.

2. Si t es un término libre para una variable x en una fórmula φ, entonces la fórmula $(\forall x\varphi \to \varphi(t/x))$ es una axioma.

Axiomas de igualdad

1. $(x = x)$

2. $((x = y) \to t(z_1, \ldots z_{i-1}, x, z_{i+1}, \ldots, z_n) = t(z_1, \ldots z_{i-1}, y, z_{i+1}, \ldots, z_n))$

3. $((x = y) \to (\varphi(x/z) \to \varphi(y/z)))$

Definición 2.15 *(*Axiomas lógicos*) Llamamos axiomas lógicos a los axiomas proposicionales, a los axiomas cuantificacionales, y a los axiomas de igualdad.*

Reglas de inferencia

1. **Modus ponens** De φ y $\varphi \to \psi$ se infiere ψ

2. **Generalización** De φ se infiere $\forall x\varphi$

Definición 2.16 *(*Deducción*) Sea $\Sigma \subset Form(\mathcal{L})$,a una secuencia de fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ la llamaremos deducción (o prueba) de φ_n a partir de Σ, **Notación** $\Sigma \vdash \varphi$ si:*

1. *φ_i pertenece a Σ*

2. *φ_i es un axioma lógico*

3. *φ_i es el resultado de la aplicación de una regla de inferencia a algunos de los miembros de la anteriores de la secuencia.*

Proposición 2.0.1 *Sean $\varphi, \psi \in Form(\mathcal{L})$, $\Sigma \subset Form(\mathcal{L})$ y x variable, entonces de simple:*

1. $\Sigma \vdash \varphi$ *sii* $\Sigma \vdash \forall x \varphi$

2. $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ *sii* $\Sigma \cup \{\forall x \psi\} \vdash \varphi$

Demostración 2.0.1.1

1. *Si* $\ldots \varphi$ *es una deducción de* Σ*, entonces también* $\ldots \varphi, \forall x \varphi$ *también lo es aplicando la regla de inferencia de generalización.*
   Si $\ldots \forall x \varphi$ *es una deducción como* $\varphi(x/x)$ *es idéntica a* φ *, entonces* $\forall x \varphi \to \varphi$ *es un axioma cuantificacional, luego aplicando modus ponens tenemos el resultado.*

2. *Sea* $\ldots, \psi, \ldots, \varphi$ *una deducción de* $\Sigma \cup \{\psi\}$*, entonces* $\ldots, \forall x \psi, \psi, \ldots, \varphi$ *es una deducción de* $\Sigma \cup \{\forall \psi\}$*, usando la regla de generalización.*

   Si $\ldots, \forall x \psi, \ldots, \varphi$ *es una prueba de* $\Sigma \cup \{\forall x \psi\}$*, entonces* $\ldots, \psi, \forall x \psi, \ldots, \varphi$ *es una prueba desde* $\Sigma \cup \{\psi\}$

Teorema 2.1 *(*Teorema de deducción*) Sean* $\Sigma \subset Form(\mathcal{L})$*,* $\varphi, \psi \in Form(\mathcal{L})$*, y* $FV(\varphi) = \emptyset$*. Entonces* $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Rightarrow \Sigma \vdash (\varphi \to \psi)$

Demostración 2.1.1 *Vamos a demostrar por inducción en n que si* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *es una deducción desde* $\Sigma \cup \{\varphi\}$ *entonces la secuencia de fórmulas* $\varphi \to \varphi_1, \ldots, \varphi \to \varphi_n$ *se puede completar hasta obtener una deducción de* $\varphi \to \varphi_n$ *desde* Σ*.*

1. *Si* φ_1 *es miembro de* Σ*, o un axioma lógico, entonces es claro que la secuencia* $\varphi_1, (\varphi_1 \to (\varphi \to \varphi_1)), (\varphi \to \varphi_1)$ *es una deducción desde* Σ

2. *Si* φ_1 *es* φ_1*, entonces* $(\varphi \to \varphi_1)$ *es una tautología, y en particular una deducción desde* Σ

3. *Sea* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$ *una deducción desde* $\Sigma \cup \{\varphi\}$
   Por hipótesis de inducción como $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *es una deducción desde* $\Sigma \cup \{\varphi\}$ *tenemos que la secuencia* $(\varphi \to \varphi_1), \ldots, (\varphi \to \varphi_n)$ *puede ser completada hasta lograr una deducción desde* Σ
   Caso 1 : φ_{n+1} *es miembro de* Σ *o un axioma lógico, en este caso podemos obtener la siguiente secuencia* $(\varphi \to \varphi_1), \ldots, (\varphi \to \varphi_n), \varphi_{n+1}, (\varphi_{n+1} \to (\varphi \to \varphi_{n+1})), (\varphi \to \varphi_{n+1})$*, la cual es una deducción a partir de* Σ

   Caso 2 : Si φ_{n+1} *es* φ *es evidente*

   Caso 3 : Si φ_{n+1} *se obtiene de un modus ponens, entonces existen* $i, j \leq n$ *tal que* φ_j *es* $\varphi \to \varphi_{n+1}$*, entonces a la secuencia* $(\varphi \to \varphi_1), \ldots, (\varphi \to \varphi_n)$ *le agregamos las siguiente lineas* $(\varphi \to (\varphi_i \to \varphi_{n+1}) \to (\varphi \to \varphi_i) \to (\varphi \to$

$\varphi_{n+1})), (\varphi \to \varphi_i) \to (\varphi \to \varphi_{n+1}), (\varphi \to \varphi_{n+1})$ y obtenemos el resultado

Caso 4 : Si φ_{n+1} se obtiene por medio de la regla de generalización, existe $i \leq n$ tal que φ_{n+1} es $\forall x \varphi_i$ entonces agregamos las lineas $\forall x(\varphi \to \varphi_i), \forall x(\varphi \to \varphi_i) \to (\varphi \to \forall x \varphi_1)$, $\forall x(\varphi \to \varphi_i)$ se obtiene aplicando la regla de generalización a $(\varphi \to \varphi_i)$ y $\forall x(\varphi \to \varphi_i) \to (\varphi \to \forall x \varphi_1)$ es una axioma cuantificacional ya que por hipótesis $x \notin FV(\varphi) = \emptyset$

Definición 2.17 *Decimos que un conjunto Σ de fórmulas es consistente, si no existe φ tal que $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$*

Proposición 2.1.1 *Sea $\Sigma \subset Form(\mathcal{L})$ conjunto inconsistente, entonces para toda $\varphi \in Form(\mathcal{L})$ se cumple $\Sigma \vdash \varphi$*

Demostración 2.1.1.1 *Como Σ es inconsistente existe ψ tal que $\Sigma \vdash \psi \wedge \neg\psi$, pero $(\psi \wedge \neg\psi) \to \varphi$ es una tautología por tanto un axioma lógico, entonces aplicando modus ponens tenemos que $\Sigma \vdash \varphi$.$\square$*

Proposición 2.1.2 *Sea $\Sigma \subset Form(\mathcal{L})$ y $\varphi \in Form(\mathcal{L})$ entonces se cumple que $\Sigma \nvdash \varphi$ sii $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es consistente.*

Demostración 2.1.2.1 *Veamos que $\Sigma \vdash \varphi$ sii $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.*
(directo) Si $\Sigma \vdash \varphi$ entonces $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$, pero siempre se cumple que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$, entonces $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.
(reciproco) Si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente, entonces por la proposición anterior $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$, aplicando el teorema de deducción tenemos que $\Sigma \vdash \neg\varphi \to \varphi$, pero $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ es una tautología entonces aplicando modus ponens tenemos que $\Sigma \vdash \varphi$. $\square$

Definición 2.18 *Sea $\Sigma \subset Form(\mathcal{L})$ decimos que es consistente maximal si es consistente y para toda $\varphi \in Form(\mathcal{L})$ tal que $\varphi \notin \Sigma$ se verifica que $\Sigma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente.*

Proposición 2.1.3 *Si $\Sigma \subset Form(\mathcal{L})$ es consistente maximal entonces es deductivamente cerrado, es decir $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Sigma$.*

Demostración 2.1.3.1 *Supongamos que $\varphi \notin \Sigma$ entonces $\Sigma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente entonces $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$, aplicando el teorema de deducción tenemos que $\Sigma \vdash \varphi \to \neg\varphi$. pero $\Sigma \vdash \varphi$ entonces aplicando modus ponens tenemos que $\Sigma \vdash \neg\varphi$, entonces Σ es inconsistente, absurdo. $\square$*

Proposición 2.1.4 *Sea $\Sigma \subset Form(\mathcal{L})$ consistente maximal, y $\varphi \in Form(\mathcal{L})$ entonces $\neg\varphi \in \Sigma$ sii $\varphi \notin \Sigma$.*

Demostración 2.1.4.1 *(directo) Si $\neg\varphi \in \Sigma$ entonces como Σ es consistente $\varphi \notin \Sigma$.*
(reciproco) Si $\varphi \notin \Sigma$, entonces como Σ es deductivamente cerrado $\Sigma \nvdash \varphi$ entonces $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es consistente por la prop 2.1.2 , pero Σ es consistente maximal entonces $\Sigma = \Sigma\{\neg\varphi\}$ entonces $\neg\varphi \in \Sigma$. $\square$

2.1.2. Semántica para la lógica de primer orden

Definición 2.19 *Una $\mathcal{L}$-estructura (o simplemente "estructura") consiste de:*

1. *Un conjunto no vacío llamado dominio de la estructura $dom(\mathcal{A})$*

2. *Para cada $c \in ct(\mathcal{L})$ un $c^{\mathcal{A}}$*

3. *Para cada $R \in Rel(\mathcal{L})$ n-aria una $R^{\mathcal{A}} \subset (dom(\mathcal{A}))^n$*

4. *Para cada $F \in Func(\mathcal{L})$ n-aria una función $F^{\mathcal{A}} : (dom(\mathcal{A}))^n \to dom(\mathcal{A}$*

   Cada término $t(x_1, \ldots, x_n)$ define:
   Si $n = 0$ un elemento del dominio $t^{\mathcal{A}} \in dom(\mathcal{A})$
   Si $n \geq 1$ una función $t^{\mathcal{A}} : (dom(\mathcal{A}))^n \to dom(\mathcal{A})$

Asignación de valores a variables

Definición 2.20 *Definimos una* asignación*, como una función $f : Var \to dom(\mathcal{A})$*

Definición 2.21 *Sea $f : Var \to dom(\mathcal{A})$ asignación, $a \in dom(\mathcal{A})$, definimos $f(x/a) : Var \to dom(\mathcal{A})$ como*

$$f(x/a)(y) = \begin{cases} f(y) & si \quad x \neq y \\ a & si \quad x = y \end{cases}$$

Definición 2.22 *(Valor de un término t para la asignación f)*

1. $t^{\mathcal{A}}[f] = t^{\mathcal{A}}$ *si* $t \in Term_0(\mathcal{L})$

2. $t^{\mathcal{A}}[f] = t^{\mathcal{A}}(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ *si* $t \in Term_n(\mathcal{L})$

Definición 2.23 *φ es* satisfecha *en $\mathcal{A}$ por la asignación f ($\mathcal{A} \Vdash \varphi(f)$) si*

1. *φ atómica: si $\varphi \equiv (t_1 = t_2)$*
   $\mathcal{A} \Vdash \varphi(f)$ sii $t_1^{\mathcal{A}}(f) = t_2^{\mathcal{A}}(f)$

2. *$\varphi \equiv R(t_1, \ldots, t_n)$: $\mathcal{A} \Vdash \varphi(f)$ sii $< t_1^{\mathcal{A}}(f), \ldots, t_n^{\mathcal{A}}(f) > \in R^{\mathcal{A}}$*

3. *$\varphi \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_1)$: $\mathcal{A} \Vdash \varphi(f)$ sii $\mathcal{A} \Vdash \varphi_1(f)$ y $\mathcal{A} \Vdash \varphi_1(f)$*

4. $\varphi \equiv (\neg\psi)$: $\mathcal{A} \Vdash \varphi(f)$ *sii No* $\mathcal{A} \Vdash \psi(f)$

5. $\varphi \equiv \forall\psi$: $\mathcal{A} \Vdash \varphi(f)$ *sii Para todo* $a \in dom(\mathcal{A})$ *se cumple* $\mathcal{A} \Vdash \psi(f(x/a))$

Proposición 2.1.5 *Sean* f, g *asignaciones en* $\mathcal{A}$ *y* φ *una fórmula.*
Si $f \upharpoonright FV(\varphi) = g \upharpoonright FV(\varphi)$ *entonces* $\mathcal{A} \Vdash \varphi(f)$ *sii* $\mathcal{A} \Vdash \varphi(g)$

Demostración 2.1.5.1 *Por inducción en la estructura de* φ.

1. φ *atómica* : $x \in Vl(\varphi)$ *sii* x *ocurre en un término de* φ.
   Si $t \equiv t(x_1, \ldots, x_n)$ *entonces* $f \upharpoonright Vl(t) = g \upharpoonright Vl(t)$, *y claramente* $t^A(f) = t^A(g)$, *esto implica la afirmación en este caso.*

2. $\varphi \equiv (\forall\psi)$: *Como* $x \notin Vl(\varphi)$ *tenemos que* $f(x)$ *y* $g(x)$ *pueden ser distintos para todo* $a \in dom(\mathcal{A})$, $f(x/a)(x) = g(x/a)(x)$ *entonces*
   $f(x/a) \upharpoonright Vl(\varphi) \cup \{x\} = g \upharpoonright FV(\varphi) \cup \{x\}$, *y se puede aplicar la hipótesis de inducción a* ψ *con esas asignaciones.*

3. *Los restantes casos son evidentes.*

Observación 2.1 *Si* $\varphi \equiv \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *y* $\overline{a} =< a_1, \ldots, a_n >\in (dom(\mathcal{A}))^n$, *tiene sentido* $\mathcal{A} \Vdash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ *o* $\mathcal{A} \Vdash \varphi[\overline{a}]$

2.1.3. Teorema de Corrección

Proposición 2.1.6 *Sea* $\mathcal{A}$ $\mathcal{L}$*-estructura,* f *una valuación,* $\varphi \in Form(\mathcal{L})$, x *una variable,* t *un término libre para la variable* x *en* φ, *y* $a = t^{\mathcal{A}}(f)$, *entonces* $\mathcal{A} \models \varphi[f(x/a)] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi(x/t)(f)$

Demostración 2.1.6.1 *Veamos primero que se cumple* $T^{\mathcal{A}}[f(x/a)] = T(x/t)^{\mathcal{A}}[f]$, *para todo* $T \in Term(\mathcal{L})$, *lo haremos por inducción en los términos.*
Si T *es variable* : $T = y$, *si* $y = x$ *entonces* $T^{\mathcal{A}}[f(x/a)] = f(x/a)(x) = a = T(x/t)^{\mathcal{A}}[f] = t^{\mathcal{A}}(f)$.
Si $y \neq x$ *entonces* $T^{\mathcal{A}}[f(x/a)] = f(x/a)(y) = f(y) = y^{\mathcal{A}}[f] = T(x/t)^{\mathcal{A}}[f]$
Si $T = c$ *con* c *constante entonces* $T^{\mathcal{A}}[f(x/a)] = c^{\mathcal{A}} = T(x/t)^{\mathcal{A}}[f]$

Ahora probemos la proposición por inducción en las fórmulas.
Si φ *atómica* : $\varphi = (T = T')$ *entonces* $\mathcal{A} \models (T = T')[f(x/a)]$ *sii* $T^{\mathcal{A}}[f(x/a)] = T'^{\mathcal{A}}[f(x/a)]$ *sii* $T(x/t)^{\mathcal{A}}[f] = T'(x/t)^{\mathcal{A}}[f]$ *sii* $\mathcal{A} \models (T = T')(x/t)[f]$
$\varphi = R(t_1, \ldots, t_n)$ *entonces* $\mathcal{A} \models R(t_1, \ldots, t_n)[f(x/a)]$ *sii* $(t_1^{\mathcal{A}}[f(x/a)], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[f(x/a)]) \in R^{\mathcal{A}}$ *sii* $(t_1(x/t)^{\mathcal{A}}[f], \ldots, t_n(x/t)^{\mathcal{A}}[f]) \in R^{\mathcal{A}}$ *sii* $\mathcal{A} \models R(t_1(x/t), \ldots, t_n(x/t))[f]$ *sii* $\mathcal{A} \models R(t_1, \ldots, t_n)(x/t)[f]$.

Los casos en que $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ *o* $\varphi = \neg\psi$ *son triviales usando la hipótesis de inducción.*

$\varphi = \forall y\psi$: *Primer caso* $y = x$ *o* $x \notin Vl(\psi)$ *entonces* $x \notin Vl(\forall y\psi)$, *por lo tanto* $\mathcal{A} \models \forall y\psi[f(x/a)] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \forall y\psi[f]$ *ya que coinciden en las variables libres,* *además* $\forall y\psi(x/t) = \forall y\psi$ *porque* x *no es libre en* ψ

Segundo caso $x \in FV(\forall y\psi)$ *entonces* $y \neq x$ *e* $x \in FV(\psi)$*, en este caso* y *no ocurre en* ψ *ya que* t *es libre para la variable* x *en* $\forall y\psi$*, entonces para todo* $a' \in dom(\mathcal{A})$ *tenemos que (*)* $a = t^{\mathcal{A}}[f] = t^{\mathcal{A}}[f(y/a')]$. *Sea* $f' = f(y/a')$ *entonces* $\mathcal{A} \models \forall y\psi[f(x/a)]$ *sii*
(por definición de $\models$*)* $\mathcal{A} \models \forall y\psi[f(x/a)(y/a')]$ *para todo* $a' \in dom(\mathcal{A})$

sii (porque $y \neq x$*)* $\mathcal{A} \models \forall y\psi[f'(x/a)]$ *para todo* $a' \in dom(\mathcal{A})$

sii por (*) $\mathcal{A} \models \forall y\psi[f'(x/t^{\mathcal{A}}[f'])]$ *para todo* $a' \in dom(\mathcal{A})$

sii (por hipótesis de inducción con f'*)* $\mathcal{A} \models \psi(x/t)[f']$ *para todo* $a' \in dom(\mathcal{A})$

sii (por definición de f'*)* $\mathcal{A} \models \psi(x/t)[f(y/a')]$ *para todo* $a' \in dom(\mathcal{A})$

sii (por definición de $\models$*)* $\mathcal{A} \models (\forall\psi(x/t))[f]$

sii (porque $y \neq x$*)* $\mathcal{A} \models (\forall\psi)(x/t)[f]$. $\square$

Definición 2.24 *Sea* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subset En(\mathcal{L})$*, decimos que* $\Sigma \models \varphi$ *para toda* $\mathcal{L}$*-estructura* $\mathcal{A}$ *se cumple que para toda* $\sigma \in \Sigma$, $\mathcal{A} \models \sigma$ *entonces* $\mathcal{A} \models \varphi$

Teorema 2.2 *(Teorema de Corrección) Sea* Σ *conjunto de sentencias,* φ *sentencia, entonces* $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \Sigma \models \varphi$.

Demostración 2.2.1 *Sea* $\mathcal{A}$ *modelo de toda fórmula de* Σ*, y* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *una prueba con fórmulas en* Σ*, vamos a probar que* $\mathcal{A} \models \varphi_i$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$. *Lo probaremos por inducción en* n.
Si $n = 1$ *entonces* $\varphi_1 \in \Sigma$ *o* φ_1 *es una axioma lógico, en el primer caso* $\Sigma \models \varphi_1$ *por hipótesis, en el segundo caso si* φ_1 *es una tautología entonces existe* $\Phi(A_1, \ldots, A_m)$ *fórmula proposicional y* $\psi_1, \ldots, \psi_m$ *fórmulas de* $\mathcal{L}$ *tal que* $\varphi_1 = \Phi(A_1/\psi_1, \ldots, A_m/\psi_m)$*, debemos probar entonces que para toda asignación* f *se verifica que* $\mathcal{A} \models \Phi(A_1/\psi_1, \ldots, A_m/\psi_m)[f]$. *Para cada* f *definimos la siguiente función* $v : \{A_i\}_{i\in N} \longrightarrow \{0,1\}$ *tal que* $v(A_i) = \begin{cases} 1 & si \quad \mathcal{A} \models \psi_i[f] \\ 0 & si \quad \mathcal{A} \not\models \psi_i[f] \end{cases}$

Sabemos que la asignación asociada a v *(*$[[]]_v$*) vale 1 en* Φ *(*$[[\Phi]] = 1$*) si* Φ *es tautología.*
Ahora haremos inducción en Φ*, probaremos por inducción la siguiente afirmación* $[[\Phi]]_v = 1$ *sii* $\mathcal{A} \models \Phi(A_1/\psi_1, \ldots, A_m/\psi_m)[f]$.

Si $\Phi = A_i$ *variable proposicional entonces* $[[\Phi]]_v = 1$ *sii* $\mathcal{A} \models \psi_i[f]$ *pero* $\psi[f] = \Phi(A_1/\psi_1, \ldots, A_m/\psi_m)[f]$ *en este caso.*

Si $\Phi = \Phi_1 \wedge \Phi_1$ *entonces* $[[\Phi]] = 1$ *sii* $[[\Phi_1]] = 1$ *y* $[[\Phi_2]] = 1$ *sii (hipótesis de inducción)* $\mathcal{A} \models \Phi_1(A_1/\psi_1, \ldots, A_m/\psi_m)[f]$ *y* $\mathcal{A} \models \Phi_2(A_1/\psi_1, \ldots, A_m/\psi_m)[f]$ *sii* $\mathcal{A} \models \Phi(A_1/\psi_1, \ldots, A_m/\psi_m)[f]$.

Si $\Phi = \neg\Phi_1$ *entonces* $[[\Phi]] = 1$ *sii* $[[\Phi_1]] = 0$ *sii (hipótesis de inducción)* $\mathcal{A} \not\models \Phi(A_1/\psi_1, \ldots, A_m/\psi_m)[f]$ *sii* $\mathcal{A} \models \neg\Phi_1(A_1/\psi_1, \ldots, A_m/\psi_m)[f]$.

Si φ es una axioma de igualdad: $\varphi = (x = x)$ es obvio. Si $\varphi = ((x = y) \to t(z_1, \ldots z_{i-1}, x, z_{i+1}, \ldots, z_n) = t(z_1, \ldots z_{i-1}, y, z_{i+1}, \ldots, z_n))$.
Sea f valuación debemos probar que $\mathcal{A} \models ((x = y) \to t(z_1, \ldots z_{i-1}, x, z_{i+1}, \ldots, z_n) = t(z_1, \ldots z_{i-1}, y, z_{i+1}, \ldots, z_n))[f]$ pero esto es cierto sii $\mathcal{A} \models (x = y)[f]$ implica $\mathcal{A} \models t(z_1, \ldots z_{i-1}, x, z_{i+1}, \ldots, z_n) = t(z_1, \ldots z_{i-1}, y, z_{i+1}, \ldots, z_n))[f]$ pero $\mathcal{A} \models (x = y)[f]$ sii $f(x) = f(y)$ pero entonces $t^{\mathcal{A}}(f(z_1), \ldots f(z_{i-1}), f(x), z_{i+1}, \ldots, z_n) = t^{\mathcal{A}}(f(z_1), \ldots f(z_{i-1}), f(y), z_{i+1}, \ldots, z_n)$

Si $\varphi = ((x = y) \to (\psi(x/z) \to \psi(y/z)))$, hay que ver que para toda asignación f se cumple que $\mathcal{A} \models ((x = y) \to (\psi(x/z) \to \psi(y/z)))[f]$ pero esto se cumple sii $\mathcal{A} \models ((x = y)[f]$ implica $\mathcal{A} \models (\psi(x/z) \to \psi(y/z)))[f]$ entonces debemos demostrar que si $f(x) = f(y)$ entonces $\mathcal{A} \models \psi(x/z)[f]$ implica que $\mathcal{A} \models \psi(x/z)[f]$ pero esto es claro haciendo inducción en ψ.

φ es un axioma cuantificacional: Si $\varphi = (\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\psi))$ con $x \notin Vl(\varphi)$.
Debemos demostrar que para toda asignación f se cumple que $\mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\psi))[f]$, esto es que $\mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \to \psi))[f]$ implica que

$\mathcal{A} \models (\varphi \to \forall x\psi))[f]$

y esto es lo mismo que demostrar que para todo $a \in dom(\mathcal{A})$, $\mathcal{A} \models (\varphi \to \psi)[f(x/a)]$ implica que

si $\mathcal{A} \models \varphi[f]$ entonces para todo $a \in dom(\mathcal{A})$, $\mathcal{A} \models \psi[f(x/a)]$

pero esto a su vez es lo mismo que demostrar que si para todo $a \in dom(\mathcal{A})$, $\mathcal{A} \models \varphi[f(x/a)]$ implica $\mathcal{A} \models \psi[f(x/a)]$ entonces

si $\mathcal{A} \models \varphi[f]$ implica que para todo $a \in dom(\mathcal{A})$, $\mathcal{A} \models \psi[f(x/a)]$. Pero como $x \notin Vl(\varphi)$ entonces $\mathcal{A} \models \varphi[f]$ sii $\mathcal{A} \models \varphi[f(x/a)]$ con lo que queda demostrado este caso.

Si $\varphi = (\forall x\psi \to \psi(t/x))$ donde t es un término libre para una variable x en una fórmula ψ, entonces tenemos que probar que si f es una asignación se cumple que $\mathcal{A} \models (\forall x\psi \to \psi(t/x))[f]$, y eso es lo mismo que probar que si $\mathcal{A} \models \psi[f(x/a)]$ para todo $a \in dom(\mathcal{A})$ entonces $\mathcal{A} \models \psi(x/t)[f]$, pero entonces si $\mathcal{A} \models \psi[f(x/a)]$, $a \in dom(\mathcal{A})$, en particular para $a = t^{\mathcal{A}}[f]$ y por el por la proposición que ya probamos tenemos que esto implica $\mathcal{A} \models \psi(x/t)[f]$.

Con lo anterior queda probado el caso en que $n = 1$, ahora probemos para que si se cumple para todo $j < n$ entonces se cumple para n, si φ_n es un axioma lógico o $\varphi \in \Sigma$ ya queda probado por el caso base.

Si φ_n se obtiene por modus ponens, entonces existen $j, k < n$ tal que $\varphi_i = \varphi_k \to \varphi_n$, y por hipótesis de inducción tenemos que $\mathcal{A} \models \varphi_i[f]$ y $\mathcal{A} \models \varphi_k[f]$, entonces por la definición de $\models$ tenemos que $\mathcal{A} \models \varphi_n[f]$.

Si φ_n se obtiene por generalización,entonces existe $j < n$ tal que $\varphi_n = \forall x \varphi_j$ entonces por hipótesis de inducción $\mathcal{A} \models \varphi_j[f]$ para toda f asignación, entonces para toda f asignación y todo $a \in dom(\mathcal{A})$ se cumple que $\mathcal{A} \models \varphi_j[f(x/a)]$ entonces $\mathcal{A} \models \forall x \varphi_j[f]$. $\square$

Proposición 2.2.1 *Sea Σ conjunto de sentencias, se cumple que si Σ tiene un modelo entonces Σ es consistente.*

Demostración 2.2.1.1 *Supongamos que Σ es inconsistente entonces existe φ sentencia tal que $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$, sea $\mathcal{A} \models \Sigma$, por el teorema de corrección tenemos que $\mathcal{A} \models \varphi \wedge \neg\varphi$ absurdo.* $\square$

2.1.4. Subestructuras y morfismo de estructuras

Definición 2.25 *(Teoría de una estructura) Definimos la teoría de una $\mathcal{L}$-estructura ($Th(\mathcal{A})$) como $Th(\mathcal{A}) = \{\varphi \in En(\varphi) : \mathcal{A} \models \varphi\}$*

Definición 2.26 *Decimos que $\Sigma \subset En(\mathcal{L})$ es* completo *si para toda $\varphi \in En(\mathcal{L}$, se cumple que $\varphi \in \Sigma$ o $\neg(\varphi) \in \Sigma$*

Definición 2.27 *Decimos que $\Sigma \subset En(\mathcal{L})$ es* ***deductivamente cerrado*** *si siempre que $\varphi \to \psi, \varphi \in \Sigma$ entonces $\psi \in \Sigma$*

Observación 2.2 *$Th(\mathcal{A})$ es un conjunto de enunciados consistente, completo y deductivamente cerrado.*

Definición 2.28 *(Equivalencia elemental) Decimos que dos $\mathcal{L}$-estructuras $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ son* elementalmente equivalentes *($\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$) sii $Th(\mathcal{A}) = Th(\mathcal{B})$*

Observación 2.3 *La equivalencia elemental no implica isomorfismo, ejemplo la teoría de los grupos abelianos divisibles sin torsión, tiene modelos de cualquier cardinalidad infinita.*

(G es divisible si para todo $g \in G$, y para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $h \in G$ tal que $nh = g$)

Definición 2.29 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras, decimos que $\mathcal{A}$ es* subestructura *de $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$) si:*

1. *$dom(\mathcal{A}) \subset dom(\mathcal{B})$*

2. *Para todo $c \in ct(\mathcal{L})$, $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$*

3. *Para toda $R \in Rel(\mathcal{L})$ n-aria todas $a_1, \ldots, a_n \in dom(\mathcal{A}$ se cumple que $< a_1, \ldots, a_n > \in R^{\mathcal{A}}$ sii $< a_1, \ldots, a_n > \in R^{\mathcal{B}}$ ($R^{\mathcal{B}} \cap (dom(\mathcal{A}))^n = R^{\mathcal{A}}$*

4. *Para toda $F \in Func(\mathcal{L})$ n-aria, y todas $a_1, \ldots, a_n \in dom(\mathcal{A}$ se cumple que $F^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = F^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)$ ($F^{\mathcal{A}} \upharpoonright (dom(\mathcal{A}))^n = F^{\mathcal{A}}$)*

Definición 2.30 *Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras, decimos que $\mathcal{A}$ es una* subestructura elemental *de $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$) si:*

1. *$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$*

2. *Para toda $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ y todas $a_1, \ldots, a_n \in dom(\mathcal{A})$ se cumple que $\mathcal{A} \Vdash \varphi[\overline{a}]$ sii $\mathcal{B} \Vdash \varphi[\overline{a}]$, también decimos que $\mathcal{B}$ es una* extensión elemental *de $\mathcal{A}$*

Observación 2.4 *$\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ entonces $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$*

Definición 2.31 *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras, decimos que $f : dom(\mathcal{A}) \longrightarrow dom(\mathcal{B})$ es un* morfismo de estructuras *si:*

1. *Para todo $c \in ct(\mathcal{L})$ se cumple que $f(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$*

2. *Para toda $R \in Rel(\mathcal{L})$ n-aria y toda $\overline{a} \in (dom(\mathcal{A}))^n$ se cumple que si $\overline{a} \in R^{\mathcal{A}}$ entonces $f(\overline{a}) \in R^{\mathcal{B}}$*
   $f(\overline{a}) =< f(a_1, \ldots, f(a_n) >$, con $\overline{a} =< a_1, \ldots, a_n >$

3. *Para toda $F \in Func(\mathcal{L})$ n-aria, y toda $\overline{a} \in (dom(\mathcal{A}))^n$ se cumple que $f(F^{\mathcal{A}}(\overline{a})) = F^{\mathcal{B}}(f(\overline{a}))$*

Definición 2.32 *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras, decimos que $f : dom(\mathcal{A}) \longrightarrow dom(\mathcal{B})$ es un* monomorfismo *si:*

1. *f es inyectiva*

2. *Para toda $R \in Rel(\mathcal{L})$ n-aria y todo $\overline{a} \in (dom(\mathcal{A}))^n$ se cumple que $\overline{a} \in R^{\mathcal{A}}$ sii $f(\overline{a}) \in R^{\mathcal{B}}$*

Definición 2.33 *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras, decimos que $f : dom(\mathcal{A}) \longrightarrow dom(\mathcal{B})$ es un* isomorfismo *($\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$) si:*

1. *f es un $\mathcal{L}$-morfismo de estructuras biyectivo.*

2. *f^{-1} es un $\mathcal{L}$ morfismo de estructuras.*

Observación 2.5 *Puede haber $\mathcal{L}$-morfismo de estructuras biyectivos que no sean isomorfismo.*
Ejemplo : Sea $\mathcal{L}$ lenguaje con un símbolo de predicado P (relación 1-aria)
$dom(\mathcal{A}) = dom(\mathcal{B}) = \mathbb{N}$
$P^{\mathcal{A}} :=$ Soy un cuadrado.
$P^{\mathcal{A}} :=$ Soy una potencia sexta.
La identidad $Id : dom(\mathcal{A}) \longrightarrow dom(\mathcal{B})$ no es un isomorfismo y tampoco es un monomorfismo.

Observación 2.6 *En la definición de monomorfismo no es necesaria la afirmación de que f es inyectiva porque la igualdad esta en el lenguaje, en efecto $f(a_1) = f(a_2)$ entonces si $\mathcal{B} \Vdash (x_1 = x_2)[f(a_1), f(a_2)]$ entonces $\mathcal{A} \Vdash (x_1 = x_2)[a_1, a_1]$*

Definición 2.34 *(*Unión de estructuras*) Sea $\{\mathcal{A}\}_{i\in I}$ una familia de $\mathcal{L}$-estructuras dirigida por la inclusión (para todo $i, j \in I$, existe $k \in I$ tal que $\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_k$). En el conjunto $\mathcal{A} = \bigcup_{i\in I} dom(\mathcal{A}_i)$ se puede definir una $\mathcal{L}$ estructura $\mathcal{A}$ de la siguiente manera:*

1. *Para cada $c \in ct(\mathcal{L})$ $c^{\mathcal{A}} := c^{\mathcal{A}_i}$ para un i cualquiera.*
2. *Para cada $R \in Rel(\mathcal{L})$ $R^{\mathcal{A}} := \bigcup_{i\in I} R^{\mathcal{A}_i}$*
3. *Para cada $F \in Func(\mathcal{L})$ $F^{\mathcal{A}} := \bigcup_{i\in I} F^{\mathcal{A}_i}$*

Proposición 2.2.2 *(Criterio de inclusión elemental) Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ sii $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ y para toda fórmula $\varphi(x_1, \ldots, a_n)$ y toda $\overline{a} \in (dom(\mathcal{A}))^n$ se cumple que $\mathcal{B} \Vdash (\exists x\varphi)[\overline{a}] \Rightarrow \mathcal{A} \Vdash (\exists x\varphi)[\overline{a}]$*

Demostración 2.2.2.1 *(Directo) : Evidente.*

(Reciproco): Por inducción en las fórmulas, hay que ver que para toda fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y para todo $\overline{a} \in (dom(\mathcal{A}))^n$, se verifica que $\mathcal{A} \Vdash \varphi[\overline{a}] \Leftrightarrow \mathcal{B} \Vdash \varphi[\overline{a}]$

1. *φ atómica : Surge de la definición de $\subset$*
2. *Para $\varphi \wedge \psi$ y $\neg\varphi$ es obvio*
3. *Para $\varphi = (\exists x\psi)$ la dirección ($\Leftarrow$) es la hipótesis.*
   Si $\mathcal{A} \Vdash \exists\psi[\overline{a}]$, entonces existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \Vdash \psi[x, \overline{a}]$, y por hipótesis de inducción $\mathcal{B} \Vdash \psi[x, \overline{a}] \Rightarrow \mathcal{B} \Vdash \exists x\psi[\overline{a}]$

Definición 2.35 *(*subestructura generada *Sea $X \subset dom(A)$, $X \neq \emptyset$, la subestructura de $\mathcal{A}$ generada por X ($< X >$) $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ tal que :*

1. *$X \subset dom(\mathcal{B})$*
2. *$\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$, $X \subset dom(\mathcal{D}) \Rightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{D}$*

Proposición 2.2.3 *Sea $\mathcal{A}$ $\mathcal{L}$-estructura , $X \subset dom(\mathcal{A})$, entonces existe $< X > \subset \mathcal{A}$ subestructura generada, además $card(dom(< X >) \leq Máximo\{card(X), card(\mathcal{L})\}$, donde $card(\mathcal{L}) = Máximo\{\aleph_0, card(ct(\mathcal{L}), card(Real(\mathcal{L}), card(Func(\mathcal{L})\}$*

Demostración 2.2.3.1 *$< X >$ se construye de la siguiente manera: por inducción en $\mathbb{N}$ definimos $X_0 := X \cup \{c^{\mathcal{A}}, c \in \mathcal{L}\{$*
$X_{n+1} = X_n \cup \{F^{\mathcal{A}}(\overline{x}) : \overline{x} \in (X_n)^m, F \in Func_m(\mathcal{L}),\ m \in \mathcal{N}\}$
$dom(< X >) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$

Teorema 2.3 *Sea $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras y $\varphi \in Form(\mathcal{L})$, entonces si $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \Vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \Vdash \varphi$*

Demostración 2.3.1 *Sea $g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ isomorfismo, por inducción en la estructura de φ:*

1. *φ atómica : $\varphi = (t_1 = t_2)$, $mathcalA \Vdash \varphi[\overline{a}] \Leftrightarrow t_1^{\mathcal{A}}[\overline{a}] = t_2^{\mathcal{A}}[\overline{a}] \Leftrightarrow g(t_1^{\mathcal{A}}[\overline{a}]) = g(t_2^{\mathcal{A}}[\overline{a}]) \Leftrightarrow t_1^{\mathcal{B}}[g(\overline{a})] = t_2^{\mathcal{B}}[g(\overline{a})]$ como g es sobreyectiva se cumple que para todo $\overline{b} \in dom(\mathcal{B})^n$ existe $\overline{a} \in dom(\mathcal{A})^n$ tal que $g(\overline{a}) = \overline{b}$, entonces tenemos $t_1^{\mathcal{B}}[\overline{b}] = t_2^{\mathcal{B}}[\overline{b}]$ entonces $\mathcal{B} \Vdash \varphi[\overline{b}]$.*

   Si $\varphi = R(t_1, \ldots, t_n)$, $\mathcal{A} \Vdash R(t_1^{\mathcal{A}}[\overline{a}], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[\overline{a}] \Leftrightarrow < t_1^{\mathcal{A}}[\overline{a}], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[\overline{a}] > \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow < g(t_1^{\mathcal{A}}[\overline{a}]), \ldots, g(t_n^{\mathcal{A}}[\overline{a}]) > \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow < t_1^{\mathcal{A}}[g(\overline{a})], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[g(\overline{a})] > \in R^{\mathcal{B}}$, mismo argumento que antes como g es sobreyectiva podemos concluir que $\mathcal{B} \Vdash R(t_1^{\mathcal{B}}[\overline{b}], \ldots, t_n^{\mathcal{B}}[\overline{b}]$.

2. *Para $\varphi = \neg\psi$, $\varphi = \varphi_1 = \wedge\varphi_2$ y $\varphi = \forall x \psi$ es evidente usando la hipótesis de inducción.*

2.2. Restricción y expansión del lenguaje

Definición 2.36 *Sean $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ lenguajes tal que $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2$ $(ct(\mathcal{L}_1) \subset ct(\mathcal{L}_2))$, dada $\mathcal{A}$ $\mathcal{L}_2$-estructura y $\mathcal{B}$ $\mathcal{L}_1$-estructura entonces podemos definir $\mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{L}_1$-estructura tal que $dom(\mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{L}_1) = dom(\mathcal{A})$ de la manera obvia. En este caso decimos que $\mathcal{A}$ es una* expansión *de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{L}_2$*

Definición 2.37 *(*restricción del dominio*) Sea $X \subset dom(\mathcal{A})$ tal que :*

1. *$c^{\mathcal{A}} \in X$ para todo $c \in ct(\mathcal{L})$*

2. *$F^{\mathcal{A}}(\overline{x}) \in X$ para todo $\overline{x} \in X^m$ y toda función $F \in Fuc_m(\mathcal{L})$. Entonces podemos definir $\mathcal{A} \upharpoonright$ como*

   * *$c^{\mathcal{A}\upharpoonright X} = c^{\mathcal{A}}$*

* *$R^{\mathcal{A}\upharpoonright X} = R^{\mathcal{A}} \cap X^m$*

* *$F^{\mathcal{A}\upharpoonright X}(\overline{x}) = F^{\mathcal{A}}(\overline{x})$, para $\overline{x} \in X^m$*

2.2.1. Expansión por constantes y método de los diagramas

Definición 2.38 *Sea $\mathcal{L}$ lenguaje, C conjunto tal que $C \cap ct(\mathcal{L}) = \emptyset$ entonces $\mathcal{L} \cup \{C\}$ es una* expansión por constantes . *Sea $\mathcal{A}$ $\mathcal{L}$-estructura se puede extender a una $\mathcal{L}_C$-estructura eligiendo una función $f : C \longrightarrow dom(\mathcal{A})$ y poniendo $\mathcal{A}' \upharpoonright \mathcal{L} = \mathcal{A}$ y $c^{\mathcal{A}'} = f(c)$ para cada $c \in C$.*

Definición 2.39 *Sea $X \subset dom(\mathcal{A})$ y $C = \{c_x : x \in X\}$ tal que si $x \neq y$ entonces $c_x \neq c_y$, entonces $\mathcal{B} =< \mathcal{A}, x >_{x \in X}$ es la expansión tal que $c_x^{\mathcal{B}} = x$, definimos $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}_C$*

Definición 2.40 *Notamos $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$* diagrama positivo *a el conjunto definido de la siguiente manera: $\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{A})$ ($\mathcal{L}(dom(\mathcal{A}))$) : $\varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \in \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \Vdash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$, para $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ atómica y $a_1, \ldots, a_n \in dom(\mathcal{A})$*

Definición 2.41 *Notamos $\mathcal{D}(\mathcal{A})$* diagrama *de $\mathcal{A}$ al conjunto definido por:*
$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \cup \{\neg\varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) : \mathcal{A} \Vdash \varphi[a_1, \ldots, a_n]\ \}$

Definición 2.42 *Notamos $\mathcal{D}^c(\mathcal{A})$* diagrama completo*, al conjunto definido de la siguiente manera:*
$\varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \in \mathcal{D}^c(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \Vdash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$

2.3. Teorema de Completitud

2.3.1. Construcción de modelos por constantes

Definición 2.43 *Sea $C \subset CT(\mathcal{L})$ y $T \subset En(\mathcal{L})$ decimos que C es un* conjunto de testigos *para T sii para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x)$ (a lo más una variable libre) existe $c \in C$ tal que $T \vdash \exists x\varphi \rightarrow \varphi(c/x)$*

Proposición 2.3.1 *Sea T conjunto de $\mathcal{L}$ enunciados consistente, c una constante nueva, y $\varphi(x)$ $\mathcal{L}$ fórmula, entonces $T \cup \{\exists x\varphi \rightarrow \varphi(c)\}$ es consistente.*

Demostración 2.3.1.1 *Sea $T' = T \cup \{\exists x\varphi \rightarrow \varphi(c)\}$, supongamos que T' es inconsistente, entonces $T \vdash \neg(\exists x\varphi \rightarrow \varphi(c))$ entonces $T \vdash \exists x\varphi \wedge \neg\varphi(c)$, entonces $T \vdash \exists x\varphi$ y $T \vdash \neg\varphi(c)$, pero como c no ocurre en T podemos introducir el cuantificador universal, por lo cual resulta que $T \vdash \forall x\neg\varphi$, entonces $T \vdash \neg\exists x\varphi$, pero entonces T es consistente, absurdo.* $\Box$

Proposición 2.3.2 *Sea T un conjunto consistente de $\mathcal{L}$ enunciados, C conjunto de constantes nuevas ($C \cap CT(\mathcal{L})$), con $card(C) = card(\mathcal{L})$, sea $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_\mathcal{C} = \mathcal{L} \cup C$. Entonces existe un conjunto consistente $T' \supseteq T$ de enunciados de $\mathcal{L}'$ que tiene a C como conjunto de testigos.*

Demostración 2.3.2.1 *Sea $\kappa = card(\mathcal{L}$, sea $C = \{c_\gamma : \gamma < \kappa\{$, es decir bien ordeno el conjunto C, el conjunto $Form_1(\mathcal{L}')$ tiene cardinalidad κ, usando nuevamente el axioma de elección tenemos que $Form_1(\mathcal{L}') = \{\varphi_\gamma : \gamma < \kappa\}$, usando la proposición anterior construimos una sucesión de teorías consistentes de $\mathcal{L}'$ de la siguiente manera.*
$T_0 = T$

Si $\gamma < \kappa$ es ordinal límite entonces definimos $T_\gamma = \cup_{\alpha<\gamma} T_\alpha$.

Si $\gamma < \kappa$ es $\gamma = \alpha + 1$, definimos $T_\gamma = T_\alpha \cup \{\exists x \varphi_\gamma \to \varphi(c_\gamma)\}$. $\Box$

2.3.2. Álgebra de términos constantes

Definición 2.44 *Sea Σ una teoría consistente en un lenguaje $\mathcal{L}$, dados $t_1, t_2 \in Term_0(\mathcal{L}) \neq \emptyset$ (términos constantes), definimos la siguiente relación.*
$t_1 \sim t_2$ sii $\Sigma \vdash t_1 = t_2$

Proposición 2.3.3 *la relación $\sim$ definida anteriormente es de equivalencia.*

Demostración 2.3.3.1 *Como $\Sigma \vdash t = t$ entonces claramente $t \sim t$, como $\Sigma \vdash t_1 = t_2$ sii $\Sigma \vdash t_2 = t_1$, entonces $t_1 \sim t_2$ sii $t_2 \sim t_1$.*
Si $t_1 \sim t_2$ y $t_2 \sim t_3$ entonces $\Sigma \vdash t_1 = t_2$ y $\Sigma \vdash t_2 = t_3$, entonces por la regla de la igualdad tenemos que $\Sigma \vdash t_1 = t_3$. $\Box$

Definición 2.45 *Sea Σ teoría consistente en un lenguaje $\mathcal{L}$, definimos el álgebra de términos constantes (τ_Σ) como la $\mathcal{L}$ estructura siguiente.*

- *$dom(\tau_\Sigma) := Term_0(\mathcal{L})/\sim$*

- *Si $c \in CT(\mathcal{L})$ definimos $c^\tau := c/\sim$.*

- *Si $R \in Rel_n(\mathcal{L})$ y $t_1, \ldots, t_n \in Term_0(\mathcal{L})$, definimos R^τ de la siguiente manera.*
$(t_1/\sim, \ldots, t_n/\sim) \in R^\tau$ sii $\Sigma \vdash R(t_1, \ldots, t_n)$

- *Si $F \in Fun_n(\mathcal{L})$ y $t_1, \ldots, t_n \in Term_0(\mathcal{L})$, definimos la siguiente función $F^\tau(t_1/\sim, \ldots, t_n/\sim) = F(t_1, \ldots, t_n)/\sim$.*

Tenemos que ver que lo anterior esta definido correctamente, es decir no depende del representante elegido.
Veamos que si $R \in Rel_n(\mathcal{L})$ y $t_i \sim t_i'$ para $i = 1, \ldots, t_n$, entonces $\Sigma \vdash R(t_1, \ldots, t_n)$ sii $\Sigma \vdash R(t_1', \ldots, t_n')$.
Por el axioma 3 de igualdad tenemos que $t_1 = t_1' \to R(t_1, t_2, \ldots, t_n) = R(t_1', t_2, \ldots, t_n)$ es un axioma lógico, haciendo lo mismo para el resto de los t_i y aplicando modus ponens tenemos que $\Sigma \vdash R(t_1, \ldots, t_n)$ entonces $\Sigma \vdash R(t_1', \ldots, t_n')$., por simetría tenemos el si y solo si.
Para las funciones es exactamente igual pero usamos el axioma 2 de igualdad.

Proposición 2.3.4 *Sea $T(x_1, \ldots, x_n) \in Ter(\mathcal{L})$ y $t_1, \ldots, t_n \in Term_0(\mathcal{L})$ entonces se cumple que $T(t_1, \ldots, t_n)/\sim = T[t_1/\sim, \ldots, t_n/\sim]$*

Demostración 2.3.4.1 *Inducción en los términos. Si T es una constante o una variable es evidente. Sea $T = f(T_1, \ldots, T_m)$ entonces $T(t_1, \ldots, t_n) = f(T_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, T_m(t_1, \ldots, t_n))$ entonces $T(t_1, \ldots, t_n)/\sim = f(T_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, T_m(t_1, \ldots, t_n)/\sim$ pero $f(T_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, T_m(t_1, \ldots, t_n)/\sim) = f^\tau(T_1(t_1, \ldots, t_n)/\sim, \ldots, T_m(t_1, \ldots, t_n)/\sim) = T[T_1(t_1, \ldots, t_n)/\sim, \ldots, T_m(t_1, \ldots, t_n)/\sim]$, pero por hipótesis de inducción $T_i(t_1, \ldots, t_n)/\sim = T_i[t_1/\sim, \ldots, t_n/\sim]$ para todo $i = 1, \ldots, m$ por lo tanto $T(t_1, \ldots, t_n)/\sim = T[T_1[t_1/\sim, \ldots, t_n/\sim], \ldots, T_m[t_1/\sim, \ldots, t_n/\sim]] = T[t_1/\sim, \ldots, t_n/\sim]$.* $\Box$

Proposición 2.3.5 *Sea $\Sigma \subset Form(\mathcal{L})$ conjunto consistente maximal de enunciados con testigos en $\mathcal{L}$. Para toda $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in Form_n(\mathcal{L})$ y $t_1, \ldots, t_n \in Term_0(\mathcal{L})$ se cumple que $\tau_\Sigma \models \varphi[t_1/\sim, \ldots, t_n/\sim] \Leftrightarrow \Sigma \vdash \varphi(t_1, \ldots, t_n) =$ (por esto es que en el teorema de completitud usamos sentencias y no fórmulas en general)*

Demostración 2.3.5.1 *Por inducción en las fórmulas.*
Si φ es atómica: $\Sigma \vdash (T = T')(t_1, \ldots, t_n)$ con $T, T' \in Term(\mathcal{L})$ entonces como $\Sigma \vdash T(t_1, \ldots, t_n) = T'(t_1, \ldots, t_n)$ tenemos que $T(t_1, \ldots, t_n)/\sim = T'(t_1, \ldots, t_n)/\sim$ por lo tanto $T(t_1/\sim, \ldots, t_n/\sim) = T(t_1/\sim, \ldots, t_n/\sim)$ entonces $\tau \models (T = T')[t_1/\sim, \ldots, t_n/\sim]$.
Si $\varphi = R(T_1, \ldots, T_m)$ y $\Sigma \vdash R(T_1, \ldots, T_m)(t_1, \ldots, t_n)$ sii $\Sigma \vdash R(T_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, T_m(t_1, \ldots, t_n))$ sii(por definición de τ) $(T_1[t_1, \ldots, t_n)/\sim, \ldots, T_m(t_1, \ldots, t_n)/\sim) \in R^\tau$ sii $(T_1[t_1/\sim, \ldots, t_n/\sim], \ldots, T_m[t_1/\sim, \ldots, t_n/\sim] \in R^\tau)$ sii $\tau \models R[t_1/\sim, \ldots . t_n/\sim]$.

Si $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$: $\Sigma \vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_1)(t_1, \ldots, t_n)$ sii $\Sigma \vdash (\varphi_1(t_1, \ldots, t_n) \wedge \varphi_1(t_1, \ldots, t_n))$ sii $\Sigma \vdash \varphi_1(t_1, \ldots, t_n)$ y $\Sigma \vdash \varphi_2(t_1, \ldots, t_n)$ y por hipótesis de inducción sii $\tau \models \varphi_1[t_1/\sim, \ldots, t_n/\sim]$ y $\tau \models \varphi_2[t_1/\sim, \ldots, t_n/\sim]$ sii $\tau \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[t_1/\sim, \ldots, t_n/\sim]$

Si $\varphi = \neg\psi$: $\Sigma \vdash (\neg\psi)(t_1, \ldots, t_n)$ sii $\Sigma \vdash \neg(\psi(t_1, \ldots, t_n))$ por ser Σ deductivamente cerrado sii $\neg\psi(t_1, \ldots, t_n) \in \Sigma$ y por la prop 2.1.4 $\psi(t_1, \ldots, t_n) \notin \Sigma$ sii $\Sigma \nvdash \psi(t_1, \ldots, t_n)$ y por hipótesis de inducción no $\tau \models \psi[t_1/\sim, \ldots, t_n/\sim]$ sii $\tau \models \neg\psi[t_1/\sim, \ldots, t_n/\sim]$.

Si $\varphi = \exists x_0 \psi(x_0, \ldots, x_n)$: Sea $\Sigma \vdash \exists x_1 \psi(x_0, t_1 \ldots, t_n)$, por existencia de testigos sabemos que existe c constante tal que $\Sigma \vdash \exists x_0 \psi(x_0, t_n, \ldots, x_n) \to \psi(c, t_n, \ldots, t_n)$, aplicando modus ponens tenemos que $\Sigma \vdash \psi(c, t_n, \ldots, t_n)$, por hipótesis de inducción existe $t \in Term_0(\mathcal{L})$ tal que $\tau \models \psi[t/\sim, t_1/\sim, \ldots, t_n/\sim]$ entonces $\tau \models \exists x_0 \psi[x_0, t_1/\sim, \ldots, t_n/\sim]$. $\square$

Teorema 2.4 *(Teorema de Completitud) Sea Σ conjunto de sentencias, se cumple que si Σ es consistente entonces Σ tiene un modelo.*

Demostración 2.4.1 *Como Σ es consistente sabemos que existe $\Sigma' \supseteq \Sigma$ consistente en $\mathcal{L}'$ extensión de $\mathcal{L}$ tal que tiene testigos, usando el lema de Zorn encontramos $\Sigma'' \supseteq \Sigma'$ consistente maximal, obviamente si Σ' tenía testigos Σ'' también, por lo que obtuvimos un conjunto $\Sigma'' \supseteq \Sigma$ en $\mathcal{L}'$ consistente maximal, ahora por el teorema anterior $\tau_{\Sigma''} \models \Sigma''$ entonces $\tau_{\Sigma''} \models \Sigma$. $\square$*

Proposición 2.4.1 *Sea Σ conjunto de sentencias, entonces Σ es consistente sii Σ tiene un modelo.*

Demostración 2.4.1.1 *Simplemente juntamos corrección y completitud. $\square$*

Teorema 2.5 *(Teorema de Completitud Semántica) Sea Σ conjunto de sentencias y φ sentencia, se cumple que si $\Sigma \models \varphi$ entonces $\Sigma \vdash \varphi$.*

Demostración 2.5.1 *Supongamos que $\Sigma \nvdash \varphi$ entonces $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es consistente, entonces por el teorema de completitud existe $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \models \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ entonces $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ y $\mathcal{A} \models \Sigma$ entonces por hipótesis $\mathcal{A} \models \varphi$ absurdo.$\square$*

Capítulo 3

Teoría Axiomática de Categorías

3.1. Lenguaje de primer orden para categorías

En esta sección presentamos un lenguaje de primer orden para la teoría de categorías.
Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden clásico con igualdad y con los siguientes símbolos de función adicionales:

D símbolo de función 1-ario
C símbolo de función 1-ario
y K símbolo de relación 3-ario

Símbolos lógicos: $\neg$, $\wedge$, $\forall$, $=$

Variables: x_i para todo i número natural

Símbolos de puntuación: , (.)
A este lenguaje lo llamaremos lenguaje para la teoría de categorías y lo notaremos $\mathcal{C}$

Definición 3.1 *(Clasificación de los elementos) Definimos* $Morf(x) := (x \neq D(x) \wedge x \neq C(x))$, *decimos que si vale* $Morf(x)$, x *es un morfismo, Notaremos* $Morf(\mathcal{C})$ *a la clase de todos los morfismos.*
Definimos $Obj(x) := \exists y(x = D(y) \vee x = C(y))$, *decimos que si vale* $Obj(x)$, x *es un objeto*
Notaremos $Obj(\mathcal{C})$ *a la clase de todos los objetos.*

Observación 3.1 *Si* x *no es morfismo entonces* x *es objeto. Por lo tanto vale* $\forall x(Obj(x) \vee Morf(x))$

Dualidad

Definición 3.2 ***Término dual***
Sea t *término definimos* t^d *(término dual) inductivamente*

Si $t = x$ *entonces* $t^d = t$

Si $t = C(t_1)$ *entonces* $t^d = D(t_1^d)$

Si $t = D(t_1)$ *entonces* $t^d = C(t_1^d)$

Definición 3.3 ***Fórmula dual***
Sea φ *fórmula de L, definimos* φ^d *(fórmula dual) inductivamente*

Si $\varphi = (t_1 = t_2)$ *entonces* $\varphi^d = (t_1^d = t_2^d)$

Si $\varphi = K(t_1, t_2, t_3)$ *entonces* $\varphi^d = K(t_2^d, t_1^d, t_3^d)$

Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ *entonces* $\varphi^d = (\varphi_1^d \wedge \varphi_2^d)$

Si $\varphi = (\forall x \varphi_1)$ *entonces* $\varphi^d = (\forall x \varphi_1^d)$

Proposición 3.0.1 *Sea* φ *tautología en* $\mathcal{L}$ *entonces* φ^d *es una tautología en* $\mathcal{L}$

Demostración 3.0.1.1 *Si* φ *es una tautología entonces existe* Φ *tautología en PROP y* φ_i *fórmulas en C tal que* $\varphi = \Phi(A_1/\varphi_1, ..., A_n/\varphi_n)$
Demostremos que para toda Φ *en PROP y* φ_i *fórmulas en C se cumple:*
$\varphi = \Phi(A_1/\varphi_1, ..., A_n/\varphi_n)$ *entonces* $\varphi^d = \Phi(A_1/\varphi_1^d, ..., A_n/\varphi_n^d)$
Inducción en PROP:
Si $\Phi = A$ *con A símbolo proposicional entonces si* $\varphi = \Phi(A_1/\varphi_1, ..., A_n/\varphi_n)$
entonces $\varphi = \varphi_i$ *para algún i entonces* $\varphi^d = \varphi_i^d$ *entonces* $\varphi^d = \Phi(A_1/\varphi_1^d, ..., A_n/\varphi_n^d)$
Si $\Phi = \neg\Phi_1$ *y* $\varphi = (\neg\Phi_1)(A_1/\varphi_1, ...\varphi_n)$
pero $\varphi = (\neg\Phi_1)(A_1/\varphi_1, ..., A_n/\varphi_n) = (\neg(\Phi_1(A_1/\varphi_1, ...\varphi_n))$ *pero si* $\psi = \Phi(A_1/\varphi_1, ..., A_n/\varphi_n)$
entonces $\varphi^d = \neg\psi^d$ *pero por hipótesis de inducción* $\psi^d = \Phi_1(A_1/\varphi_1^d, ..., A_n/\varphi_n^d)$

Si $\varphi = (\Phi_1 \wedge \Phi_2)(A_1/\varphi_1, ..., A_n/\varphi_n)$ *entonces* $\varphi^d = (\Phi_1(A_1/\varphi_1, ..., A_n/\varphi_n))^d \wedge (\Phi_1(A_1/\varphi_1, ..., A_n/\varphi_n))^d$ *pero por hipótesis de inducción* $(\Phi_1(A_1/\varphi_1, ..., A_n/\varphi_n))^d = (\Phi_1(A_1/\varphi_1^d, ..., A_n/\varphi_n^d))$ *y* $(\Phi_2(A_1/\varphi_1, ..., A_n/\varphi_n))^d = (\Phi_2(A_1/\varphi_1^d, ..., A_n/\varphi_n^d))$
lo que demuestra la proposición. $\square$

Proposición 3.0.2 *Sea* τ *, t términos ,x variable, entonces* $(\tau(x/t))^d = \tau^d(x/t^d)$

Demostración 3.0.2.1 *Inducción en Term(L):*
Si $\tau = y$ *con* $y \neq x$ *variable entonces* $\tau(x/t) = y = \tau^d(x/t^d)$

Si $\tau = x$ *entonces* $\tau(x/t) = t$ *entonces* $(\tau(x/t)) = t^d = \tau^d(x/t^d)$

Si $\tau = C(t_1)$ *entonces* $\tau(x/t) = C(t_1(x/t))$ *entonces* $(\tau(x/t))^d = D((t_1(x/t))^d)$ *pero por hipótesis de inducción* $(t_1(x/t))^d = t_1^d(x/t^d)$ *entonces* $(\tau(x/t))^d = D(t_1^d(x/t^d) = \tau^d(x/t^d)$

Si $\tau = D(t_1)$ *entonces* $\tau(x/t) = D(t_1(x/t))$ *entonces* $(\tau(x/t))^d = C((t_1(x/t))^d)$ *pero por hipótesis de inducción* $(t_1(x/t))^d = t_1^d(x/t^d)$ *entonces* $(\tau(x/t))^d = C(t_1^d(x/t^d) = \tau^d(x/t^d)$. $\square$

Proposición 3.0.3 *Sea* t *término, entonces* $Vl(t) = Vl(t^d)$

Demostración 3.0.3.1 *Inducción en Term(L)*
Si $t = y$ *entonces* $t^d = y$ *entonces* $Vl(t) = Vl(t^d)$

Si $t = C(t_1)$ *entonces* $t^d = D(t_1^d)$ *entonces* $Vl(t) = Vl(t_1)$ *y* $Vl(t^d) = Vl(t_1^d)$ *pero por hipótesis de inducción* $Vl(t_1) = Vl(t_1^d)$ *entonces* $Vl(t) = Vl(t^d)$

Si $t = D(t_1)$ *entonces* $t^d = C(t_1^d)$ *entonces* $Vl(t) = Vl(t_1)$ *y* $Vl(t^d) = Vl(t_1^d)$ *pero por hipótesis de inducción* $Vl(t_1) = Vl(t_1^d)$ *entonces* $Vl(t) = Vl(t^d)$
lo que demuestra la proposición. $\square$

Proposición 3.0.4 *Sea* φ *fórmula ,entonces* $Vl(\varphi) = Vl(\varphi^d)$

Demostración 3.0.4.1 *Inducción en* $Form(\mathcal{C})$
Si $\varphi = (t_1 = t_2)$ *entonces* $(\varphi) = Vl(t_1) \cup Vl(t_2)$ *y* $Vl(\varphi^d) = Vl(t_1^d) \cup Vl(t_2^d)$ *pero por la proposición anterior* $Vl(t_1) = Vl(t_1^d)$ *y* $Vl(t_2) = VL(t_2^d)$ *entonces* $Vl(\varphi) = Vl(\varphi^d)$

Si $\varphi = K(t_1, t_2, t_3)$ *entonces* $Vl(\varphi) = Vl(t_1) \cup Vl(t_2) \cup Vl(t_3)$ *y* $Vl(\varphi^d) = Vl(t_1^d) \cup Vl(t_2^d) \cup Vl(t_3^d)$*, pero por la proposición anterior* $Vl(t_i) = Vl(t_i^d)$ *para* $i = 1, 2, 3$ *entonces* $Vl(\varphi) = Vl(\varphi^d)$

Si $\varphi = (\neg\varphi_1)$ *entonces* $Vl(\varphi) = Vl(\varphi_1)$ *y* $Vl(\varphi^d) = Vl(\varphi_1^d)$ *pero por hipótesis de inducción* $Vl(\varphi_1) = Vl(\varphi_1^d)$ *entonces* $Vl(\varphi) = Vl(\varphi^d)$

Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ *entonces* $Vl(\varphi) = Vl(\varphi_1) \cup Vl(\varphi_2)$ *y* $\varphi^d = (\varphi_1^d \wedge \varphi_2^d)$ *entonces* $Vl(\varphi^d) = Vl(\varphi_1^d) \cup Vl(\varphi_2^d)$*, pero por hipótesis de inducción* $Vl(\varphi_i) = Vl(\varphi_i^d)$ *para* $i = 1, 2$ *entonces* $Vl(\varphi) = Vl(\varphi^d)$

Si $\varphi = (\forall x\varphi_1)$ *entonces* $\varphi^d = (\forall x\varphi_1^d)$ *entonces* $Vl(varphi) = Vl(\varphi_1) - \{x\}$ *y* $Vl(\varphi^d) = Vl(\varphi_1^d) - \{x\}$*, pero por hipótesis de inducción* $Vl(\varphi_1) = Vl(\varphi_1^d)$ *entonces* $Vl(\varphi_1) = Vl(\varphi_1^d)$ *lo que demuestra la proposición.* $\square$

Proposición 3.0.5 *Sea* φ *fórmula* t *término,* x *variable, entonces Si* t *es libre para* x *en* φ *entonces* t^d *es libre para* x *en* φ^d

Demostración 3.0.5.1 *Inducción en Form(L)*
Si $\varphi = (t_1 = t_2)$ *entonces* $\varphi^d = (t_1^d = t_2^d)$*, entonces se cumple la tesis*

Si $\varphi = K(t_1, t_2, t_3)$ *entonces* $\varphi^d = K(t_1^d, t_2^d, t_3^d)$ *entonces se cumple la tesis*

Si $\varphi = (\neg\varphi_1)$ entonces $\varphi^d = (\neg\varphi^d)$, y t es libre para x en φ sii t es libre para x en φ_1 entonces por hipótesis de inducción t^d es libre para x en φ_1^d entonces t^d es libre para x en φ^d

Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ entonces si t es libre para x en φ entonces t es libre para x en φ_1 y t es libre para x en φ_2 entonces por hipótesis de inducción t^d es libre para x en φ_1^d y t^d es libre para x en φ_2^d entonces t^d es libre para x en φ^d

Si $\varphi = (\forall y\varphi_1)$, ya vimos que si x no pertenece a $Vl(\varphi_1)$ entonces x no pertenece a $Vl(\varphi_1)$. si x pertenece a $Vl(\varphi_1)$ e y no pertenece a $Vl(t)$ ya vimos que si x pertenece a $Vl(\varphi_1^d)$ e y no pertenece a $Vl(t^d)$, y por hipótesis de inducción si t es libre para x en φ_1 entonces t es libre para x en φ_1^d, lo que demuestra la proposición. $\square$

Proposición 3.0.6 *Sea φ fórmula de L x variable y t término, entonces se cumple que*
$(\varphi(x/t))^d = (\varphi^d(x/t^d))$.

Demostración 3.0.6.1 *Inducción en fórmulas de $\mathcal{C}$.*
Si $\varphi = (t_1 = t_2)$ entonces $\varphi(x/t) = (t_1(x/t) = t_2(x/t))$ entonces $(\varphi(x/t))^d = ((t_1(x/t))^d = (t_2(x/t))^d)$, pero por la proposición anterior $(t_1(x/t))^d = t_1^d(x/t^d)$ y $(t_2(x/t))^d = t_2^d(x/t^d)$ entonces $(\varphi(x/t))^d = (t_1^d(x/t^d) = t_2^d(x/t^d)) = \varphi^d(x/t^d)$

Si $\varphi = K(t_1, t_2, t_3)$ entonces $\varphi(x/t) = K(t_1(x/t), t_2(x/t), t_3(x/t)$ entonces $(\varphi(x/t))^d = K((t_1(x/t))^d, (t_2(x/t))^d, (t_3(x/t)^d) = K(t_1^d(x/t^d), t_2^d(x/t^d), t_3^d(x/t^d) = \varphi^d(x/t^d)$

Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ entonces $\varphi(x/t) = (\varphi_1(x/t) \wedge \varphi_2(x/t))$ entonces $(\varphi(x/t)^d) = ((\varphi_1(x/t))^d \wedge (\varphi_2(x/t)))^d$ pero aplicando hipótesis de inducción $(\varphi_1(x/t))^d = \varphi_1^d(x/t^d)$ y $(\varphi_2(x/t))^d = \varphi_s^d(x/t^d)$ entonces $(\varphi(x/t))^d = \varphi^d(x/t^d)$

Si $\varphi = (\neg\varphi_1)$ entonces $\varphi(x/t) = (\neg\varphi_1(x/t))$ entonces $(\varphi(x/t))^d = (\neg(\varphi_1(x/t)))^d$ pero por hipótesis de inducción $(\varphi_1(x/t))^d = \varphi_1^d(x/t^d)$

Si $\varphi = (\forall y\varphi_1)$ entonces si $x = y$ $\varphi(x/t) = (\forall y\varphi_1)$ entonces $(\varphi(x/t))^d = ((\forall y\varphi_1))^d = (\forall y\varphi_1^d = \varphi^d(x/t^d)$
Si $x \neq y$ entonces $\varphi(x/t) = (\forall y\varphi_1(x/t))$ entonces $(\varphi(x/t))^d = (\forall y(\varphi_1(x/t))^d)$ pero por hipótesis de inducción $(\varphi_1(x/t))^d = \varphi_1^d(x/t^d)$. $\square$

Axiomas para la teoría de categorías

En esta sección presentamos una axiomática para la teoría de categorías.

Definición 3.4 ***Axiomas para la teoría de categorías***

1. ***Axioma*** $\mathcal{C}_1$
   $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(\forall x_4)((K(x_1, x_2, x_3) \wedge K(x_1, x_2, x_4)) \rightarrow x_3 = x_4)$.
   Si a la fórmula $K(x_1, x_2, x_3)$ la notamos como $x_1.x_2 = x_3$, el axioma afirma que K es funcional en x_1 y x_2.

2. ***Axioma*** $\mathcal{C}_2$
   $(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(K(x_1,x_2,x_3) \to (C(x_2) = D(x_1))$.
   Si $x_3 = x_1.x_2$ *entonces* x_1 *y* x_2 *son de la forma* $A \xrightarrow{x_2} * \xrightarrow{x_1} B$.

3. ***Axioma*** $\mathcal{C}_3$
   $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(K(x_1,x_2,x_3) \to ((D(x_3) = D(x_2)) \wedge (C(x_3) = C(x_1))$.
   El axioma afirma que si $x_1.x_2 = x_3$ *entonces* x_3 *es de la forma* $D(x_2) \xrightarrow{x_3} C(x_1)$.

4. ***Axioma*** $\mathcal{C}_4$
   $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_4)(\forall x_5)(\forall x_6)(\forall x_7)((K(x_1,x_2,x_4) \wedge K(x_2,x_3,x_5) \wedge K(x_4,x_3,x_6) \wedge K(x_1,x_5,x_7)) \to x_6 = x_7)$.
   El axioma establece que la composición es asociativa.
   $\underbrace{\overbrace{(x_1.x_2)}^{x_4}.x_3}_{x_6} = \underbrace{x_1.\overbrace{(x_2.x_3)}^{x_5}}_{x_7}$.

5. ***Axioma*** $\mathcal{C}_5$
   $\forall x_1 \forall x_2 (Morf(x_1) \wedge Morf(x_2) \to ((C(x_2) = D(x_1) \to \exists x_3 K(x_1,x_2,x_3))$.
   El axioma establece la "componibilidad" entre morfismos que cumplen que el dominio de uno es el codominio del otro. Observar que para todo x tiene sentido hablar de su codominio y de su dominio, sin embargo este axioma establece que solo se pueden componer morfismos.

6. ***Axioma*** $\mathcal{C}_6$.
   $(\forall x_1)(Obj(x_1) \to (\exists x_2(Morf(x_2) \wedge \forall x_3((Morf(x_3) \wedge C(x_3) = x_1) \to K(x_2,x_3,x_3)) \wedge (\forall x_4(Morf(x_4) \wedge (D(x_4) = x_1 \to K(x_4,x_2,x_4)))$.
   El axioma establece que para todo objeto A existe el mapa identidad (id_A*). Este mapa es neutro a izquierda y derecha de la composición.*

Teorema 3.1 (***Dualidad***) *Sea* Γ *el conjunto de axiomas de categorías, y* φ *fórmula, entonces se cumple:*

$$\Gamma \vdash \varphi \Longrightarrow \Gamma \vdash \varphi^d$$

Demostración 3.1.1 *:Sea* $\varphi_1, ..., \varphi_n$ *, con* $\varphi_n = \varphi$*, fórmulas tales que para todo i de 1 hasta n o* φ_i *pertenece a* Γ *o* φ_i *es un axioma lógico, o* φ_i *se deriva de la aplicación de las reglas de inferencias para algunas* φ_j *con* $j < i$
Veamos que para todo i de 1 hasta n o φ_i^d *pertenece a* Γ *o* φ_i^d *es un axioma lógico, o* φ_i^d *se deriva de la aplicación de las reglas de inferencias para algunas* φ_j^d *con* $j < i$

Si $\varphi_i = (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(\forall x_4)((K(x_1,x_2,x_3) \wedge K(x_1,x_2,x_3)) \to x_3 = x_4)$ *entonces* $\varphi_i^d = (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(\forall x_4)((K(x_2,x_1,x_3) \wedge K(x_2,x_1,x_3)) \to x_3 = x_4)$

Si $\varphi_i = (\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(K(x_1,x_2,x_3) \to (C(x_2) = D(x_1))$ *entonces* $\varphi_i^d = (\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(K(x_2,x_1,x_3) \to (D(x_2) = C(x_1))$
si $\varphi_i = (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(K(x_1,x_2,x_3) \to ((D(x_3) = D(x_2)) \wedge (C(x_3) = C(x_1))$
entonces $\varphi_i^d = (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(K(x_2,x_1,x_3) \to ((C(x_3) = C(x_2)) \wedge (D(x_3) = D(x_1))$
Si $\varphi_i = (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_4)(\forall x_5)(\forall x_6)(\forall x_7)((K(x_1,x_2,x_4) \wedge K(x_2,x_3,x_5) \wedge K(x_4,x_3,x_6) \wedge K(x_1,x_5,x_7)) \to x_6 = x_7)$.
Entonces $\varphi_i^d = (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_4)(\forall x_5)(\forall x_6)(\forall x_7)((K(x_2,x_1,x_4) \wedge K(x_3,x_2,x_5) \wedge K(x_3,x_4,x_6) \wedge K(x_5,x_1,x_7)) \to x_6 = x_7)$, *observar que es el mismo axioma renombrando las variables. Si* $\varphi_i = \forall x_1 \forall x_2(Morf(x_1) \wedge Morf(x_2) \to ((C(x_2) = D(x_1) \to \exists x_3 K(x_1,x_2,x_3))$.
Observar que $Morf(x)^d = Morf(x)$ *y que* $Obj(x)^d = Obj(x)$
Entonces $\varphi_i^d = \forall x_1 \forall x_2(Morf(x_1) \wedge Morf(x_2) \to ((D(x_2) = C(x_1) \to \exists x_3 K(x_2,x_1,x_3))$.
observar que es el mismo axioma renombrando las variables.
Si $\varphi_i = (\forall x_1)(Obj(x_1) \to (\exists x_2(Morf(x_2) \wedge \forall x_3((Morf(x_3) \wedge C(x_3) = x_1) \to K(x_2,x_3,x_3)) \wedge (\forall x_4(Morf(x_4) \wedge (D(x_4) = x_1 \to K(x_4,x_2,x_4)))$
Entonces $\varphi_i^d = (\forall x_1)(Obj(x_1) \to (\exists x_2(Morf(x_2) \wedge \forall x_3((Morf(x_3) \wedge D(x_3) = x_1) \to K(x_3,x_2,x_3)) \wedge (\forall x_4(Morf(x_4) \wedge (C(x_4) = x_1 \to K(x_2,x_4,x_4)))$

Si φ_i *es un axioma lógico: si es una tautología ya probamos que* φ_i^d *es una tautología si* $\varphi = ((\forall x\varphi) \to \varphi(x/t))$ *con* t *libre para* x *en* φ *entonces* $\varphi_i^d = ((\forall x\varphi) \to \varphi(x/t))^d = ((\forall x\varphi^d) \to \varphi^d(x/t^d))$ *además ya probamos que se* t *libre para* x *en* φ *entonces* t^d *libre para* x *en* φ^d
Si $\varphi_i = ((\forall x(\varphi \to \psi)) \to (\varphi \to (\forall x\psi))$ *con* x *no perteneciente a* $FV(\varphi)$ *entonces* $\varphi_i^d = ((\forall x(\varphi^d \to \psi^d)) \to (\varphi^d \to (\forall x\psi^d))$ *y además ya probamos que si* x *no perteneciente a* $FV(\varphi)$ *entonces* x *no perteneciente a* $FV(\varphi^d)$ *entonces si* φ_i *es un axioma cuantificacional entonces* φ_i^d *es un axioma cuantificacional*

Veamos que los duales de los axiomas de igualdad:

1: $(x = x)$ *con* x *variable*

2: $((x = y) \to ((x = z) \to (y = z)))$ *con* x , y, z *variables*

3: i) $((x = y) \to (K(x,t_2,t_3) \to K(y,t_2,t_3)))$
ii)$((x = y) \to (K(t_1,x,t_3) \to K(t_1,y,t_3)))$
iii)$((x = y) \to (K(t_1,t_2,x) \to K(t_1,t_2,y)))$
con x , y , z *variables y* t_1 , t_2 ,t_3 *términos*

4: i)$((x = y) \to (C(x) = C(y))$
$((x = y) \to (D(x) = D(y))$
con x , y *variables*

Son 1: $(x = x)$ *con* x *variable*

2: $((x = y) \to ((x = z) \to (y = z)))$ *con* x , y, z *variables*

3: i) $((x = y) \to (K(t_2^d,x,t_3^d) \to K(t_2^d,y,t_3^d)))$
ii)$((x = y) \to (K(x,t_1^d,t_3^d) \to K(y,t_1^d,t_3^d)))$

iii)$((x = y) \to (K(t_2^d, t_1^d, x) \to K(t_2^d, t_1^d, y)))$
con x , y , z *variables y* t_1^d , t_2^d ,t_3^d *términos*

4: i)$((x = y) \to (D(x) = D(y))$
$((x = y) \to (C(x) = C(y))$
con x , y *variables*
Entonces si φ_i *es un axioma de igualdad,* φ_i^d *también*
Entonces φ_i *es un axioma de lógico,* φ_i^d *también*
Si φ_i *se obtiene mediante la regla de inferencia modus ponens* $\frac{\psi \to \varphi_i}{\varphi_i}$ *entonces* $\frac{\psi^d \to \varphi_i^d}{\varphi_i^d}$ *y si* φ_i *se obtiene mediante la regla de inferencia* $\frac{\psi}{\forall x \psi}$ *con* $\forall x \psi = \varphi_i$ *entonces* $\varphi_i^d = \forall x \psi^d$ *y* $\frac{\psi^d}{\forall x \psi^d}$ *lo que demuestra el teorema.* $\square$

3.2. Nociones y propiedades básicas

Definición 3.5 *Sean* f, A *y* B *términos del lenguaje definimos* $A \xrightarrow{f} B$ *como abreviatura de la siguiente fórmula* $Morf(f) \wedge (D(f) = A) \wedge (C(f) = B)$.

Definición 3.6 *Sean* f,g *y* h *términos del lenguaje definimos* $g.f = h$ *como* $K(g, f, h)$.

Definición 3.7 *El siguiente diagrama es una abreviatura para la fórmula*
$(A \xrightarrow{f} B) \wedge (B \xrightarrow{g} C) \wedge (g.f = h)$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\
 & C
\end{tikzcd}$$

Definición 3.8 $Mono(f)$ *es una abreviatura para la fórmula*
$Morf(f) \wedge (\forall x)(\forall y)((f.x = f.y) \to x = y)$.

Definición 3.9 $Epi(f)$ *es una abreviatura para la fórmula*
$Morf(f) \wedge (\forall x)(\forall y)((x.f = x.f) \to x = y)$.

Definición 3.10 $Iso(f)$ *es una abreviatura para la fórmula*
$(\exists g)((g.f = id_{D(f)}) \wedge (f.g = id_{C(f)})$

Observación 3.2 $\vdash Iso(f) \to Mono(f) \wedge Epi(f)$, *pero no vale el reciproco.*

Definición 3.11 *Definimos la relación* $A \cong B$ *en los términos del lenguaje cuando* $\vdash (\exists f)(A \xrightarrow{f} B) \wedge Iso(f))$.

Observación 3.3 $\cong$ *es una relación de equivalencia.*

Definición 3.12 $Endo(f)$ *es una abreviatura para la fórmula* $D(f) = C(f)$.

Definición 3.13 *$Auto(f)$ es una abreviatura para la fórmula $Endo(f) \wedge Iso(f)$.*

Observación 3.4 *EL axioma 4 nos dice que para todo A existe un morfismo que llamaremos morfismo identidad (id_A) tal que para todo $A \xrightarrow{f} B$, $C \xrightarrow{g} A$ se verifica que $f.id_A = f$, y $id_A.g = g$.*

Definición 3.14 *Definimos $Proj(x, y)$ como una abreviatura para la siguiente fórmula: $Morf(x) \wedge Morf(y) \wedge ((D(x) = D(y)) \wedge (\forall f)(\forall g)(Morf(g) \wedge Morf(g) \wedge (((D(f) = D(g)) \wedge (C(f) = C(x)) \wedge (C(g) = C(y))) \to (\exists! z)((x.z = f)) \wedge (y.z = g))$*
Es decir,los mapas x e y son PROYECCIONES si tienen el mismo dominio y si para todo par de mapas f, g con el mismo dominio $D(f) \xrightarrow{f} C(x)$ y $D(g) \xrightarrow{g} C(y)$ Entonces existe un único mapa z tal que $x.z = f$ y $y.z = g$.
NOTACIÓN: $z =< f, g >$ z es llamado el mapa producto de f, g con factores x,y.
Diagramaticamente

$$\begin{tikzcd}
& B \\
D \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\exists! z"] \arrow[dr, "g"'] & A \arrow[u, "x"'] \arrow[d, "y"] \\
& C
\end{tikzcd}$$

Definición 3.15 *Definimos $Inj(x, y)$ como una abreviatura para la fórmula: $((C(x) = C(y)) \wedge (\forall f)(\forall g)((C(f) = C(g)) \wedge (D(f) = D(x)) \wedge (D(g) = D(y)) \to \exists!((z.x = f) \wedge (z.y = g))$. Los mapas x e y son inyecciones si tienen el mismo codominio y si para todo par de mapas f,g con el mismo codominio $D(x) \xrightarrow{f} C(f)$ $D(y) \xrightarrow{g} C(g)$ Entonces existe un único mapa z tal que $z.x = f$, $z.y = g$.*

NOTACIÓN: $z = [f, g]$ decimos que z es la suma de f y g relativa a las inyecciones x,y. Diagramaticamente:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A \arrow[r, "\exists z!"] & D \\
C \arrow[u, "y"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Definición 3.16 *Definimos* $\prod(P, A, B, x, y)$ *como una abreviatura para la formula* $Proj(x, y) \wedge (P = D(x)) \wedge (P = D(y)) \wedge (A = C(x)) \wedge (B = C(y))$ *decimos que* P *es un objeto producto de* A *y* B *relativo a las proyecciones* x *e* y *si* P *es el dominio común a las proyecciones* x *e* y *donde* A *es el codominio de* x *,* B *el codominio de* y*.*
NOTACIÓN: $\pi_A : P \longrightarrow A$ *,* $\pi_B : P \longrightarrow B$*,* $\pi_A := x$ $\pi_B := y$*,*
Diagramaticamente:

$$\begin{tikzcd}
 & A \\
G \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "<f{,}g>"] \arrow[dr, "g"'] & P \arrow[u, "\pi_A"'] \arrow[d, "\pi_B"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

G es el dominio común de f y g.

Teorema 3.2 *Se cumple* $\vdash \prod(P, A, B, \pi_A, \pi_B) \wedge \prod(P^{'}, A', B', \pi_{A'}, \pi_{B'})) \to P \cong P^{'}$
Es decir el producto es único a menos de isomorfismo.

Demostración 3.2.1 *Por la definición de producto el siguiente diagrama con-*

muta:

$$\begin{tikzcd}
 & A & \\
P \arrow[ur, "\pi_A"] \arrow[r, "<\pi_A,\pi_B>"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & P' \arrow[u, "\pi_{A'}"] \arrow[r, "<\pi_{A'},\pi_{B'}>"] \arrow[d, "\pi_{B'}"] & P \arrow[ul, "\pi_{A'}"'] \arrow[dl, "\pi_{B'}"] \\
 & B &
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad del producto se cumplen las siguientes igualdades $P^{'}_A. < P_A, P_B >= P_A$, $P^{'}_B. < P_A, P_B >= P_B$, $P_A. < P^{'}_A, P^{'}_B >= P^{'}_A$, $P_B. < P^{'}_A, P^{'}_B >= P^{'}_B$.
Sea $z =< P^{'}_A, P^{'}_B > . < P_A, P_B >$, *entonces* $P_A.z = P_A.(< P^{'}_A, P^{'}_B > . < P_A, P_B >) = (P_A.(< P^{'}_A, P^{'}_B >). < P_A, P_B >= P^{'}_A. < P_A, P_B >= P_A$.
$P_B.z = P_B.(< P^{'}_A, P^{'}_B > . < P_A, P_B >) = (P_B.(< P^{'}_A, P^{'}_B >). < P_A, P_B >= P^{'}_B. < P_A, P_B >= P_B$, *entonces conmuta el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & A \\
P \arrow[ur, "\pi_A"] \arrow[r, "z"] \arrow[dr, "\pi"'] & P \arrow[u, "\pi_A"'] \arrow[d, "\pi_B"'] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

Pero existe un único z que hace conmutar al diagrama anterior, y P lo hace conmutar, entonces $P =< P^{'}_A, P^{'}_B > . < P_A, P_B >$, *Análogamente probamos que* $< P_A, P_B > . < P^{'}_A, P^{'}_B >$ *entonces* $Iso(< P_A, P_B >) \Longrightarrow P \cong P^{'}$. $\square$

Definición 3.17 *Definimos* $\coprod(S, A, B, x, y)$ *como una abreviatura para la siguiente fórmula:* $Inj(x, y) \wedge (S = C(x)) \wedge (S = C(y)) \wedge (A = D(x)) \wedge (B = D(y))$. *Es decir S es una suma de A y B relativa a las inyecciones x e y si S es el codominio común de x e y, donde A es el dominio de x y B el dominio de y.*
NOTACIÓN: $i_A : A \longrightarrow S$, $i_B : B \longrightarrow S$, $i_A := x$, $i_B := y$.

Teorema 3.3 $\vdash \coprod(S, A, B, i_A, i_B) \wedge \coprod(S^{'}, A, B, i_{A'}, i_{B'}) \rightarrow S \cong S^{'}$.

Demostración 3.3.1 *Simplemente aplicamos dualidad al teorema anterior.*

Definición 3.18 (***pullback***) *Sean* $A \xrightarrow{f} B$ *y* $C \xrightarrow{g} B$ *si existen dos mapas* $G \xrightarrow{x} A$ *y* $G \xrightarrow{y} C$ *que verifican* $f.x = f.y$ *tales que para todo par par de morfismos* $X \xrightarrow{x'} A$, $X \xrightarrow{y'} C$ *que verifique la ecuación* $f.x' = g.x'$ *entonces existe un único mapa* $X \xrightarrow{r} G$ *tal que se cumple* $x.r = x'$, $y.r = y'$ *A la terna* (G, x, y) *se le llama el pullback de* f *y* g.
Diagramaticamente:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\exists! r"] \arrow[drr, "x^{'}"] \arrow[ddr, "y^{'}"'] & & \\
& G \arrow[r, "y"] \arrow[d, "y"] & C \arrow[d, "f"] \\
& A \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd}$$

Propiedades del pullback:

Proposición 3.3.1 *Sean* $A \xrightarrow{f} C$, $B \xrightarrow{g} C$ *y* (G, x, y) *pullback de* f *y* g *entonces* $Mon(f) \Rightarrow Mon(y)$.

Demostración 3.3.1.1 *Sean* $X \xrightarrow{z} G$, $X \xrightarrow{z'} G$ *tales que* $y.z = y.z'$ *pero* $f.x.z = g.y.z = g.y.z' = f.x.z'$ *pero* f *es monomorfismo entonces* $x.z = x.z'$ *en-*

tonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "z"] \arrow[d, "z'"'] \arrow[dr, shift left, "z'"] \arrow[dr, shift right, "z"'] & G \arrow[dr, "x"] & \\
G \arrow[dr, "y"'] & G \arrow[r, "x"] \arrow[d, "y"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

entonces por la propiedad del pullback $z = z'$ entonces $Mon(y)$.

Proposición 3.3.2 *Sean $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$, $A \xrightarrow{i} D$, $D \xrightarrow{h} C$, $D \xrightarrow{k} E$,$E \xrightarrow{l} F$,morfismos, entonces si los diagramas*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "g"] \\
D \arrow[r, "h"] & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & C \arrow[d, "j"] \\
E \arrow[r, "l"] & F
\end{tikzcd}$$

son pullback, entonces el siguiente diagrama también es un pullback

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "g"] \\
D \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & C \arrow[d, "j"] \\
E \arrow[r, "l"] & C
\end{tikzcd}$$

Demostración 3.3.2.1 *Sean* $U \xrightarrow{a} E$ *y* $U \xrightarrow{b} B$ *morfismos tales que conmute el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[drr, "a"] \arrow[dddr, "b"'] & & \\
& A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& D \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & C \arrow[d, "j"] \\
& E \arrow[r, "l"] & C
\end{tikzcd}$$

entonces tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[drr, "g.a"] \arrow[ddr, "b"'] & & \\
& D \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & C \arrow[d, "j"] \\
& E \arrow[r, "l"] & F
\end{tikzcd}$$

Entonces como el diagrama es un pullback existe un único morfismo $U \xrightarrow{y} D$ tal que

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[drr, "g.a"] \arrow[dr, "y"] \arrow[ddr, "b"'] & & \\
& D \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & C \arrow[d, "j"] \\
& E \arrow[r, "l"] & F
\end{tikzcd}$$

Entonces tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[drr, "a"] \arrow[ddr, "y"'] & & \\
& A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& D \arrow[r, "h"] & C
\end{tikzcd}$$

Pero por ser pullback tenemos que existe un único morfismo $U \xrightarrow{x} A$ tal que

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[dr, "x"] \arrow[drr, "a"] \arrow[ddr, "y"'] & & \\
& A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& D \arrow[r, "h"] & C
\end{tikzcd}$$

Entonces tenemos

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[dr, "x"] \arrow[drr, "a"] \arrow[ddr, "y"] \arrow[dddr, "b"'] & & \\
& A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& D \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & C \arrow[d, "j"] \\
& E \arrow[r, "l"] & C
\end{tikzcd}$$

unicidad: Supongamos que tenemos z *y* z' *morfismos tales que*

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[dr, shift left, "z"] \arrow[dr, shift right, "z'"'] \arrow[drr, "a"] \arrow[dddr, "b"'] & & \\
& A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& D \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & C \arrow[d, "j"] \\
& E \arrow[r, "l"] & C
\end{tikzcd}
$$

Entonces por la propiedad del pullback del segundo diagrama tenemos que $i.z = i.z'$. *Pero por la propiedad de pullback del segundo diagrama tenemos que* $z = z'$.

Proposición 3.3.3 *Sean los morfismos* f,g,h,i,k,l,j *como en la proposición anterior, si los diagramas*

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & C \arrow[d, "j"] \\
E \arrow[r, "l"] & F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "g"] \\
D \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & C \arrow[d, "j"] \\
E \arrow[r, "l"] & F
\end{tikzcd}
$$

son pullback,entonces el siguiente diagrama también es un pullback

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "g"] \\
D \arrow[r, "h"] & C
\end{tikzcd}$$

Demostración 3.3.3.1 *Sean a y b morfismos tales que*

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rrd, "b"] \arrow[rdd, "a"'] & & \\
& A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& D \arrow[r, "h"] & C
\end{tikzcd}$$

entonces tenemos

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rrd, "b"] \arrow[rdd, "k.a"'] & & \\
& A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k.i"'] & B \arrow[d, "j.g"] \\
& E \arrow[r, "l"] & F
\end{tikzcd}$$

Por ser un pullback existe un único morfismo y tal que

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[drr, "y"] \arrow[drrr, "b"] \arrow[ddrr, "k.a"'] & & & \\
& & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k.i"'] & B \arrow[d, "j.g"] \\
& & D \arrow[r, "h"] & C
\end{tikzcd}
$$

Consideremos el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[drr, "y"] \arrow[drrr, "b"] \arrow[ddrr, "a"] \arrow[dddrr, "k.a"'] & & & \\
& & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& & D \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & C \arrow[d, "j"] \\
& & E \arrow[r, "l"] & C
\end{tikzcd}
$$

Por ser un pullback el primer diagrama de las hipótesis tenemos que $a = i.y$ lo que demuestra el teorema. $\square$

Definición 3.19 (***pushout***) *Sean $A \xrightarrow{f} B$ y $A \xrightarrow{g} C$ si existen dos mapas $B \xrightarrow{x} P$, $C \xrightarrow{y} P$ que verifican $x.f = y.g$ tales que para todo par de morfismos $B \xrightarrow{x'} Q$, $C \xrightarrow{y'} Q$ que verifican la ecuación $x'.f = y'.g$ entonces existe un único morfismo $P \xrightarrow{z} Q$ tal que cumple $z.x = x'$, $z.y = y'$.*
A la terna (P, x, y) se le llama el pushout de f y g˙ Diagramaticamente:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "x"] \arrow[ddr, "x^{'}"] & \\
C \arrow[r, "y"'] \arrow[drr, "y^{'}"'] & P \arrow[dr, "\exists ! z"] & \\
 & & Q
\end{tikzcd}$$

Definición 3.20 *Sean $A \xrightarrow{y} B$ $C \xrightarrow{z} D$ mapas , llamamos $y \times z$ al único mapa $< y.\pi_A, z.\pi_C >$ definido de $A \times C$ en $B \times D$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "y"] & B \\
A \times C \arrow[u, "\pi_A"] \arrow[r, "y \times z"] \arrow[d, "\pi_C"'] & B \times D \arrow[u, "\pi_B"'] \arrow[d, "\pi_D"] \\
C \arrow[r, "z"] & D
\end{tikzcd}$$

Definición 3.21 *Sean los morfismos $A \xrightarrow{f} B$ y $C \xrightarrow{g} D$ definimos $f + g$ como el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_A"] & B \arrow[d, "i_B"] \\
A+C \arrow[r, "f+g"] & B+D \\
C \arrow[u, "i_C"] \arrow[r, "g"'] & D \arrow[u, "i_B"]
\end{tikzcd}$$

Teorema 3.4 *Sean* $A \xrightarrow{f} B$ *,*$B \xrightarrow{g} C$ *,* $D \xrightarrow{h} M$ *,* $M \xrightarrow{w} N$ *entonces se cumple:* $(g.f \times w.h) = (g \times w).(f \times h)$.

Demostración 3.4.1 *tenemos que probar que:*
*(*1) :*$(g.f).\pi_A = \pi_C.((g \times w).(f \times h))$ *y que*

*(*2) :*$(w.h).\pi_D = \pi_N.((g \times w).(f \times h))$.

Pero sabemos que $h.\pi_D = \pi_M.(f \times h)$ *y que* $w.\pi_M = \pi_N.(g \times w)$ *entonces* $w.(h.\pi_D) = w.(\pi_M.(f \times h)) = (w.\pi_M).(f \times h) = (\pi_N.(g \times w)).(f \times h) = \pi_N.((g \times w)).(f \times h)$ *por lo tanto de cumple (*1) de la misma manera se prueba que se cumple (*2).* $\square$

Teorema 3.5 *Sean los morfismos* $G \xrightarrow{f} A$ *,* $G \xrightarrow{g} B$ *,* $A \xrightarrow{h} C$ *,* $B \xrightarrow{w} D$ *entonces se cumple que:* $(h \times w). < f, g >=< h.f, w.g >$

Demostración 3.5.1 *Tenemos que probar que :*
*(*1) :*$\pi_C.((h \times w). < f, g >) = h.f$

*y que (*2) :*$\pi_D.((h \times w). < f, g >)) = w.g.$

*demostremos (*1) Sabemos que* $\pi_A. < f, g >= f$ *y que* $h.\pi_A = \pi_C.(h \times f)$ *entonces* $h.(\pi_A. < f, g >) = h.f$ *pero* $h.(\pi_A. < f, g >) = (h.\pi_A). < f, g >= (\pi_C.(h \times w)). < f, g >= \pi_C.((h \times w). < f, g >)$ *lo que demuestra (*1), análogamente se prueba (*2).* $\square$

Capítulo 4

Teoría de Topos

En esta sección presentamos un tipo especial de categoría, la categoría topos, esta teoría pretende capturar muchas de las propiedades de la categoría **Set** (la categoría de conjuntos)

4.1. Lenguaje lógico para la teoría de topos y axiomas

Sea el lenguaje $\mathcal{C}$ de primer orden de las categorías, con los símbolos adicionales Ω, $\top$, con los mismo axiomas de $\mathcal{C}$ (a este lenguaje lo llamaremos $\mathcal{T}$ y los siguientes axiomas adicionales:
Axiomas de $\mathcal{T}$

1. **Axioma de existencia de objeto terminal**
   $(\exists A)(Obj(A) \wedge (\forall B)(Obj(B) \rightarrow (\exists! x)(B \xrightarrow{x} A))$.

2. **Axioma de existencia de objeto inicial**
   $(\exists A)(Obj(A) \wedge (\forall B)(Obj(B) \rightarrow (\exists! x)(A \xrightarrow{f} B))$.

3. **Axioma de existencia de producto**
   $(\forall A)(\forall B)(Obj(A) \wedge Obj(B) \rightarrow (\exists P)(\exists x)(\exists y)(Obj(P) \wedge Morf(x) \wedge Morf(y) \wedge \prod(P, A, B, x, y))$.

4. **Axioma de existencia del coproducto**
   $(\forall A)(\forall B)(Obj(A) \wedge Obj(B) \rightarrow (\exists S)(\exists x)(\exists y)(Obj(S) \wedge Morf(x) \wedge Morf(y) \wedge (\coprod(S, A, B, x, y))$.

5. **Axioma de existencia de ecualizador**
   Dados $A \xrightarrow{f} B$ y $A \xrightarrow{g} B$ Existe un mapa $E \xrightarrow{k} A$ tal que $f.k = g.k$ y que para todo mapa $X \xrightarrow{u} A$ que verifica la ecuación $f.u = g.u$ se cumple que existe un único mapa $X \xrightarrow{z} E$ tal que $u = k.z$, a k se la llama el ecualizador de f y g.

6. **Axioma de existencia del coecualizador**
   Dados $A \xrightarrow{f} B$ y $A \xrightarrow{g} B$ existe un mapa $B \xrightarrow{q} Q$ tal que $q.f = q.g$ y si $B \xrightarrow{u} X$ es un mapa que verifica la ecuación $u.f = u.g$ entonces existe

un único mapa $Q \xrightarrow{z} X$ tal que $z.q = u$. q se le llama el coecualizador de f y g.

7. **Axioma de existencia de Potencia**
Dados dos objetos A y B existe un objeto B^A y un mapa $A \times B^A \xrightarrow{e} B$ llamado mapa evaluación de B^A tal que : Para cualquier mapa de la forma $A \times X \xrightarrow{f} B$ existe un único mapa $X \xrightarrow{h} B^A$ que verifica A ecuación $e. < P_A, P_X.h >= f$ donde los mapas P_A y P_X son proyecciones del producto $A \times X$.

8. I) **Axioma de existencia de objeto clasificador** Ω es un objeto que llamaremos objeto clasificador, y existe un morfismo $1 \xrightarrow{\top} \Omega$ tal que para todo $A \xrightarrow{m} B$ monomorfismo existe un único $B \xrightarrow{c_m} \Omega$ llamado el mapa característico, tal que el siguiente diagrama conmuta y es un pullback:
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "t_A"'] & B \arrow[d, "c_m"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$
Donde $A \xrightarrow{t} 1$ es el único mapa con dominio A y codominio 1.
II)**Axioma de existencia de mapa clasificador**
Para todo objeto A existe un objeto A_{cl} y un mapa $A \xrightarrow{j_A} A_{cl}$ tal que para todo par de mapas $B \xrightarrow{f} A$ y $B \xrightarrow{m} C$ con m monomorfismo, entonces existe un único mapa $\chi(m, f)$,$C \xrightarrow{\chi(m,f)} A$ tal que el siguiente diagrama es un pullback
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "\chi(f,m)"] \\ A \arrow[r, "j_A"] & A_{cj} \end{tikzcd}$$

4.2. Nociones y propiedades básicas

Proposición 4.0.1 *Existe un único objeto terminal a menos de isomorfismo.*

Demostración 4.0.1.1 *Supongamos que existe dos objetos terminales A y A',sabemos que existe un único morfismo x tal que $A' \xrightarrow{x} A$ y un único y tal que $A \xrightarrow{y} A'$, entonces $A \xrightarrow{x.y} A$,pero hay uno solo,entonces $x.y = A$. Ídemy.$x = A'$, entonces $A \cong A'$.* $\square$

Proposición 4.0.2 *Existe un único objeto inicial a menos de isomorfismo.*

Demostración 4.0.2.1 *Ídem proposición anterior.*

Definición 4.1 1 *nombra a cualquier objeto terminal.*

Definición 4.2 0 *nombra a cualquier objeto inicial.*

Teorema 4.1 *En cualquier topo si a es morfismo* $(Mon(a) \wedge Epi(a)) \Rightarrow Iso(a)$ *, cuando en una categoría vale este teorema , se dice que es una categoría balanceada.*

Demostración 4.1.1 *Sea* $A \xrightarrow{m} B$ *monomorfismo y epimorfismo, sabemos que existe* $B \xrightarrow{c_m} \Omega$ *tal que* $c_m.m = \top.t_A$ *donde* t_A *es el morfismo* $A \xrightarrow{t_A} 1$ *, Sea* $B \xrightarrow{t_B} 1$ *, sabemos que top.*$t_B.m = \top.t_A = c_m.m$ *entonces como m es epi* $c_m = \top.t_B$ *entonces por la propiedad del pullback existe* $A \xrightarrow{f} B$ *tal que* $m.f = B$ *, pero también* $m.id_A = m = id_B.m = m.f.m$ *entonces como m es monomorfismo* $A = f.m$ *entonces m es isomorfismo.*□

Teorema 4.2 *En cualquier topo si A es un objeto se cumple* $A \times 0 \cong 0$.

Demostración 4.2.1 *Veamos que* $A \times 0$ *es objeto inicial.*
Sea X objeto cualquiera, existe un único morfismo $0 \xrightarrow{k} X^A$ *tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "id_A"] & A & \\
A \times X \arrow[u, "\pi_A"] \arrow[r, "<\pi_A, k.\pi_0>"] \arrow[d, "\pi_0"'] & A \times X^A \arrow[u, "\pi_A"'] \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\pi_{X^A}"'] & X \\
0 \arrow[r, "k"'] & X^A &
\end{tikzcd}$$

Sea $A \times 0 \xrightarrow{h} X$ *morfismo cualquiera entonces* $h = e. < P_A, k.P_0 >$ *como k es único, h también es único entonces* $A \times 0$ *es inicial entonces* $A \times 0 \cong 0$. *qed*

Teorema 4.3 *En cualquier topos si* $A \xrightarrow{a} 0$ *morfismo, entonces* $A \cong 0$.

Demostración 4.3.1 *Sean* $A \times 0 \xrightarrow{f} 0$ *y* $0 \xrightarrow{g} A \times 0$ *morfismos uno inverso del otro(por el teorema anterior), sabemos que* $(P_A.g).(f. < id_A, a >) = A$ *donde a es el morfismo* $A \xrightarrow{a} 0$ *, pero* $(f. < id_A, a >).(P_A.g) = 0$ *porque 0 es objeto inicial.* □

Corolario 4.3.1 *En cualquier topos los objetos iniciales son strict, esto es para cualquier objeto A existe a lo más un morfismo* $A \xrightarrow{a} 0$ *y a es isomorfismo.*

Demostración 4.3.1.1 *Si existe un morfismo* $A \xrightarrow{a} 0$ *por el teorema anterior* $A \cong 0$ *, entonces* A *es inicial, por lo tanto* a *es el único morfismo de* A *a* 0 *, y además* a *es isomorfismo.* $\square$

Definición 4.3 (*elementos globales*)*: Sea* $1 \xrightarrow{x} A$ *un mapa, llamamos a* x *un elemento global de* A.

Definición 4.4 *Sea* $A \xrightarrow{x} B$ *, y* $C \xrightarrow{y} B$ *morfismos decimos que* $x \subset y$ *, si existe un morfismo* $A \xrightarrow{z} C$ *tal que* $x = y.z$.

Definición 4.5 *Sea* $1 \xrightarrow{x} B$ *,* $A \xrightarrow{y} B$ *morfismos, decimos que* $x \in y$ *si existe un morfismo* $1 \xrightarrow{h} A$ *tal que* $x = y.h$.

Teorema 4.4 *Sea* A *cualquiera entonces* $A \times 1 \cong A$.

Demostración 4.4.1 *Sea* $A \xrightarrow{t} 1$ *el único morfismo con dominio* A *y codominio* 1 *entonces el mapa* $A \xrightarrow{<id_A,t>} A \times 1$ *verifica* $P_A. < id_A, t >= A$ *Además el mapa* $< id_A, t > .\pi_A$ *verifica las siguientes ecuaciones* $\pi_A. < id_A, t > .\pi_A$ *y* $< A, t > .\pi_A.\pi_1 = \pi_1$ *pero por la propiedad del producto hay un único mapa que cumple verifica esas ecuaciones y es el mapa* $A \times 1$ *entonces* $< id_A, t > .\pi_A = A \times 1$ *entonces* $A \times 1 \cong A$ *.* $\square$

Definición 4.6 *un topos es degenerado si* $0 \cong 1$.

Proposición 4.4.1 *En cualquier topos degenerado para cualquier* A *se cumple que* $A \cong 0$.

Demostración 4.4.1.1 *Como* $A \times 1 \cong A$ *y* $A \times 0 \cong 0$ *entonces* $A \cong 0$.$\square$

Proposición 4.4.2 *Sea* $0 \xrightarrow{k} A$ *el único morfismo de* 0 *a un objeto cualquiera* A *, entonces* k *es un monomorfismo.*

Demostración 4.4.2.1 *Sean* $B \xrightarrow{x} 0$ *,* $B \xrightarrow{y} 0$ *morfismos, pero por el teorema anterior existe a lo más un morfismo de* B *a* 0 *entonces* $x = y$ *entonces* k *es monomorfismo.*$\square$

Proposición 4.4.3 *Sea* $0 \xrightarrow{k} A$ *el único morfismo de* 0 *a un objeto cualquiera* A *, entonces* k *es un monomorfismo.*

Demostración 4.4.3.1 *Sean* $B \xrightarrow{x} 0$ *,* $B \xrightarrow{y} 0$ *morfismos, pero por el teorema anterior existe a lo más un morfismo de* B *a* 0 *entonces* $x = y$ *entonces* k *es monomorfismo.*

Definición 4.7 ($\perp$) *Sea* $0 \longrightarrow 1$ *el único morfismo de* 0 *a* 1 *definimos el mapa:* $1 \xrightarrow{\perp} \Omega$ *como el único mapa característico que hace conmutar el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\perp"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Teorema 4.5 *Un topos es no degenerado si y sólo si $\perp \neq \top$.*

Demostración 4.5.1 (*reciproco*)*: Supongamos que es degenerado ($0 \cong 1$) entonces 1 es inicial entonces hay un único mapa de 1 a Ω entonces $\perp = \top$. (directo): Si $\perp = \top$, por la propiedad universal del pullback existe un único morfismo z $1 \xrightarrow{z} 0$ entonces $1 \cong 0$. $\square$*

Teorema 4.6 *En un topos degenerado para cualquier objeto A se cumple $A \cong 0$.*

Demostración 4.6.1 *Si $1 \cong 0$ entonces 0 es terminal entonces existe un morfismo de A a 0 entonces $A \cong 0$.$\square$*

Definición 4.8 *Sea $A \times X \xrightarrow{f} B$ morfismo, definimos f^* como el único mapa $X \xrightarrow{h} B^A$ que satisface el axioma el axioma de existencia de potencia, es decir hace conmutar al siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "id_A"] & A & \\
A \times X \arrow[u, "\pi_A"] \arrow[r, "A\times h"] \arrow[rr, bend right, "f"'] \arrow[d, "\pi_X"'] & A \times B^A \arrow[u, "\pi_A"'] \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\pi_{B^A}"] & B \\
X \arrow[r, "f*"'] & B^A &
\end{tikzcd}$$

Definición 4.9 *Sea $A \xrightarrow{f} B$ definimos f_e (el nombre de f) como el único mapa que verifica $e.(A \times f_e) = f.\pi_A$.*

Teorema 4.7 *Sea $A \xrightarrow{f} B$ morfismo entonces para todo a morfismo $1 \xrightarrow{a} A$ se cumple $e. < a, f_e >= f.a$.*

Demostración 4.7.1 *Sea $A \times 1 \xrightarrow{\pi_A} A \xrightarrow{f} B$, sabemos que existe un único morfismo (f_e) tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "id_A"] & A & \\
A \times 1 \arrow[u, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[r, "id_A \times f_e"] \arrow[rr, bend right, "f.\pi_A"'] & A \times B^A \arrow[u, "\pi_A"'] \arrow[d, "\pi_{B^A}"] \arrow[r, "e"] & B \\
1 \arrow[r, "f_e"'] & B^A &
\end{tikzcd}$$

Consideremos ahora el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "id_A"] & A & \\
1 \arrow[ur, "a"] \arrow[r, "<a,1>"] \arrow[dr, "1"'] & A \times 1 \arrow[u, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[r, "id_A \times f_e"] \arrow[rr, bend right, "f.\pi_A"'] & A \times B^A \arrow[u, "\pi_A"'] \arrow[d, "\pi_{B^A}"] \arrow[r, "e"] & B \\
 & 1 \arrow[r, "f_e"'] & B^A &
\end{tikzcd}$$

Entonces $< a, f_e) >=< \pi_A, \pi_1.f_e) > . < a, 1 >= (f.\pi_A). < a, 1 >= f.(\pi_A. < a, 1 >) = f.a.$ $\square$

Observación 4.1 *Vimos que dado un morfismo* $A \xrightarrow{f} B$ *existe un único morfismo* f_e *tal que* $e.(A \times f_e) = f.\pi_A$*.*
Recíprocamente Dado un morfismo $1 \xrightarrow{h} B^A$*, existe un único morfismo* $A \xrightarrow{f} B$ *tal que* $f_e = h$*.*

Demostración 4.1.1 *ya vimos que* $\pi_A. < id_A, t_A >= id_{A\times 1}$ *definimos* $f = e.(A \times h). < id_A, t_A >$ *entonces* $f.\pi_A = e.(A \times h)$ *entonces* $f_e = h$. $\square$

4.3. Topos Well-pointed

Definición 4.10 *Decimos que un topos es well-pointed (WT) si verifica:*

1. *Es no degenerado.*

2. *1 es generador objeto generador.*
   Si $(A \xrightarrow{f} B) \wedge (A \xrightarrow{g} B)$.
   Entonces Para todo x *,*$1 \xrightarrow{x} A$ *, se cumple que* $((f.x = g.x) \rightarrow f = g)$*, donde* 1 *es un objeto terminal.*

Observación 4.2 *A menos que se diga lo contrario de ahora en adelante consideraremos a todos los topos como* WT*.*
Recordemos que nuestro primer objetivo es construir un modelo de la teoría de conjuntos a partir de la teoría de topos, por lo tanto debemos pedirle a nuestra teoría de topos que no degenere, de lo contrario tendríamos que $A \cong 0$ *para todo* A *objeto, lo que lleva al çolpaso"de nuestro modelo. La condición de que* 1 *sea generador es para que los morfismos se "comporten" como funciones.*

A continuación veremos que los topos WT cumplen ciertas propiedades que hace a esta teoría bastante cercana a la categoría de conjuntos.

Teorema 4.8 *Un objeto inicial no tiene elementos.*

Demostración 4.8.1 *Supongamos que existe* $1 \xrightarrow{x} 0$ *morfismo, sabemos que existe un solo mapa de la forma* $0 \xrightarrow{y} 1$ *entonces* $(1 \xrightarrow{x} 0 \xrightarrow{y} 1) = (1 \xrightarrow{y.x} 1)$ *pero existe un solo mapa que tiene como codominio 1, entonces* $y.x = 1$ *análogamente* $x.y = 0$ *entonces* $1 \cong 0$*.Entonces no es WT,absurdo.* $\square$

Teorema 4.9 *Para todo objeto* A *con* $A \ncong 0$ *en* WT *,* A *tiene elementos globales.*

Demostración 4.9.1 *Consideremos los morfismos* $\top.t_A$ *,* $\bot.t_A$ *donde* $A \xrightarrow{t_A} 1$ *entonces tenemos que* $\top.t_A \neq \bot.t_A$ *en caso contrario por la propiedad del pullback existiría un morfismo* $A \xrightarrow{a} 0$ *entonces* $A \cong 0$ *absurdo, entonces por ser WT debe existir un elemento global* $1 \xrightarrow{x} A$ *tal que* $\top.t_A.x \neq \bot.t_A.x$*.*$\square$

Teorema 4.10 *Si* $A \ncong 0$ *entonces* t_A *es epimorfismo.*

Demostración 4.10.1 *Como* $A \ncong 0$ *existe* $1 \xrightarrow{z} A$ *y como 1 es terminal* $t_A.z = 1$ *entonces sean* x *,* y *morfismos tales que* $x.t_A = y.t_A$ *entonces* $x.t_A.z = y.t_A.z$ *entonces* $x = y$*, entonces* t_A *es epimorfismo.*$\square$

Corolario 4.10.1 *Los únicos monomorfismos con codominio* 1 *son los mapas* $0 \longrightarrow 1$ *y* $1 \longrightarrow 1$ *.*

Demostración 4.10.1.1 *Sea* $A \xrightarrow{t_A} 1$ *monomorfismo, pero por el teorema anterior* t_A *también es epimorfismo, entonces* t_A *es isomorfismo, entonces* $A \cong 1$*.*

Teorema 4.11 *En los topos para todo par de morfismos* $A \xrightarrow{f} B$ *,* $C \xrightarrow{g} B$ *existe* (G, x, y) *pullback de* f *y* g*.*

Demostración 4.11.1 *Sean los siguientes morfismos:* $A \times C \xrightarrow{P_C} C \xrightarrow{g} B$ *y* $A \times C \xrightarrow{P_A} B$*, sea* $G \xrightarrow{k} A \times C$ *el ecualizador de los morfismosg.*P_C *y* $f.P_A$ *entonces* $g.P_C.k = f.P_A.k$ *, veamos si* $x := P_A.k$ *y* $y := P_C.k$ *entonces* (G, x, y)

es el pullback de f y g: Sea $X \xrightarrow{x'} A$,$X \xrightarrow{y'} C$ tales que $f.x' = g.y'$ Pero tenemos que $P_A. < x', y' >= x'$ y que $P_C. < x', y' >= y'$ entonces $f.P_A. < x', y' >= g.P_C. < x', y' >$ entonces $< x', y' >$ entonces por la propiedad del ecualizador existe un único morfismo $X \xrightarrow{r} G$ tal que $k.r =< x', y' >$ entonces $P_C.k.r = y'$ y $P_A.k.r = x'$ entonces (G, x, y) es Pullback. $\square$

Teorema 4.12 *En los topos para par de morfismos $A \xrightarrow{f} C$, $A \xrightarrow{g} B$ existe (P, x, y) pushout de f y g.*

Demostración 4.12.1 *Análoga a la demostración anterior cambiando ecualizador por coecualizador y $<, >$ por $[,]$.*

Teorema 4.13 *Los únicos elementos globales de Ω son $\top$ y $\bot$.*

Demostración 4.13.1 *Sea $1 \xrightarrow{x} \Omega$ elemento global de Ω , consideremos el Pullback de $1 \xrightarrow{\top} \Omega$ y $1 \xrightarrow{x} \Omega$:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "t_A"'] & 1 \arrow[d, "x"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Si $A \cong 0$ entonces $x = \bot$ ya que $\bot$ es el único mapa característico de $0 \longrightarrow 1$
Si $A \ncong 1$ entonces m es epimorfismo (por teorema) pero también es monomorfismo entonces es isomorfismo entonces $A \cong 1$ entonces $x = \top$.

Definición 4.11 *Definimos $\Omega \xrightarrow{\neg} \Omega$ como el único mapa característico del morfismo $1 \xrightarrow{\bot} \Omega$.*

Teorema 4.14 $\neg.\neg = \Omega$.

Demostración 4.14.1 *Por la definición de $\neg$ el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\bot"] \arrow[d, "t_A"'] & 1 \arrow[d, "\neg"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Entonces $\neg.\bot = \top$, veamos que también se cumple $\neg.\top = \bot$:
Como sólo $\bot$ y top son elementos globales de Ωn ka otra posibilidad es $\neg.\top = \top$, entonces por la propiedad del pullback existe $1 \xrightarrow{x} 1$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "x"] \arrow[drr, "\top"] \arrow[ddr] & & \\
& 1 \arrow[r, "\perp"] \arrow[d, "t_A"'] & 1 \arrow[d, "\neg"] \\
& 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Pero el único mapa de 1 a 1 es 1 entonces $x = 1$ entonces $\perp$,1 $= \top$ absurdo entonces se cumple $\neg.\top = \perp$ entonces $\neg.\neg$ y Ω coinciden en elementos globales, entonces por ser WT $\neg.\neg = \Omega$.

Observación 4.3 *Existen topos en donde los únicos elementos globales de Ω son $\top$ y $\perp$ pero no vale el teorema anterior. A los topos donde vale el teorema anterior se la llama topos booleanos.*

Teorema 4.15 *Las inyecciones de las sumas son monomorfismos.*

Demostración 4.15.1 *Sean $A \xrightarrow{i_A} A + B$ y $B \xrightarrow{i_B} A + B$ Si $B \cong 0$ entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "i_A"] \arrow[dr, "A"] & \\
A+0 \arrow[r, "{[id_A,y]}"] & A \\
0 \arrow[u, "i_0"] \arrow[ur, "y"'] &
\end{tikzcd}$$

Entonces $[id_A, y].i_A = id_A$

Pero además tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "i_A"] \arrow[dr, "i_A"] & \\
A+0 \arrow[r, "i_A.[id_A,y]"] & A+0 \\
0 \arrow[u, "i_0"] \arrow[ur, "y"'] &
\end{tikzcd}$$

Pero $A+0$ también hace conmutar el diagrama y hay un único que lo hace, entonces $i_A.[A,y] = id_{A+0}$ entonces i_A es isomorfismo, entonces i_A es monomorfismo i_0 es siempre un monomorfismo,entonces tenemos el resultado. $\square$

4.3.1. Primera aproximación a la pertenencia

Veamos una primera aproximación a la pertenencia y a la inclusión desde el punto de vista categórico.

Definición 4.12 *Sea $1 \xrightarrow{x} B$, $A \xrightarrow{y} B$ morfismos, decimos que $x \in y$ si existe un morfismo $1 \xrightarrow{h} A$ tal que $x = y.h$.*

Definición 4.13 *Sea $A \xrightarrow{x} B$, y $C \xrightarrow{y} B$ morfismos decimos que $x \subset y$, si existe un morfismo $A \xrightarrow{z} C$ tal que $x = y.z$.*

Teorema 4.16 *Las sumas son disjuntas, es decir no existe ningún elemento global de la suma que sea elemento de ambas inyecciones.*

Demostración 4.16.1 *Sea $1 \xrightarrow{x} A+B$, elemento global de $A+B$ supongamos que $x \in i_A$, entonces existen y , z tales que $i_A.y = x$, $i_B.z = x$, consideremos el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dr, "\top.t_A"] & \\
1 \arrow[ur, "y"] \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "z"'] & A+B \arrow[u, "i_A"'] \arrow[r, "{[\top.t_A,\bot.t_B]}"] & \Omega \\
& B \arrow[u, "i_B"'] \arrow[ur, "\bot.t_B"'] &
\end{tikzcd}$$

Entonces $[\top.t_A, \perp.t_B].x = \top.(t_A.y) = \top$
$[\top.t_A, \perp.t_B].x = \perp.(t_B.z) = \perp$
Entonces $\top = \perp$ *contradiciendo la no degeneración.* $\square$

Teorema 4.17 *Todo elemento global de una suma puede ser factorizado por alguna de las inyecciones.*

Demostración 4.17.1 *Sea* $1 \xrightarrow{m} A{+}B$ *elemento global, como* m *es monomorfismo tiene un mapa característico, sea* $1 \xrightarrow{a} A$ *elemento global de* A *entonces:* $1 \xrightarrow{a} A \xrightarrow{i_A} A + B \xrightarrow{c_m} \Omega = \top o \perp$ *, si se da la primero entonces tenemos el diagrama siguiente:*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr] \arrow[drr, "i_A.a"] \arrow[ddr] & & \\
& 1 \arrow[r, "m"] \arrow[d] & A + B \arrow[d, "c_m"] \\
& 1 \arrow[r, "m"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Entonces $m = i_A.a$ *entonces* m *es factorizado por* i_A*.*
Si $1 \xrightarrow{a} A \xrightarrow{i_A} A + B \xrightarrow{c_m} \Omega = \perp$ *y además* $1 \xrightarrow{a} A \xrightarrow{t_A} 1 \xrightarrow{\perp} \Omega = \perp$ *, entonces* $c_m.i_A = \perp.t_A$*. Argumentando análogamente por elementos globales en* B *obtenemos* $c_m.i_B = \perp.t_A$
Ahora veamos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "i_A"'] \arrow[dr, "id_A"] & \\
A + 0 \arrow[r, "{[\perp.t_A, \perp.t_B]}"] & A \\
B \arrow[u, "i_0"] \arrow[ur, "\perp.t_B"'] &
\end{tikzcd}$$

Entonces $c_m = [\perp.t_A, \perp.t_B]$ *, pero* $[\perp.t_A, \perp.t_B] = \perp.t_A$ *entonces tenemos el siguiente diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{m} & A+B \\ \downarrow & & \downarrow c_m \\ 1 & \xrightarrow{\top} & \Omega \end{array}$$

entonces $\perp.t_{A+B}.m = \top$ *lo que contradice la no degeneración.*

Corolario 4.17.1 *En un topos WT vale se cumple que:*
Dados A y B objetos existen dos morfismos $A \xrightarrow{i_A} A+B$ *y* $B \xrightarrow{i_B} A+B$ *tales que* $Mon(i_A) \wedge Mon(i_B)$ *y si* $x \in (A+B)$ *entonces* $x \in i_A$ *o* $x \in i_B$.

Demostración 4.17.1.1 *Sabemos que las inyecciones existen y son monomorfismos y que todo elemento global se factoriza por alguna de ellas.* □

Teorema 4.18 *En un topos WT se cumple que: Los morfismos* $1 \xrightarrow{i_1} 1+1$ *y* $1 \xrightarrow{i_2} 1+1$ *son diferentes y son los únicos elementos de (1+1).*

Demostración 4.18.1 *Sea el mapa suma* $[\top, \perp] : 1+1 \longrightarrow \Omega$ *, si las dos inyecciones fuesen iguales tendríamos* $\perp = \top$ *absurdo. Además sabemos que todo elemento global es factorizado por alguna de las inyecciones, esto es sea* $1 \xrightarrow{m} 1+1$ *existe* $1 \xrightarrow{a} 1$ *tal que* $m = i_A.a$ *entonces* $m = i_A$. □

Teorema 4.19 *Un morfismo* $A \xrightarrow{m} B$ *es monomorfismo sii es inyectivo en elementos globales.*

Demostración 4.19.1 (*directo*) *Si es monomorfismo entonces* $f.x = f.y \Rightarrow x = y$ *en particular si x e y son elementos globales.*
(*reciproco*) *Supongamos que m es inyectivo en elementos globales. Sea* $C \xrightarrow{f} A$ *y* $C \xrightarrow{g} A$ *dos mapas tales que* $m.f = m.g$. *Si* $f \neq g$ *entonces existe* $1 \xrightarrow{x} A$ *tal que* $f.x \neq g.x$ *entonces* $m.f.x \neq m.g.x$ *absurdo.* □

Teorema 4.20 *Un morfismo* $A \xrightarrow{q} B$ *es epimorfismo sii es sobreyectivo en elementos globales, esto es para todo morfismo* $1 \xrightarrow{x} B$ *existe* $1 \xrightarrow{y} A$ *tal que* $q.y = x$.

Demostración 4.20.1 (*reciproco*) *Supongamos que q es sobreyectiva en elementos globales. Sean f y g tales que* $f.q = g.q$ *sabemos que para todo* $1 \xrightarrow{b} B$ *elemento global existe* $1 \xrightarrow{a} A$ *tal que* $q.a = b$ *entonces* $f.b = f.q.a = g.q.a = g.b$ *entonces* $f = g$.
(*directo*) *Supongamos que no es sobreyectiva en elementos globales, entonces existe* $1 \xrightarrow{b} B$ *tal que para todo morfismo* $1 \xrightarrow{a} A$ *se verifica que* $q.a \neq b$, *ahora como b es monomorfismo tiene un mapa característico* c_m *tal que* $c_b.b = \top$ *entonces para todo morfismo a se cumple* $c_b.q.a = \perp$ *además* $\perp = \perp.t_A.a$ *entonces* $c_b.q = \perp.t_A$ *pero* $\perp.t_A = \perp.(t_B.q)$ *entonces* $c_b.g = (\perp.t_B).q$ *entonces como q es epimorfismo* $c_b = \top.t_B$ *pero* $\top = c_b.b$ *entonces* $\top = \perp.t_B.b = \perp,1 = \perp$ *absurdo.* □

Teorema 4.21 $1+1 \cong \Omega$

Demostración 4.21.1 *Veamos que* $[\top, \perp] : 1 + 1 \longrightarrow \Omega$ *es inyectiva y sobreyectiva en elementos globales. Es inyectiva: Sean* x *e* y *morfismos tales que* $[\top, \perp].x = [\top, \perp], y$ *pero los únicos elementos globales de* $1 + 1$ *son* i_1 *e* i_2 *entonces* $x, y = i_1$ *o* $x, y = i_2$ *pero si* $x \neq y$ *entonces* $\top = [\top, \perp].i_1 = [\top, \perp].i_2 = \perp$ *absurdo entonces* $[\top.\perp]$ *es inyectiva.*
Es sobreyectiva: Sea $1 \xrightarrow{y} \Omega$ *como los únicos elementos globales de* Ω *son* $\top$ *o* $\perp$ *entonces* $y = \top$ *o* $y = \perp$ *entonces tomando* $x = i_1$ *o* $x = i_2$ *tenemos* $q.x = y$.
$\square$

Observación 4.4 *El teorema anterior nos dice un mapa de la forma* $A \xrightarrow{M} \Omega$ *se comporta como una función característica, por lo cual podemos ver a* M *como representando a un subconjuntos de* A.

Proposición 4.21.1 $1 \cong PO$.

Demostración 4.21.1.1 *Sea* A *objeto, sabemos que* $O \times A \equiv 0$ *entonces existe un único morfismo* $0 \times A \longrightarrow \Omega$*, pero por el axioma de la potencia existe un único morfismo* $A \longrightarrow P0$ *tal que conmuta el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0"] & 0 & \\
0 \times A \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r] & 0 \times \Omega^0 \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "e_0"] & \Omega \\
A \arrow[r] & P0 &
\end{tikzcd}$$

Pero cualquier morfismo $A \longrightarrow P0$ *conmuta el diagrama anterior entonces* $P0$ *es terminal entonces* $PO \cong 1$. $\square$

Proposición 4.21.2 $P0 \cong \Omega$.

Demostración 4.21.2.1 *Sea* $1 \xrightarrow{\top} \Omega$ *sabemos que* $1 \times 1 \xrightarrow{\pi} 1$ *es isomorfismo y por el axioma de la potencia existe un morfismo* $1 \xrightarrow{h} P1$ *tal que* $e_1.(id_1 \times h) = \top.\pi$ *entonces* $e_1.(id_1 \times h).\pi^{-1} = \top$ *análogamente existe* k *tal que* $e_1.(1 \times k).\pi^{-1} = \perp$ *entonces* e_1 *es epi sobre elementos globales entonces* e_1 *es epi.*
Veamos que e_1 *es mono: Sean* $1 \xrightarrow{x} 1 \times P1$, $1 \xrightarrow{y} 1 \times P1$ *tales que* $e_1.x = e_1.y$ *y por el axioma de la potencia para el morfismo* $e_1.x.\pi$ *sabemos que existe un*

único h tal que:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 1 \arrow[dr, "e_1.x"] & \\
1\times 1 \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "1\times h"] \arrow[d, "\pi"] & 1\times P1 \arrow[u] \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "\pi_{P1}"] & \Omega \\
1 \arrow[r, "h"] & P1 &
\end{tikzcd}$$

Pero sabemos que π_{P1} también es isomorfismo entonces pero con $h = \pi_{P1}^{-1}.x.\pi$ pero como $e_1.x = e_1.y$ entonces $h = \pi_{P1}^{-1}.x.\pi = h = \pi_{P1}^{-1}.y.\pi$ entonces $x = y$ entonces e_1 es isomorfismo, entonces $\Omega \cong 1 \times P1 \cong P1$.$\square$

Teorema 4.22 *Para todo monomorfismo $A \xrightarrow{m} B$ de B existe un monomorfismo $A' \xrightarrow{m'} B'$ tal que $[m.m'] : A + A' \longrightarrow B$ es isomorfismo.*

Demostración 4.22.1 *: Sea c_m el mapa característico de m , consideremos el mapa $\neg.c_m : 1 \longrightarrow \Omega$ y $(A', m', t_{A'})$ pullback de $\neg.c_m$ y top , entonces $c_m.m' = \Omega.c_m.m' = \neg.\neg.c_m.m'$, pero $\neg.c_m.c_{m'} = \top.t_A$ entonces $c_{m'}.m' = \neg.\top.t_A = \bot.t_A$ entonces tenemos el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "m'"] \arrow[d, "t_{A'}"'] & A \arrow[d, "c_m"] \\
1 \arrow[r, "\bot"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Sea $X \xrightarrow{f} B$ tal que $c_m.f = \bot.t_X$ entonces $\neg.c_m.f = \neg.\bot.t_X$ entonces existe un único $X \xrightarrow{g} A'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, "g"] \arrow[drrrr, "f"] \arrow[ddrr, "t_X"'] & & & & \\
& & A' \arrow[rr, "m'"] \arrow[d, "t_{A'}"'] & & B \arrow[d, "\neg c_m"] \\
& & 1 \arrow[rr, "\top"] & & \Omega
\end{tikzcd}$$

Entonces $m'.g = f$ *y* $t_A.g = t_X$ *entonces* $(A', m', t_{A'})$ *es pullback de* c_m *y* $\perp$.
Sea $1 \xrightarrow{x} B$ *es elemento global de* B *entonces* $c_m.x$ *es elemento global de* B *entonces* $c_m.x = \perp$ *o* $c_m.x = \top$
Si $c_m.x = \top \Leftrightarrow x = m.h$ *con* h *el morfismo que hace conmutar el diagrama siguiente:*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[drr, "h"] \arrow[drrrr, "x"] \arrow[ddrr] & & & & \\
& & A \arrow[rr, "m"] \arrow[d, "t_A"'] & & B \arrow[d, "c_m"] \\
& & 1 \arrow[rr, "\top"] & & \Omega
\end{tikzcd}$$

Entonces si x *no es factor de* m *entonces* $c_m.x = \perp$ *entonces existe* $1 \xrightarrow{y} A'$ *tal que conmuta el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "y"] \arrow[drr, "x"] \arrow[ddr, "1"'] & & \\
& A' \arrow[r, "m'"] \arrow[d, "t_{A'}"'] & B \arrow[d, "c_{m'}"] \\
& 1 \arrow[r, "\perp"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Entonces x es factor de m'.
Veamos que $[m,m'] : A + A' \longrightarrow B$ es epimorfismo: para ello veamos que es sobreyectiva sobre elementos globales: Sea $1 \xrightarrow{b} B$ elemento global, como es factor de m o m' supongamos que existe $1 \xrightarrow{a} A$ tal que $m.a = b$ entonces $[m.m'].i_A.a = b$ análogamente si b es factor de m' $[m,m'].i_A.a = b$ entonces es sobreyectiva sobre elementos globales entonces es epimorfismo.
Veamos que $[m,m']$ es monomorfismo: Sean x e y elemento globales de $A+A'$ tales que $[m,m'].x = [m,m'].y$, sabemos por el teorema anterior que x e y son factores de i_A o de $i_{A'}$, supongamos que $x \in i_A \wedge y \in i_{A'}$ entonces existen k, h morfismos tales que $i_A.k = x \wedge i_{A'}.h = y$ entonces $c_m.[m,m'].x = c_m.[m,m'].i_A.k = c_m.m.k = \top$ además $c_m.[m,m'].x = c_m.[m,m'].y = c_m.[m,m'].i_{A'}.h = c_m.m'.h = \perp$ entonces $\top = bot$ absurdo, entonces x e y pertenecen a una misma inyección, supongamos que existen z , w morfismo tales que $x = i_A.z \wedge y = i_A.w$ entonces: $[m,m'].x = [m,m'].i_A.z = m.z$, $[m,m'].y = [m,m'].i_A.w = m.w$ pero m es monomorfismo entonces $m.z = m.w \to z = w$ entonces $x = y$ entonces $[m,m']$ es monomorfismo. $\square$

Observación 4.5 *Ya vimos que $A \xrightarrow{M} \Omega$ puede pensarse como un subconjuntso de A, el teorema anterior nos dice que existe el complemento relartivo de M con respecto a A.*

Teorema 4.23 *En cualquier topos un morfismo es monomorfismo sii es un ecualizador.*

Demostración 4.23.1 (*reciproco*)*: Sea $C \xrightarrow{k} A$ ecualizador de $A \xrightarrow{f} B$ y $A \xrightarrow{g} B$ Sean $D \xrightarrow{x} C$, $D \xrightarrow{y} C$ morfismos tales que $m.x = m.y$ entonces $f.m.x = g.m.x$ entonces por la propiedad universal del ecualizador existe un único morfismo z tal que $m.z = m.x$ entonces $z = x$ pero y verifica los mismo entonces $x = y$.*
(*directo*)*: Consideremos el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "t_A"'] & A \arrow[d, "c_m"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Entonces $t_B.m = t_A \wedge \top.t_A = c_m.m$ entonces $\top.t_B.m = \top.t_A = c_m.m$ veamos que m es ecualizador de $c_m.m$ y $\top.t_B$: Sea m‘ tal que $c_m.m' = \top.t_B.m'$ entonces existe un único morfismo tal gque el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "g"] \arrow[drr, "m'"] \arrow[ddr, "i_B.m'"'] & & \\ & A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "t_{A'}"'] & B \arrow[d, "c_m"] \\ & 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

En particular $m.g = m'$ entonces m es ecualizador. $\square$

Teorema 4.24 *En cualquier topos todo morfismo $A \xrightarrow{f} B$ se puede factorizar como $f = m.q$ donde $A \xrightarrow{q} C$ es epimorfismo y $C \xrightarrow{m} B$ es monomorfismo.*

Demostración 4.24.1 *Sean $C \xrightarrow{h} B$ y $C \xrightarrow{g} B$ tales que (C, h, g) es pushout de f consigo mismo y $C \xrightarrow{m} B$ ecualizador de h y g entonces por la propiedad universal del ecualizador existe un único morfismo $A \xrightarrow{q} C$ tal que $f = m.q$, por el teorema anterior sabemos que m es monomorfismo basta probar que q es epimorfismo:Afirmación 1: m es epimorfismo sii f es epimorfismo.Como $f = m.q$ es claro que si f es epimorfismo entonces m es epimorfismo. Supongamos que m es epimorfismo y $a.f = b.f$ donde $B \xrightarrow{a} Y$, $B \xrightarrow{b} Y$ entonces por la propiedad universal del pushout existe un único $X \xrightarrow{z} Y$ tal que $a = z.h$ $b = z.g$ como $g.m = h.m$ entonces $z.g.m = z.h.m$ entonces $a.m = b.m$ pero m es epimorfismo entonces $a = b$ entonces f es epimorfismo. Afirmación 2: Si existe otra descomposición de f como $f = n.d$ donde n es monomorfismo entonces existe y tal que $m = n.y$.Supongamos que existen $A \xrightarrow{y} D$, $D \xrightarrow{n} B$ con n monomorfismo, entonces n es ecualizador de dos morfismo a y b como la parte anterior, entonces $a.f = a.n.y = b.n.y = b.f$ entonces por la propiedad universal del pushout existe un único morfismo z tal que $a = z.h$, $b = z.g$ entonces análogamente a la afirmación anterior $a.m = b.m$ entonces por la propiedad universal del ecualizador existe un único $C \xrightarrow{w} D$ tal que $m = n.w$ como queríamos demostrar. Ahora si aplicamos lo anterior a el morfismo q*

sabemos que existen $A \xrightarrow{q'} C'$ *y* $C' \xrightarrow{m'} C$ *con* m' *monomorfismo tales que* $q = m'.q'$ *entonces* $f = (m.m').q'$ *pero* $m.m'$ *es monomorfismo entonces por la afirmación 2 existe un morfismo* $C \xrightarrow{w} C'$ *tal que* $m = m.m'.w$ *entonces como* m *es monomorfismo* $m'.w = C$ *entonces* m' *es epimorfismo entonces por la afirmación 1* q *es epimorfismo lo que demuestra el teorema.* □

El siguiente teorema muestra en que condiciones los conceptos categóricos de inclusión y pertenencia se comportan de manera análoga a sus contrapartes conjuntistas.

Teorema 4.25 *Sean* $C \xrightarrow{a} A$ *y* $B \xrightarrow{h} A$ *monomorfismos, entonces* $a \subset b$ *si y sólo si para todo* $x \in A$ *,* $x \in a \Rightarrow x \in b$.

Demostración 4.25.1 (*directo*) *Sea* $1 \xrightarrow{x} A$ *elemento global, si* $x \in a$ *entonces existe un morfismo* $1 \xrightarrow{h} C$ *tal que* $x = a.h$ *, además como* $a \subset b$ *existe* $C \xrightarrow{y} B$ *monomorfismo tal que* $a = b.y$ *entonces* $x = (b.y).h = b.(y.h)$ *entonces* $x \in b$.
(*reciproco*) *Sea* $1 \xrightarrow{x} C$ *elemento global de* C *entonces* $a.x \in a$, *entonces por hipótesis* $a.x \in b$ *entonces existe* $1 \xrightarrow{y} B$ *tal que* $a.x = b.y$,*sea* c_b *el mapa definido por el axioma del subobjeto clasificador,entonces* $c_b.(a.x) = c_b.(b.y) = (c_b.b).y = (\top.t_B).y = \top.(t_B.y) = \top$ *, pero* $\top = \top.(t_A.a.x)$ *,entonces* $c_b.(a.x) = \top.(t_A.a.x)$ *entonces* $(c_b.a).x = (\top.t_A.a).x$ *para todo* x *elemento global de* C *entonces por WT* $c_b.a = \top.t_A.a$ *entonces tenemos el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rrd, "a"] \arrow[rdd, "t_A.a"'] & & \\
& B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "t_{A'}"'] & A \arrow[d, "c_b"] \\
& 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Entonces por la propiedad universal del pullback existe un morfismo g *que hace conmutar al diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, "g"] \arrow[drr, "a"] \arrow[ddr, "t_A.a"'] & & \\
& B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "t_{A'}"] & A \arrow[d, "c_b"] \\
& 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

entonces $a = b.g$ entonces $a \subset b$. $\square$

Definición 4.14 *Sea $A \xrightarrow{M} \Omega$, llamaremos a M subobjeto.*

4.3.2. Segunda aproximación a la pertenencia

Dado un monomorfismo $A \xrightarrow{m} B$ el axioma de existencia de objeto clasificador nos permite representar al objeto A como un subobjeto de B de la forma $B \xrightarrow{M} \Omega$. Veamos una nueva versión de la partenencia en este contexto.

Definición 4.15 *Sea $B \xrightarrow{M} \Omega$, decimos que $x \in M$ sii se verifica*
$1 \xrightarrow{x} B \xrightarrow{M} \Omega = 1 \xrightarrow{\top} \Omega$. .

La siguiente proposición muestra la compatibilidad entre la primera y la segunda aproximación de la pertenencia.

Proposición 4.25.1 *$x \in M \leftrightarrow x \in m$.*

Demostración 4.25.1.1 *(directo): Sea $x \in M$ entonces por la propiedad universal del pullback existe z tal que hace conmutar el diagrama siguiente:*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "z"] \arrow[drr, "x"] \arrow[ddr, "1"'] & & \\
& A \arrow[r, "b"] \arrow[d, "t_A"] & B \arrow[d, "M"] \\
& 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

en particular para ese z se cumple $x = m.z$, entonces $x \in m$.

(*reciproco*)*: Sea $x \in m$ entonces existe z tal que $x = m.z$ entonces $M.x = M.m.z$ pero $M.m = \top.t_A$ entonces $M.x = \top.t_A.z$ pero $t_A.z = 1$ entonces $M.x = \top$ entonces $x \in M$.* $\square$

A su vez podemos ver que la primera y la segunda noción de aproximación son compatibles.

Corolario 4.25.1 *Sea $A \xrightarrow{M} \Omega$, $A \xrightarrow{M'} \Omega$ morfismos, m' y m son los morfismo que hacen conmutar los diagramas siguientes:*

$$
\begin{tikzcd}
C' \arrow[r, "m'"] \arrow[d, "t_{C'}"'] & A' \arrow[d, "M'"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "m"] \arrow[d, "t_C"'] & A \arrow[d, "M"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Entonces $m' \subset m$ sii $M' \subset M$

Demostración 4.25.1.1 *Simplemente recordar que $a \subset b$ sii para todo $x \in a$ implica que $x \in b$.* $\square$

Corolario 4.25.2 *Para todo morfismo $1 \xrightarrow{x} B$ se cumple $x \in M$ o $x \in M'$.*

Demostración 4.25.2.1 *Sea $A + A' \xrightarrow{[m,m']} B$ Sabemos que $[m, m']$ es isomorfismo, entonces existe un mapa $B \xrightarrow{z} A + A'$ tal que $[m, m'].z = B$ y $z.[m, m'] = A + A'$ entonces $z.x \in i_A$ o $z.x \in i_{A'}$ entonces o existe k tal que $z.x = i_A.k$ o existe h tal que $z.x = i_{A'}, h$, supongamos lo primero entonces:*
$[m, m'].z.x = [m, m'].i_A.k$ pero $[m, m'].i_A = m$ y $[m, m'].z = B$ entonces $B.x = m.k$ entonces $x = m.k$ entonces $x \in m$ entonces $x \in M$
ídem si $z.x \in i_{A'}$.$\square$

Definición 4.16 *Sea B objeto y $B \xrightarrow{M} \Omega$ subobjeto definimos $B - M := M'$.*

Observación 4.6 *Paro todo $x \in B$ $x \in B - M$ o $x \in M$.*

Teorema 4.26 *Sea B objeto y $B \xrightarrow{M} \Omega$, $B \xrightarrow{N} \Omega$ subobjetos,entonces $M \subset N$ sii para todo $x \in M \to x \in N$.*

Demostración 4.26.1 *Por definición $M \subset N$ sii $m \subset n$ donde n y m son los morfismos definidos por el axioma del subobjeto clasificador,peor ya vimos que $x \in M$ sii $x \in m$ y sabemos que $m \in n$ sii $x \in m$ implica que $x \in n$, lo que demuestra el teorema.* $\square$

Observación 4.7 *En un Well Pointed Topos Si $M \subset N$ y $N \subset M$ entonces $M = N$.*

Demostración 4.7.1 *Sea* $1 \xrightarrow{x} B$ *elemento global de* B*, tenemos que*
$1 \xrightarrow{x} B \xrightarrow{M} \Omega = 1 \xrightarrow{\top} \Omega$ *o*
$1 \xrightarrow{x} B \xrightarrow{M} \Omega = 1 \xrightarrow{\perp} \Omega$
En el primer caso $x \in M$ *entonces* $x \in N$ *entonces* $M.x = N.x$ *En el segundo caso* $x \notin M$ *entonces* $x \notin N$ *entonces* $N.x = \perp$ *entonces* $M.x = N.x$ *entonces coinciden en elementos globales entonces* $M = N$*.* $\square$

Veamos como obtener en WT las nociones de imagen y preimagen análogasa las de la teoría de conjuntos.

Definición 4.17 ***Imagen inversa*** *Dado un mapa* $A \xrightarrow{f} B$ *se puede definir un subobjeto de* A *y un subobjeto de* B *de la siguiente manera:*
Para cualquier subobjeto $B \xrightarrow{N} \Omega$ *la imagen inversa es un morfismo* $A \xrightarrow{f^{-1}[N]} \Omega$ *definido por* $f^{-1}[N] := N.f$ *.*

Definición 4.18 ***Imagen directa*** *Para cualquier subobjeto* $A \xrightarrow{M} \Omega$ *definimos la imagen directa de* M *bajo* f *como el mapa* $B \xrightarrow{f[M]} \Omega$ *determinado por:*
Sea el Pullback de los morfismos $A \xrightarrow{M} \Omega$ *y* $1 \xrightarrow{\top} \Omega$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "m"] \arrow[d, "t_C"'] & A \arrow[d, "M"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Sabemos que existe un monomorfismo n *y un epimorfismo* q *tales que* $f.m = n.q$

$$\begin{tikzcd}
 & C' \arrow[dr, "n"] & \\
C \arrow[ur, "q"] \arrow[r, "m"] \arrow[d, "t'"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "M"] & B \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega &
\end{tikzcd}$$

Sea $B \xrightarrow{c_n} \Omega$ *el mapa característico definido por el axioma del objeto clasificador:*

$$
\begin{tikzcd}
C` \arrow[r, "n"] \arrow[d, "t_{C`}"'] & A \arrow[d, "c_n"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Entonces definimos $f[M] := c_n$.

Teorema 4.27 *La definición de imagen directa no depende de la descomposición de* f*, es decir si* $n.q = f = n'.q'$ *entonces* $c_n = c_{n'}$.

Demostración 4.27.1 *Sea* $A \xrightarrow{M} \Omega$ *y* $A \xrightarrow{f} B$ *morfismos y* n *,*n' *monomorfismos y* g' *y* q *epimorfismos tales que* $n.q = f = n'.q'$ *consideremos el siguiente diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
 & C' \arrow[dr, "n'"] & \\
A \arrow[ur, "q'"] \arrow[r, "q"] & C \arrow[r, "n"] \arrow[d, "t_C"'] & B \arrow[d, "c_n"] \\
 & 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Sabemos que por ser 1 *objeto terminal se cumple* $t_C.q = t_{C'}.q'$ *entonces* $\top.t_C.q = \top.t_{C'}.q'$*, pero* $\top.t_C = c_n.n$ *entonces* $c_n.q = \top.t_{c'}.q'$ *pero* $n.q = n'.g'$ *entonces* $c_n.n'.q' = \top.t_{C'}.q'$ *pero* q' *es epimorfismo, entonces* $c_n.n' = \top.t_{C'}$ *entonces tenemos el siguiente diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
C' \arrow[drr, "n'"] \arrow[ddr, "t_{C'}"'] & & \\
 & C \arrow[r, "n"] \arrow[d, "t_C"'] & B \arrow[d, "c_n"] \\
 & 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Entonces por la propiedad universal del pullback existe un morfismo z tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
C' \arrow[dr, "z"] \arrow[drr, "n'"] \arrow[ddr, "t_{C'}"'] & & \\
& C \arrow[r, "n"] \arrow[d, "t_C"] & B \arrow[d, "c_n"] \\
& 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

entonces $n' = n.z$ entonces $n' \subset n$ entonces $c_{n'} \subset c_n$.
Análogamente cambiando n por n' tenemos que $c_n \subset c_{n'}$ entonces $c_n = c_{n'}$ entonces por la observación 3.9 resulta que $c_n = c_{n'}$. $\square$

Observación 4.8 *Sea $A \xrightarrow{M} \Omega$ y el diagrama definido por el axioma del objeto clasificador:*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "m"] \arrow[d] & A \arrow[d, "M"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

y el morfismo $C \xrightarrow{C} \Omega$ definido por el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "C"] \arrow[d] & C \arrow[d, "C"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

el cual identificaremos por C, entonces se cumple que $m[C] = M$.

Demostración 4.8.1 *Si $m.C = n.q$ donde q es epimorfismo y n monomorfismo, entonces por definición $m[C]$ es el mapa característico de n pero vimos que no depende de la descomposición, y m es monomorfismo y C es epimorfismo por lo tanto $m[C]$ es el mapa característico de m.* $\square$

La siguiente definición tienen una importancia principalmente técnica.

Definición 4.19 ***Imagen universal***

Sea $A \xrightarrow{f} B$ morfismo y $A \xrightarrow{M} \Omega$ subobjeto definimos la imagen universal de M bajo f como $f < M > := B - f[A - M]$

Definición 4.20 *Sea $A \xrightarrow{f} B$ morfismo y $1 \xrightarrow{x} A$ elemento global de A, definimos $f(x) := f.x$.*

Los siguientes resultados muestras que la imagen y la preimagen se comportan de manera similar a sus comtrapartes conjuntistas.

Proposición 4.27.1 *Si $x \in M$ entonces $f(x) \in f[M]$.*

Demostración 4.27.1.1 *Como $x \in M$ entonces $M.x = \top$ entonces por la propiedad universal del pullback existe un morfismo h tal que $m.h = x$.*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, "x"] \arrow[ddr, "1"'] & & \\
& C \arrow[r, "n"] \arrow[d, "t_C"'] & A \arrow[d, "M"] \\
& 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Sean los morfismos $C' \xrightarrow{m'} B$ monomorfismo y $C \xrightarrow{q} C$‘ epimorfismo, $C' \xrightarrow{t_{C'}} 1$ que intervienen en la definición de $f[M]$, entonces $f.m = m'.q$ y $f[M].m' = \top.t_{C'}$, entonces $f[M].f.x = f[M].f.m.x = f[M].m'.q.h = \top.t_{C'}.q.h = \top$ entonces $f[M].f.x = \top$ entonces $f(x) \in f[M]$. $\Box$

Proposición 4.27.2 *Sea $A \xrightarrow{f} B$ morfismo, $A \not\cong 0$, $A \xrightarrow{M} \Omega$ subobjeto de A, $y \in f[M]$ entonces existe $x \in M$ tal que $f(x) = y$.*

Demostración 4.27.2.1 *Consideremos los morfismos $C' \xrightarrow{m'} B$ monomorfismo y $C \xrightarrow{q} C'$ epimorfismo, $C' \xrightarrow{t_{C'}} 1$ que intervienen en la definición de $f[M]$, entonces $f.m = m'.q$ y $f[M].m' = \top.t_{C'}$*
Como $y \in f[M]$ entonces $f[M].y = \top$ entonces por la propiedad universal del pullback existe h que hace conmutar el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, "y"] \arrow[ddr, "1"'] & & \\
& C \arrow[r, "m'"] \arrow[d, "t_C"'] & B \arrow[d, "f[M]"] \\
& 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Como q es epimorfismo entonces es sobreyectiva sobre elementos globales, entonces existe $1 \xrightarrow{z} C$ tal que $h = q.z$, entonces $f.m.z = m'.q.z = m'.h = y$ tomando $x := m.z$ tenemos el resultado. $\square$

Proposición 4.27.3 *Sean $A \xrightarrow{f} B$ morfismo, $B \xrightarrow{N} \Omega$ subobjeto de B entonces $x \in f[N]^{-1}$ sii $f(x) \in N$.*

Demostración 4.27.3.1 *:Simplemente observar la igualdad $1 \xrightarrow{x} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{N} \Omega = \xrightarrow{\top} \Omega$.* $\square$

Proposición 4.27.4 *Sean $A \xrightarrow{M} \Omega$ y $B \xrightarrow{N} \Omega$ subojetos entonces se cumple:*
a) $f[M] \subset N \Leftrightarrow M \subset f^{-1}[N]$.
b) $N \subset f < M > \Leftrightarrow f^{-1}[N] \subset M$.

Demostración 4.27.4.1 *a):(directo) Sea $x \in M$ entonces $f(x) \in f[M]$ entonces $f(x) \in N$ entonces $x \in f^{-1}[N]$.*
(reciproco) Sea $y \in f[M]$ entonces existe $x \in M$ tal que $f(x) = y$ entonces $x \in f{-}1[N]$ entonces $f(x) \in N$ entonces $y \in N$.

b) (directo) Sea $x \in f^{-1}[N]$ entonces $f(x) \in N \subset f < M >$ entonces $f(x) \in B - f[A - M]$ pero $x \in A - M$ o $x \in M$ entonces $x \in M$.

(reciproco) Sea $y \in N$, si $y \notin f < M >$ entonces $y \notin B - f[A - M]$ entonces $y \in f[A - M]$ entonces existe x , $x \in A - M$ tal que $f(x) = y$ entonces $f^{-1}[N] \nsubseteq M$ absurdo. $\square$

Proposición 4.27.5 *Sean $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ morfismos y $A \xrightarrow{M} \Omega$, $C \xrightarrow{N} \Omega$ subobjetos entonces:*
a) i) $(g.f)[M] = g[f[M]]$.
ii) $(g.f) < M >= g < f < M >>$.
iii) $(g.f)^{-1}[N] = f^{-1}[g^{-1}[N]]$.

b) i) $id_A[M] = M = id_A < M >$.
ii) $id_c^{-1}[N] = N$.

c) Si f es monomorfismo entonces $f^{-1}[f[M]] = M = f^{-1}[f < M >]$.

d) Si g es epimorfismo entonces $g[g^{-1}[N]] = N = g < g^{-1}[N] >$.

Demostración 4.27.5.1 *a)i) Sea $z \in (g.f)[M]$ entonces existe $x \in M$ tal que $(g.f)(x) = z$ pero $(g.f)(x) = (g.f).x = g.(f.x) = g(f.x) = g(f(x))$ pero $f(x) \in f[M]$ entonces $z \in g[f[M]$ entonces $(g.f)[M] \subset g[f[M]]$.*
Sea $z \in g[f[M]]$ entonces existe $y \in f[M]$ tal que $z = g(y)$ y existe $x \in M$ tal que $y = f(x)$ entonces $z = g(f(x)) = g.(f.x) = (g.f).x = (g.f)(x)$ entonces $z \in (g.f)[M]$ entonces $g[f[M]] \subset (g.f)[M]$ entonces $(g.f)[M] = g[f[M]]$.

a) ii) Por definición $(g.f) < M >= C - (g.f)[A - M]$ y $g < f < M >>= C - g[B - f < M >]$ entonces alcanza con probar que $(g.f)[A - M] = g[B - (B - f[A - B])]$ lo cual es inmediato del hecho que $B - (B - f[A - M]) = f[A - M]$.

a) iii) $x \in (g.f)^{-1}[N]$ sii $(g.f)(x) \in N$ sii $g(f(x)) \in N$ sii $f(x) \in g^{-1}[N]$ sii $x \in f^{-1}[g^{-1}[N]]$.

b) $id_A[M] = M$ observar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dr, "m"] & \\
C \arrow[ur, "C"] \arrow[r, "m"] \arrow[d, "t_C"'] & A \arrow[r, "A"] \arrow[d, "M"] & A \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega &
\end{tikzcd}$$

$id_A < M >= M$: $id_A < M >= A - (A - M)$ entonces tenemos el resultado.
ii) $id_C^{-1}[N] = N.id_C = N$.
c) Sea f monomorfismo Sea $x \in f^{-1}[f[M]]$ entonces $f(x) \in f[M]$ entonces existe $y \in M$ tal que $f(x) = f(y)$ pero f es monomorfimo entonces $x = y$ entonces $x \in M$
Si $x \in M$ entonces $f(x) \in f[M]$ entonces $x \in f^{-1}[f[M]]$ entonces $f^{-1}[f[M]] = M$.
Sea $x \in f^{-1}[f < M >]$ entonces $f(x) \in f < M >= B - f[A - M]$ entonces $f(x) \notin f[A - M]$ pero $x \in A$ o $x \in A - M$ entonces $x \in M$.
Sea $x \in M$ entonces $f(x) \in f[M]$ pero como f es monomorfismo no puede existir un $y \notin M$ tal que $f(x) = f(y)$ entonces $f(x) \notin f[A - M]$ entonces $f(x) \in B - f[A - M]$ entonces $x \in f^{-1}[f < M >]$ entonces $f^{-1}[f < M >] = M$.
d) Sea g epimorfismo , $x \in g[g^{-1}[N]]$ entonces existe $y \in g^{-1}[N]$ tal que $g(y) = x$ pero $g(y) \in N$ entonces $x \in N$.

Sea $x \in N$ como g es epimorfismo existe $y \in B$ tal que $g(y) = x$ entonces $y \in g^{-1}[N]$ entonces $x \in g[g^{-1}[N]]$ entonces $g[g^{-1}[N]] = N$.
Sea $x \in g < g^{-1}[N] >$ entonces existe $x \in C - g[B - g^{-1}[N]]$ entonces $x \notin g[B - g^{-1}[N]$ pero como g es epimorfismo existe $y \in B$ tal que $g(y) = x$ pero Y no puede estar $B - g^{-1}[N]$ entonces $y \in g^{-1}[N]$ entonces $g(y) \in N$ entonces $x \in N$ entonces $g < g^{-1}[N] = N$. □

4.3.3. Teorema de Beck-Chevalley

El siguiente teorema es muy importante en la teoría de topos en general.

Teorema 4.28 (***Beck-Chevalley***) *Sean los morfismos $A \xrightarrow{f_1} B_1$, $A \xrightarrow{f_2} B_2$, $B_1 \xrightarrow{g_1} C$, $B_2 \xrightarrow{g_2} C$ tal que el siguiente diagrama es un pullback:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & B_2 \arrow[d, "g_2"] \\
B_1 \arrow[r, "g_1"] & C
\end{tikzcd}$$

Entonces se cumple :
1) $f_1[f_2^{-1}[.]] = g_1^{-1}[g_2[.]]$.
2) $f_1 < f_2^{-1}[.] >= g_1^{-1}[g_2 < . >]$.

Demostración 4.28.1 1) *Sea $x \in f_1[f_2^{-1}[M]]$, donde M es un subobjeto de B_2 entonces existe $y \in f_2^{-1}[M]$ tal que $f_1(y) = x$ entonces $g_1(x) = g_1(f_1(y)) = g_2(f_2(y))$ pero $f_2(y) \in M$ entonces $x \in g_1^{-1}[g_2[M]]$ entonces $f_1[f_2^{-1}[M]] \subset g_1^{-1}[g_2[M]]$.*
Sea $x \in g_1^{-1}[g_2[M]]$ entonces $g_1(x) \in g_2[M]$ entonces existe $y \in M$ tal que $g_1(x) = g_2(y)$.
entonces existe un único mapa h que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, "y"] \arrow[ddr, "x"'] & & \\
& A \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"] & B_2 \arrow[d, "g_2"] \\
& B_1 \arrow[r, "g_2"] & C
\end{tikzcd}$$

entonces $x = f_1(h)$, $y = f_2(h)$ entonces $h \in f_2^{-1}[M]$ entonces $x \in f_1[f_2^{-1}[M]]$, entonces $g_1^{-1}[g_2[M]] \subset f_1[f_2^{-1}[M]]$ entonces $f_1[f_2^{-1}[M]] = g_1^{-1}[g_2[M]]$.

2) Sea $x \in f_1 < f_2^{-1}[M] >$ *entonces* $x \in B_1 - f_1[A - f_2^{-1}[M]]$ *entonces* $x \notin f_1[A - f_2^{-1}[M]$ *entonces* $g_1(x) \in C - g_2[B_2 - M]$*, de lo contrario* $g_1(x) \in g_2[B_2 - M]$*, entonces existe* $y \in B_2 - M$ *tal que* $g_1(x) = g_2(y)$*, entonces nuevamente existe* h *que hace conmutar el diagrama anterior, por lo tanto* $f_2(h) = y$ *entonces* $f_2(h) \in B_2 - M$ *entonces* $h \notin f_2^{-1}[M]$ *entonces* $h \in A - f_2^{-1}[M]$*, pero* $x = f_1(h)$ *entonces* $x \in f_1[A - f_2^{-1}[M]]$ *absurdo entonces* $f_1 < f_2^{-1}[M] > \subset g_1^{-1}[g_2 < M >]$*. Sea* $x \notin f_1 < f_2^{-1}[M] >$ *entonces* $x not \in B_1 - f_1[A - f_2^{-1}[M]]$ *entonces* $x \in f_1[A - f_2^{-1}[M]]$ *entonces existe* $y \notin f_2^{-1}[M]$ *tal que* $f_1(y) = x$ *entonces* $g_1(f_1(y)) = g_1(x)$ *entonces* $g_2(f_2(y)) = g_1(x)$ *pero* $f_2(y) \notin M$ *entonces* $f_2(y) \in B_2 - M$ *entonces* $g_1(x) \in g_2[B_2 - M]$ *entonces* $g_1(x) \notin C - g_2[B_2 - M] = g_2 < M >$ *entonces* $x \notin g_1 - 1[g_2 < M >]$ *entonces* $g_1 - 1[g_2 < M >] \subset f_1 < f_2^{-1}[M] >$
entonces $g_1 - 1[g_2 < M >] = f_1 < f_2^{-1}[M] >$.$\square$

Definición 4.21 *(*$M \cap N$*)* $B \xrightarrow{M} \Omega$ *y* $B \xrightarrow{N} \Omega$ *subobjetos, Sea* $E \xrightarrow{k} B$ *ecualizador de* M *y* N *definimos* $M \cap N := k[M.k]$*.*

Proposición 4.28.1 *Sean* $B \xrightarrow{M} \Omega$ *y* $B \xrightarrow{N} \Omega$ *entonces* $x \in M \cap N$ *sii* $x \in M$ *y* $x \in N$*.*

Demostración 4.28.1.1 (*directo*) *Sea* $x \in k[M.k]$ *entonces existe* $y \in M.k$ *tal que* $x = k.y$ *pero* $M.k.y = \top$ *entonces* $M.x = \top$ *entonces* $x \in M$*, cambiando* M *por* N *obtenemos* $x \in N$ *. (reciproco) Sea* $x \in M$ *y* $x \in N$ *entonces* $M.x = N.x = \top$ *entonces por la propiedad universal del ecualizador existe un morfismo* h *tal que* $K.h = x$ *entonces* $M.k.h = M.x = \top$ *entonces* $h \in M.k$ *entonces* $x \in k[M.k]$*.* $\square$

Observación 4.9 $M \cap N = N \cap M$*.*

Definición 4.22 *(*$M \cup N$*) Sea* $B \xrightarrow{M} \Omega$ *,* $B \xrightarrow{N} \Omega$*, y* $B \xrightarrow{M'} \Omega$ *,* $B \xrightarrow{N'} \Omega$ *sus complementos relativos respectivamente, definimos* $M \cup N$ *como el complemento relativo de* $M' \cap N'$*.*

Observación 4.10 $M \cup N = N \cup M$*.*

Proposición 4.28.2 *Sean* $B \xrightarrow{M} \Omega$ *,y* $B \xrightarrow{N} \Omega$*, subobjetos.Entonces* $x \in M \cap N$ *sii* $x \in M$ *o* $x \in N$*.*

Demostración 4.28.2.1 *Si* $x \in M \cup N$ *entonces* $x \notin M' \cap N'$ *entonces o* $x \notin M'$ *o* $x \notin N'$ *entonces* $x \in M$ *o* $x \in N$*.* $\square$

Definición 4.23 *: Sea* A *objeto y el objeto* Ω^A *dado por el axioma de existencia de potencia definimos* $PA := \Omega^A$*.*

4.4. Operadores internos

Veamos una manera de representar a la imagen directa, imagen inversa, e imagen universal como operadores.

Definición 4.24 (***Operadores internos***) *Sea A objeto definimos e_A como el morfismo $A \times PA \xrightarrow{e} \Omega$ definido por el axioma de existencia de potencia.*

Sea $A \xrightarrow{f} B$ morfismo ,el axioma existencia de potencia nos dice que :Dados dos objetos A y B existe un objeto B^A y un mapa $A \times B^A \xrightarrow{e} B$ llamado mapa evaluación de B^A tal que : Para cualquier mapa de la forma $A \times X \xrightarrow{f} B$ existe un único mapa $X \xrightarrow{h} B^A$ que verifica la ecuación $e. < P_A, P_X.h >= f$ donde los mapas P_A y P_X son proyecciones del producto $A \times X$.
Si aplicamos este axioma para "A" igual a B "B" igual a Ω "X" igual a PA y "f" igual a $(f \times PA)[e_A] : PA \times B :\longrightarrow \Omega$ entonces existe un morfismo $PA \xrightarrow{h} PB$ tal que $e_B.(B \times h) = (f \times PA)[e_A]$ a este mapa h lo llamaremos Pf.

Si aplicamos el axioma de existencia de potencia con las mismas hipótesis pero con "f" igual a $(f \times PA) < e_a >$ a el morfismo h lo llamaremos $P_\forall f$.
Ahora aplicamos el axioma de existencia de potencia con "A" igual a A "X" igual a PB "B" igual a Ω y "f igual a $e_B.(f \times PB)$ a la h la llamaremos P^*f.

Resumiendo: Dado un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ definimos tres morfismos:
$PA \xrightarrow{Pf} PB$, $PA \xrightarrow{P_\forall f} PB$ y $PB \xrightarrow{P^*f} PA$, como los únicos morfismos que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$(B \times Pf)^{-1}[e_B] = (f \times PA)[e_A]$$

.

$$(B \times P_\forall f)^{-1}[e_B] = (f \times PA) < e_A >$$

.

$$(A \times P^*f)^{-1}[e_A] = (f \times PB)^{-1}[e_B]$$

.

Proposición 4.28.3 *Sean $A \xrightarrow{f} B$, $A \xrightarrow{M} \Omega$, $B \xrightarrow{N} \Omega$, $1 \xrightarrow{M_e} PA$ (nombre de M) $1 \xrightarrow{N_e} PB$ (nombre de N) entonces se cumple:*

a) $(Pf).M_e = f[M]_e$.
b) $(P_\forall f).M_e = f < M >_e$.
c)$(P^*f).N_e = f^{-1}[N]_e$.

Demostración 4.28.3.1 *a) Sabemos que $f[M]_e$ es el único morfismo que verifica $e_B.(B \times f[M]_e) = f[M].P_B$.*
Veamos que $e_B.(B \times (Pf.M_e)) = f[M].P_B$.
Sabemos que $e_B.(B \times (Pf.M_e)) = e_B.((B.B) \times (Pf.M_e)) = e_B.((B \times Pf).(B \times M_e)) = (e_B.(B \times Pf)).(B \times M_e) = ((f \times P_A[e_A]).(B \times M_e) = (B \times M_e)^{-1}(f \times P_A[e_A]))$. Ahora aplicando el teorema de Beck-Chevaley al siguientes diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \times 1 \arrow[r, "A\times M_e"] \arrow[d, "f\times 1"'] & A \times PA \arrow[d, "f\times PA"] \\
B \times 1 \arrow[r, "B\times M_e"] & B \times PA
\end{tikzcd}$$

Tenemos que $(B \times M_e)^{-1}((f \times PA)[e_A]) = f \times 1((A \times M_e)^{-1}[e_A]) = (f \times 1)[e_A.(A \times M_e)] = f[M].PB.$

b) Sabemos que $f < M >$ *es el único morfismo que verifica* $e_B.(B \times f < M >_e)) = P_B.f < M >.$
Veamos que $e_B.(B \times (P_\forall f.M_e)) = P_B.f < M >.$
Sabemos que $e_B.(B \times (P_\forall f.M_e)) = e_B.((B \times P_\forall f).(B \times M_e)) = (e_B.((B \times P_\forall f)).(B \times M_e)) = ((f \times PA) < eA >).(B \times M_e) = (B \times M_e)^{-1}((f \times PA) < e_A >)^{\cdot}$ *Aplicando el teorema de beck chevaley al diagrama anterior tenemos* :$(B \times M_e)^{-1}((f \times PA) < e_A >) = (f \times 1) < (A \times M_e)^{-1}[e_A] >$
$(f \times 1) < (A \times M_e)^{-1}[e_A] >= (f \times 1) < e_A.(A \times M_e) >.$
Falta probar que $(f \times 1) < e_A.(A \times M_e) >= f < M > .P_B.$
$(f \times 1) < e_A.(A \times M_e) >= B \times 1 - f \times 1[A \times 1 - e_A.(A \times M_e]$ *y* $f < M > .P_B = P_B^{-1}(B - f[A - M]).$
Sea $z \in B \times 1 - f \times 1[A \times 1 - e_A.(A \times M_e)],$
Sabemos que $P_B(z) \in f[A - M]$ *o* $P_B(z) \in B - f[A - M].$
Si $P_B(z) \in f[A - M]$ *entonces existe un* $x \in A - M$ *tal que* $P_B(z) = f(x)$
consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "A"] & A \arrow[dr, "M"] & \\
1 \arrow[ur, "x"] \arrow[r, "x\times 1"] \arrow[dr, "1"'] & A \times 1 \arrow[u, "\pi_A"] \arrow[r, "A\times M_e"] \arrow[d, "\pi_1"] & A \times PA \arrow[u, "\pi_A"] \arrow[r, "e_A"] \arrow[d, "\pi_{PA}"] & \Omega \\
 & 1 \arrow[r, "M_e"] & PA &
\end{tikzcd}$$

Entonces $x \times 1 \in (A \times 1 - e_A.(A \times M_e))$
recordando el siguiente diagrama :

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "f"] & B \\
1 \arrow[ur, "x"] \arrow[r, "x\times 1"] \arrow[dr, "1"'] & A\times 1 \arrow[u, "\pi_A"] \arrow[r, "f\times 1"] \arrow[d, "\pi_1"] & B\times 1 \arrow[u, "\pi_B"] \arrow[d, "\pi_1"] \\
 & 1 \arrow[r, "1"] & 1
\end{tikzcd}
$$

tenemos que $f\times(x\times 1)=z$ *absurdo, entonces*
$B\times 1-f\times 1[A\times 1-e_A.(A\times M_e)]\subset P_B^{-1}[B-f[A-M]]$.
Sea $z\in P_B^{-1}[B-f[A-M]]$ *entonces* $P_B(z)\in B-f[A-M]$. *Si* $z\in f\times 1[A\times 1-e_A.(A.M_e)]$ *entonces existe* $y\in A\times -e_A.(A\times M_e)$ *tal que*

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "A"] & A \arrow[dr, "M"] & \\
1 \arrow[ur, "x"] \arrow[r, "y"] \arrow[dr, "1"'] & A\times 1 \arrow[u, "\pi_A"] \arrow[r, "A\times M_e"] \arrow[d, "\pi_1"] & A\times PA \arrow[u, "\pi_A"] \arrow[r, "e_A"] \arrow[d, "\pi_{PA}"] & \Omega \\
 & 1 \arrow[r, "M_e"] & PA &
\end{tikzcd}
$$

Donde $x:=P_A(y)$, $x\in A-M$ *entonces* $P_B(z)\in f[A-M]$ *absurdo. por lo tanto*
$P_B^{-1}[B-f[A-M]]\subset B\times -f\times 1[A\times 1-e_A.(A\times M_e)]$, *lo cual prueba b).*

c)Debemos probar que $e_A.(A\times(P^*f.N_e))=f^{-1}[N].P_A$.
$e_A.(A\times(P^*f.N_e)) = e_A.((A.A)\times(P^*f.N_e)) = e_A.(A\times P^*f).(A\times N_e) = (f\times PB)^{-1}[e_B].(A\times N_e) = e_B.(f\times PB).(A\times N_e) = e_B.((f.A)\times(PB.N_e)) = e_B.(f\times N_e) = e_B.((B.f)\times(N_e,1)) = (e_B.(B\times N_e)).(f\times 1) = N.f.P_A$ *lo que demuestra c).* $\square$

Teorema 4.29 *Sean* $A\xrightarrow{f}B$, $B\xrightarrow{g}C$ *morfismos entonces se cumple:*
a) i) $P(g.f)=P(g).P(f)$.
ii) $P(id_A)=id_{PA}$.

b) i) $P_\forall(g.f) = P_\forall(g).P_\forall(f)$.
ii) $P_\forall id_A = id_{PA}$.

c) i) $P^*(g.f) = P^*(f).P^*(g)$.
ii) $P^* id_A = P^* id_{PA}$.
(Es decir P y $P_\forall$ son funtores covariantes y P^* es un funtor contravariante).

Demostración 4.29.1 *:a) i) Veamos que se cumple* $(C \times P(g.f))^{-1}[e_C] = (C \times (Pg.Pf))^{-1}[e_C]$.
$(C \times P(g.f))^{-1}[e_C] = ((g.f) \times PA)[e_A] = ((g.f) \times (PA.PA))[e_A] = ((g \times PA).(f \times PA))[e_A] = (g \times PA)[(f \times PA)[e_A]] = (g \times PA)[(B \times Pf)^{-1}[e_B]]$
aplicando el teorema de beck chevaley al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} B \times PA \arrow[r, "B\times Pf"] \arrow[d, "g\times PA"'] & B \times PB \arrow[d, "g\times PB"] \\ C \times PA \arrow[r, "C\times Pf"] & C \times PB \end{tikzcd} .$$

tenemos que $(g \times PA)[(B \times Pf)^{-1}[e_B]] = (C \times Pf)^{-1}(g \times PB[e_B]) = (C \times Pf)^{-1}((C \times Pg)^{-1}[e_C]) = ((C \times Pg).(C \times Pf))^{-1}[e_C] = (C \times (Pg.Pf))^{-1}[e_C]$.

a)ii):Simplemente observar que $(A \times P_{id_A})^{-1} = (id_A \times PA)[e_A]$.

b)i): Veamos que $(C \times P_\forall(g.f))^{-1}[e_C] = (C \times (P_\forall g.P_\forall f)^{-1}[e_C]$
$(C \times P_\forall(g.f))^{-1}[e_C] = ((g.f) \times PA) < e_A >= ((g \times PA).(f \times PA)) < e_A >= (g \times PA) < (f \times PA) < e_A >>= (g \times PA) < (B \times P_\forall f)^{-1}[e_B] >$
Aplicando el teorema de beck chevaley al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} B \times PA \arrow[r, "B\times P_{\forall f}"] \arrow[d, "g\times PA"'] & B \times PB \arrow[d, "g\times PB"] \\ C \times PA \arrow[r, "C\times P_{\forall f}"] & C \times PB \end{tikzcd} .$$

tenemos que $(g \times PA) < (B \times P_\forall f)^{-1}[e_B] >= (C \times P_\forall f)^{-1}[(g \times PB) < e_B >] = (C \times P_\forall f)^{-1}[(C \times P_\forall g)^{-1}[e_C]] = ((C \times P_\forall g).(C \times P_\forall f))^{-1}[e_C] = (C \times (P_\forall g.P_\forall f)^{-1}[e_C]$.
b)ii): $(A \times P_\forall id_A)^{-1}[e_A] = (id_A \times PA) < e_A >= (id_A \times PA)[e_A]$.

c)i) Veamos que $(A \times P^*(g.f))^{-1}[e_A] = (A \times (P^* f.P^* g))^{-1}[e_A]$.

$(A \times P^*(g.f))^{-1}[e_A] = ((g.f) \times PC)^{-1}[e_C] = ((g \times PC).(f \times PC))^{-1}[e_C] = (f \times PC)^{-1}((B \times P * g)^{-1}[e_B]) = ((B \times P * g).(f \times PC))^{-1}[e_B] = (f \times P * g)^{-1}[e_B] = ((f.A) \times (PB.P * g))^{-1}[e_B] = ((f \times PB).(A \times P^* g))^{-1}[e_B] = (A \times P * g)^{-1}((f \times$

$PB)^{-1}[e_B]) = (A\times P^*g)^{-1}((A\times P^*f)^{-1}[e_A]) = ((A\times P^*f).(A\times P^*g))^{-1}[e_A] = (A \times (P^*f.P^*g))^{-1}[e_A]$.

c)ii) Simplemente observar que $(A \times P^*id_A)^{-1}[e_A] = (id_A \times PA)^{-1}[e_A]$. $\square$

Teorema 4.30 *a) Sea* $A \xrightarrow{f} B$ *monomorfismo entonces:*
$P^*f.Pf = id_{PA}$ *, en particular* Pf *es monomorfismo y* P^*f *es epimorfismo*

b) Sea $A \xrightarrow{f} B$ *epimorfismo entonces* $Pf.P^*f = id_{PB}$ *, en particular* Pf *es epimorfismo y* P^*f *es monomorfismo.*

Demostración 4.30.1 *a) Veamos que* $(A \times (P^*f.Pf))^{-1}[e_A] = eA$.
$(A \times (P^*f.Pf))^{-1}[e_A] = ((A \times P^*f).(A \times Pf))^{-1}[e_A] = (A \times Pf)^{-1}[(A \times P^*f)^{-1}[e_A]] = (A \times Pf)^{-1}[(f \times PB)^{-1}[e_B]] = ((f \times PB).(A \times Pf))^{-1}[e_A] = ((f.A) \times (PB.Pf))^{-1}[e_B] = (f \times Pf)^{-1}[e_B] = ((B.f) \times Pf.PA)^{-1}[e_B] = ((B \times Pf).(f \times PA)^{-1}[e_B] = (f\times)^{-1}[(B \times Pf)^{-1}[e_B]] = (f \times PA)^{-1}[(f \times PA)[e_A]]$
Como f *y* PA *son entonces* $f\times PA$ *es monomorfismo entonces* $(f\times PA)^{-1}[(f\times PA)[e_A]] = e_A$.$\square$

Observación 4.11 *Para cualquier* f *(no necesariamente monomorfismo)se cumple* $e_A \subset (A \times P^*f.Pf)^{-1}[e_A]$ *ya que* $e_A \subset (f \times PA)^{-1}[(f \times PA)[e_A]]$.

Demostración 4.11.1 *b) Veamos que* $(B \times (Pf.P^*f))^{-1}[e_B] = e_B$.
$(B \times (Pf.P^*f))^{-1}[e_B] = ((B \times Pf).(B \times P^*f))^{-1}[e_B] = (B \times P * f)[(B \times Pf)^{-1}[e_B]] = (B \times P^*f)^{-1}[(f \times PA)[e_A]]$.
Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \times PB \arrow[r, "A\times P*f"] \arrow[d, "f\times PB"'] & A \times PB \arrow[d, "f\times PA"] \\
B \times PB \arrow[r, "B\times P*f"] & B \times PA
\end{tikzcd}.$$

Entonces por beck chevaley $(B \times P^*f)^{-1}[(f \times PA)[e_A]] = (f \times PB)[(A \times P^*f)^{-1}[e_A]] = (f \times PB)[(f \times PB)^{-1}[e_B]]$ *como* f *y* PB *son epimorfismo entonces* $f \times PB$ *es epimorfismo entonces* $(f \times PB)[(f \times PB)^{-1}[e_B]] = e_B$.$\square$

Teorema 4.31 *Sea* m *monomorfismo, entonces: Si el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "n"'] & D \arrow[d, "m"] \\
A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}$$

es un pullback entonces el siguiente diagrama también

$$\begin{tikzcd} PB \arrow[r, "Pg"] \arrow[d, "Pn"'] & PD \arrow[d, "Pm"] \\ PA \arrow[r, "Pf"] & PC \end{tikzcd}$$

Demostración 4.31.1 *Como $P(m.g) = Pm.P.g$ y $P(f.n) = Pf.Pn$ entonces el diagrama anterior conmuta.*
Sean $E \xrightarrow{v} PD$ y $E \xrightarrow{u} PA$ morfismo tales que $Pm.v = Pf.u$ demostremos que existe un morfismo y tal que $v = Pg.y$ y $u = Pn.y$.
Sea $y := P^*n.u$. Veamos que $(A \times u)^{-1}[e_A] = (A \times (Pn.P^*n.u))^{-1}[e_A]$
Por la observación anterior sabemos que $e_A \subset (A \times P^*n.Pn)^{-1}[e_A]$ entonces $(A\times u)^{-1}[e_A] \subset (A\times u)^{-1}[(A\times P^*n.Pn)^{-1}[e_A]]$. Pero $(A\times(Pn.P^*n.u))^{-1}[e_A] = ((A \times Pn.P * n).(A \times u))^{-1}[e_A] = (A \times u)^{-1}[(A \times PnP * n)^{-1}[e_A]]$ entonces $(A \times u)^{-1}[e_A] \subset (A \times (Pn.P^*n.u))^{-1}[e_A]$.
Probemos la otra inclusión:$(A\times(Pn.P^*n.u))^{-1}[e_A] = ((A\times Pn).(A\times P^*n.u))^{-1}[e_A] = (A \times P^*n.u)^{-1}[(A \times Pn)^{-1}[e_A]] = (A \times P^*n.u)^{-1}[(n \times PB)[e_B]] = ((A \times P^*n).(A\times u))^{-1}[n\times PB[e_B]] = (A\times u)^{-1}[(A\times P^*n)^{-1}[(n\times PB)[e_B]]$.Aplicando Beck-Chevaley al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} B \times PA \arrow[r, "B\times P^*n"] \arrow[d, "n\times PA"'] & B \times PB \arrow[d, "n\times PB"] \\ A \times PA \arrow[r, "A\times P^*n"] & A \times PB \end{tikzcd} .$$

$(A\times u)^{-1}[(A\times P^*n)^{-1}[(n\times PB)[e_B]] = (A\times u)^{-1}[(n\times PA)[(B\times P^*n)^{-1}[e_B]] = (A \times u)^{-1}[(n \times PA)[(n \times PA)^{-1}[e_A]]$.Pero $(n \times PA)[(n \times PA)^{-1}[e_A]] \subset e_A$ entonces $(A \times (Pn.P^*n.u))^{-1}[e_A] \subset (A \times u)^{-1}[e_A]$
Entonces se cumple $u = P^*n.u$.
Veamos que se cumple $(D \times v)^{-1}[e_D] = (D \times (Pg.P^*n.u))^{-1}[e_D]$
$(D\times(Pg.P^*n.u))^{-1}[e_D] = ((D\times Pg).(D\times P^*n).(D\times u))^{-1}[e_D] = (D\times u)^{-1}[(D\times P^*n)^{-1}[(D \times Pg)^{-1}[e_D]]] = (D \times u)^{-1}[(D \times P^*n)^{-1}[(g \times PB)[e_B]]]$.Aplicando beck-chevaley al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} B \times PA \arrow[r, "B\times P^*n"] \arrow[d, "g\times PA"'] & B \times PB \arrow[d, "g\times PB"] \\ D \times PA \arrow[r, "D\times P^*n"] & D \times PB \end{tikzcd} .$$

tenemos que $(D\times u)^{-1}[(D\times P^*n)^{-1}[(g\times PB)[e_B]]] = (D\times u)^{-1}[(g\times PA)[(B\times P^*n)^{-1}[e_B]]] = (D\times u)^{-1}[(g\times PA)[(n\times PA)^{-1}[e_A]]$.Aplicando beck-chevaley al *siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} B\times PA \arrow[r, "n\times PA"] \arrow[d, "g\times PA"'] & A\times PA \arrow[d, "f\times PA"] \\ D\times PA \arrow[r, "m\times PA"] & C\times PA \end{tikzcd}$$

$(D\times u)^{-1}[(g\times PA)[(n\times PA)^{-1}[e_A]] = (D\times u)^{-1}[(m\times PA)^{-1}[(f\times PA)[e_A]]] = ((m\times PA).(D\times u))^{-1}[(f\times PA)[e_A]] = (m\times u)^{-1}[(f\times PA)[e_A]] = (m\times u)^{-1}[(C\times Pf)^{-1}[e_C]] = ((C\times Pf).(m\times u))^{-1}[e_C] = ((C.m)\times(Pf.u))^{-1}[e_C] = (m\times(Pm.v))^{-1}[e_C] = ((C.m)\times(Pm.v))^{-1}[e_C] = ((C\times Pm).(m\times v))^{-1}[e_C] = (m\times v)^{-1}[(C\times Pm)^{-1}[e_C]] = (m\times v)^{-1}[(m\times PD)[e_D]]$.*Aplicando Beck-chevaley al siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} D\times E \arrow[r, "D\times v"] \arrow[d, "D\times E"'] & D\times PD \arrow[d, "m\times PD"] \\ D\times E \arrow[r, "m\times v"] & C\times PD \end{tikzcd} .$$

tenemos $(m\times v)^{-1}[(m\times PD)[e_D]] = (D\times E)[(D\times v)^{-1}[e_D]] = (D\times v)^{-1}[e_D]$
Entonces $v = Pg.y$.
Además como m *es un monomorfismo y por ser el primer diagrama un pullback* g *también es un monomorfismo, entonces por el teorema anterior* $P^*g.Pg = id_P D$ *entonces* $P^*g.v = P^*g.(Pg.y)$ *implica que* $y = P^*g.v$ *lo que prueba la unicidad del morfismo* y .$\square$

Definición 4.25 *Sea* $A \xrightarrow{M} \Omega$ *morfismo y el diagrama definido por el axioma del objeto clasificador*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "m"] \arrow[d, "t_C"'] & A \arrow[d, "M"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd} .$$

Como el operador P *preserva monomorfismo tenemos que* $PC \xrightarrow{Pm} PA$ *es monomorfismo,sea el morfismo* N *definido por el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
PC \arrow[r, "Pm"] \arrow[d, "t_C"'] & PA \arrow[d, "N"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd} .$$

Definimos $P[M] := N$.
Observar que no es otra cosa que la imagen directa.

Teorema 4.32 *Sean* $A \xrightarrow{f} B$ *y* $B \xrightarrow{M} \Omega$ *morfismos. Entonces* $P[f^{-1}[M]] = (Pf)^{-1}[P[M]]$.

Demostración 4.32.1 *Consideremos el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "n"] \arrow[dd, bend right, "t_D"'] & A \arrow[d, "f"] \\
C \arrow[r, "m"] \arrow[d, "t_C"'] & B \arrow[d, "M"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd} .$$

Como el diagrama de más abajo es un pullback existe un morfismo y tal que

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "n"] \arrow[d, "y"'] \arrow[dd, bend right, "t_D"'] & A \arrow[d, "f"] \\
C \arrow[r, "m"] \arrow[d, "t_C"'] & B \arrow[d, "M"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd} .$$

Entonces tenemos los siguientes pullback

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "n"] \arrow[d, "y"'] & A \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "m"] \arrow[d, "t_C"'] & B \arrow[d, "M"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "m"] \arrow[d, "t_C"'] & B \arrow[d, "M"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd} .$$

Entonces el siguiente diagrama es un pullback

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "n"] \arrow[d, "y"'] & B \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "m"] & \Omega \end{tikzcd} .$$

Entonces por el teorema anterior el siguiente diagrama es un pullback

$$\begin{tikzcd} PD \arrow[r, "Pn"] \arrow[d, "Py"'] & B \arrow[d, "Pf"] \\ PC \arrow[r, "Pm"] & PB \end{tikzcd} ,$$

Entonces el siguiente diagrama es un pullback

$$\begin{tikzcd}
PD \arrow[r, "Pn"] \arrow[d, "Py"'] & PA \arrow[d, "Pf"] \\
PC \arrow[r, "Pm"] \arrow[d, "t_{PC}"'] & B \arrow[d, "P[M]"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd} .$$

lo que demuestra el teorema.$\square$

Proposición 4.32.1 *Sea* $A \xrightarrow{M} \Omega$*, entonces* $M_e \in P[M]$

Demostración 4.32.1.1 *Sea el diagrama :*
$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "m"] \arrow[d] & A \arrow[d, "M"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd} .$$

por la observación 3.10 $m[C] = M$ *entonces* $M_e = (m[C])_e = Pm.C_e$
Entonces $P[M].M_e = P[M].(Pm.C_e) = (P[M].Pm).C_e = P[m^{-1}[M]].C_e = P[C].C_e$
Pero observemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "C_e"'] \arrow[d, "C_e"] \\
PC \arrow[r, "PC"] \arrow[d] & PC \arrow[d, "P[C]"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd} .$$

entonces $P[C].C_e = \top$. $\square$

Proposición 4.32.2 *Sean* $A \xrightarrow{M} \Omega$ *y* $A \xrightarrow{N} \Omega$ *, entonces* $N \subset M$ *sii* $P[N] \subset P[M]$

Demostración 4.32.2.1 *(directo) Sea n y m tales que N y M son sus mapas característicos respectivamente,*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "m"] \arrow[d] & A \arrow[d, "M"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D \arrow[r, "n"] \arrow[d] & A \arrow[d, "M"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd} .$$

entonces $n \subset m$ entonces existe d morfismo tal que $m.d = n$ entonces $Pm.Pd = Pn$ entonces $Pn \subset Pm$ entonces $P[N] \subset P[M]$.
(reciproco) Si $P[N] \subset P[M]$ entonces como $N_e \in P[N]$ tenemos que $N_e \in P[M]$ entonces por definición $N_e \in Pm$ entonces existe un morfismo $1 \xrightarrow{h} PC$ tal que $N_e = Pm.h$, pero sabemos que h es el nombre de alguien,sea $C \xrightarrow{S} \Omega$ tal que $S_e = h$ entonces $N_e = Pm.S_e = (m[S])_e$ entonces $N = m[S]$ entonces si x elemento global es tal que $x \in N$ entonces $x \in m[S]$ entonces existe y tal que $x = m.y$ entonces $x \in m$ entonces $x \in M$ entonces $N \subset M$. $\square$

Proposición 4.32.3 *Sea $A \xrightarrow{M} \Omega$ y $A \xrightarrow{N} \Omega$, entonces $N_e \in P[M]$ sii $N \subset M$*

Demostración 4.32.3.1 *(directo) Consideremos los diagramas:*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "n"] \arrow[d] & A \arrow[d, "N"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "n"] \arrow[d] & A \arrow[d, "M"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Si $N_e \in P[M]$ entonces por definición $N_e \in Pm$ entonces existe $1 \xrightarrow{h} PC$ tal que $Pm.h = N_e$ sabemos por la observación 2.2 que h es el nombre de un morfismo $C \xrightarrow{S} \Omega$ entonces $N_e = Pm.S_e = (m[S])_e$ entonces $m[S] = N$ pero $m[S]$ esta dado por el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & & C' \arrow[r] \arrow[d, "m.l"] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ C' \arrow[urr, "C'"] \arrow[r, "l"] \arrow[d] & C \arrow[r, "m"] \arrow[d, "S"] & A \arrow[r, "{m[S]}"] & \Omega \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega & & \end{tikzcd}$$

pero $m[S] = N$ entonces tenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[drr] \arrow[ddr, "n"'] & & \\
& & C' \arrow[r] \arrow[d, "m.l"] & 1 \arrow[d, "\top"] \\
C' \arrow[r, "l"] \arrow[urr, "C'"] \arrow[d] & C \arrow[r, "m"] \arrow[d, "S"] & A \arrow[r, "m{[S]}=N"] & \Omega \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega & &
\end{tikzcd}$$

Entonces tenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[drr] \arrow[ddr, "n"'] & & \\
& C' \arrow[r] \arrow[d, "m.l"] & 1 \arrow[d, "\top"] \\
& A \arrow[r, "m{[S]}=N"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Entonces por la propiedad del pullback existe un único morfismo d tal que $n = m.l.d$ *entonces* $n \subset m$.
(reciproco) Si $N \subset M$ *entonces por la proposición anterior* $P[N] \subset P[M]$, *y como* $N_e \in P[N]$ *entonces* $N_e \in P[M]$. $\square$

Definición 4.26 $(\cap_A)$ *Sean los mapas* $A \times (PA \times PA) \xrightarrow{\pi_{PA\times PA}} PA \times PA$, $PA \times PA \xrightarrow{\pi_{A_1}} PA$, $PA \times PA \xrightarrow{\pi_{A_2}} PA$, $A \times (PA \times PA) \xrightarrow{\pi_A} A$, *consideremos* $r_1 = (A \times \pi_{A_1})$, $r_2 = (A \times \pi_{A_2})$
Definimos el morfismo $PA \times PA \xrightarrow{\cap_A} PA$ *como el único morfismo que satisface el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "A"] & A & \\
A \times (PA \times PA) \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "A\times\cap_A"] \arrow[rr, bend right, "r_1^{-1}[e_A]\cap r_2^{-1}[e_A]"] & A \times PA \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "e_A"] & \Omega \\
PA \times PA \arrow[r, "\cap_A"] & PA &
\end{tikzcd}$$

Definición 4.27 ($\cup_A$) *Sean los mapas* $A \times (PA \times PA) \xrightarrow{\pi_{PA\times PA}} PA \times PA$, $PA \times PA \xrightarrow{\pi_{A_1}} PA$, $PA \times PA \xrightarrow{\pi_{A_2}} PA$, $A \times (PA \times PA) \xrightarrow{\pi_A} A$, *consideremos* $r_1 = (A \times \pi_{A_1})$, $r_2 = (A \times \pi_{A_2})$.
Definimos el morfismo $PA \times PA \xrightarrow{\cup_A} PA$ *como el único morfismo que satisface el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "A"] & A & \\
A \times (PA \times PA) \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "A\times\cup_A"] \arrow[rr, bend right, "r_1^{-1}[e_A]\cup r_2^{-1}[e_A]"] & A \times PA \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "e_A"] & \Omega \\
PA \times PA \arrow[r, "\cup_A"] & PA &
\end{tikzcd}$$

Definición 4.28 (P_A) *Consideremos los morfismos* $PA \times PA \xrightarrow{\cap_A} PA$ *y* $PA \times PA \xrightarrow{\pi_{A_2}} PA$,*sea* $E \xrightarrow{k} PA \times PA$ *el ecualizador de* $\cap_A$ *y* π_{A_1}, *definimos el morfismo* $PA \xrightarrow{P} PA$ *como el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
PA \arrow[r, "id_{PA}"] & PA & \\
PA \times PA \arrow[u, "\pi_{A_1}"] \arrow[r, "id_{PA} \times P_A"] \arrow[d, "\pi_{A_2}"'] \arrow[rr, bend right, "c_k"] & PA \times PPA \arrow[u] \arrow[r, "e_A"] \arrow[d] & \Omega \\
PA \arrow[r, "P_A"] & PPA &
\end{tikzcd}
$$

donde c_k es el mapa característico de k.

Teorema 4.33 *Sean $A \xrightarrow{M} \Omega$ y $A \xrightarrow{N} \Omega$ subobjetos ,entonces se cumple:*

1. $\cap_A . < M_e, N_e >= (M \cap N)_e$.

2. $\cup_A . < M_e, N_e >= (M \cup N)_e$.

3. $P_A(M_e) = (P[M])_e$.

Demostración 4.33.1 1. *Veamos que conmuta el siguiente diagrama:*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "A"] & A \arrow[dr, "M \cap N"] & \\
A \times 1 \arrow[u] \arrow[r, "A \times (\cap_A . < M_e, N_e >)"] \arrow[d] & A \times PA \arrow[u] \arrow[r, "e_A"] \arrow[d] & \Omega \\
1 \arrow[r, "\cap_A . < M_e, N_e >"] & PA &
\end{tikzcd}
$$

$e_A.(A \times (\cap_A . < M_e, N_e >)) = e_A.((A \times \cap_A).(A \times < M_e, N_e >)) = (e_A.(A \times \cap_A)).(A \times < M_e, N_e >) = (r_1^{-1}[e_A] \cap r_2^{-1}[e_A]).(A \times < M_e, N_e >) = (A \times < M_e, N_e >)^{-1}[r_1^{-1}[e_A] \cap r_2^{-1}] = (A \times < M_e, N_e >)^{-1}[r_1^{-1}[e_A]] \cap (A \times < M_e, N_e >)^{-1}[r_2^{-1}[e_A]] = (r_1.(A \times < M_e, N_e >))^{-1}[e_A] \cap (r_2.(A \times < M_e, N_e >)^{-1}[e_A]$

sabemos que $r_1.(A \times < M_e, N_e >) = (A \times \pi_{A_1}).(A \times < M_e, N_e >) =$

$(A \times (\pi_{A_1}. < M_e, N_e >)) = (A \times M_e)$.
Análogamente $r_2.(A\times < M_e, N_e >) = (A \times \pi_{A_2}).(A\times < M_e, N_e >) = (A \times (\pi_{A_2}. < M_e, N_e >)) = (A \times N_e)$.
Entonces $e_A.(A \times (\cap_A. < M_e, N_e >)) = (A \times M_e)^{-1}[e_A] \cap (A \times N_e)^{-1}[e_A]$.
entonces $x \in (A \times M_e)^{-1}[e_A] \cap (A \times N_e)^{-1}[e_A]$ *sii* $x \in (A \times M_e)^{-1}[e_A]$ *y* $x \in (A \times N_e)^{-1}[e_A]$ *sii* $\pi_A.x \in M$ *y* $\pi_A.x \in M$,*entonces tenemos el resultado.*

2. *de la misma manera que lo anterior cambiando* $\cap_A$ *por* $\cup_A$ *y* $\cap$ *por* $\cup$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "A"] & A \arrow[dr, "M\cup N"] & \\
A\times 1 \arrow[u] \arrow[r, "A\times(\cup_A.<M_e,N_e>)"] \arrow[d] & A\times PA \arrow[u] \arrow[r, "e_A"] \arrow[d] & \Omega \\
1 \arrow[r, "\cup_A.<M_e,N_e>"] & PA &
\end{tikzcd}$$

$e_A.(A \times (\cup_A. < M_e, N_e >)) = e_A.((A \times \cup_A).(A\times < M_e, N_e >)) = (e_A.(A \times \cup_A)).(A\times < M_e, N_e >) = (r_1^{-1}[e_A] \cup r_2^{-1}[e_A]).(A\times < M_e, N_e >) = (A\times < M_e, N_e >)^{-1}[r_1^{-1}[e_A] \cup r_2^{-1}] = (A\times < M_e, N_e >)^{-1}[r_1^{-1}[e_A]] \cup (A\times < M_e, N_e >)^{-1}[r_2^{-1}[e_A]] = (r_1.(A\times < M_e, N_e >))^{-1}[e_A] \cup (r_2.(A\times < M_e, N_e >)^{-1}[e_A]$
sabemos que $r_1.(A\times < M_e, N_e >) = (A \times \pi_{A_1}).(A\times < M_e, N_e >) = (A \times (\pi_{A_1}. < M_e, N_e >)) = (A \times M_e)$.
Análogamente $r_2.(A\times < M_e, N_e >) = (A \times \pi_{A_2}).(A\times < M_e, N_e >) = (A \times (\pi_{A_2}. < M_e, N_e >)) = (A \times N_e)$.
Entonces $e_A.(A \times (\cup_A. < M_e, N_e >)) = (A \times M_e)^{-1}[e_A] \cup (A \times N_e)^{-1}[e_A]$.
entonces $x \in (A \times M_e)^{-1}[e_A] \cup (A \times N_e)^{-1}[e_A]$ *sii* $x \in (A \times M_e)^{-1}[e_A]$ *o* $x \in (A \times N_e)^{-1}[e_A]$ *sii* $\pi_A.x \in M$ *o* $\pi_A.x \in M$,*entonces tenemos el resultado.*

3. *Veamos que conmuta el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
PA \arrow[r, "id_{PA}"] & PA \arrow[dr, "P[M]"] & \\
PA\times 1 \arrow[u, "\pi_A"] \arrow[r, "id_{PA}\times(P_A.M_e)"] \arrow[d, "\pi_1"'] & PA\times PPA \arrow[u] \arrow[r, "e_{PA}"] \arrow[d] & \Omega \\
1 \arrow[r, "P_A.M_e"] & PA &
\end{tikzcd}$$

tenemos que $e_{PA}.(id_{PA}\times P_A.M_e) = (e_{PA}.(id_{PA}\times PA)).(id_{PA}\times M_e) = c_k.(i_{PA}\times M_e)$.
Sea $1 \xrightarrow{x} PA\times 1$ *elemento global de* $PA\times 1$, *si probamos que* $c_k.(id_{PA}\times M_e).x = P[M].\pi_{PA}.x$ *entonces habremos probado el teorema.*
Ahora bien $x =< \pi_A.x, \pi_1 >=< \pi_A, 1 >$, *pero* $1 \xrightarrow{\pi_a.x} PA$ *es el nombre de alguien,entonces existe un morfismo* $A \xrightarrow{N} \Omega$ *tal que* $\pi_A.x = N_e$ *entonces* $x =< N_e, 1 >$ *entonces* $c_k.(id_{PA}\times M_e).x = c_k.(id_{PA}\times M_e). < N_e, M_e >= c_k. < N_e, M_e >$.
además $P[M].\pi_A.x = P[M].\pi_A. < N_e, M_e >= P[M].N_e$
Supongamos que $c_k. < N_e, M_e >= \top$ *entonces el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[drr, "<N_e,M_e>"] \arrow[ddr] & & \\
& E \arrow[r, "k"] \arrow[d, "t_E"'] & PA\times PA \arrow[d, "c_k"] \\
& 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Entonces pro la propiedad del pullback existe un morfismo y tal que $< N_e, M_e >= k.y$ *entonces como* $\cap_A.k = \pi_{A_1}.k$ *tenemos que* $\cap_A.k.y = \pi_{A_1}.k.y$ *entonces* $\cap_A. < N_e, M_e >= \pi_{A_1}. < N_e, M_e >$ *entonces* $(N\cap M)_e = N_e$ *entonces* $N\cap M = N$ *entonces* $N \subset M$ *entonces por la proposición 3.33.3* $N_e \in P[M]$ *entonces* $P[M].N_e = \top$.
Recíprocamente si $P[M].N_e = \top$ *entonces* $N_e \in P[M]$ *entonces por la proposición 3.33.3* $N \subset M$ *entonces* $N\cap M = N$ *entonces* $(N\cap M)_e = N_e$ *entonces* $\cap_A. < N_e, M_e >= \pi_{A_1}. < N_e, M_e >$ *entonces por la propiedad uni-*

versal del ecualizador existe un morfismo y tal que $< N_e, M_e >= k.y$ entonces $c_k. < N_e, M_e >= c_k.k.y = \top.t_E.y = \top$ entonces $c_k. < N_e, M_e >= \top$ sii $P[M].N_e = \top$ entonces $c_k. < N_e, M_e >= P[M].N_e$ lo que demuestra el teorema. $\square$

Definición 4.29 *(Δ_A) definimos Δ_A como el único mapa que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & A \\
A \arrow[ur] \arrow[r, "\Delta_A"] \arrow[dr] & A \times A \arrow[u, "\pi_A"'] \arrow[d, "\pi_A"] \\
 & A
\end{tikzcd}$$

Observación 4.12 *Δ_A es mono*

Demostración 4.12.1 *Sea $\Delta_A.x = \Delta_A.y$ entonces $\pi_A.\Delta_A.x = \pi_A.\Delta_A.y$ entonces $x = y$.* $\square$

Definición 4.30 ***(Mapa singleton)*** *Sea c_{Δ_A} el mapa característico de Δ_A.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta_A"] \arrow[d] & A \times A \arrow[d, "c_{\Delta_A}"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Sabemos por el axioma de la potencia que existe un único morfismo $A \xrightarrow{h} PA$ tal que $e_A.(A \times h) = c_{\Delta_A}$, a ese h lo llamaremos mapa singleton ($\{\}$).

Definición 4.31 *($\{x\}$) Sea $1 \xrightarrow{x} A$ elemento global de A, por el axioma del subobjeto clasificador existe el mapa característico c_x, definimos $\{x\} := c_x$.*

Observación 4.13 *Sea $1 \xrightarrow{x} A$,$1 \xrightarrow{y} A$ elemento globales, entonces $y \in \{x\}$ sii $x = y$.*

Demostración 4.13.1 *Sea $y \in \{x\}$ entonces tenemos el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[drr, "y"] \arrow[ddr] & & \\
& 1 \arrow[r, "x"] \arrow[d] & A \arrow[d, "\{x\}"] \\
& 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Entonces por al propiedad del pullback existe un único mapa $1 \xrightarrow{1} 1$ *tal que* $1.x = y$ *entonces* $x = y$.
$\square$

Proposición 4.33.1 *Sea* $1 \xrightarrow{x} A$, *entonces* $\{\}.x = (\{x\})_e$

Demostración 4.33.1.1 *Debemos probar que* $e.(A \times \{\}.x) = \{x\}.\pi_A$.
$e.(A \times \{\}.x) = e.(A \times \{\}).(A \times x) = c_{\Delta_A}.(A \times x)$
veamos que $c_{\Delta_A}.(A \times x) = \{x\}.\pi_A$: *Sea* $1 \xrightarrow{y} A \times 1$ *tal que* $c_{\Delta_A}.(A \times x).y = \top$, *entonces tenemos el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[drr, "(A\times x).y"] \arrow[ddr] & & \\
& A \arrow[r, "\Delta_A"] \arrow[d] & A \times A \arrow[d, "c_{\Delta_A}"] \\
& 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Entonces existe z *tal que* $\Delta_A.z = (A \times x).y$ *entonces* $z = x \wedge \pi_A.y = x$ *entonces* $c_{\Delta_A}.\Delta_A.x = \top$ *entonces* $c_{\Delta_A}.\Delta_A = \{x\}$ *entonces* $\{x\}.\pi_A.y = \top$.
Recíprocamente si $\{x\}.\pi_A.y = \top$ *entonces* $\pi_A.y \in \{x\}$ *entonces* $x = \pi_A.y$ *entonces* $(A \times x).y = \Delta_A.x$ *entonces* $c_{\Delta_A}.(A \times x).y = c_{\Delta_A}.\Delta_A.x$ *entonces* $c_{\Delta_A}.(A \times x).y = \top$ *entonces tenemos el resultado.*$\square$

4.4.1. Morfismo relación

Dado un objeto A podemos intersectar y unir subobjetos de el, esto es lo que a veces se llama una "Teoría local de conjuntos " pero para poder construir un modelo de la teoría de conjuntos necesitamos poder intersectar y unir subojetos los cuales a priori no tienen porque ser subobjetos de un objeto común. Para resolver esta limitación introduciremos la idea de relación desde un punto de vista categórico, lo que nos permitirá ”embeber ” a dos suobjetos en otro, y así poder realizar operaciones conjuntistas en toda generalidad.

Definición 4.32

1. *Sea* $A \xrightarrow{r} PA$ *morfismo decimos que es una relación extensional sobre* A *si es un monomorfismo.*

2. *Decimos que* r *es bien fundada sii para todo* $N \subset A$ *,*$A \xrightarrow{N} \Omega$ *si* $r^{-1}[P[N]] \subset N$ *entonces* $N = A$*.*

3. *decimos que* r *es recursiva si para todo morfismo* $PB \xrightarrow{g} B$ *existe un único morfismo* $A \xrightarrow{f} B$ *que llamaremos* $rec_r(g)$ *tal que es siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"] & B \\ PA \arrow[r, "Pf"] & PB \arrow[u, "g"] \end{tikzcd}$$

4. r *es un objeto-conjunto-transitivo (o.c.t) sii es extensional y recursivo.*

Definición 4.33 *Sea* $A \xrightarrow{r} PA$ *y* $B \xrightarrow{s} PB$ *mapas, un mapa* $A \xrightarrow{f} B$ *se llama una inclusión de* r *en* s ($r \xrightarrow{f} s$) *si conmuta el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"] & B \arrow[d, "s"] \\ PA \arrow[r, "Pf"] & PB \end{tikzcd}$$

En ese caso decimos que $r \subset s$

Definición 4.34 *Sea* $C \xrightarrow{t} PC$ *monomorfismo definimos* $PC_{cl} \xrightarrow{t_{cl}} C_{cl}$ *como* $t_{cl} = \chi(id_C, Pj_C.t)$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "t"] \arrow[d] & PC \arrow[r, "Pj_C"] & PC_{cl} \arrow[d, "t_cl"] \\ C \arrow[rr, "j_C"] & & C_{cl} \end{tikzcd}$$

Teorema 4.34 *Sea $A \xrightarrow{r} PA$ relación recursiva y $B \xrightarrow{s} PB$ extensional entonces:*
a) Si $A \xrightarrow{f} B$ es un inclusión de r en s sii conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"] & B \arrow[r, "j_B"] & B_{cl} \\ PA \arrow[r, "Pf"] & PB \arrow[r, "Pj_B"] & PB_{cl} \arrow[u, "s_{cl}"] \end{tikzcd} \quad (j_B.f = rec_r(s_{cl}))$$

b)Si $r \subset s$ entonces existe una única inclusión $r \xrightarrow{f} s$ $(in(r,s))$
c) Si $r \subset s$ y r y s son oct entonces $in(r,s)$ es monomorfismo.

Demostración 4.34.1 *a) (directo): Por ser f inclusión tenemos el diagrama de la izquierda y por definición de s_{cl} el de la derecha*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"] & B \arrow[r, "j_B"] \arrow[d, "s"] & B_{cl} \\ PA \arrow[r, "Pf"] & PB \arrow[r, "Pj_B"] & PB_{cl} \arrow[u, "s_{cl}"] \end{tikzcd}$$

Como $Pj_B.Pf = Pj_B.f$ entonces tenemos el resultado.
(reciproco): Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[drrr, "Pj_B.Pf.r"] \arrow[ddr, "f"'] & & & \\ & B \arrow[r, "s"] \arrow[d] & PB \arrow[r, "Pj_B"] & PB_{cl} \arrow[d, "s_{cl}"] \\ & B \arrow[rr, "j_B"] & & B^{cl} \end{tikzcd}$$

Entonces por la propiedad del pullback existe un único morfismo h que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "h"] \arrow[drrr, "Pj_B.Pf.r"] \arrow[ddr, "f"'] & & & \\
& B \arrow[r, "s"] \arrow[d] & PB \arrow[r, "Pj_B"] & PB_{cl} \arrow[d, "s_{cl}"] \\
& B \arrow[rr, "j_B"] & & B^{cl}
\end{tikzcd}$$

Entonces $h = f$ entonces $Pj_B.s.f = Pj_B.Pf.r$ pero Pj_B es mono entonces $s.f = Pf.r$. Si $r \subset s$ como $j_B.f = rec_r(s_{cl})$ entonces otra h inclusión verifica $j_B.h = rec_r(s_{cl})$ entonces $j_B.h = j_B.f$ y como j_B es monomorfismo $h = f$.
c) Sean r y s oct tal que $r \subset s$ sea $in(r, s)$ la única inclusión de r en s por la parte b) y como r es oct entonces es mono entonces existe r_{cl} y como s es oct entonces es recursivo sea $rec_s(r_{cl})$ entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"] & A_{cl} \\
PA \arrow[r, "Pf"] & PB \arrow[r, "Pj_B"] & PA_{cl} \arrow[u, "r_{cl}"]
\end{tikzcd}$$

pero por definición de r_{cl} tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "j_A"] \arrow[d, "r"] & A_{cl} \\
PA \arrow[r, "Pj_A"] & PA_{cl} \arrow[u, "r_{cl}"]
\end{tikzcd}$$

entonces $j_A = rec(r_{cl}) = g.f$ entonces $j_A = g.f$ y como j_A es mono f es mono. $\square$

Observación 4.14 *La relación de inclusión entre relaciones es un preorden (transitiva y reflexiva).*

Demostración 4.14.1 *$r \subset r$*
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "A"] \arrow[d, "r"] & A \arrow[d, "r"] \\ PA \arrow[r, "PA"] & PA \end{tikzcd}$$
Si $r \subset s \subset n$ entonces existen inclusiones $r \xrightarrow{f} s$ $s \xrightarrow{g} n$ entonces tenemos el siguiente diagrama
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"] & C \\ PA \arrow[r, "Pf"] & PB \arrow[r, "Pg"] & PC \arrow[u, "n"] \end{tikzcd}$$
y como $Pg.Pf = Pg.f$ entonces $r \xrightarrow{g.f} n$. $\square$

Observación 4.15 *Sean r y s o.c.t entonces si $r \subset s$ $s \subset r$ entonces $r \equiv s$.*

Demostración 4.15.1 *Por teorema sabemos que existen únicas inclusiones $in(r, s)$ $in(s, r)$ y por la observación anterior $r \subset r$ pero $id_A = in(r, r)$ pero $in(r, s).in(s, r)$ es inclusión de r en r entonces $in(r, s).in(s, r) = id_A$ del mismo modo tenemos $in(s, r).in(r, s) = id_B$.*$\square$

Teorema 4.35 *Si r o.c.t entonces r es bien fundada.*

Demostración 4.35.1 *Sea $A \xrightarrow{r} PA$ o.c.t y $A \xrightarrow{M} \Omega$ subobjeto tal que $r^{-1}[P[M]] \subset M$, veamos que $M = A$:*
Sea m el mapa definido por el axioma del objeto clasificador:
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "m"] \arrow[d, "t_B"] & A \arrow[d, "M"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$
Sea (C, n, s) el pullback de Pm y r
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "s"] \arrow[d, "n"] & A \arrow[d, "Pm"] \\ A \arrow[r, "r"] & PA \end{tikzcd}$$
Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "s"] \arrow[d, "n"'] & PB \arrow[r, "t"] \arrow[d, "Pm"] & 1 \arrow[d, "\top"] \\
A \arrow[r, "r"] & PA \arrow[r, "P[M]"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Como los dos diagramas son pullback entonces el diagrama grande es pullback, entonces n *es el mapa característico de* $r^{-1}[P[M]]$ *y como* $r^{-1}[P[M]] \subset M$ *entonces* $n \subset m$*. Entonces existe* $B \xrightarrow{k} C$ *tal que* $m.k = n$ *y como* m *es mono* Pm *es mono entonces* n *es mono entonces* k *es mono. Entonces como* n Pm *y* r *son mono entonces* s *es mono entonces* $Pj_B.s$ *es mono entonces sea* $g = \chi(k, Pj_B.s)$ *entonces tenemos el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "s"] \arrow[d, "k"'] & B \arrow[r, "Pj_B"] & PB_{cl} \arrow[d, "g"] \\
PA \arrow[rr, "j_B"] & & B_{cl}
\end{tikzcd}$$

Sea m_{cl} *el mapa definido por el axioma del mapa clasificador* $m_{cl} = \chi(j_B, m)$
Consideremos los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "s"] \arrow[d, "k"'] & PB \arrow[r, "Pj_b"] & PB_{cl} \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[rr, "j_B"] \arrow[d, "m"'] & & B_{cl} \arrow[d, "m_{cl}"] \\
A \arrow[rr, "j_A"'] & & A_{cl}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "s"] \arrow[d, "k"'] & PB \arrow[r, "Pj_b"] & PB_{cl} \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "r"] \arrow[d, "m"'] & PA \arrow[r, "Pj_A"] & PA_{cl} \arrow[d, "r_{cl}"] \\
A \arrow[rr, "j_A"'] & & A_{cl}
\end{tikzcd}$$

Entonces $r_{cl}.Pm_{cl} = m_{cl}.g = \chi(n, Pj_B.s)$ *, sea* $f = rec_r(g)$ *entonces tenemos el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"] & B_{cl} \arrow[r, "m_{cl}"] \arrow[d, "g"] & A_{cl} \\
PA \arrow[r, "Pf"] & PB_{cl} \arrow[r, "Pm_{cl}"] & PA_{cl} \arrow[u, "r_{cl}"]
\end{tikzcd}$$

Entonces $m_{cl}.f = rec_r(r_{cl}) = j_A$

Sea (D, l, z) *el pullback de* j_B *y* f

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "l"] \arrow[d, "z"'] & B \arrow[d, "j_B"] \\
A \arrow[r, "f"] & B_{cl}
\end{tikzcd}$$

Entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "l"] \arrow[d, "z"'] & B \arrow[r, "m"] \arrow[d, "j_B"] & A \arrow[d, "j_A"] \\
A \arrow[r, "f"] & B_{cl} \arrow[r, "m_{cl}"] & A_{cl}
\end{tikzcd}$$

Pero $m_{cl}.f = j_A$ *entonces el siguiente diagrama es un pullback*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "m.l"] \arrow[d, "z"'] & A \arrow[d, "j_A"] \\ A \arrow[r, "j_A"] & A_{cl} \end{tikzcd}$$

Entonces $j_A.m.l = j_A.z$ *pero* $m.l = z$ *entonces tenemos el siguiente pullback:*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "m.l"] \arrow[d, "m.l"'] & A \arrow[d, "j_A"] \\ A \arrow[r, "j_A"] & A_{cl} \end{tikzcd}$$

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[drr, "id_A"] \arrow[ddr, "idA"'] & & \\ & D \arrow[r, "m.l"] \arrow[d, "m.l"'] & A \arrow[d, "j_A"] \\ & A \arrow[r, "j_A"] & A_{cl} \end{tikzcd}$$

Entonces por ser pullback existe un único morfismo $A \xrightarrow{h} D$ *tal que* $m.l.h = id_A$ *entonces* m *es epi pero era mono, entonces* m *es isomorfismo.* $\square$

Proposición 4.35.1 *Sea* $A \xrightarrow{r} PA$ *bien fundada, entonces existe a lo más una función* $A \xrightarrow{f} B$ *tal que conmuta el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & B \\ PA \arrow[r, "Pf"] & PB \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Demostración 4.35.1.1 *Sean* f f' *tales que hace conmutar al diagrama anterior veamos que* $f = f'$

Sea $E \xrightarrow{k} A$ el ecualizador de f y f' y M el mapa características de k

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "k"] \arrow[d, "t_B"'] & A \arrow[d, "M"] \\ 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Probemos que $r^{-1}[P[M]] \subset M$: Sea $x \in r^{-1}[P[M]] \subset M$ entonces $r(x) \in P[M]$ entonces $r(x) \in Pk$ entonces existe $1 \xrightarrow{y} PE$ tal que $Pk.y = r.x$ como $f.x = g.Pf.r.x = g.(Pf.Pk).y = g.(Pf.k).y = g.(Pf'k).y = g.Pf'Pk.y = g.Pf'.r.x = f'.x$ entonces $f.x = f'.x$ entonces pro la propiedad universal del ecualizador: existe un z tal que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "{f,f'}"] & B \\ 1 \arrow[u, "z"] \arrow[ur, "x"'] & & \end{tikzcd}$$

Entonces $x \in k$ entonces $x \in P[M]$ entonces $r^{-1}[P[M]] \subset M$ y como r es bien fundada $M = A$ entonces como $r^{-1}[P[A]] = A$ f y f' coinciden en elementos globales entonces $f = f'$.$\Box$

Teorema 4.36 *Sean $A \xrightarrow{r} PA$ y $B \xrightarrow{s} PB$ y $s \xrightarrow{i} r$ inclusión. entonces:*

1. *Si r es bien fundada $\Rightarrow$ s es bien fundada*

2. *Si i es monomorfismo entonces r es o.c.t $\Rightarrow$ s es o.c.t.*

Demostración 4.36.1 1. *Sea $B \xrightarrow{N} \Omega$ tal que $s^{-1}[P[N]] \subset N$, consideremos la imagen universal de N por i $A \xrightarrow{<i>} \Omega$. Probemos que $r^{-1}[P[i < n >]] \subset i < N >$. Ahora esto es equivalente a probar (por prop) que $i^{-1}[r^{-1}[P[i < N >]] \subset N$, pero como i es inclusión $r.i = Pi.s$ entonces $i^{-1}[r^{-1}[P[i < N >]] = s^{-1}[Pi^{-1}[P[i < N >]]$ pero $Pi^{-1}[P[i < N >]] = P[i^{-1}[i < N >]]$ como i es inyectiva $i^{-1}[i < N >] = N$ entonces $s^{-1}[Pi^{-1}[P[i < N >]] = s^{-1}[P[N]] \subset N$ entonces $i^{-1}[r^{-1}[P[i < N >]]] \subset N$ entonces $r^{-1}[P[i < N >]] \subset i < N >$ y como r es bien fundada $i < N >= A$ entonces $B = i^{-1}[A] = i^{-1}[i < N >] \subset N \subset B$ entonces $N = B$ entonces s es bien fundada.*

2. *Por 1 s es bien fundada, y r es recursiva por ser o.c.t , sea $PC \xrightarrow{g} C$ entonces existe un mapa $f = rec_r(g)$ tal que $g.Pf.r = f$ y como i es inclusión*

tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "i"] \arrow[d, "s"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"] & C \\
PB \arrow[r, "Pi"] & PA \arrow[r, "Pf"] & PC \arrow[u, "PC"']
\end{tikzcd}$$

Sea $h = f.i$ entonces dada g encontramos una h tal que $g.Ph.s = h$ y es única por el teorema anterior entonces s es recursiva y como i es mono y $Pi.s = r.i$ y r es mono entonces s es mono entonces s es o.c.t . $\square$

Teorema 4.37 *Sean $A \xrightarrow{r} PA$ y $B \xrightarrow{s} PB$ ambas o.c.t. Entonces existen $A \cap B \overset{r\cup s}{\longrightarrow} P(A\cap B)$ y $A \cup B \overset{r\cup s}{\longrightarrow} A \cup B$ ambas o.c.t tales que $r \cap s$ es el ínfimo de $\{r, s\}$ con respecto a la relación de inclusión y $r \cup s$ es el supremo de $\{r, s\}$ con respecto a la relación de inclusión.*

Demostración 4.37.1 *$A \cap B \overset{r\cap s}{\longrightarrow} P(A \cap B)$: Vamos a construir el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & A\cap B \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dl, "d_1"] \arrow[dd, dashed, "r\cap s"] & & B \arrow[dl, "j_B"] \arrow[dd, "s"] \\
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, "r"] & & B_{cl} & \\
 & P(A\cap B) \arrow[rr, dashed, "Pd_2"] \arrow[dl, dashed, "Pd_1"] & & PB \arrow[dl, "Pj_B"] \\
PA \arrow[rr, "Pf"] & & PB_{cl} \arrow[uu, "s_{cl}"] &
\end{tikzcd}$$

Sea $f = rec_r(r_{cl})$,$A \cap B, d_1, d_2)$ el pullback de f y j_B como j_B es mono d_1 es mono,además el pullback de abajo viene dado por la prop?. Entonces $(s_{cl}.Pf.r).d_1 = f.d_1 = j_B.d2 = s_{cl}.Pj_B.s.d_2$ y como $s_{cl}.Pj_B.s = j_B$ y j_B Pj_B y s es mono entonces s_{cl} es mono entonces $Pf.r.d_1 = Pj_B.s.d_2$ entonces tenemos *el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A\cap B \arrow[ddr, "r.d_1"'] \arrow[drr, "s.d_2"] & & \\
& P(A\cap B) \arrow[r, "Pd_2"] \arrow[d, "Pd_1"] & PB \arrow[d, "Pj_B"] \\
& PA \arrow[r, "Pf"] & PB_{cl}
\end{tikzcd}$$

Entonces existe un único morfismo que llamaremos $r\cap s$ *tal que conmuta el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A\cap B \arrow[ddr, "r.d_1"'] \arrow[dr, "r\cap s"] \arrow[drr, "s.d_2"] & & \\
& P(A\cap B) \arrow[r, "Pd_2"] \arrow[d, "Pd_1"] & PB \arrow[d, "Pj_B"] \\
& PA \arrow[r, "Pf"] & PB_{cl}
\end{tikzcd}$$

Entonces

$$Pd_1.r\cap s = r.d_1 \Rightarrow r\cap s \subset r$$

.

$$Pd_2.r\cap s = s.d_2 \Rightarrow r\cap s \subset s$$

y como d_1 *es mono entonces por prop?* $r\cap s$ *es o.c.t.*

Veamos que $r\cap s$ *el ínfimo de* $\{r,s\}$*: Sea* $C\xrightarrow{t} PC$ *tal que.*

$t\subset r$ *y* $t\subset s$ *entonces existen* l *y* n *morfismos tales que:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "l"] \arrow[d, "t"'] & B \arrow[d, "s"] \\ PC \arrow[r, "Pl"] & PB \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "n"] \arrow[d, "t"'] & A \arrow[d, "r"] \\ PC \arrow[r, "Pn"] & PA \end{tikzcd}$$

Entonces tenemos los diagramas siguientes:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "l"] \arrow[d, "t"'] & B \arrow[r, "j_B"] \arrow[d, "s"] & B_{cl} \\ PC \arrow[r, "Pl"] & PB \arrow[r, "Pj_B"] & PB_{cl} \arrow[u, "s_{cl}"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "n"] \arrow[d, "t"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"] & B_{cl} \\ PC \arrow[r, "Pn"] & PA \arrow[r, "Pf"] & PB_{cl} \arrow[u, "s_{cl}"'] \end{tikzcd}$$

Entonces $rec_t(s_{cl}) = f.n = j_B.n$, *entonces tenemos el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[drr, "l"] \arrow[ddr, "n"'] & & \\ & A \cap B \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "d_1"] & B \arrow[d, "j_B"] \\ & A \arrow[r, "f"] & B_{cl} \end{tikzcd}$$

Entonces por al propiedad del pushout existe un único h *tal que* $d_1.h = n$ *entonces* $(Pd_1.r \cap s).h = (r.d_1).h = r.(d_1.h) = r.n$.
y $Pd_1.Ph.t = Pn.t = r.n$ *pero* Pd_1 *es mono entonces* $r \cap s.h = Ph.t$ *entonces* $t \xrightarrow{h} r \cap s$.

$A \cup B \xrightarrow{r \cup s} P(A \cup B)$: Veamos primero los siguientes lemas:

Lema 4.1 *Sean $A \xrightarrow{f} B$ morfismo y $1 \xrightarrow{x} B$ elemento global de B tal que $x \in img(f)$ y (G, k, l) pullback de f y x entonces $G \ncong 0$.*

Demostración 4.1.1 *Como $x \in img(f)$ entonces existe y tal que $f.y = x$ entonces tenemos el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[drr, "1"] \arrow[ddr, "y"'] & & \\
& G \arrow[r, "l"] \arrow[d, "k"] & 1 \arrow[d, "x"] \\
& A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

Entonces existe $1 \xrightarrow{z} G$ entonces $G \ncong 0$ sino violaría la condición well-pointed.

Lema 4.2 *Sea el siguiente diagrama un pushout:*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "l"] \arrow[d, "k"] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"] & P
\end{tikzcd}$$

y $1 \xrightarrow{z} P$ elemento global de P, entonces $z \in img(f)$ o $z \in img(g)$.

Demostración 4.2.1 *Recordemos la construcción del pushout tomábamos los morfismos $B \xrightarrow{i_B} A + B$ y $A \xrightarrow{i_A} A + B$ y $A + B \xrightarrow{d} P$ el coecualizador de $i_A.k$ y $i_B.l$ entonces teníamos que $f = d.i_A$ y $g = d.i_B$ como d es epimorfismo entonces es epi sobre elementos globales, por lo tanto existe x tal que $d.x = y$ con $1 \xrightarrow{x} A + B$ pero sabemos que $x \in i_A$ o $x \in i_B$ entonces tenemos el resultado.*

Ahora construyamos $r \cup s$: Tomemos $(A \cup B, v_1, v_2)$ el pushout de d_1 y d_2 los mismo morfismos que la parte 1)

$$\begin{tikzcd}
A \cap B \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "d_1"] & B \arrow[d, "v_2"] \\
A \arrow[r, "v_1"] & A \cup B
\end{tikzcd}$$

Entonces tenemos el diagrama:
$$\begin{tikzcd} PA \cap PB \arrow[r, "Pd_2"] \arrow[d, "Pd_1"'] & B \arrow[d, "Pv_2"] \\ PA \arrow[r, "Pv_1"] & P(A \cup B) \end{tikzcd}$$

Entonces $Pv_1.(r.d_1) = Pv_1.(Pd_1.r \cap s) = (Pv_1.Pd_1).r \cap s = (Pv_2.Pd_2).r \cap s = Pv_2.(Pd_2.r \cap s) = Pv_2.(s.d_2)$ *, entonces tenemos el siguiente diagrama:*
$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "d_1"'] & B \arrow[d, "v_2"] \arrow[ddr, "Pv_2.s"] & \\ A \arrow[r, "v_1"] \arrow[drr, "Pv_1.r"'] & A \cup B & \\ & & P(A \cup B) \end{tikzcd}$$

Entonces por la propiedad del pushout existe un único morfismo $A \cup B \xrightarrow{z} P(A \cup B)$ *tal que* $z.v_1 = Pv_1.r$ *y* $z.v_2 = Pv_2.s$*, definimos* $r \cup s := z$.
Veamos que $A \cup B \xrightarrow{r \cup s} P(A \cup B)$ *es recursiva:*
Sea $PC \xrightarrow{g} C$ *morfismo , como* r *y* s *son recursivas existen* f_1 *y* f_2 *tales que:*
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "r"'] & B \\ PA \arrow[r, "Pf_1"] & PC \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "s"'] & C \\ PB \arrow[r, "Pf_2"] & PC \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Consideremos los siguientes diagramas:
$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "r \cap s"'] & A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "r"'] & B \\ P(A \cap B) \arrow[r, "Pd_1"] & PA \arrow[r, "Pf_1"] & PC \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A\cap B \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "r\cap s"'] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "s"'] & C \\
P(A\cap B) \arrow[r, "Pd_2"] & PAB \arrow[r, "Pf_2"] & PC \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

Entonces $f_1.d_1 = rec_{r\cap s}(g) = f_2.d_2$ *entonces tenemos el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A\cap B \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "d_1"'] & B \arrow[d, "v_2"] \arrow[ddr, "f_2"] & \\
A \arrow[r, "v_1"] \arrow[drr, "f_1"'] & A\cup B & \\
 & & C
\end{tikzcd}$$

Entonces por la propiedad del pushout existe un único morfismo $A\cup B \xrightarrow{k} C$ *tal que* $k.v_1 = f_1$ *y* $k.v_2 = f_2$ *entonces* $Pk.Pv_1 = Pf_1$ *y* $Pk.Pv_2 = Pf_2$
Sea $g.Pk.(r\cup s.v_1) = g.Pk.(Pv_1.r) = g.(Pk.Pv_1).r = g.Pf_1.r = f_1$
y $g.Pk.(r\cup s.v_2) = g.Pk.(Pv_2.s) = g.(Pk.Pv_2).s = g.Pf_2.s = f_2$ *entonces* $k = g.Pk.r\cup s$.
Unicidad de k: Sea $A\cup B \xrightarrow{h} C$ *tal que* $h.v_1 = f_1$ *y* $h.v_2 = f_2$ *entonces por las mismas cuentas tenemos que* $h = g.Ph.r\cup s$ *entonces* $h.v_1 = g.Ph.r\cup s.v_1 = g.Ph.(r\cup s.v_1) = g.Ph.(Pv_1.r) = f_1$ *entonces* $h.v_1 = rec_r(g) = f_1$.
Análogamente $h.v_1 = f_2$ *pero la única que cumplía eso era* k *entonces probamos la unicidad.Entonces* $r\cup s$ *es recursiva.*

r *es mono: Vamos a construir el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & & & pb(x_i,v_2) \arrow[dl, "z_2"'] \arrow[dd, "y_2"] & & \\
pb(x_i,v_1) \arrow[rr, "z_1"] \arrow[dd, "y_1"'] & & 1 \arrow[dd, "x_i"] & & & \\
 & A\cap B \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dl, "d_1"'] \arrow[dd, dashed, "r\cap s"] & & B \arrow[rr, "id_B"] \arrow[dl, "v_2"] \arrow[dd, dashed, "s"] & & B \arrow[dl, "j_B"] \arrow[dd, "s"] \\
A \arrow[rr, "v_1"] \arrow[dd, "r"] & & A\cup B \arrow[rr, "w"] \arrow[dd, "r\cup s"] & & B_{cl} & \\
 & P(A\cap B) \arrow[rr, dashed, "Pd_2"] \arrow[dl, dashed, "Pd_1"] & & PB \arrow[rr, dashed] \arrow[dl, dashed, "Pv_2"] & & PB \arrow[dl, "Pj_B"] \\
PA \arrow[rr, "Pv_1"] & & P(A\cup B) \arrow[rr, "Pw"] & & PB_{cl} \arrow[uu, "s_{cl}"] &
\end{tikzcd}$$

Sean $1 \xrightarrow{x_1} A\cup B$ *y* $1 \xrightarrow{x_2} A\cup B$ *tales que* $(r\cup s).x_1 = (r\cup s).x_2$ *vamos a probar que* $x_1 = x_2$.

Consideremos $w = \chi(id_B, v_2)$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "v_2"] \arrow[d, "id_B"'] & A\cup B \arrow[d, "w"] \\
B \arrow[r, "i_B"] & B_{cl}
\end{tikzcd}$$

Ahora $(j_B.id_B).d_2 = (s_{cl}.Pj_B.s).d_2 = s_{cl}.(Pj_B).d_2 = s_{cl}.(Pw.Pv_2).s.d_2 = s_{cl}.Pw.(Pv_2.s).d_2 = s_{cl}.Pw.(r\cup s.v_2).d_2 = s_{cl}.Pw.r\cup s.(v_2.d_2) = s_{cl}.Pw.r\cup s.(v_1.d_1)$.

Entonces tenemos el siguiente diagrama:
$$\begin{tikzcd}
A \cap B \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "d_1"'] & B \arrow[d, "v_2"] \arrow[ddr, "j_B"] & \\
A \arrow[r, "v_1"] \arrow[drr, "s_{cl}.Pw.r \cup s.v_1"'] & A \cup B & \\
& & B_{cl}
\end{tikzcd}$$

Entonces por la propiedad del pushout existe un único z *tal que* $z.v_2 = j_B$ *pero el único es* w *entonces* $w.v_1 = s_{cl}.Pw.r \cup s.v_1$ *y* $w.v_2 = j_B = s_{cl}.(Pj_B).s = s_{cl}.(Pw.Pv_2).s = s_{cl}.Pw.(Pv_2.s) = s_{cl}.Pw.r \cup s.v_2$
Entonces tenemos las ecuaciones :

$$w.v_1 = s_{cl}.Pw.r \cup s.v_1$$

$$w.v_2 = s_{cl}.Pw.r \cup s.v_2$$

.
Entonces tenemos el siguiente diagrama:
$$\begin{tikzcd}
A \cap B \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "d_1"'] & B \arrow[d, "v_2"] \arrow[ddr, "w.v_2"] & \\
A \arrow[r, "v_1"] \arrow[drr, "w.v_1"'] & A \cup B & \\
& & B_{cl}
\end{tikzcd}$$

Entonces por la propiedad del pushout existe un único morfismo k *tal que* $k.v_1 = w.v_1$ *y* $k.v_1 = w.v_1$ *entonces* $w = s_{cl}.Pw.r \cup s$ *entonces* $w = rec_{r \cup s}(s_{cl})$

Tomemos (G, z_2, y_2) *pullback e* x_1 *y* v_2
$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "y_2"] \arrow[d, "z_2"'] & B \arrow[d, "v_2"] \\
1 \arrow[r, "x_1"] & A \cup B
\end{tikzcd}$$

Entonces tenemos el siguiente pullback
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "z_2"] \arrow[d, "y_2"'] & B \arrow[d, "x_1"] \\ B \arrow[r, "v_2"] \arrow[d, "id_B"'] & A \cup B \arrow[d, "w"] \\ B \arrow[r, "j_B"] & B_{cl} \end{tikzcd}$$

Pero $w.x_1 = w.x_2$ *entonces tenemos el pullback*
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "z_2"] \arrow[d, "y_2"'] & B \arrow[d, "x_2"] \\ B \arrow[r, "v_2"] \arrow[d, "id_B"'] & A \cup B \arrow[d, "w"] \\ B \arrow[r, "j_B"] & B_{cl} \end{tikzcd}$$

Entonces el siguiente también es pullback
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "z_2"] \arrow[d, "y_2"'] & B \arrow[d, "x_2"] \\ B \arrow[r, "v_2"] & A \cup B \end{tikzcd}$$

Entonces $x_1, v_2)$ *y* x_2, v_2 *comparten el pullback de* z_2, y_2 *que llamaremos* $pb(x_i, v_2)$. *Repitiendo exactamente el mismo argumento cambiando la* $w = \chi(id_B, v_2)$ *por* $w = \chi(id_A, v_1)$ *concluimos que existe*x_1, v_1 *y* x_2, v_1 *comparten un pullback que llamaremos* $pb(x_i, v_1)$ *lo que termina de construir el diagrama del comienzo. Ahora por el lema 3.2* x_1 *pertenece a la imagen de* v_1 *o a la imagen de* v_2 *supongamos que es a la de* v_2 *entonces por el lema 3.1 tenemos que* $pb(x_i, v_1) \ncong 0$ *entonces* z_1 *es epimorfismo, pero* $x_1.z_1 = x_2.z_1$ *entonces* $x_1 = x_2$.

$r \cup s$ *es supremo: Sea* t *tal que* $s \subset t$ *y* $r \subset t$ *entonces existen* n *y* l *tal que:*
$t \subset r$ *y* $t \subset s$ *entonces existen* l *y* n *morfismos tales que:*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "l"] \arrow[d, "s"'] & C \arrow[d, "t"] \\
PB \arrow[r, "Pl"] & PC
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "n"] \arrow[d, "r"'] & C \arrow[d, "t"] \\
PA \arrow[r, "Pn"] & PC
\end{tikzcd}$$

Entonces tenemos los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
A \cap B \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "r \cap s"'] & B \arrow[r, "l"] \arrow[d, "s"] & C \arrow[d, "t"] \\
P(A \cap B) \arrow[r, "Pd_2"] & PB \arrow[r, "Pl"] & PC
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \cap B \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "r \cap s"'] & A \arrow[r, "n"] \arrow[d, "r"] & {} \\
P(A \cap B) \arrow[r, "Pd_1"] & PA \arrow[r, "Pn"] & {}
\end{tikzcd}$$

Entonces $l.d_2$ *y* $n.d_1$ *son inclusiones de* $r \cap s$ *en* t *pero son t.o.c entonces* $l.d_2 = n.d_1$*, entonces tenemos el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A \cap B \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "d_1"'] & B \arrow[d, "v_2"] \arrow[ddr, "l"] & \\
A \arrow[r, "v_1"] \arrow[drr, "n"'] & A \cup B & \\
& & C
\end{tikzcd}$$

Entonces por la propiedad del pushout existe un único k *tal que* $k.v_1 = n$ *y* $k.v_2 = l$
Queremos ver que $Pk.r \cup s = t.k$*; Tomemos* $1 \xrightarrow{x} A \cup B$ *elemento global,ya vimos que* $x \in img(v_1)$ *o* $x \in img(v_2)$*, supongamos que* $x \in img(v_1)$*,entonces existe* y *tal que* $v_1.y = x$*.*
Entonces $Pk.(r \cup s).x = Pk.(r \cup s).v_1.y = Pk.(Pv_1.r).y = (Pk.Pv_1).y = (Pn).r.y = (Pn.r).y = (t.n).y = t.(n).y = t.(k.v_1).y = t.k.x$ *entonces* $Pk.r \cup s = t.k$ *entonces* $r \cup s \xrightarrow{k} t$*.* $\square$

Teorema 4.38 *Sea* $A \xrightarrow{r} PA$ *o.c.t entonces* $PA \xrightarrow{Pr} PPA$ *es o.c.t, y* r *es la inclusión*

Demostración 4.38.1 *Como* r *es mono* Pr *es también mono,sea* $PB \xrightarrow{g} B$

morfismo, como r es recursiva existe un único morfismo f tal que :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & B \\ PA \arrow[r, "Pf"] & PB \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Entonces también tenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} PA \arrow[r, "Pf"] \arrow[d, "Pr"'] & PB \\ PPA \arrow[r, "PPf"] & PPB \arrow[u, "Pg"'] \end{tikzcd}$$

entonces tenemos el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} PA \arrow[r, "Pf"] \arrow[d, "Pr"'] & PB \arrow[r, "g"] & B \\ PPA \arrow[r, "PPf"] & PPB \arrow[u, "Pg"'] \arrow[r, "Pg"] & PB \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Para ver que $rec_{Pr}(g) = g.Pf$ veamos que Pr es bien fundada:
Sea $PA \xrightarrow{M} \Omega$ subobjeto tal que $Pr^{-1}[P[M]] \subset M$, sabemos que $Pr^{-1}[P[M]] = P[r^{-1}[M]]$ entonces $P[r^{-1}[M]] \subset M$ entonces $r^{-1}[P[r^{-1}[M]]] \subset r^{-1}[M]$ y como r es bien fundada $r^{-1}[M] = A$ entonces $M = PA$ entonces Pr es bien fundada entonces hay una única $rec_{Pr}(g)$ entonces Pr es recursiva entonces Pr es o.c.t . $\square$

Proposición 4.38.1 $0 \longrightarrow P0$ *es o.c.t "minimal"(esta incluido en cualquier r)*

Demostración 4.38.1.1 *Sea $A \xrightarrow{r} PA$ o.c.t*

como de $0 \longrightarrow PA$ hay un único mapa ,tomemos $0 \longrightarrow A$ el único mapa de 0 a A entonces el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & A \arrow[d, "r"] \\ P0 \arrow[r, "Pf"] & PA \end{tikzcd}$$

$0 \longrightarrow P0$ *es extensional:*

Dado $PB \xrightarrow{g} B$ *existe un único morfismo* $0 \xrightarrow{h} B$ *tal que*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "h"] \arrow[d] & B \\ P0 \arrow[r, "Ph"] & PB \arrow[u, "g"] \end{tikzcd}$$

Capítulo 5

Construcción de un modelo de ZFC en Teoría de Topos

5.0.2. Nociones de r-elemento y r-pertenencia

Como ya adelantamos necesitamos embeber los suobjetos en otros objetos con el fin de poder efectuarles operaciones conjuntistas en toda su generalidad, por lo tanto necesitaremos una nueva noción de pertenencia e inclusión.

Definición 5.1

(r-elemento) Sea $A \xrightarrow{r} PA$ relación extensional, decimos que un subobjeto $A \xrightarrow{M} \Omega$ es un r-elemento, si existe $1 \xrightarrow{x} A$ tal que $M_e = r.x$, como r es extensional existe un único x que verifica lo anterior, lo notaremos como $(M \mid r)$. Dado x al subobeto M tal que $M_e = r.x$ lo notaremos como $(x \mid r)$.

Definición 5.2 *(r-pertenencia) Sea $A \xrightarrow{M} \Omega$ y $A \xrightarrow{N} \Omega$ subobjetos, decimos que $M \in_r N$ sii M es un r-elemento y $(M \mid r) \in N$.*

Proposición 5.0.2 *Sean $A \xrightarrow{r} PA$ y $B \xrightarrow{s} PB$ relaciones extensionales, $1 \xrightarrow{x} A$ elemento global, $A \xrightarrow{M} \Omega$ y $A \xrightarrow{N} \Omega$ subobjetos, $r \xrightarrow{i} s$ inclusión entonces se cumple que :*

1. *$(i.x|s) = i[(x|r)]$.*

2. *Si M es un r-elemento entonces $i[M]$ es un s-elemento y $i.(M \mid r) = (i[M] \mid s)$.*

3. *Si $M \in_r N$ entonces $i[M] \in i[N]$, si i es mono vale el reciproco.*

Demostración 5.0.2.1 *1. $s.i.x = (i.x \mid s)_e$ entonces $s.i.x = P_i.r.x$ y $r.x = (x \mid r)_e$ entonces $(i.x \mid s)_e = P_i.(x \mid r)_e = i[(x \mid r)]_e$ entonces $(i.x \mid s) = i[(x \mid r)]$.*

2. *Si M es un r elemento entonces existe $1 \xrightarrow{x} A$ tal que $M_e = r.x$, sabemos que $i[M]_e = Pi.M_e = Pi.r.x = s.i.x$ entonces $i[M]$ es un s-elemento, y como $x = (M \mid r)$ entonces $s.(M|r) = i[M]_e$ entonces $i.(M \mid r) = (i[M] \mid s)$.*

3. *Si $M \in_r N$ entonces M es r-elemento entonces $i[M]$ es s-elemento y $(M \mid r) \in N$ entonces $i.(M \mid r) \in i[N]$ pero por 2 $i.(M \mid r) = (i[M] \mid s)$ entonces $i[M] \in_s i[N]$. Si $i[M] \in_s i[N]$ entonces existe y tal que $i[M]_e = s.y$ con $y \in i[N]$ entonces existe $z \in N$ tal que $i.z = y$ entonces $i[M]_e = s.i.z = Pi.r.z$, y sabemos que $i[M]_e = Pi.M_e$ entonces $Pi.r.z = Pi.M_e$ entonces si i es mono Pi es mono $M_e = r.z$ entonces M es r-elemento y $M \in_r N$. $\square$*

5.0.3. Objeto conjunto

Ahora definiremos nuestro primer candidato a representar a los conjuntos en nuestra teoría.

Definición 5.3 *Sea $A \xrightarrow{r} PA$ o.ct y $A \xrightarrow{M} \Omega$ en $\mathcal{A}$ al par (r, M) perteneciente a $dom(\mathcal{A}) \times dom(\mathcal{A})$ le llamaremos objeto-conjunto*

Definición 5.4 *($\sim$) Diremos que $(r, M) \sim (s, N)$ si las inclusiones $r \longrightarrow r \cup s$. $s \longrightarrow r \cup s$ verifican $in(r, r \cup s)[M] = in(s, r \cup s)[N]$.*

Proposición 5.0.3 *Sean $A \xrightarrow{r} PA$ y $B \xrightarrow{s} PB$ o.c.t y $A \xrightarrow{M} \Omega$ y $B \xrightarrow{N} \Omega$ subobjetos, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
a) $(r, M) \sim (s, N)$.

b) Existe t o.c.t tal que $r \subset t$, $s \subset t$ y $in(r, t)[M] = in(s, t)[N]$

c) Para todo t o.c.t tal que $r \subset t$, $s \subset t$ entonces $in(r, t)[M] = in(s, t)[N]$.

Demostración 5.0.3.1 *$a) \to b)$ Tomamos $t = r \cup s$.*

$b) \to a)$ Sea $r \subset t$, $s \subset t$, entonces como $r \subset s$ es el supremo de $\{r, s\}$ con respecto a la inclusión, existe $r \cup s \to t$ inclusión, entonces

$$in(r, t) = in(r \cup s, t).in(r, r \cup s)$$

$$in(s, t) = in(r \cup s, t).in(s, r \cup s)$$

.
Entonces $in(r, t)[M] = in(r \cup s, t)[in(r, r \cup s)[M]]$ y $in(s, t)[N] = in(r \cup s, t)[in(s, r \cup s)[N]]$ entonces $in(r \cup s, t)[in(r, r \cup s)[M]] = in(r \cup s, t)[in(s, r \cup s)[N]]$ y como $in(r \cup, t)$ es mono tenemos que $in(r, r \cup s)[M] = in(s, r \cup s)[N]$.

$a \to c$: Todo o.c.t verifica:

$$in(r, t) = in(r \cup s, t).in(r, r \cup s)$$
$$in(s, t) = in(r \cup s, t).in(s, r \cup s)$$

.
y si $in(r, r \cup s)[M] = in(s, r \cup s)[N]$ entonces $in(r, t)[M] = in(s, t)[N]$.

c) $\to$ a) En particular $t = r \cup s$.$\square$

Observación 5.1 *Sean (r, M) , (r, N) objetos-conjuntos, entonces $(r, M) \sim (r, N)$ sii $M = N$*

Demostración 5.1.1 *Por la parte c) del proposición anterior $t = r = s$ $in(r, r)[N] = in(r, r)[M]$ sii $M = N$. $\square$*

Proposición 5.0.4 *Sean r, s, t o.c.t tales que $r \subset t$, $s \subset t$ y M r-elemento , N s-elemento entonces $(r, M) \sim (s, N)$ sii $in(r, t).(M|r) = in(s, t).(N \mid s)$*

Demostración 5.0.4.1 *$(r, M) \sim (s, N)$ sii $in(r, t)[M] = in(s, t)[N]$, ahora $in(r, t).(M \mid r) = in(s, t).(N \mid s)$ sii $t.in(r, t).(M \mid r) = t.in(s, t).(N \mid s)$ sii $Pin(r, t).r.(M \mid r) = Pin(s, t).s.(N \mid s)$ sii $Pin(r, t).M_e = Pin(s, t).N_e$ sii $(in(r, t)[M])_e = (in(r, t)[N])_e$ sii $in(r, t)[M] = in(s, t)[N]$. $\square$.*

Relación de pertenencia entre objetos conjuntos

Definición 5.5 *Sean (r, M), (s, N) objetos-conjuntos decimos que*
$(r, M) \in (s, N)$ sii existen objetos-conjuntos (t, M') , (t, N') tales que $(r, M) \sim (t.M')$, $(s, N) \sim (t, N')$ y $M' \in_t N'$.

Proposición 5.0.5 *Sean (r, M) y (s, N) objetos-conjuntos, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $(r, M) \in (s, N)$ (observar que $\in$ NO es necesariamente la pertenencia conjuntista).

b) Existe un s-elemento K tal que $K \in_s N$ y $(r, M) \sim (s, K)$.

b) $in(r, r \cup s)[M] \in_{r\cup s} in(s, r \cup s)[N]$.

Demostración 5.0.5.1 *a) $\to$ b): Si $(r, M) \sim (t, M')$ entonces existe t' tal que $in(r, t')[M] = in(t, t')[M']$.*
Y si $(r, N) \sim (t, N')$ entonces existe t'' tal que $in(s, t'')[N] = in(t, t'')[N']$
$M' \in_t N'$ entonces $M'_e = t.x$, $x \in N'$ entonces existe $y \in N$ tal que $in(s, t'').y = in(t, t'').x$. Sea K tal que $K_e = s.y$ entonces $t''.in(s, t'').y = t''.in(t, t'').x = Pin(t, t').t.x = in(t, t').M`_e = (in(t, t'')[M'])_e$ y $t''.in(s, t'').y = Pin(s, t'').K_e = (in(s, t'')[K])_e$ entonces $(in(s, t'')[K])_e = (in(t, t'')[M`])_e$ entonces $in(s, t'')[K] = in(t, t'')[M]$.
Ahora $in(r, t \cup t'')[M] = in(t', t` \cup t'').in(r, t')[M] = in(t', t' \cup t'').in(t, t')[M] = in(t, t' \cup t'')[M'] = in(t'', t' \cup t'')in(t'', t' \cup t'').in(t, t'')[M'] = in(t'', t' \cup t'').in(s, t'')[K] = in(s, t' \cup t'')[K]$.

b) $\to$ c): Como $K \in_s N$ entonces K es s-elemento y como $(r, M) \sim (s, K)$ entonces existe t tal que $in(r, t)[M] = in(s, t)[K]$, K es s-elemento entonces $in(s, t)[K]$ es t-elemento por prop entonces $in(r, t)[M]$ es t-elemento entonces como $in(r, t)$ es mono M es r-elemento entonces existe $x \in N$ tal que $K_e = s.x$ y existe y tal que $M_e = r.y$ entonces por prop $in(r, t).y = in(s, t).x$.*
Ahora $(in(r, r \cup s)[M])_e = Pin(r, r \cup s).M_e = Pin(r, r \cup s).r.y = (r \cup s).in(r, r \cup s).y = (r \cup s).in(s, r \cup s).x$, con $x \in N$ entonces $in(r, r \cup s).x \in in(s, r \cup s)[N]$

entonces $in(r, r \cup s)[M] \in_{r\cup s} in(s, r \cup s)[N]$.

c) $\rightarrow$ *a):* $(in(r, r \cup s)[M])_e = (r \cup s).x$ *con* $x \in in(s, r \cup s)[N]$ *entonces existe* $y \in N$ *tal que* $x = in(r, r\cup s).y$ *entonces* $(in(r, r\cup s)[M])_e = (r\cup s).in(s, r\cup s).y = Pin(s, r \cup s).s.y$.
Sea K *tal que* $K_e = s.y$ *entonces* $(in(r, r\cup s)[M])_e = Pin(s, r\cup s).K_e = (in(s, r\cup s)[K])_e$ *entonces* $in(r, r \cup s)[M] = in(s, r \cup s)[K]$ *entonces* $(r, M) \sim (s, K)$, $(s, N) \sim (s, N)$ *y* $K \in_s N$, *entonces tomando* $t = s$ $M' = K$ *y* $N' = N$ *tenemos el resultado.* $\square$

En las siguientes proposiciones veremos que esta nueva pertenencia es compatible con las aproximaciones anteriores.

Observación 5.2 *Sean* (r, M) , (r, N) *objetos -conjuntos, entonces se cumple:* $(r, M) \in (r, N)$ *sii* $M \in_r N$.

Demostración 5.2.1 $(r, M) \in (r, M)$ *sii* $in(r, r \cup r)[M] \in_{r\cup r} in(r, r \cup r)[N]$ *sii* $M \in_r N$. $\square$

Observación 5.3 *La relación* $\sim$ *es de equivalencia.*

Demostración 5.3.1 *** $(r, M) \sim (r, M)$*:* $in(r, r \cup r)[M] = in(r, r \cup r)[M]$

*** $(r, M) \sim (s, N)$ *entonces* $(s, N) \sim (r, M)$, *obvio˙*
** Si* $(r, M) \sim (s, N)$ *y* $(s, N) \sim (t, L)$ *entonces existe* h *tal que* $r \subset h$ $s \subset h$, $in(r, h)[M] = in(s, h)[N]$ *y existe* h' *tal que* $s \subset h'$, $t \subset h'$, $in(s, h')[N] = in(t, h' = [L]$.
Ahora $in(r, h \cup h')[M] = in(h, h \cup h').in(r, h)[M] = in(h, h \cup h').in(s, h)[N] = in(s, h\cup h')[N] = in(h', h\cup h').in(s, h')[N] = in(h', h\cup h').in(t, h')[L] = in(t, h\cup h')[L]$ *entonces* $(r, M) \sim (t, L)$. $\square$

Observación 5.4 *Sean* (r, M) (r', M'), (s, N) , (s', N') *objetos-conjuntos tal que* $(r, M) \sim (r, M)$, $(s, N) \sim (s', N')$, *entonces:*
$(r, M) \in (s, N)$ *sii* $(r', M') \in (s', N')$.

Demostración 5.4.1

5.1. Construcción de la estructura $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$

Supongamos que WT es consistente, entonces por el teorema de completitud tienen un modelo $\mathcal{A}$,

Definición 5.6 *Sea* $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ *la estructura definida de la siguiente manera* $dom(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}) = OC/\sim$, *donde* OC *es el subconjunto de* $dom(\mathcal{A})$ *formado por los objetos-conjuntos, y la pertenencia podemos definirla por la observación como* $\overline{(r, M)} \in \overline{(s, M)}$ *sii* $(r, M) \in (s, M)$.

Definición 5.7 *Sean* (r, M) *y* (s, N) *objetos -conjuntos, decimos que* $(r, M) \subset (s, N)$ *si para todo* x *objeto-conjuntos* $x \in (r, M)$ *entonces* $x \in (s, N)$.

Definición 5.8 *Análogamente definimos* $\overline{(r, M)} \subset \overline{(s, M)}$.

Observación 5.5 *Es claro que por la obs 5.4 tenemos que* $(r, M) \subset (s, M)$ *sii* $\overline{(r, M)} \subset \overline{(s, M)}$.

Proposición 5.0.6 *Sean* (r, M) *y* (s, N) *objetos-conjuntos, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
a) $(r, M) \subset (s, N)$.

b) $in(r, r \cup s)[M] \subset in(s, r \cup s)[N]$.

c) Existe (s, K) *objeto-conjunto tal que* $K \subset N$ *y* $(r, M) \sim (s, N)$.

Demostración 5.0.6.1 *Sea* $x \in in(r, r \cup s)[M]$ *entonces existe* $y \in M$ *tal que* $in(r, r \cup s).y = x$ *entonces* $(r \cup s).x = (r \cup s).in(r, r \cup s).y = Pin(r, r \cup s).r.y$, *sea* K *tal que* $K_e = r.y$ *entonces* $(r \cup s).x = Pin(r, r \cup s).K_e = (in(r, r \cup s)[K])_e$ *entonces* $in(r, r \cup s)[K] \in_{r \cup s} in(s, r \cup s))[N]$ *entonces existe* $z \in in(s, r \cup s)[N]$ *tal que* $(in(r, r \cup s)[K])_e = (r \cup s).z$ *pero* $(in(r, r \cup s)[K])_e = (r \cup s).x$ *entonces como* $r \cup s$ *es mono* $x = z$ *entonces* $x \in in(s, r \cup s)[N]$.

b) $\rightarrow$ *c): Sea* $K = in(s, r \cup s)^{-1}[in(r, r \cup s)[M]]$ *como* $in(s, r \cup s)$ *es mono entonces* $K \subset N$.
$in(s, r \cup s)[K] = in(s, r \cup s)[in(s, r \cup s)^{-1}[in(r, r \cup s)[M]] \subset in(r, r \cup s)[M]$ *entonces* $in(s, r \cup s)[K] \subset in(r, r \cup s)[N]$.
Sea $x \in in(r, r \cup s)[M] \subset in(s, r \cup s)[N]$ *entonces existe* $y \in N$ *tal que* $x = in(s, r \cup s).y$ *entonces* $y \in in(s, r \cup s)^{-1}[in(r, r \cup s)[M]$ *entonces* $x \in in(s, r \cup s)[in(s, r \cup s)^{-1}[in(r, r \cup s)[M]]]$ *entonces* $x \in in(s, r \cup s)[K]$ *entonces* $in(r, r \cup s)[M] \subset in(s, r \cup s)[K]$ *entonces* $in(r, r \cup s)[M] = in(s, r \cup s)[K]$.

c) $\rightarrow$ *a): Sea* $(t, L) \in (r, M)$ *entonces existe* H *tal que* $H_e = r.m$ *con* $m \in M$ *con* $(t, L) \sim (r, H)$ *y como* $(r, M) \sim (s, K)$ *,*$K \subset N$ *entonces existe* $k \in K \subset N$ *tal que* $in(r, r \cup s).m = in(s, r \cup s).k$. *Sea* D *tal que* $D_e = s.k$ *entonces* $(r, H) \sim (s, D)$ *entonces* $(t, L) \sim (s, D)$ *,*$Din_s N$ *entonces* $(t, L) \in (s, N)$ *entonces* $(r, M) \subset (s, N)$. $\square$

Observación 5.6 $(r, M) \sim (s, N)$ *sii* $(r, M) \subset (s, N) \wedge (s, N) \subset (r, M)$

Demostración 5.6.1 $(r, M) \sim (s, N)$ *sii* $in(r, r \cup s)[M] = in(s, r \cup s)[N] \Leftrightarrow in(r, r \cup s)[M] \subset in(s, r \cup s)[N] \wedge in(in(s, r \cup s)[N] \subset in(r, r \cup s)[M] \Leftrightarrow (r, M) \subset (s, N) \wedge (s, N) \subset (s, N) \subset (r, M)$. $\square$

5.2. $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ es modelo de ZFC

Veamos que nuestra estructura es la que buscabamos.

Observación 5.7 *En el modelo vale el axioma de extensionalidad.*

Demostración 5.7.1 *Para todo* (r, M) *y* (s, N) *por la observación anterior para todo* (t, L) *,*$((t, L) \in (r, M) \leftrightarrow (t, L) \in (s, N)) \rightarrow (r, M) \sim (s, N)$. $\square$

Proposición 5.0.7 *Sea* $0 \xrightarrow{\Phi_0} \Omega$ *tal que conmuta el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0"] \arrow[d] & 0 \arrow[d, "\Phi_0"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Entonces $(0 \xrightarrow{r_0} P0, \Phi_0)$ *es el conjunto vacío en el modelo, y en particular esto muestra que el axioma de existencia de conjunto vale en el modelo.*

Demostración 5.0.7.1 *Ya vimos que* $0 \xrightarrow{r_0} P0$ *es o.c.t*
Sea $(r, M) \in (r_0, \Phi_0)$ *entonces existe* K *tal que* $K \in_{r_0} \Phi_0$ *y* $(r, M) \sim (r_0, K)$.
Si $x = (K|r_0)$ *entonces* $x \in \Phi_0$ *entonces existe* y *tal que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "y"] \arrow[drr, "x"] \arrow[ddr] & & \\
& 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
& 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Pero no puede existir un morfismo $1 \xrightarrow{y} 0$ *porque es well-pointed.* $\square$

Proposición 5.0.8 *Sea* (r, M) *objeto-conjunto, entonces* $r[M]$ *es un* Pr*-elemento y* $(r, M) \sim (Pr, r[M])$.

Demostración 5.0.8.1 *Sabemos que* r *es la inclusión de* r *a* Pr *y que* Pr *es o.c.t porque* r *lo es. Consideremos el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "r"] \arrow[d, "r"] & PA \arrow[r, "in(Pr, r\cup Pr)"] \arrow[d, "Pr"] & A \cup PA \arrow[d, "r\cup Pr"] \\
PA \arrow[r, "Pr"] & PPA \arrow[r, "Pin(Pr, r\cup Pr)"] & PA \cup PA
\end{tikzcd}$$

Entonces $(r \cup Pr).in(r, r \cup Pr)[M] = (r \cup Pr).in(Pr, r \cup Pr)[r[M]]$ *entonces como* $r \cup Pr$ *es mono* $in(r, r \cup Pr)[M] = in(Pr, r \cup Pr)[r[M]]$ *entonces* $(r, M) \sim (Pr, r[M])$ *y* $(r[M])_e = Pr.M_e$ *entonces* $r[M]$ *es* Pr*-elemento.* $\square$

Proposición 5.0.9 *El axioma de par vale en el modelo.*

Demostración 5.0.9.1 *Sean (r, M) y (s, N) objetos-conjuntos, sea $t = Pr \cup Ps$ consideremos el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "r"] \arrow[d, "r"] & PA \arrow[r, "in(Pr,Pr\cup Ps)"] \arrow[d, "Pr\cup Ps"] & PA \cup PB \arrow[r, "in(t,r\cup t)"] \arrow[d, "Pr\cup Ps"] & A \cup PA \cup PB \arrow[d, "r\cup t"] \\
PA \arrow[r, "Pr"] & PPA \arrow[r, "Pin(Pr,Pr\cup Ps)"] & PPA \cup PB \arrow[r, "Pin(t,r\cup t)"] & PA \cup PA \cup PB
\end{tikzcd}.$$

Entonces si $M' = in(Pr, Pr \cup Ps).r[M]$ entonces $in(r, r \cup t)[M] = in(t, r \cup t)[M']$ entonces $(r, M) \sim (t, M')$.

Análogamente si $N' = in(Ps, Pr \cup Ps)[s[N]]$ entonces $in(s, s \cup t)[N] = in(t, s \cup t)[N']$ entonces $(s, N) \sim (t, N')$.
Pero por la proposición anterior $(t, N) \sim (Pt, t[N])$ y $t[N] = Pt.x$
$(t, N') \sim (Pt, t[N'])$ y $t[N'] = Pt.y$
Sea $C = PPA \cup PB$ entonces $t[N]$ es Pt-elemento y $x \in C$, $t[N']$ es Pt-elemento con $y \in C$.
Entonces $(Pt, t[N]) \in_{Pt} (Pt, C)$ y $(Pt, t[N`]) \in_{Pt} (Pt, C)$ entonces $(Pt, t[N]) \in (Pt, C)$ y $(Pt, t[N`]) \in (Pt, C)$ entonces $(r, M) \in (Pt, C)$ y $(s, N) \in (Pt, C)$. $\square$

Proposición 5.0.10 *Sea (r, M) objeto-conjunto, entonces $(Pr, P[M])$ es el conjunto potencia de (r, M) en el modelo, an particular vale el axioma de la potencia.*

Demostración 5.0.10.1 *Sea $(t, K) \in (Pr, P[M])$ entonces existe $K' \in_{Pr} P[M]$ tal que $(t, K) \sim (Pr, K')$, con $K'_e = Pr.x$, $x \in P[M]$ entonces sea N, tal que $N_e = x$ entonces $N \subset M$ entonces $K'_e = Pr.N_e = (r[N])_e$ entonces $K' = r[N]$ entonces $(t, K) \sim (Pr, r[N])$.*
Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "r"] \arrow[d, "r"] & PA \arrow[r, "in(Pr,r\cup Pr)"] \arrow[d, "Pr"] & A \cup PA \arrow[d, "r\cup Pr"] \\
PA \arrow[r, "Pr"] & PPA \arrow[r, "Pin(Pr,r\cup Pr)"] & PA \cup PA
\end{tikzcd}.$$

Entonces $in(r, Pr \cup Pr)[N] = in(Pr, r \cup Pr)[r[N]]$ entonces $(Pr, r[N]) \sim (r, N)$ sii $(t, K) \sim (r, N)$ con $N \subset M$ entonces $(t, K) \subset (r, M)$.
Recíprocamente si $N \subset M$ tomando $K` = r[N]$ tenemos que $(t, K) \in (Pr, P[M])$.
$\square$

Proposición 5.0.11 *Sean (r, M) y (r, N) objetos-conjuntos entonces $(r, M -$*

N) es el complemento relativo en el modelo,es decir $x \in (r, M - N)$ sii $x \in (r, M)$ y $x \notin (r, N)$.

Demostración 5.0.11.1 *Sea $(t, K) \in (r, M - N)$ entonces existe $H \in_r M - N$ tal que $(t, K) \sim (r, H)$ y $H_e = r.x$, $x \in M - N$ entonces $x \in M$ entonces $H \in_r M$ entonces $(t, K) \in (r, M)$.*
Si $(t, K) \in (r, N)$ entonces existe L tal que $L_e = r.y$, $y \in N$ con $(t, K) \sim (r, L)$ entonces $(r, H) \sim (r, L)$ entonces $in(r, r).(H \mid r) = in(r, r).(L \mid r)$ entonces $x = y$ entonces $y \notin N$ absurdo.
Recíprocamente $(t, K) \in (r, M)$ y $(t, K) \in (r, N)$ entonces existe h tal que $H \in_r M$ entonces $H_e = r.x$ con $x \in M$,$(t, K) \sim (r, H)$ como $(t, K) \notin (r, N)$ entonces $x \notin N$ entonces $x \in M - N$ entonces $(t, K) \in (r, M - M)$. □

Proposición 5.0.12 *Sean (r, M) y (s, N) objetos-conjuntos, entonces existe (h, D) objeto-conjunto tal que $x \in (h, D) \leftrightarrow x \in (r, M) \wedge x \notin (s, N)$, es decir (h, D) es el complemento relativo ($(h, D := (r, M) - (s, N)$)).*

Demostración 5.0.12.1 *Sea $M' = in(r, r \cup s)[M]$ y $N' = in(s, r \cup s)[N]$ entonces $(t, M') \sim (r, M)$ y $(t, N') \sim (s, N)$ donde $t = r \cup s$ porque $in(t, t \cup r) = in(r \cup s, r \cup s)$ entonces por la proposición anterior $(t, M' - N')$ cumple lo pedido.* □

Proposición 5.0.13 *El axioma de fundación vale en el modelo.*

Demostración 5.0.13.1 *Sea (r, M) objeto-conjunto ,$A \xrightarrow{r} PA$*
Si existe (t, N) tal que $(t, N) \in (r, M)$ entonces existe $K \in_r M$ tal que $(t, N) \sim (r, K)$ entonces $K_e = r.x$,$x \in M$ entonces $A - M \neq A$ y como r es bien fundada $r^{-1}[P[A - M]] \nsubseteq A - M$ entonces existe y tal que $y \in r^{-1}[P[A - M]]$, $y \notin A - M$ entonces $r.y \in P[A - M]$.
Sea K tal que $K_e = r.y$ entonces $k \subset A - M$ entonces como $y \notin A - M$ tenemos que $y \in M$,$(r, K) \sim (r, K)$, además $(r, K) \cap (r, M) = \emptyset$ ya que $(r, M) - (r, K) = (r, M - K) = (r, A - A) = \emptyset$. □

Definición 5.9 *Decimos que un objeto-conjunto (r, M) es transitivo si para todo (s, N) $((s, N) \in (r, M) \to (s, N) \subset (r, M))$.*

Proposición 5.0.14 *Para todo $A \xrightarrow{r} PA$ o.c.t (r, A) es un objeto-conjunto transitivo.*

Demostración 5.0.14.1 *Sea $(s, N) \in (r, A)$ entonces existe K tal que $K \in_r A$ y $(s, N) \sim (r, K)$, pero $K \subset A$ entonces $(s, N) \subset (r, A)$.*□

Observación 5.8 *Todo objeto-conjunto está incluido en un objeto-conjunto transitivo.*

Demostración 5.8.1 *Sea (r, M) objeto-conjunto $A \xrightarrow{r} PA$ entonces $(r, M) \subset (r, A)$ y por la proposición anterior (r, A) es objeto-conjunto transitivo.* □

Proposición 5.0.15 *En el modelo vale el axioma de la unión.*

Demostración 5.0.15.1 *Sea (r, M) objeto-conjunto, sabemos que existe T objeto-conjunto transitivo tal que $(r, M) \subset T$.*
Entonces para todo $x \in (s, N) \in (r, M) \subset T$ tenemos que $x \in T$. □

La teoría WT no es lo suficientemente potente para poder construir a partir de ella un modelo de ZFC, para poder construir una estructura que verifique los axiomas restantes de ZFC, debemos agregarles nuevos axiomas, para ello definiremos una traducción entre el lenguaje conjuntista y el lenguaje de topos.

Definición 5.10 *Consideremos las formulas del tipo* $A \xrightarrow{r} PA$*, como nuestro lenguaje es numerable existe* $\{r_i\}$ *una numeración, análogamente para las fórmulas del tipo* $A \xrightarrow{M} \Omega$.
Definiremos una función $\Phi : Form(\mathrm{L}_{set}) \longrightarrow Form(\mathrm{L}_{top})$ *de la siguiente manera:*
$\psi = (x_i = x_j)$ *entonces* $\Phi(\psi) = in(r_i, r_i \cup r_j)[M_i] = in(r_j, r_i \cup r_j)[M_j]$.

$\psi = (x_i \in x_j)$ *entonces* $\Phi(\psi) = in(r_i, r_i \cup r_j)[M_i] \in_{r_i \cup r_j} in(r_j, r_i \cup r_j)[M_j]$.

$\psi = \neg(\phi)$ *entonces* $\Phi(\psi) = \neg\Phi(\phi)$.

$\psi = (\phi_1 \wedge \phi_2)$ *entonces* $\Phi(\psi) = \Phi(\phi_1) \wedge \Phi(\phi_2)$.

$\psi = (\forall x_i \phi)$ *entonces* $\Phi(\psi) = \forall[r_i, M_i] \to \Phi(\phi)$.

Proposición 5.0.16 *Para toda* $\phi \in Form(\mathrm{L}_{set})$ *se cumple que :*
$A \models \Phi(\phi)$ *sii* $M_A \models \phi$

Demostración 5.0.16.1 *Sea* $\psi = (x_i = x_j)$ *entonces* $A \models \Phi(\psi)$ *sii para todo* r_i, r_j, M_i, M_j $(r_i, M_i) \sim (r_j, M_j)$ *sii* $(r_i.M_i) = (r_j, M_i)$ *sii* $M_A \models (x_i = x_j)$.

Si $\psi = (x_i \in x_j)$ *entonces* $A \models \Phi(\psi)$ *sii para todo* r_i, r_j, M_i, M_j $(r_i, M_i) \in (r_j, M_j)$ *sii* $M_A \models (x_i \in x_j)$.

$\psi = \Phi(\neg\phi)$ *entonces* $A \models \neg\Phi(\phi)$ *sii no* $A \models \Phi(\phi)$ *sii no* $M_A \models \phi$ *sii* $M_A \models \psi$.

$\psi = \phi_1 \wedge \phi_2$ *entonces* $A \models \Phi(\phi_1 \wedge \phi_2)$ *sii* $A \models \Phi(\phi_1)$ *y* $A \models \Phi(\phi_2)$ *sii* $M_A \models \phi_1$ *y* $M_A \models \phi_2$ *sii* $M_A \models \psi$.

$\psi = \forall xi\phi$ *entonces* $A \models \Phi(\forall x_i \phi)$ *sii para todo ri o.c.t,* M_i $A \models \Phi(\phi)$ *sii para todo* r_i, M_i $M_A \models \phi$ *sii* $M_A \models \psi$. $\square$

Axioma de reemplazo en WT Sea $\phi \in Form(L_{set})$ tal que $\phi \equiv$ *Reemplazo* entonces llamamos axioma de reemplazo en topos a $\Phi(reeemplazo)$.

Axioma del infinito en WT Sea $\phi \in Form(L_{set})$, tal que $\phi \equiv$ axioma del infinito en Set, entonces llamamos axioma del infinito en WT a $\Phi(\phi)$.

Axioma de elección en WT Sea $\phi \in Form(L_{set})$ tal que $\phi \equiv$ axioma de elección en Set, entonces llamamos axioma de elección en WT a $\Phi(\phi)$.

Observación 5.9 *En caso que la teoría formada por los axiomas de topos + axioma de reemplazo en topos + axioma del infinito en topos + axioma de elección en topos tenga un modelo A, tenemos un modelo* M_A *de los axiomas anteriores más reemplazo*

Demostración 5.9.1

Evidente de la prop anterior.

Podemos concluir entonces que $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \vDash ZFC$.

Capítulo 6

Equiconsistencia entre ZFC y WTL

Debemos verificar que los axiomas que le agregamos a WT sean consistente respecto a ZFC.

6.1. La consistencia de ZFC implica la consistencia de WT

Vamos a probar que la consistencia de ZFC implica la consistencia de WT.

Sea $(\mathcal{U}, \epsilon) \models ZFC$, definimos las siguiente funciones:

$D : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$, $D(x) = \begin{cases} dom(x) & \text{si } x \text{ es funcion} \\ x & \text{en otro caso} \end{cases}$.

$C : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$, $C(x) = \begin{cases} cod(x) & \text{si } x \text{ es funcion} \\ x & \text{en otro caso} \end{cases}$.

Sea $K \subset \mathcal{U} \times \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ la relación ternaria definida como $(a, b, c) \in K$ sii a, b, c funciones y $a \circ b = c$.

Teorema 6.1 $(\mathcal{U}, C, D, K) \models \mathcal{C}$.

Demostración 6.1.1 $(\mathcal{U}, C, D, K) \models Ax1$ *: Sean* $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathcal{U}$ *tal que* $(x_1, x_2, x_3) \in K$ *y* $(x_1, x_2, x_4) \in K$*, entonces* $x_1 \circ x_2 = x_3$ *y* $x_1 \circ x_2 = x_4$*, entonces por definición de composición de funciones es claro que* $x_3 = x_4$*.*

$(\mathcal{U}, C, D, K) \models Ax2$ *: Sean* $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{U}$ *tales que* $(x_1, x_2, x_3) \in K$*, entonces* $x_1 \circ x_2 = x_3$*, entonces es claro que* $dom(x_2) = cod(x_3)$*.*

$(\mathcal{U}, C, D, K) \models Ax3$ *:* $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{U}$ *tales que* $(x_1, x_2, x_3) \in K$*, entonces* $x_1 \circ x_2 = x_3$*, entonces* $dom(x_2) = dom(x_3)$*,* $cod(x_3) = cod(x_1)$*.*

$(\mathcal{U}, C, D, K) \models Ax4$ *: Sean* $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathcal{U}$ *tales que* $(x_1, x_2, x_4) \in K$, $(x_2, x_3, x_5) \in K$, $(x_4, x_3, x_6) \in K$ *y* $(x_1, x_5, x_7) \in K$, *entonces* $x_1 \circ x_2 = x_4$, $x_2 \circ x_3 = x_5$, $x_4 \circ x_3 = x_6$, $x_1 \circ x_5 = x_7$, *entonces tenemos que* $x_1 \circ x_2) \circ x_3 = x_6$ *y* $x_1 \circ (x_2 \circ x_3) = x_7$, *y como la composición de funciones es asociativa resulta que* $x_7 = x_6$.

$(\mathcal{U}, C, D, K) \models Ax5$*: Sean* x_1, x_2 *conjuntos si* $Morf(x_1) \wedge Morf(x_2)$ *entonces* $x_1 \neq D(x_1) \wedge x_1 \neq C(x_1)$ *entonces por al axioma de fundación tenemos que* x_1 *es función, análogamente* x_2 *es función, y si* $C(x_2) = D(x_1)$ *entonces existe* x_3, *tal que* $K(x_1, x_2, x_3)$ *simplemente componiendo* x_1 *con* x_2, $x_3 = x_1 \circ x_2$.

$(\mathcal{U}, C, D, K) \models Ax6$*: Como cualquier conjunto en ZFC tiene identidad, en particular los conjuntos que nos son funciones.*$\Box$

Sea $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, tomemos $\Omega = \{0, 1\}$, y $\top : 1 \longrightarrow \Omega$, definida como $\top(0) = 1$.

Teorema 6.2 $(\mathcal{U}, C, D, K, \top, \Omega) \vDash WT$.

Demostración 6.2.1 *Existencia de objeto terminal: Probemos que* 1 *es objeto terminal. Sea* $B \in \mathcal{U}$, *si* $B = \emptyset$, *entonces existe una única* $f : B \longrightarrow 1$, $f = \emptyset$, $\emptyset \subset \emptyset \times 1$.
Si $B \neq \emptyset$, *la única función es* $f(x) = 0$ *para todo* $x \in B$.

Existencia de objeto inicial: Sea $B \in \mathcal{U}$ *la única* $f : 0 \longrightarrow B$ *es claramente* $f = \emptyset$.

Existencia de producto: Sean $A, B \in \mathcal{U}$, *tomemos* $P = A \times B$ *el producto cartesiano,* $x = \pi_A$, $y = \pi_B$, *definidas como* $\pi_A : A \times B \longrightarrow A$, $\pi_A(a, b) = a$, $\pi_B : A \times B \longrightarrow B$, $\pi_B(a, b) = b$. *Sean* $C \xrightarrow{f} B$ *y* $C \xrightarrow{g} B$.

$$\begin{tikzcd}
 & A \\
C \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & A \times B \arrow[u, "\pi_A"'] \arrow[d, "\pi_B"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

Es claro que $z : C \longrightarrow A \times B$, *definida como* $z(x) = (f(x), g(x)$, *es la única función que hace conmutar al siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & A \\
C \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "z"] \arrow[dr, "g"'] & A \times B \arrow[u, "\pi_A"'] \arrow[d, "\pi_B"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

Existencia de coproducto: Sean , tomemos $P = A + B = A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$ *(unión disjunta)*

$i_A : B \longrightarrow A + B$, $i_A(x) = (x, 0)$, $i_B : B \longrightarrow A + B$, $i_B(x) = (x, 1)$.

Sean $f : A \longrightarrow$, $g : B \longrightarrow D$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "i_A"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A + B & D \\
B \arrow[u, "i_B"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

definimos $z : A + B \longrightarrow D$, $z(a, b) = \begin{cases} f(a) & si\ b = 0 \\ g(a) & si\ b \neq 0 \end{cases}$.

Es claro que z *es la única que hace conmutar el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "i_A"'] \arrow[rd, "f"] & \\
A+B \arrow[r, "z"] & D \\
B \arrow[u, "i_B"] \arrow[ru, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Existencia de ecualizador: Sean $A \xrightarrow{f} B$, $A \xrightarrow{g} B$.
Definimos $E = \{x \in A : f(x) = g(x)\}$, *tomemos* $k = id_E$, *es claro que* $f.k = g.k$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

Sea $u : X \longrightarrow A$ *tal que* $f.u = g.u$, *entonces es claro que existe una única función* z *tal que* $k \circ z = u$, *esa es* $z = u$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
X \arrow[u, "z"] \arrow[ru, "k"] & &
\end{tikzcd}$$

Existencia de coecualizador: Sean $A \xrightarrow{f} B$, $A \xrightarrow{g} B$, E *como antes, definimos* $q : B \longrightarrow f(E)$ *como* $q(x) = f(x)$, *entonces*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] & E
\end{tikzcd}$$

Sea $u : B \longrightarrow X$ *tal que* $u.f = u.g$, *entonces es claro que* $z = u/f(E)$ *es la única función que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[rd, "u"] & f(E) \arrow[d, "z"] \\
& & X
\end{tikzcd}$$

Existencia de potencia: Sean $A, B \in \mathcal{U}$, *y* $B^A = \{f \in A \times B : f$ *función*$\}$, $A \times B^A \xrightarrow{e} B$, *tal que* $e(a, f) = f(a)$. *Sea* $A \times X \xrightarrow{f} B$, *queremos demostrar* *que existe una única* $h : X \longrightarrow B^A$ *tal que* $e \circ (id_A \times h) = f$*, en el caso de que existiera cumpliría que* $e \circ (id_A \times h)(a, x) = e \circ (a, h(x)) = h(x)(a) = f(a, x)$*, por lo tanto definiendo* h *de esa manera queda probado.*

Existencia de objeto clasificador: Sea $A \xrightarrow{m} B$ *monomorfismo, definimos* $c_m : B \longrightarrow \Omega$*, como* $c_m(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in m[B] \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$.

Entonces $c_m \circ m = \top \circ t_A$*, con* $t_A : A \longrightarrow 1$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "t_A"'] & B \arrow[d, "c_m"] \\
1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Sean $X \xrightarrow{f} 1$, *y* $X \xrightarrow{g} B$ *tales que*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, "f"] \arrow[ddr, "g"'] & & \\
& A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "t_A"'] & B \arrow[d, "c_m"] \\
& 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Sea $D = g(X) \cap m(A)$, $m^{-1} : D \longrightarrow A$*, entonces* $z = m^{-1} \circ g$ *es la única función que hace conmutar al diagrama*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "z"] \arrow[drr, "f"] \arrow[ddr, "g"'] & & \\
& A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "t_A"'] & B \arrow[d, "c_m"] \\
& 1 \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Existencia de mapa clasificador: Sea $A \in \mathcal{U}$, existe $x \in \mathcal{U}$ tal que $x \notin A$, de lo contrario $\mathcal{U} = A$, entonces $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ absurdo.
definimos $A_{cl} := A \cup \{x\}$, y $j_A : A \longrightarrow A_{cl}$.
Sea $A \xrightarrow{m} B$ monomorfismo, y $A \xrightarrow{f} B$ función cualquiera, definimos la siguiente función $\chi : C \longrightarrow A_{cl}$, como

$$\chi(a) = \begin{cases} j_A \circ f \circ m^{-1}(a) & \text{si } a \in m[B] \\ x & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces es claro que $\chi \circ m = j_A \circ f$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "\chi"] \\
A \arrow[r, "j_A"] & A_{cl}
\end{tikzcd}$$

Verifiquemos que es un pullback: Sean $f_1 : D \longrightarrow A$, y $f_2 : D \longrightarrow C$ funciones tales que

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[drr, "f_2"] \arrow[ddr, "f_1"'] & & \\
& B \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "\chi"] \\
& A \arrow[r, "j_A"] & A_{cl}
\end{tikzcd}$$

Entonces $f_2(D) \subset m(B)$*, sea* $z = m^{-1} \circ f_2$*, es una función tal que* $m \circ z = f_2$ *y no hay otra, además* $f \circ z = f \circ m^{-1} \circ f_2 = j_A^{-1} \circ \chi \circ f_2 = j_A^{-1} \circ j_A \circ f_1 = f_1$*, por lo tanto existe una única* z *tal que conmuta el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[drr, "f_2"] \arrow[dr, "z"] \arrow[ddr, "f_1"'] & & \\
& B \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "\chi"] \\
& A \arrow[r, "j_A"] & A_{cl}
\end{tikzcd}$$

Entonces el primer diagrama es un pullback.

Es Well-Pointed : Es claro que $0 \ncong 1$*, por lo tanto es no degenerado, además todo elemento terminal es de la forma* $\{*\}$*, por lo tanto , si dadas* $f : A \longrightarrow B$*, y* $g :\longrightarrow B$ *funciones tales que* $f.x = g.x$ *para todo* $\{*\} \xrightarrow{x} A$ *implica que* $f = g$*, por definición de igualdad de funciones.*

6.2. La consistencia de WT implica la consistencia de ZFC

Teorema 6.3 *Sea* $\mathcal{U} \models ZFC$*,* $(\mathcal{U}, C, K, \top, \Omega) \models WT$*, y* $\mathcal{M}_{(\mathcal{U},C,K,\top,\Omega)}$ *el modelo de ZFC asociado, entonces*

$$\mathcal{U} \cong \mathcal{M}_{(\mathcal{U},C,K,\top,\Omega)}$$

.

Isomorfismo de estructuras.

Demostración 6.3.1 *Vamos a probar que la relación*

$\overline{(A \xrightarrow{r} PA, A \xrightarrow{M} \Omega)} \longleftrightarrow M^{-1}(1)$ *en un isomorfismo de estructuras.*

Observación 6.1 *Sea $A \xrightarrow{r} PA$ o.c.t, por el teorema del colapso de Mostowki existe un único isomorfismo de orden $\pi : A \longrightarrow T$, donde T es un conjunto transitivo. Entonces se cumple que $(r, M) \sim (T \xrightarrow{\in} PT, \pi[M])$.*

Demostración 6.1.1 *Por Mostowki tenemos el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\pi"'] & PA \arrow[d, "P\pi"] \\ T \arrow[r, "\in"] & PT \end{tikzcd}$$

Entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "r"'] & T \arrow[r, "in(\in, r\cup\in)"] \arrow[d, "\in"] & A \cup T \arrow[d, "r\cup\in"] \\ PA \arrow[r, "P\pi"] & PT \arrow[r] & PA \cup T \end{tikzcd} .$$

Por lo tanto $in(r, r\cup \in) = in(\in, r\cup \in).\pi$, entonces
$in(r, r\cup \in)[M] = in(\in, r\cup \in)[\pi[M]]$, lo que demuestra la observación.

Por lo tanto podemos restringirnos a los o.c.t de la forma $(\in, M)$.

Observación 6.2 *Sean T, T' conjuntos transitivos, y $T \xrightarrow{M} \Omega$, $T' \xrightarrow{N} \Omega$ subobjetos. Entonces se cumple que*
$(\in\rceil T, M) \sim (\in\rceil T', N) \Leftrightarrow M = N$.
Esto es la relación que definimos es una función y además es inyectiva.

Demostración 6.2.1 *$(\in\rceil T, M) \sim (\in\rceil T', N) \Leftrightarrow in(\in\rceil T, \in\rceil T\cup \in\rceil T')[M] = in(\in\rceil T', \in\rceil T\cup \in\rceil T')[N]$, pero $\in\rceil T\cup \in\rceil T' = \in\rceil T \cup T'$, entonces*
$(\in\rceil T, M) \sim (\in\rceil T', N) \Leftrightarrow in(\in\rceil T, \in\rceil T \cup T')[M] = in(\in\rceil T', \in\rceil T \cup T')[N] \Leftrightarrow M = N$.

Observación 6.3 *Sean $T \xrightarrow{M} \Omega$ y $T \xrightarrow{N} \Omega$. Entonces*

$$M \in_{\in\rceil T} N \Leftrightarrow M \in N$$

.

Demostración 6.3.1 *Observemos que si* $1 \xrightarrow{M_e} PT$ *es el nombre de* M, *entonces* $M_e(0) = M$, *ya que* M_e *es el único mapa que cumple* $e.(T \times M_e)(t,0) = M(t)$, *y* $e.(T \times M_e)(t,0) = M_e(0)$.
Por definición $M \in_{\in\rceil T} N$ *sii existe* $1 \xrightarrow{x} T$ *tal que* $M_e = \in\rceil T.x$, *con* $x \in N$, *pero* $x(0) = M$ *sii* $M \in N$, *lo que demuestra la observación.*

Observación 6.4 *La función que definimos es sobreyectiva.*

Demostración 6.4.1 *Sea* M *conjunto, sabemos que existe* T *conjunto transitivo tal que* $M \subset T$ *consideremos su función característica asociada a* T, $T \xrightarrow{M} \Omega$, *entonces* $(\in\rceil T, T \xrightarrow{M} \Omega)$ *es una preimagen de* M *bajo la función que definimos, por lo cual probamos la sobreyectividad.*

Falta probar que es morfismo, es decir $(\in\rceil T, T \xrightarrow{M} \Omega) \in (\in\rceil T', T' \xrightarrow{N} \Omega) \Leftrightarrow M \in N$.
Pero $(\in\rceil T, T \xrightarrow{M} \Omega) \in (\in\rceil T', T' \xrightarrow{N} \Omega) \Leftrightarrow in(\in\rceil T, \in\rceil T \cup \in\rceil T')[M] \in\rceil T \cup T' in(\in\rceil T', \in\rceil T \cup \in\rceil T')[N]$ *pero por la observación anterior la última igualdad se cumple sii* $M \in N$ *lo que demuestra el teorema.*$\square$

Ahora estamos en condiciones de demostrar el siguiente teorema.

Teorema 6.4 *ZFC es consistente sii* WT *+ Axioma del infinito en topos + el Axioma de elección topos + Axioma de reemplazo en topos es consistente.*

Demostración 6.4.1 *Ya probamos el reciproco.*
(Directo) También probamos que si $\mathcal{U} \models ZFC$, *entonces* $(\mathcal{U}, C, K, \top, \Omega) \models WT$, *falta ver que* $(\mathcal{U}, C, K, \top, \Omega) \models$ *Axioma del infinito en topos +Axioma de reemplazo en topos + Axioma de elección en topos.*
Sea $\varphi \equiv$ *Axioma de elección, tenemos que ver que* $(\mathcal{U}, C, K, \top, \Omega) \Vdash \Phi(\varphi)$, *pero por la proposición 5.016 sabemos que* $(\mathcal{U}, C, K, \top, \Omega) \models \Phi(\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{M}_{(\mathcal{U}, C, K, \top, \Omega)} \models \varphi$, *pero por el teorema anterior* $\mathcal{U} \cong \mathcal{M}_{(\mathcal{U}, C, K, \top, \Omega)}$, *entonces* $\mathcal{U} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}_{(\mathcal{U}, C, K, \top, \Omega)} \models \varphi$.
Cambiando φ *por los restantes axiomas tenemos el resultado.* $\square$

Bibliografía

[1] HATCHER. WILLIAM S , *The Logical Foundations of Mathematics*, Pergamon Press, Canada,1982.

[2] PRESTEL. ALEXANDER ,DELZELL *Mathematical Logic and Model Theory*, Springer-Verlag, London, 2011.

[3] VAN DALEN DIRK, *Logic and Structure*, Springer-Verlag, New York, 1994.

[4] MARKER DAVID, *Model Theory: An introduction*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[5] PALMGREN. ERIK, *Constructivist and Structuralist Foundation:Bishop's and Lawvere's Theories of Sets*, arXiv: 1201.6272v1 [math.LO], 2012.

[6] OSIUS. GERHARD, *Categorical Set Theory: A Characterization of The Category of Sets*, Journal of Pure and Appplied Algebra, pags 79-119, 1974.

[7] LAWVERE. WILLIAM F, SHANUEL STHEPHEN H, *Conceptual Mathematics*, Cambridge University Press, United Kingdom, 1997.

[8] LAWVERE. WILLIAM F, ROSERBRUGH. ROBERT, *Sets for Mathematics*, Cambridge University Press, United Kingdom, 2003.

[9] LAWVERE. WILLIAM F, *The Category of categories as foundation for mathematics*,Proceedings of Conference on Categorical Algebra, Springer-Verlag, Berlin, pags 1-20, 1966.

[10] LAWVERE. WILLIAM F, *An ELementary Theory of Category of Sets*, Proc. Nat. Acad.Sci, 52:1506-1511, 1964.

[11] MACLANE S, *Categories for Working Mathematician*, Springer-Verlag, New York, 1971.

[12] LAWVERE. WILLIAM F, ROSERBRUGH. ROBERT, *Sets for Mathematics*, Cambridge University Press, United Kingdom, 2003.

[13] ZAKHAROV V.H, BUNINA E.I, MIKHALEV A.V, ANDREEV P.V, *Local Theory of Sets As foundations For Category Theory And its conections with the Zermelo-Frankel Set Theory*, Journal of Mathematical Sciences,Vol 138, No.4, 2006.

[14] BLASS ANDREAS, *The Interactions between Category Theory and Set Theory*, Contemporary Mathematics,Volume 30, 1984.

[15] Blass Andreas, *Complete topoi representing models of set theory*, Annals of Pure and Applied Logic,1-26, North-Holland, 1992.

[16] Muller F.A, *Sets, Classes and Categories*, British Journal for the Philosophy of Science, 52:539-573, 2001.

[17] Jhonstone Peter T, *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium*, Clarendon Press, volume 1 2002.

[18] Marquis Jean-Pierre, *From a Geometrical Point of View, A Study of the History and Philosophy of Category Theory*, Springer-Verlag, Canada, 2009.

[19] Kromer Ralf, *Tool and Object, A History and Philosophy of Category Theory*, Birkhauser Verlag, Germany, 2007.

[20] Dickmann. Max, *Teoría de Modelos, apuntes de curso*, Montevideo, Uruguay, 2012.

[21] Burris S.,Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, Springer-Verlag, 1981.

[22] Roitman Judith, *Introduction to Modern Set Theory*, CC BY-NC-ND 3.0, 2011.

[23] Kunen Kenneth, *Set Theory An Introduction to Independence Proof*, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[24] Jech Thomas, *Set Theory* , Springer-Verlag,the millenium third edition, Germany, 2003.

Índice de alfabético

Glosario de notaciones