Trabajo Monográfico
Precuantización Geométrica

Sean Sebastián Scott Figueroa

Orientadores: Dr.Michael Reisenberger,
Dr.Miguel Paternain

Centro de Matemáticas
Universidad de la República

Licenciatura en Matemáticas

setiembre del 2008

Índice general

RESUMEN. En mecánica clásica el espacio de estados viene dado por una variedad simpléctica (M, ω), mientras que los observables vienen dados por las funciones diferenciables en M. Por su parte, en mecánica cuántica el espacio de estados viene dado por rayos en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, siendo los observables una familia, $\mathcal{O}$, de operadores hermíticos en $\mathcal{H}$. Según la filosofía de la escuela de Copenhagen, las predicciones cuánticas deben poderse formular en terminos clásicos. Esto nos plantea el siguiente problema: dados M y ω, es posible reconstruir $\mathcal{H}$ y $\mathcal{O}$? Siguiendo unas prescripciones dadas por Dirac, ver [**1**], resolvemos este problema construyendo un mapa entre los observables clásicos y los cuánticos, el mapa de precuantización (ampliando las condiciones se obtiene una cuantización). Luego, estudiamos las condiciones necesarias y suficientes sobre (M, ω) para poder construir el mapa. Finalmente, construimos el mapa para una esfera y encontramos una precuantización para un operador de momento angular.

CAPíTULO 1

Prerequisitos

1. Fibrados Lineales Complejos

La estructura matemática que definiremos a continuación se puede describir intuitivamente como un conjunto de espacios vectoriales complejos unidimensionales parametrizados convenientemente por puntos en una variedad diferenciable.

Definición 1. *(Fibrado Lineal Complejo) Un fibrado lineal complejo es una terna (L, M, π), donde L y M son variedades diferenciables, y $\pi : L \to M$ un mapa diferenciable y sobreyectivo, junto con una estructura de espacio vectorial complejo unidimensional en cada fibra $\pi^{-1}(\{m\})$, $\forall m \in M$, cumpliendose las siguientes condiciones:*

1) Existe un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de M, junto con los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{C} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ U_\alpha & \xrightarrow{id} & U_\alpha \end{array}$$

siendo φ_α un difeomorfismo, $\forall \alpha \in \Lambda$, llamado trivialización local.

2)

$$\varphi_\alpha|_{\pi^{-1}(\{m\})} : \pi^{-1}(\{m\}) \to \{m\} \times \mathbb{C}$$

es un isomorfismo lineal, $\forall m \in U_\alpha$, $\forall \alpha \in \Lambda$.

En el contexto de la definición anterior V es llamada la $fibra\ tipica$, M será el *espacio base*, mientras que L será el *espacio total* del fibrado lineal complejo. De forma abreviada e informal diremos que L es un fibrado lineal complejo sobre M, identificando L con el propio fibrado, sin que esto pueda traer confusiones. Siguiendo en las condiciones de la definición anterior, sea $m \in U_\alpha \bigcap U_\beta \neq \emptyset$. Luego, debido a 3), el siguiente mapa

$$\begin{array}{ccc} \{m\} \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}} & \{m\} \times \mathbb{C} \\ (m, z) & \mapsto & (m, w) \end{array}$$

es un isomorfismo lineal. Por tanto, $\exists\, c_{\alpha\beta}(m) \in \mathbb{C}$ tal que $w = c_{\alpha\beta}(m)z$. De esta forma, obtenemos el mapa de transición

$$c_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}$$

definido por

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(m, z) = (m, c_{\alpha\beta}(m)\, z)$$

Se comprueba que los mapas de transición obedecen las siguientes propiedades

(1) $c_{\alpha\alpha}(m) = 1\,,\ \forall m \in U_\alpha$

(2) $c_{\alpha\beta}(m)\, c_{\beta\alpha}(m) = 1\,, \forall m \in U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$

(3) $c_{\alpha\beta}(m)\, c_{\beta\delta}(m)\, c_{\delta\alpha}(m) = 1\,, \forall m \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\delta \neq \emptyset$

El ejemplo trivial de fibrado lineal complejo, con espacio base M, viene dado por $M \times \mathbb{C}$. A continuación desarrollaremos un ejemplo de fibrado complejo lineal que posteriormente nos será util.

Ejemplo 1. *(Fibrado de Hopf)*

Consideremos en $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ la siguiente relación de equivalencia

$$(z, w) \sim (z', w') \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} - \{0\} \,/\, (z', w') = (\lambda z, \lambda w)$$

Sea el *plano proyectivo complejo* dado por

$$\mathbb{C}P^1 = \frac{\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}}{\sim}$$

Podemos cubrir $\mathbb{C}P^1$ por

$$U_1 = \{[(z,w)] : z \neq 0\}\ , U_2 = \{[(z,w)] : w \neq 0\}$$

que junto a los mapas coordenados

$$\begin{array}{ccc} U_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{C} & & U_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathbb{C} \\ [(z,w)] \mapsto \dfrac{w}{z} & & [(z,w)] \mapsto \dfrac{z}{w} \end{array}$$

le brindan a $\mathbb{C}P^1$ estructura de variedad diferenciable. Sea

$$L = \coprod_{(z,w)\in\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}} \{(\lambda z, \lambda w) : \lambda \in \mathbb{C}\}$$

Luego,

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C}P^1 \\ (\lambda z, \lambda w) & \mapsto & [(z,w)] \end{array}$$

es un mapa diferenciable y sobreyectivo. Mas aun, L es un fibrado complejo lineal sobre $\mathbb{C}P^1$, el fibrado de Hopf. En efecto, tenemos

$$\pi^{-1}\left([(z,w)]\right) = \{(\lambda z, \lambda w) : \lambda \in \mathbb{C}\}$$

que es un espacio vectorial complejo unidimensional. Por otro lado, las trivializaciónes locales vienen dadas por

$$\begin{array}{lll} \pi^{-1}(U_1) \xrightarrow{\varphi_1} U_1 \times \mathbb{C} & & \pi^{-1}(U_2) \xrightarrow{\varphi_2} U_2 \times \mathbb{C} \\ (\lambda, \lambda w) \quad \mapsto ([(1,w)], \lambda) & & (\lambda z, \lambda) \quad \mapsto ([(z,1)], \lambda) \end{array}$$

Luego, se tiene que

$$\begin{array}{c} U_1 \cap U_2 \times \mathbb{C} \xrightarrow{\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}} U_1 \cap U_2 \times \mathbb{C} \\ ([(z,w)], \lambda) \mapsto \left([(z,w)], \frac{w}{z}\lambda\right) \end{array}$$

Por tanto, el mapa de transición viene dado por

$$\begin{array}{c} U_1 \cap U_2 \xrightarrow{c_{12}} \mathbb{C} \\ [(z,w)] \mapsto \frac{w}{z} \end{array}$$

El siguiente mapa

$$\begin{array}{llll} \varphi: & S^2 & \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to & \mathbb{C}P^1 \\ (x,y,z) \mapsto & \dfrac{x+iy}{1-z} & \mapsto [(x+iy, 1-z)] & ,(x,y,z) \neq (0,0,1) \\ (0,0,1) \mapsto & \{\infty\} & \mapsto [(1,0)] & \end{array}$$

es un difeomorfismo. Para ver la diferenciabilidad en $(0,0,1)$ notar que

$$\begin{aligned} [(x+iy, 1-z)] &= \left[\left(x^2+y^2, (x-iy)(1-z)\right)\right] = \left[\left(1-z^2, (x-iy)(1-z)\right)\right] \\ &= \left[\left(1, \frac{(x-iy)(1-z)}{1-z^2}\right)\right] = \left[\left(1, \frac{x-iy}{1+z}\right)\right] \end{aligned}$$

y por tanto en un entorno de $(0,0,1)$ el mapa φ viene dado por

$$(x,y,z) \mapsto \left[\left(1, \frac{x-iy}{1+z}\right)\right]$$

siendo asi manifiestamente diferenciable en dicho punto. Luego, podemos considerar al fibrado de Hopf con espacio base dado por S^2 de la siguiente forma. Como proyección de L a S^2 tenemos $\pi_{S^2} = \varphi^{-1} \circ \pi$, y como trivializaciones locales

$$\begin{array}{lll} \pi_{S^2}^{-1}(U_+) \xrightarrow{\varphi_+} U_+ \times \mathbb{C} & & \pi_{S^2}^{-1}(U_-) \xrightarrow{\varphi_-} U_- \times \mathbb{C} \\ \left(\lambda \dfrac{x+iy}{1-z}, \lambda\right) \mapsto ((x,y,z), \lambda) & & \left(\lambda, \lambda \dfrac{1-z}{x+iy}\right) \mapsto ((x,y,z), \lambda) \end{array}$$

donde $U_\pm = S^2 - \{P_\pm\}$, y $P_\pm = (0,0,\pm 1)$. Luego,

$$\begin{aligned} U_+ \cap U_- \times \mathbb{C} &\xrightarrow{\varphi_- \circ \varphi_+^{-1}} U_+ \cap U_- \times \mathbb{C} \\ ((x,y,z),\lambda) &\mapsto \left((x,y,z), \frac{x+iy}{1-z}\lambda\right) \end{aligned}$$

Por lo que el mapa de transición es

$$\begin{aligned} U_+ \cap U_- &\xrightarrow{c_{+-}} \mathbb{C} \\ (x,y,z) &\mapsto \frac{x+iy}{1-z} \end{aligned}$$

y analogamente

$$\begin{aligned} U_+ \cap U_- &\xrightarrow{c_{-+}} \mathbb{C} \\ (x,y,z) &\mapsto \frac{1-z}{x+iy} \end{aligned}$$

Definición 2. *(isomorfismo de fibrados lineales) Sean L y N dos fibrados lineales complejos sobre M. Se dice que L y N son isomorfos si existe un difeomorfimo $\varphi : L \to N$ tal que cumple las siguientes condiciones:*

i) $\varphi\left(\pi_L^{-1}(\{m\})\right) \subset \pi_N^{-1}(\{m\})$

ii) $\varphi|_{\pi_L^{-1}(\{m\})} : \pi_L^{-1}(\{m\}) \to \pi_N^{-1}(\{m\})$ *es un isomorfismo lineal.*

Un fibrado complejo lineal puede ser reconstruido a partir de los mapas de transición.

Teorema 1. *Sea M una variedad diferenciable, con un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, y mapas $c_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}$ que cumplen las propiedades (1), (2), (3) de los mapas de transición. Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones:*
i)

$$L = \frac{\coprod_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \times \mathbb{C}}{\sim}$$

es un fibrado complejo lineal sobre M, siendo $\sim$ una relación de equivalencia en $\coprod_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \times \mathbb{C}$ definida por

$$(\alpha, m, z) \sim (\beta, n, w) \Leftrightarrow m = n\,,\; w = c_{\alpha\beta}(m)\, z$$

siendo que $m \in U_\alpha$, $n \in U_\beta$.
ii) Si N es un fibrado lineal complejo sobre M con mapas de transción

dados por los de la hipótesis entonces, resulta que N es isomorfo al fibrado L dado en i).

Demostracion : ver [**2**], proposición 1.2, pagina 4.

2. Conexión y Curvatura

Definición 3. *(Sección) Sea L es un fibrado complejo lineal sobre M. Una sección de M en L es un mapa diferenciable $s : M \to L$ tal que $\pi \circ s = id_M$. La familia de secciones de M en L se denotara por $\Gamma(M, L)$, o cuando no haya confusión con la base por $\Gamma(L)$.*

En las condiciones de la definición de fibrado vectorial considerar el siguiente mapa

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha & \xrightarrow{s_\alpha} & \pi^{-1}(U_\alpha) \subset L \\ m & \mapsto & \varphi_\alpha^{-1}((m,1)) \end{array}$$

Luego, por la propiedad 3) de un fibrado lineal complejo $\varphi_\alpha^{-1}((m,1)) \in \pi^{-1}(\{m\})$. Por ende,

$$\pi \circ s_\alpha(m) = m \,, \forall m \in U_\alpha$$

Es decir, a cada U_α podemos asignarle, de esta forma, un

$$s_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, L)$$

Luego, si $m \in U_\alpha \bigcap U_\beta \neq \emptyset$ se tiene que $s_\beta(m) = \lambda s_\alpha(m)$ para algun $\lambda \in \mathbb{C}$. Se tiene que,

$$\begin{array}{ccccc} U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} & \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) & \xrightarrow{\varphi_\beta} & U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C} \\ (m,1) & \mapsto & s_\alpha(m) = \dfrac{1}{\lambda} s_\beta(m) & \mapsto & \left(m, \dfrac{1}{\lambda}\right) \end{array}$$

Pero por otro lado, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\ (m,1) = (m, c_{\alpha\beta}(m)) = \left(m, \frac{1}{c_{\beta\alpha}(m)}\right)$. Por tanto,

$$s_\beta(m) = c_{\beta\alpha}(m) s_\alpha(m)$$

Al conjunto de pares $\{U_\alpha, s_\alpha\}$ le llamaremos trivialización de L.

Definición 4. *(Conexión) Sea L un fibrado lineal complejo sobre M. Una conexión sobre L es un mapa*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(TM) \times \Gamma(L) & \xrightarrow{\nabla} & \Gamma(L) \\ (X, s) & \mapsto & \nabla_X s \end{array}$$

tal que $\forall f \in C^\infty(M)$; $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$; s_1, $s_2 \in \Gamma(L)$ se cumplen:

1)

$$\nabla_{fX_1+X_2} s = f\, \nabla_{X_1} s + \nabla_{X_2} s$$

2)
$$\nabla_X (s_1 + s_2) = \nabla_X s_1 + \nabla_X s_2$$
3)
$$\nabla_X f s = X(f)\, s + f \nabla_X s$$

TEOREMA 2. *Sea L un fibrado lineal complejo sobre M con conexión ∇. Consideremos una trivialización $\{U_\alpha, s_\alpha\}$ de L, y sean las 1-formas de conexión Θ_α definidas sobre U_α tales que*
$$\nabla_X s_\alpha = -i\Theta_\alpha (X)\, s_\alpha \ , \forall X \in \Gamma (TM) .$$
Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones:

i) Si $U_\alpha \bigcap U_\beta \neq \emptyset$ se tiene que
$$d (\ln c_{\alpha\beta}) = -i (\Theta_\alpha - \Theta_\beta)$$
donde $c_{\alpha\beta} \in C^\infty (U_\alpha \cap U_\beta)$ es el mapa de transición tal que $s_\alpha = c_{\alpha\beta}\, s_\beta$.

ii) Existe una 2-forma Ω definida sobre M, llamada forma de curvatura, tal que
$$\Omega|_{U_\alpha} = \frac{d\Theta_\alpha}{2\pi} \ , \forall \alpha$$

iii) Además, Ω tiene la siguiente expresión global
$$\Omega (X, Y) = \frac{1}{2\pi i} \left(\nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y] \right)$$

Demostracion :
$i)$ Si $U_\alpha \bigcap U_\beta \neq \emptyset$ existe $c_{\alpha\beta} \in C^\infty (U_\alpha \cap U_\beta)$ tal que
$$s_\alpha = c_{\alpha\beta}\, s_\beta$$
entonces se debe cumplir que
$$\nabla_X s_\alpha = \nabla_X (c_{\alpha\beta}\, s_\beta) \ , \forall X \in \Gamma (TM)$$
Pero,
$$\nabla_X (c_{\alpha\beta}\, s_\beta) = \left(\frac{dc_{\alpha\beta} (X)}{c_{\alpha\beta}} - i\Theta_\beta (X) \right) s_\alpha$$
Por tanto,
$$d (\ln c_{\alpha\beta}) = -i (\Theta_\alpha - \Theta_\beta)$$
$ii)$ Para demostrar la existencia de Ω bastará con probar que si $U_\alpha \bigcap U_\beta \neq \emptyset$ entonces
$$d\Theta_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = d\Theta_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$$

Por lo que recordando que $d^2 = 0$ se obtiene la igualdad buscada inmediatamente a partir de i). En efecto, se tiene que

$$d\Theta_\alpha - d\Theta_\beta = d\left(\Theta_\alpha - \Theta_\beta\right) = id^2\left(\ln c_{\alpha\beta}\right) = 0$$

iii) Para obtener la expresión global se considera

$$\nabla_Y \nabla_X \left(f\, s_\alpha\right) = \left(Y\left[X\left(f\right)\right] - iY\left[f\Theta_\alpha\left(X\right)\right]\right)s_\alpha - i\left(X\left(f\right) - if\Theta_\alpha\left(X\right)\right)\Theta_\alpha\left(Y\right)s_\alpha$$

Por tanto,

$$\left[\nabla_X, \nabla_Y\right]\left(f\, s_\alpha\right) = \left[X, Y\right]\left(f\right)s_\alpha - if\left(X\left[\Theta_\alpha\left(Y\right)\right] - Y\left[\Theta_\alpha\left(X\right)\right]\right)s_\alpha$$

recordando la siguiente igualdad

$$d\Theta\left(X, Y\right) = X\left[\Theta\left(Y\right)\right] - Y\left[\Theta\left(X\right)\right] - \Theta\left(\left[X, Y\right]\right)$$

para una 1-forma cualquiera Θ, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\left[\nabla_X, \nabla_Y\right]\left(f\, s_\alpha\right) = \left[X, Y\right]\left(f\right)s_\alpha - if\left(d\Theta_\alpha\left(X, Y\right) + \Theta_\alpha\left(\left[X, Y\right]\right)\right)s_\alpha = \\
&= \left(\left[X, Y\right]\left(f\right) - if\Theta_\alpha\left(\left[X, Y\right]\right)\right)s_\alpha - id\Theta_\alpha\left(X, Y\right)f\, s_\alpha = \\
&= \left(\nabla_{[X,Y]} - 2\pi i\,\Omega\left(X, Y\right)\right)\left(f\, s_\alpha\right)
\end{aligned}$$

de donde se deduce la expresión buscada.

Definición 5. *(sección sobre una curva en M) Sea un fibrado complejo lineal L sobre M, $\gamma : [0,1] \to M$ una curva diferenciable sobre M. Una sección sobre γ es un mapa $s : [0,1] \to L$ diferenciable con $\pi\left(s\left(t\right)\right) = \gamma\left(t\right)$. En tal caso se usará la siguiente notación, $s \in \Gamma\left(\gamma\right)$.*

Teorema 3. *Sea un fibrado complejo lineal L sobre M con conexión ∇, $\gamma : [0,1] \to M$ una curva diferenciable sobre M. Entonces, existe un único mapa*

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\gamma\right) &\to \Gamma\left(\gamma\right)\\ s &\mapsto \tfrac{Ds}{dt}\end{aligned}$$

que cumple:

1)

$$\frac{D\left(s+r\right)}{dt} = \frac{Ds}{dt} + \frac{Dr}{dt}$$

con s, $r \in \Gamma\left(\gamma\right)$

2)

$$\frac{D\left(f\,s\right)}{dt} = \frac{df}{dt}s + f\frac{Ds}{dt}$$

con $f \in C^\infty[0,1]$, y $s \in \Gamma\left(\gamma\right)$

3) Si s proviene de la restricción de $S \in \Gamma\left(L\right)$ entonces

$$\frac{Ds}{dt}(t) = \nabla_{\dot\gamma}S(\gamma(t)), \forall t$$

Demostracion : Sea $\{U_\alpha, s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una trivialización de L. Consideremos $U_\alpha \in \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ tal que $U_\alpha \bigcap \gamma(0,1) \neq \emptyset$. Dada $s \in \Gamma(\gamma)$, si $I = \gamma^{-1}(U_\alpha \bigcap \gamma(0,1))$ entonces $\exists f \in C^\infty(I)$ tal que

$$s(t) = f(t)\, s_\alpha \circ \gamma(t) \quad , \forall t \in I$$

Luego, debido 2) se cumple que

$$\frac{Ds}{dt}(t) = \frac{df}{dt}(t)\, s_\alpha \circ \gamma(t) + f(t)\, \frac{D\,(s_\alpha \circ \gamma)}{dt}(t) \quad , \forall t \in I$$

Considerando 3) se obtiene

$$\frac{Ds}{dt}(t) = \frac{df}{dt}(t)\, s_\alpha \circ \gamma(t) + f(t)\, \nabla_{\dot\gamma} s_\alpha(\gamma(t)) \quad , \forall t \in I$$

Esta expresión local nos da la unicidad buscada. Luego, definimos $\frac{Ds}{dt}(t)$ por tal expresión. Tal definición es consistente ya que si $U_\alpha \bigcap U_\beta \bigcap \gamma(0,1) \neq \emptyset$ y $s = g s_\beta$ se tiene que

$$\begin{aligned} g(t) = c_{\beta\alpha}^{-1}\,(\gamma(t))\, f(t) \Rightarrow \frac{dg}{dt}(t) &= d{c_{\beta\alpha}^{-1}}_{\gamma(t)}\,(\dot\gamma(t))\, f(t) + c_{\beta\alpha}^{-1}\,(\gamma(t))\, \frac{df}{dt}(t) \\ &= -\frac{d\,(c_{\beta\alpha})_{\gamma(t)}}{c_{\beta\alpha}^2}\,(\dot\gamma(t))\, f(t) + c_{\beta\alpha}^{-1}\,(\gamma(t))\, \frac{df}{dt}(t) \end{aligned}$$

Mientras que

$$\nabla_{\dot\gamma} s_\beta(\gamma(t)) = \nabla_{\dot\gamma}\,(c_{\beta\alpha}\, s_\alpha)\,(\gamma(t)) = d\,(c_{\beta\alpha})_{\gamma(t)}\,(\dot\gamma(t))\, s_\alpha \circ \gamma(t) + c_{\beta\alpha} \nabla_{\dot\gamma} s_\alpha(\gamma(t))$$

y por tanto

$$\frac{dg}{dt}(t)\, s_\beta \circ \gamma(t) + g(t)\, \nabla_{\dot\gamma} s_\beta(\gamma(t)) = \frac{df}{dt}(t)\, s_\alpha \circ \gamma(t) + f(t)\, \nabla_{\dot\gamma} s_\alpha(\gamma(t))$$

Además, se puede verificar que tal definición cumple las condiciones que se piden.

Notación 1. *En las condiciones del teorema previo, $\frac{Ds}{dt}$ será la derivada covariante de s a lo largo de γ.*

Teorema 4. *(transporte paralelo) Sea un fibrado complejo lineal L sobre M con conexión ∇, y curvatura Ω. Entonces, dada $\gamma : [0,1] \to M$, curva sobre M existe y es única $s \in \Gamma(\gamma)$ que cumpla:*

1) s es paralela a lo largo de γ, es decir

$$\frac{Ds}{dt}\,(t) = 0 \ , \ \forall t \in [0,1]$$

2) $s(0) = s_0 \in L$ dado.

Si además, consideramos γ cerrada ($\gamma(0) = \gamma(1)$) debe ser

$$s\,(1) = \lambda\, s\,(0)$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$, y se dice que λ es la holonomía de la conexión respecto a γ. Resulta que si existe una 2-subvariedad Σ con borde γ y orientada según este, entonces

$$\lambda = \exp\left(2\pi i \int\limits_{\Sigma} \Omega\right)$$

Demostracion : Consideremos una trivialización $\{U_\alpha\,, s_\alpha\}$, y supongamos primero que la traza de γ esta incluida en un entorno U_α dado, donde obtenemos localmente que $s(t) = f_\alpha(t) s_\alpha(\gamma(t))$. Luego, la condición 1) se reduce a

$$\frac{D\left(f_\alpha\, s_\alpha \circ \gamma\right)}{dt} = \left(\frac{df_\alpha}{dt} - i f_\alpha \Theta_\alpha \gamma\left(\dot{\gamma}\right)\right) s_\alpha \circ \gamma = 0$$

De modo que

$$\frac{1}{f_\alpha}\frac{df_\alpha}{dt} - i\Theta_\alpha \gamma\left(\dot{\gamma}\right) = 0$$

y por tanto, considerando según 2) que $s(0) = s_0 = f_\alpha(0) s_\alpha(\gamma(0))$,

$$\ln\left(\frac{f_\alpha(t)}{f_\alpha(0)}\right) = i\int\limits_0^t \Theta_\alpha \gamma\left(u\right)\left(\dot{\gamma}\left(u\right)\right) du$$

O bien,

$$f_\alpha(t) = f_\alpha(0) \exp\left(i\int\limits_0^t \Theta_\alpha \gamma\left(u\right)\left(\dot{\gamma}\left(u\right)\right) du\right)$$

Luego, en este caso s queda univocamente deteminada por

$$s(t) = f_\alpha(0) \exp\left(i\int\limits_0^t \Theta_\alpha \gamma\left(u\right)\left(\dot{\gamma}\left(u\right)\right) du\right) s_\alpha(\gamma(t))$$

Sea $\gamma_t = \gamma|_{[0,t]}$, luego podemos expresar

$$s(t) = f_\alpha(0) \exp\left(i\int\limits_{\gamma_t} \Theta_\alpha\right) s_\alpha(\gamma(t))$$

Por otro lado, si $U_\alpha \bigcap U_\beta \neq \emptyset$, la traza de γ esta incluida en esta intersección, y $s(0) = s_0 = f_\beta(0) s_\beta(\gamma(0))$ encontramos que

$$\begin{aligned}
& f_\beta(0) \exp\left(i \int\limits_{\gamma_t} \Theta_\beta \right) s_\beta(\gamma(t)) \\
&= f_\beta(0) \exp\left(i \int\limits_{\gamma_t} \Theta_\alpha \right) \exp\left(\int\limits_{\gamma_t} i\left(\Theta_\beta - \Theta_\alpha\right) \right) s_\beta(\gamma(t)) \\
&= f_\beta(0) \exp\left(i \int\limits_{\gamma_t} \Theta_\alpha \right) \exp\left(\int\limits_{\gamma_t} d\left(\ln c_{\alpha\beta}\right) \right) s_\beta(\gamma(t)) \\
&= f_\alpha(0) \exp\left(i \int\limits_{\gamma_t} \Theta_\alpha \right) s_\alpha(\gamma(t)) = s(t)
\end{aligned}$$

Esto muestra que la expresión encotrada para s es consistente, pero además nos permite hallar solución en el caso general. En efecto, dado $t \in [0,1]$ por compacidad podemos cubrir $\gamma([0,t])$ por un numero finito de U_αs. Los enumeramos de la siguiente manera, escojeremos U_1 como alguno que contenga $\gamma(0)$, U_2 sera algun entorno cuya intersección con U_1 sea no vacía, γ_1 sera un camino que coincide con γ desde $\gamma(0)$ hasta algun punto de $U_1 \bigcap U_2$, U_3 sera algun entorno cuya intersección con U_2 es no vacia, γ_2 sera un camino que coincide con γ partiendo desde donde γ_1 termina hasta algun punto de $U_2 \bigcap U_3$, siguiendo de esta forma llegamos a un U_n que contiene a $\gamma(t)$, consideramos γ_{n-1} como aquel camino que coincide con γ desde donde γ_{n-2} termina hasta $\gamma(t)$. Tenemos que

$$\gamma_t = \sum_j \gamma_j$$

y por tanto si $s(0) = f(0) s_1(\gamma(0))$

$$s(t) = f(0) \exp\left(\sum_j i \int\limits_{\gamma_j} \Theta_j \right) s_n(\gamma(t))$$

Tomando $t = 1$ y γ cerrada se tiene que $s_n(\gamma(1)) = s_1(\gamma(0))$, y por tanto

$$s(1) = \exp\left(\sum_j i \int\limits_{\gamma_j} \Theta_j \right) s(0) \tag{1}$$

Consideremos, ahora, una 2-subvariedad Σ con borde γ. Como $\Sigma \subset \bigcup_{\alpha} U_\alpha$, por compacidad podemos encontrar un subcubrimiento finito $\{U_i\}$.Ademas, podemos encontrar una triangulacion de Σ subordinada a $\{U_i\}$. Esto permite particionar a Σ en una union disjunta

$$\Sigma = \bigcup_i \Sigma_i$$

donde los triángulos vienen dados por los $\partial\Sigma_i$. Resulta que en cada U_i, como $\Omega|_{U_i} = \frac{d\Theta_i}{2\pi}$, por Stokes se cumple

$$\int_{\partial\Sigma_i} \Theta_i = 2\pi \int_{\Sigma_i} \Omega$$

Por tanto,

$$\exp\left(2\pi i \int_{\Sigma} \Omega\right) = \exp\left(\sum_j 2\pi i \int_{\Sigma_j} \Omega\right) = \exp\left(\sum_j i \int_{\partial\Sigma_j} \Theta_j\right)$$

Las aristas de triángulos que yacen sobre γ pueden ser ordenadas convenientemente, sean estas $\{\gamma_i\}$. Por otro lado, dado un triángulo interior $\partial\Sigma_j$, no tiene aristas que yacen sobre γ, se integra sobre el en ambas direcciones, obteniendo la holonomia λ_j respecto a $\partial\Sigma_j$ y $\frac{1}{\lambda_j}$ respectivamente, resultando que

$$\exp\left(2\pi i \int_{\Sigma} \Omega\right) = \exp\left(\sum_j i \int_{\gamma_j} \Theta_j\right)$$

Por tanto, considerando (1)

$$\lambda = \exp\left(2\pi i \int_{\Sigma} \Omega\right)$$

donde λ es la holonomía respecto a γ.

Definición 6. *Sea L un fibrado lineal complejo sobre M. Se dice que L tiene estructura hermítica si existe un mapa*

$$\begin{aligned} \Gamma(L) \times \Gamma(L) &\to C^\infty(M, \mathbb{C}) \\ (s_1, s_2) \quad &\mapsto \langle s_1, s_2 \rangle \end{aligned}$$

lineal en la primer entrada y antilineal en la segunda, antisimétrico y definido postivo. Si además el fibrado tiene una conexión ∇, esta es *comparible con la estructura hermítica si*

$$X\langle s_1, s_2\rangle = \langle \nabla_X s_1, s_2\rangle + \langle s_1, \nabla_X s_2\rangle \quad ,\forall X \in \Gamma(TM)$$

CAPíTULO 2

Campos Hamiltonianos en Variedades Simplécticas

1. Variedades Simplécticas

Las referencias para esta sección y las restantes en este capitulo vienen dadas por [**3**] y [**4**].

Definición 7. *Una variedad simpléctica es un par (M,ω), donde M es una variedad diferenciable y ω es una 2-forma diferenciable, nodegenerada y cerrada.*

El ejemplo canónico de variedad simléctica viene dado por el fibrado cotangente T^*N de una variedad diferenciable N, con

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i \tag{2}$$

en cada entorno con sistema de coordenadas $(q_1, ..., q_n; p_1, ...p_n)$. Claramente ω es cerrada y no degenerada, restaría probar que la definición no depende del sistema coordenado escogido. Para esto notar que

$$\omega = d\theta \tag{3}$$

con

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i \tag{4}$$

y que θ es efectivamente una uno-forma. En efecto, sea $U \subset N$ abierto, y

$$\begin{aligned} &U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n \\ &m \ \mapsto \ (q_1, ..., q_n) \end{aligned}$$

parametrización local de N. Entonces, la parametrización local de T^*N asociada a φ viene dada por

$$\begin{aligned} &T^*U \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathbb{R}^{2n} \\ &(m, \xi) \mapsto (q_1, .., q_n; p_1, .., p_n) \end{aligned}$$

donde $\xi \in T_m^* N$, y $\xi = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i|_m$. Luego, si

$$\begin{aligned} \varphi\left(U \cap V\right) &\to \phi\left(U \cap V\right) \\ \left(q_1, ..., q_n\right) &\mapsto \left(q_1', ..., q_n'\right) \end{aligned}$$

es un cambio de coordenadas en un entorno de N, resulta que

$$p_j'\left(m, \xi\right) = \xi \left(\left.\frac{\partial}{\partial q_j'}\right|_m \right) = \xi \left(\sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial q_i}{\partial q_j'}\right|_m \left.\frac{\partial}{\partial q_i}\right|_m \right) =$$
$$\sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial q_i}{\partial q_j'}\right|_m \xi \left(\left.\frac{\partial}{\partial q_i}\right|_m \right) = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial q_i}{\partial q_j'}\right|_m p_i\left(m, \xi\right)$$

Por tanto,

$$\sum_{j=1}^{n} p_j' dq_j' = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial q_j'} p_i \right) dq_j' = \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial q_j'} dq_j' = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i$$

que es lo que esperabamos.

El teorema de Darboux afirma que, en una variedad simpléctica, localmente siempre pueden encotrarse un sistema de coordenadas donde (1) se cumpla.

Teorema 5. *(Darboux) Sea (M,ω) una variedad simpléctica, $m \in M$. Entonces, existe un entorno U de m con un sistema de coordenadas $(q_1, ..., q_n; p_1, ...p_n)$ tal que*

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$$

Demostracion : Usando una base simpléctica de $T_m M$ se puede construir un sistema de coordenadas $(\acute{q}_1, ..., \acute{q}_n; \acute{p}_1, ...\acute{p}_n)$ en un entorno $\acute{U}$ de m tal que

$$\omega_m = \left.\sum_{i=1}^{n} dp_i' \wedge dq_i'\right|_m$$

Consideremos

$$\omega' = \sum_{i=1}^{n} dp_i' \wedge dq_i'$$

Luego, basta con encontrar un difeomorfismo φ entre entornos de m tal que $\varphi(m) = m$ y

$$\omega|_U = \phi^* \omega'$$

En tal caso, definiendo $p_i = \varphi^* p_i'$, $q_i = \varphi^* q_i'$ resulta que

$$\sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i = \varphi^* \sum_{i=1}^{n} dp_i' \wedge dq_i' = \varphi^* \omega' = \omega|_U$$

Construyamos tal difeomorfismo. Para esto consideremos

$$\Omega_t = \omega + t\,(\omega' - \omega)$$

que en un entorno adecuado de m es no-degenerada para todo $t \in [0,1]$. Además, como $d\,(\omega' - \omega) = 0$ resulta, por el lema de Poincare, que

$$\omega' - \omega = d\alpha$$

en el mismo entorno, ajustado adecuadamente, y donde α es una uno-forma que pude escogerse con $\alpha(0) = 0$. Luego, existe un campo X_t definido por

$$i_{X_t}\Omega_t = -\alpha$$

Sea φ_t el flujo asociado a ese campo. Resulta que

$$\begin{gathered}\tfrac{d}{dt}\left(\varphi_t^*\Omega_t\right) = \varphi_t^* \pounds_{X_t}\Omega_t + \varphi_t^* \tfrac{d}{dt}\Omega_t = \varphi_t^*\left(d\left(i_{X_t}\Omega_t\right) + i_{X_t}d\Omega_t + \tfrac{d}{dt}\Omega_t\right) = \\ \varphi_t^*\left(-d\alpha + \tfrac{d}{dt}\Omega_t\right) = 0\end{gathered}$$

y por lo tanto tomando $\varphi = \varphi_1$ se obtiene que

$$\varphi^*\omega' = \varphi_1^*\Omega_1 = \varphi_0^*\Omega_0 = \Omega_0 = \omega$$

Corolario 1. *Sea (M,ω) una variedad simplectica 2n-dimensional, entonces M esta orientada por*

$$\Lambda = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{n!}\underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \ldots\ldots \wedge \omega}_{n\,veces}$$

llamada medida de Liouville. Ademas, en coordenadas canonicas queda

$$\Lambda = dq_1 \wedge dq_2 \wedge \ldots. \wedge dq_n \wedge dp_1 \wedge \ldots\ldots \wedge dp_n$$

2. Campos Hamiltonianos y Transformaciones Simplécticas

Debido a que ω es no degenerada el siguiente mapa

$$\begin{aligned} TM &\to T^*M \\ X &\mapsto i_X\omega \end{aligned}$$

es un isomorfismo. Esto permite hacer la siguiente definición.

Definición 8. *Sea (M,ω) una variedad simpléctica, $H \in C^\infty(M,\mathbb{R})$. El campo vectorial Hamiltoniano, X_H, respecto a H, sobre M es aquel que cumple*

$$i_{X_H}\omega = -dH$$

Al conjunto de campos Hamiltonianos se lo denotará por $\Gamma_{Ham}(TM)$.

En las condiciones de la definición previa las ecuaciones de Hamilton vienen dadas por

$$\dot{x} = X_H x$$

Busquemos la forma de estas equaciones en coordenadas canónicas. Para esto, consideremos

$$X_H = \sum_{i=1}^{n} X_H (q_i) \frac{\partial}{\partial q_i} + X_H (p_i) \frac{\partial}{\partial p_i}$$

como por otro lado

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$$

Debido a la canonicidad

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$$

Luego,

$$i_{X_H}\omega = \sum_{i=1}^{n} (i_{X_H} dp_i) \wedge dq_i - dp_i \wedge (i_{X_H} dq_i) = \sum_{i=1}^{n} X_H (p_i) dq_i - X_H (q_i) dp_i$$

Por lo que siendo

$$i_{X_H}\omega = -dH$$

resulta que

$$X_H (q_i) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \text{ , } X_H (p_i) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

O bien,

$$X_H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

Por lo que obtenemos

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \text{ , } \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \ \forall i = 1, ..., n$$

TEOREMA 6. *Sea (M,ω) una variedad simpléctica, X un campo vectorial sobre M, y φ_t su flujo asociado. Entonces, φ_t es una transformación simpléctica, $\varphi_t^* \omega = \omega$, $\forall t$ definido si y solo si X es localmente Hamiltoniano.*

Demostracion : Si φ_t es una transformación simpléctica entonces

$$\pounds_X \omega = \frac{d}{dt} (\varphi_t^* \omega) \bigg|_{t=0} = 0$$

por lo que recordando la fórmula de Cartan

$$\pounds_X\omega = i_X d\omega + d i_X \omega$$

se obtiene

$$d i_X \omega = 0$$

ya que $d\omega = 0$. Por lema de Poincare, en un entorno adecuado de un punto debe de existir H función diferenciable tal que

$$i_X\omega = -dH$$

Es decir, X es localmente Hamiltoniano.

Reciprocamente, consideremos que en el entorno de un punto existe H tal que $i_X\omega = -dH$. Luego, $d i_X\omega = -d(dH) = 0$. Considerando la formula de Cartan nuevamente obtenemos $\pounds_X\omega = 0$. Por tanto,

$\frac{d}{dt}\left(\phi_t^*\omega\right)\big|_{t=s} = \frac{d}{dt}\left(\phi_{t+s}^*\omega\right)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\phi_s^*\left(\phi_t^*\omega\right)\right)\big|_{t=0} = \phi_s^*\frac{d}{dt}\left(\varphi_t^*\omega\right)\big|_{t=0} = \phi_s^*\pounds_X\omega = 0\,, \forall s$

O bien, $\varphi_s^*\omega = \varphi_0^*\omega = \omega, \forall s$.

Corolario 2. *Sea (M,ω) una variedad simpléctica, $H \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, X_H el campo vectorial Hamiltoniano respecto a H sobre M, y φ_t su flujo asociado. Entonces, φ_t es una transformación simpléctica, $\varphi_t^*\omega = \omega$. Además, $\pounds_{X_H}\omega = 0$ y por tanto $\pounds_{X_H}\Lambda = 0$, donde Λ es la medida de Liouville.*

Corolario 3. *Sea (M,ω) una variedad simpléctica, $H \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, X_H el campo vectorial Hamiltoniano respecto a H sobre M, y φ_t su flujo asociado. Entonces, $\varphi_t^*\Lambda = \Lambda$, donde Λ es la medida de Liouville.*

Teorema 7. *Sea (M,ω) una variedad simpléctica, $H \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, X_H el campo vectorial Hamiltoniano respecto a H sobre M, y φ_t su flujo asociado. Entonces, H es constante a lo largo del flujo de X_H, es decir,*

$$\left.\frac{d\left(\varphi_t^*H\right)}{dt}\right|_{t=s} = 0\ ,\forall s$$

Demostracion : Se tiene que

$$\left.\frac{d(\varphi_t^*H)}{dt}\right|_{t=s} = \left.\frac{d(H\circ\varphi_t)}{dt}\right|_{t=s} = \left.\frac{d(H\circ\varphi_{s+t})}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d(H\circ\varphi_s\circ\varphi_t)}{dt}\right|_{t=0} = d\left(H\circ\varphi_s\right)\left(X_H\right)$$
$$= d\left(\varphi_s^*H\right)\left(X_H\right) = \varphi_s^*dH\left(X_H\right) = -\varphi_s^*\omega\left(X_H, X_H\right) = 0\ ,\forall s$$

3. Corchete de Poisson

Definición 9. *Sea (M,ω) una variedad simpléctica, $f, g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$. Se define el corchete de Poisson $\{f,g\} \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ de la siguiente manera*

$$\{f,g\} = \omega\left(X_f, X_g\right)$$

LEMA 1. *Sean* (M,ω) *una variedad simpléctica,* $f,g \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$. *Entonces,*

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$$

Demostracion :

$$\begin{aligned} -d\{f,g\} &= -d(X_f g) = -d\left(\pounds_{X_f} g\right) = \pounds_{X_f}(-dg) = \pounds_{X_f}\left(i_{X_g}\omega\right) \\ &= i_{(\pounds_{X_f} X_g)}\omega + i_{X_g}\pounds_{X_f}\omega = i_{\left[X_f, X_g\right]}\omega \end{aligned}$$

de donde se deduce el lema por definición de campo Hamiltoniano.

TEOREMA 8. $(C^{\infty}(M,\mathbb{R}), \{,\})$ *es un álgebra de Lie*

Demostracion : $\{,\}$ es claramente $\mathbb{R}$-bilineal y antisimétrico, si $\lambda \in \mathbb{R}$, y $f,g,H \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$, luego

$$\{f,g\} = \omega(X_f, X_g) = -\omega(X_g, X_f) = -\{g,f\}$$

por lo que hemos obtenido la antisimetría. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \{\lambda f + g, H\} &= \omega(X_{\lambda f+g}, X_H) = i_{X_{\lambda f+g}}\omega(X_H) = -d(\lambda f + g)(X_H) \\ &= \lambda(-df)(X_H) + (-dg)(X_H) = \lambda\, i_{X_f}\omega(X_H) + i_{X_g}\omega(X_H) \\ &= \lambda\,\omega(X_f, X_H) + \omega(X_g, X_H) = \lambda\,\{f,H\} + \{g,H\} \end{aligned}$$

por lo que el corchete es $\mathbb{R}$-bilineal. Restaria probar la identidad de Jacobi,

$$\begin{aligned} \{H,\{f,g\}\} &= X_H X_f(g) = [X_H, X_f](g) + X_f X_H(g) \\ &= [X_H, X_f](g) + \{f,\{H,g\}\} \\ &= X_{\{H,f\}}(g) + \{f,\{H,g\}\} = \{\{H,f\},g\} + \{f,\{H,g\}\} \end{aligned}$$

NOTACIÓN 2. $\mathcal{P}(M,\omega)$ *sera el álgebra de Lie dada por* $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ *con el corchete de Poisson.*

TEOREMA 9. *El mapa*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(M,\omega) & \to & \Gamma_{Ham}(TM) \\ f & \mapsto & X_f \end{array}$$

es un homomorfismo de algebras de Lie.

Demostracion : Debido al lema 1 el mapa preserva los parentesis. Por otro lado, si $\lambda \in \mathbb{R}$, $f,g \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ se tiene que

$$X_{\lambda f+g}(h) = \{\lambda f + g, h\} = \lambda\{f,h\} + \{g,h\} = \lambda X_f(h) + X_g(h)\ , \forall h \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$$

por lo que el mapa es $\mathbb{R}$-lineal.

CAPíTULO 3

Precuantización

1. Introducción

En mecánica clásica el espacio de estados viene dado por una variedad simpléctica (M, ω), mientras que los observables vienen dados por las funciones diferenciables en M. Por su parte, en mecánica cuántica el espacio de estados viene dado por rayos en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, siendo los observables una familia, $\mathcal{O}$, de operadores hermíticos en $\mathcal{H}$. Según la filosofía de la escuela de Copenhagen, las predicciones cuánticas deben poderse formular en terminos clásicos. Esto nos plantea el siguiente problema: dados M y ω, es posible reconstruir $\mathcal{H}$ y $\mathcal{O}$? Para resolver este problema Dirac planteó, ver [**6**], en 1925 una serie de condiciones que debe cumplir un mapa que relacione los observables clásicos con los cuánticos. En la siguiente sección se plantean estas condiciones, menos una, definiendose de esta forma un mapa de precuantización (con la condición restante se obtiene una cuantización). Luego, siguiendo la referencia [**6**] se construye explicitamente un mapa tal. En la sección restante estudiamos las condiciones necesarias y suficientes sobre (M, ω) para poder construir el mapa.

En lo que sigue estaremos usando la notación $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, donde h es la constante de Planck de la mecánica cuántica. El uso de $\hbar$, o bien el de h en su debido caso, no deberá traer confusiones.

2. Mapa de Precuantización

Definición 10. *Sea (M,ω) una variedad simpléctica, una precuantización es un mapa,*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(M, \omega) \rightarrow \ & \mathcal{O}(\mathcal{H}) \\ f \mapsto \ & \widehat{f} \end{aligned}$$

donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\mathcal{O}(\mathcal{H})$ los operadores sobre este, que cumple las siguientes condiciones:

i) es $\mathbb{R}$-lineal

ii) $\widehat{1} = 1$

iii) Si el flujo asociado a X_f es completo $\Rightarrow (\hat{f})^* = \widehat{f}$

iv) $\widehat{\{f,g\}} = \frac{i}{\hbar}[\widehat{f},\widehat{g}]$

En el caso de que $M = T^*N, \omega = d\theta$ se tiene la siguiente precuantización

$$\widehat{f} = f + \frac{\hbar}{i} X_f - \theta\left(X_f\right) \tag{5}$$

considerado como un operador en $C^\infty\left(M\right)$, con el espacio de precuantizacion dado por las funciones diferenciables de soporte compacto con producto interno dado por

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int\limits_M \psi_1 \overline{\psi_2}\, \Lambda$$

Debido al teorema 9, i) es directo. Por su parte, por definición de campo Hamiltoniano,

$$i_{X_1}\omega = 0 \Rightarrow X_1 = 0$$

debido a que ω es no degenerada. Luego, ii) se desprende inmediatamente. Consideremos iii), se tiene que

$$\left\langle \widehat{f}\psi_1, \psi_2 \right\rangle = \int\limits_M \left(f\psi_1\overline{\psi_2} + \frac{\hbar}{i} X_f\left(\psi_1\right)\overline{\psi_2} - \theta\left(X_f\right)\psi_1\overline{\psi_2} \right) \Lambda$$

Ahora,

$$X_f\left(\psi_1\right)\overline{\psi_2} = X_f\left(\psi_1\overline{\psi_2}\right) - \psi_1 X_f\left(\overline{\psi_2}\right)$$

por lo que

$$\left\langle \widehat{f}\psi_1, \psi_2 \right\rangle = \left\langle \psi_1, \widehat{f}\psi_2 \right\rangle + \frac{\hbar}{i} \int\limits_M X_f\left(\psi_1\overline{\psi_2}\right)\Lambda$$

Luego, bastaría con probar que $\int\limits_M X_f\left(\psi_1\overline{\psi_2}\right)\Lambda = 0$. Pero, si el flujo φ_t de X_f es completo se tiene que

$$\int\limits_M \phi_t^*\left(\psi_1\overline{\psi_2}\right)\Lambda = \int\limits_M \phi_t^*\left(\psi_1\overline{\psi_2}\Lambda\right) = \int\limits_{\phi_t(M)} \psi_1\overline{\psi_2}\,\Lambda = \int\limits_M \psi_1\overline{\psi_2}\,\Lambda$$

O bien,

$$\int\limits_M X_f\left(\psi_1\overline{\psi_2}\right)\Lambda = \int\limits_M \left.\frac{d\phi_t^*\left(\psi_1\overline{\psi_2}\right)}{dt}\right|_{t=0} \Lambda = \left.\frac{d}{dt}\int\limits_M \phi_t^*\left(\psi_1\overline{\psi_2}\right)\Lambda\right|_{t=0} = 0$$

Para iv), observar que

$$\frac{i}{\hbar}\left[\hat{f},\hat{g}\right] = [f, X_g] + [X_f, g] + \frac{\hbar}{i}[X_f, X_g] - [X_f, \theta\left(X_g\right)] - [\theta\left(X_f\right), X_g]$$

teniendo en cuenta

$$[X_f, g] = X_f(g) = \omega(X_f, X_g), [f, X_g] = -X_g(f) = \omega(X_f, X_g)$$

$$[X_f, \theta(X_g)] = X_f[\theta(X_g)], [\theta(X_f), X_g] = -X_g[\theta(X_f)]$$

y que

$$\omega(X_f, X_g) = d\theta(X_f, X_g) = X_f[\theta(X_g)] - X_g[\theta(X_f)] - \theta([X_f, X_g])$$

resulta

$$\frac{i}{\hbar}\left[\hat{f}, \hat{g}\right] = \frac{\hbar}{i}[X_f, X_g] + \omega(X_f, X_g) - \theta([X_f, X_g])$$

O bien, considerando el lema 1. y la definicion del corchete de Poisson

$$\frac{i}{\hbar}\left[\hat{f}, \hat{g}\right] = \frac{\hbar}{i}X_{\{f,g\}} + \{f, g\} - \theta\left(X_{\{f,g\}}\right)$$

Por lo que hemos obtenido el resultado esperado.

El método de precuantización en un fibrado cotangente dado por (5) depende esencialmente de que $\omega = d\theta$. En una variedad simplectica general ω no tiene porque ser exacta. Sin embargo, como ω es cerrada podemos cubrir M por abiertos U_α tales que $\omega|_{U_\alpha} = d\theta_\alpha$, donde las θ_α son 1-formas definidas en cada U_α respectivamente. Luego, podemos definir el operador

$$\hat{f}_\alpha = f_\alpha + \frac{\hbar}{i}X_{f_\alpha} - \theta_\alpha(X_{f_\alpha})$$

definido sobre $f_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$. Resulta, como veremos, que imponiendo una condición de integralidad sobre la clase cohomológica de ω podremos pegar estos operadores y obtener uno global. Sin embargo, este operador no actuará sobre un espacio de funciones, si no que sobre las secciones de un fibrado lineal L sobre M.

Teorema 10. *(precuantización de Soriau-Kostant) Sea (M, ω) una variedad simplectica, L un fibrado complejo lineal sobre M con una estructura Hermitica*

$$\begin{aligned} \Gamma(L) \times \Gamma(L) &\to \mathbb{C} \\ (s, s') \quad &\mapsto \langle s, s' \rangle \end{aligned}$$

, una conexión ∇ compatible con esta, y curvatura Ω. Entonces, si $\Omega = \frac{1}{\hbar}\omega$ resulta que el mapa

$$\begin{aligned} P(M, \omega) &\to \mathcal{O}(\mathcal{H}) \\ f &\mapsto \hat{f} = f + \frac{\hbar}{i}\nabla_{X_f} \end{aligned}$$

es una precuantización, siendo $\mathcal{H}$ el espacio de secciones cuadrado integrables ,con producto interno dado por

$$\langle s|\, s'\rangle = \int\limits_M \langle s, s'\rangle\, \Lambda$$

Demostracion : i) y ii) son directas. Para iii), se tiene que

$$\left\langle \hat{f}s_1 \middle|\, s_2\right\rangle = \int\limits_M \left(\langle f s_1, s_2\rangle + \left\langle \frac{\hbar}{i}\nabla_{X_f} s_1, s_2\right\rangle \right)\Lambda$$

Ahora, debido a la compatibilidad de la conexión con la estructura hermítica

$$\left\langle \nabla_{X_f} s_1, s_2\right\rangle = X_f\,\langle s_1, s_2\rangle - \left\langle s_1, \nabla_{X_f} s_2\right\rangle$$

y por tanto

$$\left\langle \hat{f}s_1 \middle|\, s_2\right\rangle = \left\langle s_1 |\, \hat{f}s_2\right\rangle + \frac{\hbar}{i}\int\limits_M X_f\,\langle s_1, s_2\rangle\,\Lambda$$

Luego, bastaría con probar que $\int\limits_M X_f\,\langle s_1, s_2\rangle\,\Lambda = 0$. Pero, si el flujo φ_t de X_f es completo se tiene que

$$\int\limits_M \varphi_t^*\left(\langle s_1, s_2\rangle\right)\Lambda = \int\limits_M \varphi_t^*\left(\langle s_1, s_2\rangle\,\Lambda\right) = \int\limits_{\varphi_t(M)} \langle s_1, s_2\rangle\,\Lambda = \int\limits_M \langle s_1, s_2\rangle\,\Lambda$$

Entonces,

$$\int\limits_M X_f\left(\langle s_1, s_2\rangle\right)\Lambda = \int\limits_M \left.\frac{d\varphi_t^*\left(\langle s_1, s_2\rangle\right)}{dt}\right|_{t=0}\Lambda = \left.\frac{d}{dt}\int\limits_M \varphi_t^*\left(\langle s_1, s_2\rangle\right)\Lambda\right|_{t=0} = 0$$

En cuanto a iv), se tiene que

$$\frac{i}{\hbar}\left[\hat{f},\hat{g}\right] = \left[f, \nabla_{X_g}\right] + \left[\nabla_{X_f}, g\right] + \frac{\hbar}{i}\left[\nabla_{X_f}, \nabla_{X_g}\right]$$

Por lo que considerando la expresión global encontrada para la curvatura en el teorema 2 se obtiene que

$$\frac{i}{\hbar}\left[\hat{f},\hat{g}\right] = \left[f, \nabla_{X_g}\right] + \left[\nabla_{X_f}, g\right] - 2\pi\hbar\,\Omega\left(X_f, X_g\right) + \frac{\hbar}{i}\nabla_{\left[X_f, X_g\right]}$$

Luego, considerando que

$$\left[\nabla_{X_f}, g\right] = X_f\,(g) = \omega\left(X_f, X_g\right), \left[f, \nabla_{X_g}\right] = -X_g\,(f) = \omega\left(X_f, X_g\right)$$

y como $\Omega = \frac{1}{h}\omega$, resulta

$$\frac{i}{\hbar}\left[\hat{f},\hat{g}\right] = \omega\left(X_f, X_g\right) + \frac{\hbar}{i}\nabla_{\left[X_f, X_g\right]}$$

O bien, considerando la definición del corchete de Poisson y el lema1

$$\frac{i}{\hbar}\left[\hat{f},\hat{g}\right] = \{f,g\} + \frac{\hbar}{i}\nabla_{X_{\{f,g\}}}$$

siendo este el resultado esperado.

3. Condición de Integralidad

En esta sección responderemos cuando a una variedad simpléctica (M,ω) se le puede hacer corresponder un fibrado complejo lineal L sobre M con estructura hermítica, conexión ∇ compatible, y curvatura Ω, de tal forma que $\Omega = \frac{1}{h}\omega$, y por tanto la cuantización de Soriau-Kostant es posibe.

Teorema 11. *Sean (M,ω) una variedad simpléctica con M simplemente conexa, $\Omega = \frac{\omega}{h}$. Luego, Ω es la forma de curvatura de un fibrado complejo lineal L sobre M con conexión ∇ si y solo si*

$$\int_S \Omega \in \mathbb{Z}$$

donde S es cualquier 2-subvariedad difeomorfa a S^2.

Demostracion : Consideremos una curva γ inmersa en S tal que γ es difeomorfa a S^1. Luego, podemos particionar

$$S = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

donde Σ_1, y Σ_2 son subvariedades de S con γ como borde común, y por tanto deben tener orientación contraria respecto a este. Considerando λ como la holonomía de la conexión respecto a γ, debido al teorema 4 obtenemos que

$$\exp\left(2\pi i\int_{\Sigma_1}\Omega\right) = \lambda = \exp\left(-2\pi i\int_{\Sigma_2}\Omega\right)$$

Por tanto,

$$\exp\left(2\pi i\int_{S}\Omega\right) = 1$$

O bien,

$$\int_S \Omega \in \mathbb{Z}$$

Reciprocamente, elijamos un punto $m_0 \in M$ y consideremos el conjunto de triuplas (m, z, γ), con $m \in M$, $z \in \mathbb{C}$, siendo γ un camino de m_0 a m. Se define una relación de equivalencia de la siguiente forma:

$$(m, z, \gamma) \sim (m', z', \gamma') \Leftrightarrow m' = m,\ z' = z \exp\left(2\pi i \int\limits_{\Sigma} \Omega\right)$$

donde Σ es una 2-subvariedad orientada con borde $\gamma - \acute{\gamma}$ considerando γ y γ' orientadas de m_0 a m. Notar que la existencia de tal Σ queda asegurada debido a que M es simplemente conexa, mientras que su unicidad no es de importancia debido a la condición sobre Ω. Para la reflexividad no hay nada que probar. Para la simétrica consideremos

$$(m, z, \gamma) \sim (m', z', \gamma')$$

Luego, $m = m'$ y $\exists\, \Sigma_1$ con borde $\gamma - \gamma'$ y orientada según este tal que $z' = z \exp\left(2\pi i \int\limits_{\Sigma_1} \Omega\right)$. Consideremos Σ_2 con borde $\gamma' - \gamma$ y orientada según este, luego

$$\int\limits_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} \Omega \in \mathbb{Z}$$

y por tanto

$$1 = \exp\left(2\pi i \int\limits_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} \Omega\right) = \exp\left(2\pi i \int\limits_{\Sigma_1} \Omega + 2\pi i \int\limits_{\Sigma_2} \Omega\right) = \exp\left(2\pi i \int\limits_{\Sigma_1} \Omega\right) \exp\left(2\pi i \int\limits_{\Sigma_2} \Omega\right)$$

O sea,

$$\exp\left(2\pi i \int\limits_{\Sigma_2} \Omega\right) = \frac{1}{\exp\left(2\pi i \int\limits_{\Sigma_1} \Omega\right)} \Rightarrow z = z' \exp\left(2\pi i \int\limits_{\Sigma_2} \Omega\right) \Rightarrow (m', z', \gamma') \sim (m, z, \gamma)$$

Veamos la transitividad, si

$$(m, z, \gamma) \sim (m', z', \gamma')\,,\ (m', z', \gamma') \sim (m'', z'', \gamma'') \Rightarrow m = m' = m''$$

Además, $\exists\, \Sigma_1\,, \Sigma_2$, 2-subvariedades con bordes $\gamma - \gamma'$, $\gamma' - \gamma''$ respectivamente tales que

$$z' = z \exp\left(2\pi i \int\limits_{\Sigma_1} \Omega\right)\ ,\ z'' = z' \exp\left(2\pi i \int\limits_{\Sigma_2} \Omega\right) \Rightarrow$$

$$z'' = z\exp\left(2\pi i\int\limits_{\Sigma_1}\Omega\right)\exp\left(2\pi i\int\limits_{\Sigma_2}\Omega\right) = z\exp\left(2\pi i\int\limits_{\Sigma_1}\Omega + 2\pi i\int\limits_{\Sigma_2}\Omega\right)$$

Es decir,

$$z'' = z\exp\left(2\pi i\int\limits_{\Sigma_1\cup\Sigma_2}\Omega\right) \Rightarrow (m,z,\gamma)\sim(m'',z'',\gamma'')$$

Sea L el cojunto de las clases de equivalencia, y

$$\pi : L \longrightarrow M / \ \pi\ ([(m,z,\gamma)]) = m$$

Se le puede dar estructura de espacio vectorial a cada fibra, $\pi^{-1}(\{m\})$, definiendo

$$\begin{array}{l} [(m,z,\gamma)] + [(m,z',\gamma)] = [(m,z+z',\gamma)] \\ \lambda\ [(m,z,\gamma)] = [(m,\lambda\, z,\gamma)]\ , \lambda\in\mathbb{C} \end{array}$$

Debemos encontrar las trivializaciones locales. Consideremos que θ es el potencial simpléctico en un abierto simplemente conexo $U\subset M$. Es decir,

$$\omega|_U = d\theta$$

Elijamos $m_1\in U$, una curva γ_0 de m_0 a m_1, y definimos una sección

$$\begin{array}{ccl} U & \xrightarrow{s} & L \\ m & \mapsto & \left[\left(m, \exp\left(-\dfrac{i}{\hbar}\int\limits_{\gamma_1}\theta\right), \gamma\right)\right] \end{array}$$

donde γ_1 es algun camino desde m_1 hasta m en U, y $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$. La definición es consistente ya que si se elige otro camino γ_1' desde m_1 hasta m en U, y $\gamma' = \gamma_0 + \gamma_1'$ encontramos que

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{\gamma_1'}\theta\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{\gamma_1}\theta\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{\gamma_1'-\gamma_1}\theta\right)$$

Pero, como $\frac{i}{\hbar}d\theta = 2\pi i\,\Omega$ en U, por Stokes,

$$-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{\gamma_1'-\gamma_1}\theta = 2\pi i\int\limits_{\Sigma}\Omega$$

donde Σ es una 2-subvariedad con borde $\gamma_1 - \gamma_1'$ y orientada según este. Luego,

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{\gamma_1'}\theta\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{\gamma_1}\theta\right)\exp\left(2\pi i\int_{\Sigma}\Omega\right)$$

Por tanto,

$$\left(m, \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{\gamma_1}\theta\right), \gamma\right) \sim \left(m, \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{\gamma_1'}\theta\right), \gamma'\right)$$

La trivialización local vendrá dada por

$$\begin{aligned} U \times \mathbb{C} &\xrightarrow{\phi} L \\ (m, z) &\mapsto z\, s\,(m) \end{aligned}$$

Podemos definir una conexión ∇ por la siguiente expresión local

$$\nabla_X (f\, s) = \left(X\,(f) - \frac{i}{\hbar} f\theta\,(X)\right) s$$

en U. Para probar la consistencia de esta definición debemos comprobar que si U' es otro entorno tal que $U \bigcap U' \neq \emptyset$, s' es la correspondiente sección definida en U', y si $f's' = fs$ entonces

$$\left(X\,(f') - \frac{i}{\hbar} f'\theta'\,(X)\right) s' = \left(X\,(f) - \frac{i}{\hbar} f\theta\,(X)\right) s$$

en $U \bigcap U'$. Para esto debemos encontrar la relación entre s y s'. En efecto, si θ' es un potencial respecto a otro abierto simplemente conexo U' tal que $U \bigcap U' \neq \emptyset$, se tiene que

$$d\theta|_{U\cap U'} = \Omega|_{U\cap U'} = d\theta'|_{U\cap U'} \Rightarrow d\,(\theta - \theta')|_{U\cap U'} = 0$$

Por lo que, por Poincare, $\exists \alpha \in C^\infty\,(U \cap U')$ tal que

$$(\theta - \theta')|_{U\cap U'} = d\alpha$$

Luego, dado $m \in U \bigcap U'$ se tiene que, escogiendo convenientemente $\alpha(m_1) = 0$,

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{\gamma_1}\theta'\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{\gamma_1}\theta + \frac{i}{\hbar}\int_{\gamma_1}d\alpha\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{\gamma_1}\theta + \frac{i}{\hbar}\alpha\,(m)\right)$$

O sea,

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{\gamma_1}\theta'\right)=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{\gamma_1}\theta\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\alpha\left(m\right)\right)$$

Luego, si

$$s'\left(m\right)=\left[\left(m,\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{\gamma_1}\theta'\right),\gamma\right)\right]$$

Resulta que,

$$s'\left(m\right)=\exp\left(\frac{i}{\hbar}\alpha\left(m\right)\right)s\left(m\right) \tag{6}$$

Por otro lado, tomando $m_1'\in U$, γ_1' camino con traza en U que une m_1' con m, γ_0' camino que une m_0 con m_1', y $\gamma'=\gamma_0'+\gamma_1'$, encontramos que

$$s'\left(m\right)=\left[\left(m,\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{\gamma_1'}\theta\right),\gamma'\right)\right]=\left[\left(m,\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{\gamma_1'}\theta\right),\gamma_0'+\gamma_1'\right)\right]=$$

$$\left[\left(m,\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{m_1'm_1+\gamma_1}\theta\right),\gamma_0'+m_1'm_1+\gamma_1\right)\right]=$$

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{m_1'm_1}\theta\right)\left[\left(m,\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{\gamma_1}\theta\right),\gamma_0'+m_1'm_1+\gamma_1\right)\right]=$$

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{m_1'm_1}\theta\right)\left[\left(m,\exp\left(2\pi i\int\limits_{\Sigma}\Omega\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{\gamma_1}\theta\right),\gamma_0+\gamma_1\right)\right]=$$

$$\exp\left(2\pi i\int\limits_{\Sigma}\Omega\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{m_1'm_1}\theta\right)\left[\left(m,\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{\gamma_1}\theta\right),\gamma_0+\gamma_1\right)\right]=e^{i\lambda}s\left(m\right)$$

donde Σ es una 2-subvariedad con borde $\gamma_0'+m_1'm_1-\gamma_0$, y $\lambda=2\pi\int\limits_{\Sigma}\Omega-\frac{1}{\hbar}\int\limits_{m_1'm_1}\theta$. En todo caso, combinando ambos ultimos resultados observamos que (6) es una expresión válida en el caso general.

Ahora, si $f's' = fs$, se tiene que $f' = e^{-\frac{i\alpha}{\hbar}} f$, resultando

$$\left(X\left(f'\right) - \frac{i}{\hbar} f'\theta'\left(X\right)\right) s'$$

$$= \left(e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha} df\left(X\right) - \frac{ie^{-\frac{i}{\hbar}\alpha}}{\hbar} d\alpha\left(X\right) f - \frac{ie^{-\frac{i}{\hbar}\alpha} f}{\hbar}\left(\theta\left(X\right) - d\alpha\left(X\right)\right)\right) e^{\frac{i}{\hbar}\alpha} s$$

$$= \left(df\left(X\right) - \frac{i}{\hbar} f\theta\left(X\right)\right) s = \left(X\left(f\right) - \frac{i}{\hbar} f\theta\left(X\right)\right) s$$

Por lo que la definición dada para ∇ es consistente.

La prueba del teorema anterior se basó fuertemente en el hecho que M fuera simplemente conexa. Resulta que el teorema es valido sin esta restricción. Sin embargo, en este caso, mas general, en vez de usar la condición de que

$$\int_S \Omega \in \mathbb{Z}$$

donde S es cualquier 2-subvariedad difeomorfa a S^2, resulta mas conveniente la condición equivalente de que la clase cohomológica de Ω sea entera, ver [**8**], página 137. A continuación desarrollaremos los elementos necesarios para poder presentar tal generalización.

Definición 11. *(cohomología de Cech) Sea M una variedad diferenciable, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ un cubrimiento por abiertos de M.Dado $p \in \mathbb{N}$, un p-simplex es una (p+1)-ulpa, $(U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_p})$, tal que $U_{\alpha_0} \bigcap ... \bigcap U_{\alpha_p} \neq \emptyset$. Una p-cocadena sobre $\mathcal{U}$ es un mapa*

$$\begin{aligned} p - simplex \quad &\to \mathbb{C} \\ (U_{\alpha_0}, , ..., U_{\alpha_p}) &\mapsto f_{\alpha_0....\alpha_p} \end{aligned}$$

con la propiedad de antisimetría respecto a los indices, i.e.

$$f_{\alpha_0..\alpha_i..\alpha_j..\alpha_p} = -f_{\alpha_0..\alpha_j..\alpha_i..\alpha_p}$$

El conjunto de las p-cocadenas sobre $\mathcal{U}$, $\mathcal{C}^p(\mathcal{U})$, es un grupo abeliano con

$$(f+g)\left(U_{\alpha_0}, , ..., U_{\alpha_p}\right) = f_{\alpha_0....\alpha_p} + g_{\alpha_0....\alpha_p}$$

Por otro lado, se define

$$\mathcal{C}^p(\mathcal{U}) \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{U})$$

$$f \quad \mapsto \quad \partial f / \partial f_{\alpha_0....\alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i f_{\alpha_0...\hat{\alpha}_i..\alpha_{p+1}}$$

Obtenemos de esta forma el subgrupo de los p-cocyclos

$$\mathcal{Z}^p(\mathcal{U}) = \{f \in \mathcal{C}^p(\mathcal{U}) : \partial f = 0\}$$

Se advierte que $\partial^2 = 0$*, por tanto* $\partial \mathcal{C}^{p-1}(\mathcal{U})$ *es subgrupo de* $\mathcal{Z}^p(\mathcal{U})$*. Finalmente, se define*

$$\mathcal{H}^p(\mathcal{U}) = \frac{\mathcal{Z}^p(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{C}^{p-1}(\mathcal{U})}$$

Teorema 12. *(isomorfísmo de Cech-deRham) Sea* M *una variedad diferenciable,* $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ *un cubrimiento por abiertos localmente finito y contractible de* M*, y* $\{h_\alpha\}$ *una partición diferenciable de la unidad subordinada a* $\mathcal{U}$*. Entonces, el siguiente mapa es un isomorfismo*

$$\begin{aligned} H^p(\mathcal{U}) &\to H^p_{dR}(M) \\ [f] &\mapsto \left[\sum_{\alpha_0\ldots\alpha_p} f_{\alpha_0\ldots\alpha_p} h_{\alpha_0} dh_{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dh_{\alpha_p}\right] \end{aligned}$$

donde $H^p_{dR}(M)$ *es el p-grupo cohomologico de de Rham, ie el cociente de las p-formas cerradas con las p-formas exactas.*

Demostracion : ver [**7**], A6, página 273.

Teorema 13. *Una 2-forma* Ω *cerrada es la forma de curvatura de un fibrado complejo lineal* L *sobre* M *con conexión* ∇ *si y solo si la clase cohomológica definida por* Ω *es entera.*

Demostracion : Sea (L, M, π) un fibrado complejo lineal con conexión ∇ y curvatura Ω. Consideremos un cubrimiento abierto, contractible y localmente finito, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ de M, y una trivialización de L dada por $\{U_\alpha, s_\alpha\}$. Luego, si $U_\alpha \bigcap U_\beta \neq \emptyset$ se tiene que

$$s_\alpha = c_{\alpha\beta}\, s_\beta \tag{7}$$

con $c_{\alpha\beta} \in C^\infty(U_\alpha \bigcap U_\beta)$. Además, si $U_\alpha \bigcap U_\beta \bigcap U_\gamma \neq \emptyset$ se cumple que

$$c_{\alpha\beta} c_{\beta\gamma} c_{\gamma\alpha} = 1 \tag{8}$$

Sabemos por el teorema 2 que si consideramos 1-formas θ_α definidas sobre U_α tales que

$$\nabla_X s_\alpha = -\frac{i}{\hbar}\theta_\alpha(X)\, s_\alpha \ , \forall X \in \Gamma(M)$$

,relacionadas estas con las 1-formas de conexión por $\Theta_\alpha = \frac{\theta_\alpha}{\hbar}$, resulta que

$$d(\ln c_{\alpha\beta}) = -\frac{i}{\hbar}(\theta_\alpha - \theta_\beta) \tag{9}$$

y, por ende, la curvatura queda bien definida por la siguiente expresión

$$\Omega|_{U_\alpha} = \frac{1}{h} d\theta_\alpha \ , \forall \alpha \tag{10}$$

Luego, si

$$b_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi i} \ln(c_{\alpha\beta})$$

resulta que por (9)

$$(\theta_\alpha - \theta_\beta)|_{U_\alpha \cap U_\beta} = h db_{\alpha\beta} \tag{11}$$

y por (8)

$$b_{\alpha\beta} + b_{\beta\gamma} + b_{\gamma\alpha} \in \mathbb{Z} \tag{12}$$

Mas aun, debido a la continuidad este valor entero debe ser constante en todo $U_\alpha \bigcap U_\beta \bigcap U_\gamma$. Luego, podemos definir

$$\begin{aligned} 2 - \text{simplex} &\xrightarrow{f} \mathbb{Z} \\ (U_\alpha, U_\beta, U_\gamma) &\mapsto b_{\alpha\beta} + b_{\beta\gamma} + b_{\gamma\alpha} \end{aligned}$$

Observar que,

$$(\partial f)_{\alpha\beta\gamma\delta} = b_{\beta\gamma} + b_{\gamma\delta} + b_{\delta\beta} - (b_{\alpha\gamma} + b_{\gamma\delta} + b_{\delta\alpha}) + b_{\alpha\beta} + b_{\beta\delta} + b_{\delta\alpha} - (b_{\alpha\beta} + b_{\beta\gamma} + b_{\gamma\alpha}) = 0$$

Es decir, $\partial f = 0$, y por ende $f \in \mathcal{Z}^2(\mathcal{U})$. Vamos a probar ahora que $[f]$ es la preimagen de $[\Omega]$ por el isomorfismo de Cech-deRham. Para esto basta con probar que

$$\Omega - \sum_{\alpha\beta\gamma} f_{\alpha\beta\gamma} h_\alpha dh_\beta \wedge dh_\gamma$$

es una 2-forma exacta, donde $\{h_\alpha\}$ es una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$. Teníamos que

$$\delta f_{\alpha\beta\gamma\delta} = f_{\beta\gamma\delta} - f_{\alpha\gamma\delta} + f_{\alpha\beta\delta} - f_{\alpha\beta\gamma} = 0 \tag{13}$$

en $U_\alpha \bigcap U_\beta \bigcap U_\gamma \bigcap U_\delta$. Por tanto, multiplicando por $h_\beta dh_\gamma \wedge dh_\delta$ y sumando se obtiene

$$\sum_{\beta\gamma\delta} f_{\beta\gamma\delta} h_\beta dh_\gamma \wedge dh_\delta = \sum_{\gamma\delta} f_{\alpha\gamma\delta} dh_\gamma \wedge dh_\delta$$

en U_α, dado que $\sum_\alpha h_\alpha = 1$. Además, dado que $df_{\alpha\gamma\delta} = 0$ queda

$$\sum_{\beta\gamma\delta} f_{\beta\gamma\delta} h_\beta dh_\gamma \wedge dh_\delta = d\left(\sum_{\gamma\delta} f_{\alpha\gamma\delta} h_\gamma \wedge dh_\delta \right) \tag{14}$$

Similarmente, multiplicando (13) por $h_\gamma dh_\delta$ y sumando se obtiene que

$$\sum_{\gamma\delta} f_{\beta\gamma\delta} h_\gamma dh_\delta - \sum_{\gamma\delta} f_{\alpha\gamma\delta} h_\gamma dh_\delta = \sum_{\delta} f_{\beta\alpha\delta} dh_\delta = d\left(\sum_{\delta} f_{\beta\alpha\delta} h_\delta\right) \tag{15}$$

en $U_\alpha \bigcap U_\beta$, ya que $\sum\limits_{\beta} dh_\beta = 0$. Por tanto, si definimos

$$\eta_\alpha = \frac{\theta_\alpha}{h} - \sum_{\gamma\delta} f_{\alpha\gamma\delta} h_\gamma dh_\delta - d\left(\sum_{\gamma} b_{\alpha\gamma} h_\gamma\right)$$

en U_α, resulta por (14) que

$$d\eta_\alpha = \Omega - \sum_{\alpha\beta\gamma} f_{\alpha\beta\gamma} h_\alpha dh_\beta \wedge dh_\gamma$$

Por tanto, restaría probar que

$$\eta_\alpha = \eta_\beta$$

en $U_\alpha \bigcap U_\beta$. Esto se desprende de (11) y (15), junto a que

$$\sum_{\gamma} f_{\alpha\beta\gamma} h_\gamma = b_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma} b_{\beta\gamma} h_\gamma - \sum_{\gamma} b_{\alpha\gamma} h_\gamma$$

Resulta que $[f]$ es la preimagen de $[\Omega]$ en el isomorfismo Cech-deRham, y de (12) que la clase cohomológica de Ω es entera.

Reciprocamente, sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ un cubrimiento contractible y localmente finito de M. Luego, por el lema de Poincare, en cada U_α existe una 1-forma θ_α tal que

$$\Omega|_{U_\alpha} = \frac{1}{h} d\theta_\alpha$$

Por tanto, si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$

$$d\left(\theta_\alpha - \theta_\beta\right)|_{U_\alpha\cap U_\beta} = d\,\theta_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} - d\theta_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta} = \Omega|_{U_\alpha\cap U_\beta} - \Omega|_{U_\alpha\cap U_\beta} = 0$$

Por Poincare nuevamente resulta que existe $b_{\alpha\beta} \in C^\infty\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$ tal que

$$\left(\theta_\alpha - \theta_\beta\right)|_{U_\alpha\cap U_\beta} = h db_{\alpha\beta} \tag{16}$$

Luego, podemos elegir $b_{\beta\alpha} = -b_{\alpha\beta}$. Además, si $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ entonces

$$d(b_{\alpha\beta}+b_{\beta\gamma}+b_{\gamma\alpha}) = db_{\alpha\beta}+db_{\beta\gamma}+db_{\gamma\alpha} = (\theta_\alpha - \theta_\beta)+(\theta_\beta - \theta_\gamma)+(\theta_\gamma - \theta_\alpha) = 0$$

Por lo que

$$b_{\alpha\beta} + b_{\beta\gamma} + b_{\gamma\alpha}$$

es constante en $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Luego, podemos definir

$$\begin{aligned} 2 - \text{simplex} &\xrightarrow{f} \mathbb{C} \\ (U_\alpha, U_\beta, U_\gamma) &\mapsto b_{\alpha\beta} + b_{\beta\gamma} + b_{\gamma\alpha} \end{aligned}$$

Ademas, $\partial f = 0$, y por tanto $f \in \mathcal{Z}^2(\mathcal{U})$. Al igual que en el directo se prueba que $[f]$ es la preimagen de $[\Omega]$ por el isomorfismo de Cech-deRham. Que la clase cohomológica de Ω es entera significa que podemos escoger $f \in [f]$ de tal forma que

$$f_{\alpha\beta\gamma} = b_{\alpha\beta} + b_{\beta\gamma} + b_{\gamma\alpha} \in \mathbb{Z} \tag{17}$$

Luego, definiendo

$$c_{\alpha\beta} = \exp(2\pi i b_{\alpha\beta}) \tag{18}$$

se obtiene

$$c_{\alpha\beta} c_{\beta\gamma} c_{\gamma\alpha} = 1$$

Dados $m \in U_\alpha\,, n \in U_\beta$ y $z,\, z' \in \mathbb{C}$ se define la siguiente relación de equivalencia

$$(m, z) \sim (n, z') \Leftrightarrow m = n,\; z' = c_{\alpha\beta}\,(m)\, z$$

Sea

$$L = \frac{\coprod_\alpha U_\alpha \times \mathbb{C}}{\sim}$$

Definiendo

$$\begin{aligned} [(m,z)] + [(m,z')] &\stackrel{\text{def}}{=} [(m, z+z')] \\ \lambda\,[(m,z)] &\stackrel{\text{def}}{=} [(m, \lambda z)]\ , \lambda \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

resulta que L un fibrado complejo lineal sobre M. Por su parte, considerando (16), y (18), obtenemos

$$d\,(\ln c_{\alpha\beta}) = -\frac{i}{\hbar}\,(\theta_\alpha - \theta_\beta)$$

Por tanto, dada la trivialización $\{U_\alpha, s_\alpha\}$ de L, ∇ queda consistentemente definida por la siguiente expresión local

$$\nabla_X\,(f\, s_\alpha) = \left(X\,(f) - \frac{i}{\hbar} f \theta_\alpha\,(X) \right) s_\alpha$$

Teorema 14. *Sea un fibrado complejo lineal L sobre M con conexión ∇ y una forma de curvatura Ω . Entonces, existe una estructura hermítica sobre L compatible con ∇ si y solo si Ω es real.*

Demostracion : Sea $\{U_\alpha, s_\alpha\}$ una trivialización de M, y sean las 1-formas θ_α definidas sobre U_α tales que

$$\nabla_X s_\alpha = -\frac{i}{\hbar}\theta_\alpha(X)\, s_\alpha \ , \ \forall X \in \Gamma(M)$$

Entonces, debido a que Ω es la foma de curvatura, resulta que

$$\Omega|_{U_\alpha} = d\theta_\alpha$$

Como ∇ es compatible con la estructura hermítica $<,>$, entonces dado $X \in \Gamma(M)$ se tiene que

$$X\langle s_\alpha, s_\alpha\rangle = \langle \nabla_X s_\alpha, s_\alpha\rangle + \langle s_\alpha, \nabla_X s_\alpha\rangle = -\frac{i}{\hbar}\left(\theta_\alpha(X) - \overline{\theta_\alpha(X)}\right)\langle s_\alpha, s_\alpha\rangle$$

Luego,

$$\theta_\alpha(X) - \overline{\theta_\alpha(X)} = \frac{i\hbar X\langle s_\alpha, s_\alpha\rangle}{\langle s_\alpha, s_\alpha\rangle} = \frac{i\hbar\, d\langle s_\alpha, s_\alpha\rangle(X)}{\langle s_\alpha, s_\alpha\rangle}$$

O bien,

$$\theta_\alpha - \overline{\theta_\alpha} = i\hbar\, d\ln\langle s_\alpha, s_\alpha\rangle$$

Por tanto,

$$d\theta_\alpha - \overline{d\theta_\alpha} = 0$$

Por lo que Ω es real.

Reciprocamente, si Ω es real entonces $\mathrm{Im}\theta_\alpha$ es cerrada. Por tanto, se puede encontrar $\rho_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$ tal que

$$d\rho_\alpha = \frac{2\pi}{h}\mathrm{Im}\theta_\alpha$$

cumpliendose ademas

$$\rho_\alpha - \rho_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta} = \ln|c_{\alpha\beta}|$$

Luego, la siguiente expresión local define consistentemente una estructura hermítica sobre L,

$$\langle f\, s_\alpha, g\, s_\alpha\rangle = f\,\bar{g}\exp(2\rho_\alpha)$$

Resulta que

$$X\langle f\, s_\alpha, g\, s_\alpha\rangle = \left(X(f\,\bar{g}) + 2\hbar^{-1} f\,\bar{g}\mathrm{Im}\theta_\alpha\right)\exp(2\rho_\alpha) = \left(X(f\,\bar{g}) + 2\hbar^{-1} f\,\bar{g}\mathrm{Im}\theta_\alpha\right)\langle s_\alpha, s_\alpha\rangle$$

mientras que

$$\langle \nabla_X f\, s_\alpha, g\, s_\alpha\rangle = \left\langle X(f)\, s_\alpha - i\hbar^{-1} f\theta(X)\, s_\alpha, g\, s_\alpha\right\rangle = \left(X(f)\ \bar{g} - i\hbar^{-1} f\,\bar{g}\theta(X)\right)\langle s_\alpha, s_\alpha\rangle$$

$$\langle f\, s_\alpha, \nabla_X g\, s_\alpha\rangle = \left\langle f\, s_\alpha, X(g)\, s_\alpha - i\hbar^{-1} g\theta(X)\, s_\alpha\right\rangle = \left(f\ X\ (\bar{g}) + i\hbar^{-1} f\,\bar{g}\bar{\theta}(X)\right)\langle s_\alpha, s_\alpha\rangle$$

Por tanto,

$$X\langle f\, s_\alpha, g\, s_\alpha\rangle = \langle \nabla_X f\, s_\alpha, g\, s_\alpha\rangle + \langle f\, s_\alpha, \nabla_X g\, s_\alpha\rangle$$

Es decir, la conexión es compatible con esta estructura hermítica.

Observar que aplicando las construcciones hechas en los dos teoremas previos a un fibrado cotangente $M = T^*N$ la cuantización de Soriau-Kostant resultante es la dada por (5).

CAPíTULO 4

Precuantización del Momento Angular

1. Introducción

Un momento angular cuántico esta caracterizado por tres operadores hermíticos s_x, s_y, s_z en un espacio de Hilbert tales que:

$$[s_x, s_y] = i\hbar s_z, \ [s_y, s_z] = i\hbar s_x, \ [s_z, s_x] = i\hbar s_y \tag{19}$$

Una precuantización del momento angular supone encontrar un sistema clásico, o sea una variedad simpléctica, y tres observables cuyos correspondientes operadores por precuantización cumplan con (19). A continuación haremos tal construcción.

2. Precuantización de la esfera

Consideremos como espacio de fase M a la esfera de radio r. Es decir,

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\right\}$$

La forma de area viene dada por

$$dA = r^2 \sin\theta \, d\varphi \wedge d\theta$$

donde

$$x = r\cos\varphi \sin\theta$$
$$y = r\sin\varphi \sin\theta$$
$$z = r\cos\theta$$

Quedando dA bien definida por extensión continua en donde la parametrización no esta definida. Consideremos

$$\omega = \frac{dA}{r} = r\sin\theta \, d\varphi \wedge d\theta$$

Luego, la variedad simpléctica (M, ω) es un sistema clásico al cual buscaremos cuantizar. En un entorno local adecuado podemos hacer el siguiente cambio de coordenadas

$$\tilde{\theta} = -\cos\theta \, , \ \tilde{\varphi} = r\varphi$$

obteniendose que

$$\omega = d\tilde{\varphi} \wedge d\tilde{\theta}$$

Por lo que hemos obtenido las coordenadas canónicas. Resulta que en estas coordenadas podemos calcular sistematicamente el corchete de Poisson, quedando

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{\varphi}} \frac{\partial g}{\partial \tilde{\theta}} - \frac{\partial f}{\partial \tilde{\theta}} \frac{\partial g}{\partial \tilde{\varphi}}$$

En efecto, en general, si usamos coordenadas canónicas se tiene que

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i \\ X_f &= \sum_{i=1}^{n} X_f(q_i) \frac{\partial}{\partial q_i} + X_f(p_i) \frac{\partial}{\partial p_i} \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \omega(X_f, X_g) &= \sum_{i=1}^{n} X_f(p_i) X_g(q_i) - X_f(q_i) X_g(p_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} -\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} \end{aligned}$$

Asi que,

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}$$

Por lo que, retornando a nuestro caso, si volvemos a esféricas

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{\varphi}} \frac{\partial g}{\partial \tilde{\theta}} - \frac{\partial f}{\partial \tilde{\theta}} \frac{\partial g}{\partial \tilde{\varphi}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{\varphi}} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{\theta}} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial g}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial g}{\partial \varphi} \right)$$

Teniendo en cuenta este resultado y que

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -r \sin\varphi \sin\theta = -y \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} &= r \cos\varphi \cos\theta = \cos\varphi z \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= r \cos\varphi \sin\theta = x \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \sin\varphi \cos\theta = \sin\varphi z \end{aligned}$$

se obtienen

$$\{x, y\} = -z, \ \{y, z\} = -x, \ \{z, x\} = -y$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\left\{x^2,x\right\} &= \frac{2x}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\theta}-\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)=0\\ \left\{y^2,x\right\} &= \frac{2y}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\theta}-\frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)=2y\left\{y,x\right\}=-2y\left\{x,y\right\}=2yz\\ \left\{z^2,x\right\} &= \frac{2z}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\theta}-\frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)=2z\left\{z,x\right\}=-2yz\end{aligned}$$

Asi que,

$$\left\{r^2,x\right\}=\left\{x^2,x\right\}+\left\{y^2,x\right\}+\left\{z^2,x\right\}=0$$

Analogamente,

$$\left\{r^2,y\right\}=\left\{r^2,z\right\}=0$$

Para que (M,ω) sea cuantizable es necesario y suficiente que

$$\int\limits_M \frac{\omega}{2\pi\hbar}\in\mathbb{Z}$$

Pero,

$$\int\limits_M \frac{\omega}{2\pi\hbar}=\int\limits_M \frac{r\sin\theta d\varphi\wedge d\theta}{2\pi\hbar}=\frac{r}{2\pi\hbar}\int\limits_M \sin\theta d\varphi\wedge d\theta=\frac{r}{2\pi\hbar}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_\pi^0\sin\theta d\theta=-\frac{2r}{\hbar}$$

Luego, se debe cumplir

$$r\in\frac{1}{2}\hbar\mathbb{Z}$$

Imponiendo esta condición obtenemos operadores sujetos a las siguientes relaciones de conmutación

$$[\hat{x},\hat{y}]=i\hbar\hat{z},\ [\hat{y},\hat{z}]=i\hbar\hat{x},\ [\hat{z},\hat{x}]=i\hbar\hat{y}$$

con lo que hemos obtenido la condición (19). Por otro lado, observar que

$$\left[\widehat{r^2},\hat{x}\right]=\left[\widehat{r^2},\hat{y}\right]=\left[\widehat{r^2},\hat{z}\right]=0$$

Sea $\hat{r}^2=\hat{x}^2+\hat{y}^2+\hat{z}^2$. Luego, debe ser

$$\left[\hat{r}^2,\hat{x}\right]=\left[\hat{r}^2,\hat{y}\right]=\left[\hat{r}^2,\hat{z}\right]=0$$

En efecto, por ejemplo

$$\left[\hat{r}^2,\hat{y}\right]=\left[\hat{x}^2,\hat{y}\right]+\left[\hat{y}^2,\hat{y}\right]+\left[\hat{z}^2,\hat{y}\right]$$

siendo claramente $[\hat{y}^2,\hat{y}]=0$, mientras

$$\begin{aligned}\left[\hat{x}^2,\hat{y}\right]&=\hat{x}\left[\hat{x},\hat{y}\right]+\left[\hat{x},\hat{y}\right]\hat{x}=i\hbar\left(\hat{x}\hat{z}+\hat{z}\hat{x}\right)\\ \left[\hat{z}^2,\hat{y}\right]&=\hat{z}\left[\hat{z},\hat{y}\right]+\left[\hat{z},\hat{y}\right]\hat{z}=-i\hbar\left(\hat{z}\hat{x}+\hat{x}\hat{z}\right)\end{aligned}$$

Luego,

$$[\hat{x}^2, \hat{y}] + [\hat{y}^2, \hat{y}] + [\hat{z}^2, \hat{y}] = 0$$

Observar que por linealidad del mapa de precuantización

$$\widehat{r^2} = \widehat{x^2} + \widehat{y^2} + \widehat{z^2}$$

Sin embargo, en general

$$\widehat{r^2} \neq \hat{r}^2$$

En efecto, se tiene que

$$\widehat{x^2} = x^2 + \frac{\hbar}{i}\nabla_{X_{x^2}} = x^2 + \frac{\hbar}{i}\nabla_{2xX_x} = x^2 + 2\frac{\hbar}{i}x\nabla_{X_x}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\widehat{x}^2 &= \left(x + \frac{\hbar}{i}\nabla_{X_x}\right)\left(x + \frac{\hbar}{i}\nabla_{X_x}\right) = \\ &= x^2 + \frac{\hbar}{i}x\nabla_{X_x} + \frac{\hbar}{i}\nabla_{X_x}x - \hbar^2\nabla_{X_x}\nabla_{X_x}\end{aligned}$$

Pero, $\nabla_{X_x}x = x\nabla_{X_x}$. Luego,

$$\widehat{x}^2 = x^2 + 2\frac{\hbar}{i}x\nabla_{X_x} - \hbar^2\nabla_{X_x}\nabla_{X_x}$$

Por tanto,

$$\widehat{r^2} = \hat{r}^2 + \hbar^2\left(\nabla_{X_x}\nabla_{X_x} + \nabla_{X_y}\nabla_{X_y} + \nabla_{X_z}\nabla_{X_z}\right)$$

Encontraremos, ahora, el fibrado lineal complejo que hace la precuantización del momento angular posible. Para esto, cubramos la esfera por dos entornos coordenados $U_\pm = M - \{P_\pm\}$, donde $P_\pm = (0, 0, \pm r)$. En los entornos coordenados $U_\pm$ introducimos los sistemas coordenados complejos $w_\pm$ respectivamente, dados por

$$w_\pm = \frac{\sin\theta}{1 \mp \cos\theta}e^{\pm i\varphi} = \frac{x \pm iy}{r \mp z}$$

Obteniéndose que en $U_+ \bigcap U_-$ se cumle

$$w_+ w_- = 1$$

Ademas, se tiene que

$$\begin{aligned}
dw_{\pm} &= d\left(\frac{\sin\theta}{1\mp\cos\theta}\right)e^{\pm i\varphi} \pm i\frac{\sin\theta}{1\mp\cos\theta}e^{\pm i\varphi}d\varphi \\
&= \frac{\cos\theta\left(1\mp\cos\theta\right)\mp\sin^2\theta}{\left(1\mp\cos\theta\right)^2}d\theta e^{\pm i\varphi} \pm i\frac{\sin\theta}{1\mp\cos\theta}e^{\pm i\varphi}d\varphi \\
&= \frac{\left(\cos\theta\mp 1\right)}{\left(1\mp\cos\theta\right)^2}d\theta e^{\pm i\varphi} \pm i\frac{\sin\theta}{1\mp\cos\theta}e^{\pm i\varphi}d\varphi \\
&= \mp\frac{1}{1\mp\cos\theta}d\theta e^{\pm i\varphi} \pm i\frac{\sin\theta}{1\mp\cos\theta}e^{\pm i\varphi}d\varphi
\end{aligned}$$

Luego,

$$d\bar{w}_{\pm} = \overline{dw_{\pm}} = \mp\frac{1}{1\mp\cos\theta}d\theta e^{\mp i\varphi} \mp i\frac{\sin\theta}{1\mp\cos\theta}e^{\mp i\varphi}d\varphi$$

Por tanto,

$$d\bar{w}_{\pm}\wedge dw_{\pm} = -i\frac{\sin\theta}{\left(1\mp\cos\theta\right)^2}d\theta\wedge d\varphi + i\frac{\sin\theta}{\left(1\mp\cos\theta\right)^2}d\varphi\wedge d\theta = 2i\frac{\sin\theta}{\left(1\mp\cos\theta\right)^2}d\varphi\wedge d\theta$$

Luego, considerando la definición dada para ω se obtiene que

$$\omega_{\pm} = \frac{r}{2i}\left(1\mp\cos\theta\right)^2 d\bar{w}_{\pm}\wedge dw_{\pm}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
1+\left|w_{\pm}\right|^2 &= 1+\frac{x^2+y^2}{\left(r\mp z\right)^2} = 1+\frac{r^2-z^2}{\left(r\mp z\right)^2} = \\
&= 1+\frac{\left(r-z\right)\left(r+z\right)}{\left(r\mp z\right)^2} = 1+\frac{r\pm z}{r\mp z} = \frac{2r}{r\mp z}
\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{4}{\left(1+\left|w_{\pm}\right|^2\right)^2} = \left(\frac{r\mp z}{r}\right)^2 = \left(\frac{r\mp r\cos\theta}{r}\right)^2 = \left(1\mp\cos\theta\right)^2$$

Encontramos de esta forma que

$$\omega_{\pm} = \frac{2r}{i}\frac{d\bar{w}_{\pm}\wedge dw_{\pm}}{\left(1+\left|w_{\pm}\right|^2\right)^2}$$

Por lo que la curvatura correspondiente al fibrado lineal complejo debe venir dada por

$$\Omega_{\pm} = \frac{r}{\pi i\hbar}\frac{d\bar{w}_{\pm}\wedge dw_{\pm}}{\left(1+\left|w_{\pm}\right|^2\right)^2}$$

Como 1-formas $\theta_\pm$ en $U_\pm$ tomamos

$$\theta_\pm = \frac{2r}{i}\frac{\bar{w}_\pm dw_\pm}{1+|w_\pm|^2}$$

Luego, para la función de transición c en $U_+ \bigcap U_-$ se cumple

$$d\ln c = \frac{i}{\hbar}(\theta_- - \theta_+) = \frac{2r}{\hbar}\left(\frac{\bar{w}_- dw_-}{1+|w_-|^2} - \frac{\bar{w}_+ dw_+}{1+|w_+|^2}\right)$$

Pero,

$$w_+ w_- = 1 \Rightarrow dw_+ = -\frac{w_+}{w_-}dw_-$$

y como

$$1+|w_\pm|^2 = \frac{2r}{r \mp z}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned}
d\ln c &= \frac{1}{\hbar}\left((r+z)\frac{|w_-|^2}{w_-}dw_- + (r-z)\frac{|w_+|^2}{w_-}dw_-\right) = \\
&= \frac{1}{\hbar}\left((r+z)|w_-|^2 + (r-z)|w_+|^2\right)\frac{dw_-}{w_-} = \\
&= \frac{1}{\hbar}\left((r+z)\frac{x^2+y^2}{(r+z)^2} + (r-z)\frac{x^2+y^2}{(r-z)^2}\right)\frac{dw_-}{w_-} = \\
&= \frac{1}{\hbar}\left(\frac{r^2-z^2}{(r+z)} + \frac{r^2-z^2}{(r-z)}\right)\frac{dw_-}{w_-} = \\
&= \frac{1}{\hbar}((r-z)+(r+z))\frac{dw_-}{w_-} = \frac{2r}{\hbar}\frac{dw_-}{w_-}
\end{aligned}$$

Luego, integrando y considerando la condición de cuantización en r

$$c = (w_-)^n = (w_+)^{-n}, n \in \mathbb{Z}$$

Por lo que, comparando los mapas de transición obtenidos para el fibrado de Hopf, se concluye que hemos obtenido la n-esima potencia tensorial del fibrado de Hopf.

A modo de ejemplo calcularemos el operador $\widehat{z}$ explicitamente. Se tiene que

$$X_z = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

mientras que

$$\theta_\pm = \frac{2r}{i}\frac{\bar{w}_\pm dw_\pm}{1+|w_\pm|^2} = \frac{r}{i}\frac{\sin\theta}{1\mp\cos\theta}(\mp d\theta \pm i\sin\theta d\varphi)$$

Luego,

$$\theta_{\pm}\left(X_z\right) = \frac{r}{i}\frac{\sin\theta}{1\mp\cos\theta}\left(\mp d\theta \pm i\sin\theta d\varphi\right)\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = r\frac{\pm\sin^2\theta}{1\mp\cos\theta}$$

y por tanto

$$\hat{z}\left(fs_{\pm}\right) = zfs_{\pm} + \frac{\hbar}{i}\nabla_z\left(fs_{\pm}\right) = zfs_{\pm} + \frac{\hbar}{i}\left(X_z\left(f\right) - \frac{i}{\hbar}f\theta_{\pm}\left(X_z\right)\right)s_{\pm} =$$

$$= \left(zf + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial f}{\partial\varphi} - fr\frac{\pm\sin^2\theta}{1\mp\cos\theta}\right)s_{\pm} = \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial f}{\partial\varphi} \mp fr\right)s_{\pm}$$

3. Condición de Completitud

Un conjunto $f_1, ..., f_n$ de funciones $C^\infty(M)$ es llamado *completo* si dado $g \in C^\infty(M)$ tal que

$$\{f_i, g\} = 0,\ i = 1, ..., n$$

entonces $g \propto 1$. Veamos que en nuestro caso x, y, z forman un conjunto completo. En efecto, si

$$\{z,\ f\} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial\varphi} = 0$$

Basta entonces con probar que si ademas

$$\{x,\ f\} = \{y,\ f\} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial\theta} = 0$$

Por un lado,

$$\{z,\ f\} = \{x,\ f\} = 0 \Rightarrow \sin\varphi\frac{\partial f}{\partial\theta}$$

y por otro

$$\{z,\ f\} = \{y,\ f\} = 0 \Rightarrow \cos\varphi\frac{\partial f}{\partial\theta} = 0$$

Luego,

$$\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial\theta} = 0$$

Analogamente, un conjunto de operadores $o_1, ..., o_2$ en un espacio de Hilbert es *completo* si dado un operador o tal que

$$[o_i, o] = 0,\ i = 1, ..., n \Rightarrow o \propto 1$$

Un mapa de cuantización es aquel que, ademas de cumplir con las condiciones de un mapa de precuantización, cumple la propiedad de llevar conjuntos completos en completos. El presente ejemplo de precuantización no corresponde con una cuantización. En efecto, tenemos que el operador

$$\hbar^2 \left(\nabla_{X_x}\nabla_{X_x} + \nabla_{X_y}\nabla_{X_y} + \nabla_{X_z}\nabla_{X_z}\right) = \widehat{r^2} - \hat{r}^2$$

conmuta con $\widehat{x}, \widehat{y}$, y $\widehat{z}$, ya que tanto $\widehat{r^2}$ como $\hat{r}^2$ lo hacen, pero no es un múltiplo de la identidad.

Bibliografía

[1] Proc.Roy.Soc.London, A, 109, 642-53, P.A.M.Dirac, 1925.
[2] Line Bundles, M.Murray, 1996.
[3] Mathematical foundations of Classical Mechanics, V.I.Arnold, Springer-Verlag, 1989.
[4] Introduction to Mechanics and Symmetry, J.Marsden, S.Tudor, Springer-Verlag, 2002.
[5] Introduction to Smooth Manifolds, J.M.Lee, Springer-Verlag, 2000.
[6] Geometric Quantization, Dynamical Systems IV, A.A.Kirillov, Springer-Verlag.
[7] Geometric Quantization, N.M.J.Woodhouse, Clarendon, 1997.
[8] Comm.Math.Helv.26, Sur les theoremes de de Rham, Andre Weil, 1952.