Biálgebras y Categorías Monoidales

Mariana Pereira

Orientador: Andrés Abella

14 de agosto del 2001

Trabajo Monográfico
Licenciatura en Matemática
Universidad de la República
Montevideo - Uruguay.

Agradecimientos

Hay tanta gente a quien agradecerle, que me es imposible nombrarlos a todos. Sin embargo, hay personas que no puedo dejar de nombrar.

En primer lugar, a mi familia; Mario, Carmen, Nati y Caro. Porque sin terminar de entender de qué se trata, me apoyaron en todas las etapas de mis estudios.

A Andrés, por toda su paciencia y dedicación.

A Walter por su confianza y correcciones, a Fernando por sus diagramas y a Alvarito por apurarme.

A la Negra, porque me mantuvo pensando, por sus cuentas en servilletas y por ser como es.

Al Leva, Liliana, Lale, Carlos y Ofe, por aguantarme y hacerme disfrutar durante tantos años.

A todos los que en algún momento me preguntaron,“¿cómo va la monografía?”

A Gastón, por estar conmigo y hacerme esta última etapa mucho más llevadera.

Resumen

El principal objetivo de este trabajo monográfico es estudiar las relaciones que existen entre una biálgebra y las categorías de módulos y comódulos sobre ella.

El trabajo está organizado de la siguiente manera.

En el primer capítulo presentamos las *categorías* y las principales construcciones en categorías. Definimos categorías *monoidales*, *trenzadas* y *rígidas*. A modo de ejemplo, mostramos que la categoría de espacios vectoriales, $\mathcal{V}ect$, es monoidal trenzada y la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita, $\mathcal{V}ect_{fin}$, es rígida.

En el segundo capítulo definimos las *álgebras* y los *módulos* sobre un álgebra. Dada un álgebra, estudiamos la categoría de módulos sobre ella.

En el tercer capítulo dualizamos las construcciones del Capítulo 2. Es así que definimos las *coálgebras* y los *comódulos* sobre una coálgebra. Dada una coálgebra, estudiamos la categoría de comódulos sobre ella.

En el cuarto capítulo, combinamos las estructuras de los dos capítulos anteriores, definiendo las *biálgebras*. Los principales resultados de este capítulo son el Teorema 4.2.2, donde se prueba que la categoría de módulos sobre una biálgebra es monoidal, y el Teorema 4.2.3, que es un recíproco parcial del anterior. De igual importancia son los resultados análogos para comódulos estudiados en los Teoremas 4.2.5 y 4.2.6.

En el quinto capítulo presentamos las *álgebras de Hopf* y sus propiedades básicas. En los Teoremas 5.2.2 y 5.2.3 estudiamos la rigidez de la categoría de módulos de dimensión finita y de la categoría de comódulos de dimensión finita sobre un álgebra de Hopf.

En el sexto capítulo, definimos biálgebras *cuasi* y *cocuasitriangulares*. En los Teoremas 6.1.6 y 6.1.7 probamos que una biálgebra es cuasitriangular si y sólo si la categoría de sus módulos es monoidal trenzada. En los Teoremas 6.2.7 y 6.2.8 probamos que una biálgebra es cocuasitriangular si y sólo si la categoría de sus comódulos es monoidal trenzada.

En el capítulo final, presentamos la *ecuación de trenzas* y vemos que la trenza en la categoría de módulos sobre una biálgebra cuasitriangular, es solución de la ecuación de trenzas. Análogamente, vemos también que en la categoría de comódulos sobre una biálgebra cocuasitriangular, la trenza genera soluciones a la ecuación. Siguiendo las construcciones presentadas en [Doi93], dados un espacio vectorial V de dimensión finita y $\mathcal{S} \in \mathrm{End}\,(V \otimes V)$ una solución invertible de la ecuación de trenzas, construimos una biálgebra cocuasitriangular, $M(V, \mathcal{S})$, de forma que $\mathcal{S}$ sea un morfismo en la categoría de comódulos sobre $M(V, \mathcal{S})$.

Índice General

1 Conceptos básicos de teoría de categorías **2**
1.1 Categorías, functores y transformaciones naturales . . . 2
1.2 Construcciones en categorías . . . 5
1.3 Categorías monoidales . . . 7

2 Álgebras y módulos **10**
2.1 Álgebras . . . 10
2.2 Módulos sobre un álgebra . . . 12

3 Coálgebras y comódulos **16**
3.1 Coálgebras . . . 16
3.2 Comódulos sobre una coálgebra . . . 19

4 Biálgebras y categorías monoidales **23**
4.1 Biálgebras . . . 23
4.2 Módulos y comódulos sobre una biálgebra . . . 24

5 Álgebras de Hopf y rigidez **31**
5.1 Álgebras de Hopf . . . 31
5.2 Módulos y comódulos sobre un álgebra de Hopf . . . 33

6 Biálgebras cuasi y cocuasi triangulares y categorías trenzadas **43**
6.1 Biálgebras cuasitriangulares . . . 43
6.2 Biálgebras cocuasitriangulares . . . 48

7 Ecuación de trenzas y biálgebras cuadráticas **55**

Capítulo 1

Conceptos básicos de teoría de categorías

En este capítulo introduciremos conceptos básicos de la teoría de categorías que son necesarios para los siguientes capítulos. En particular se presentan las nociones de categoría abeliana, monoidal, rígida y trenzada. La presentación es sólo a modo de introducción; una presentación más detallada de estos temas puede encontrarse, por ejemplo, en [Mac98] y [Wei94].

1.1 Categorías, functores y transformaciones naturales

Definición 1.1.1. Un *grafo* es una cuaterna $\mathcal{G} = \{O_\mathcal{G}, A_\mathcal{G}, dom_\mathcal{G}, codom_\mathcal{G}\}$ donde $O_\mathcal{G}$ y $A_\mathcal{G}$ son clases y $dom_\mathcal{G}, codom_\mathcal{G} : A_\mathcal{G} \to O_\mathcal{G}$ son funciones.

A $O_\mathcal{G}$ le llamaremos los *objetos* del grafo y a $A_\mathcal{G}$ las *flechas* o *morfismos*. Si $f \in A_\mathcal{G}$ con $dom(f) = a$ y $codom(f) = b$ escribiremos $f : a \to b$ o $a \xrightarrow{\mathrm{f}} b$.

Definición 1.1.2. Sean $f, g \in A_\mathcal{G}$. Diremos que f y g *son componibles* si $dom(f) = codom(g)$. Llamaremos $A \times_\mathcal{G} A = \{(f, g) \in A_\mathcal{G} \times A_\mathcal{G} \ : f \text{ y } g \text{ son componibles}\}$.

Definición 1.1.3. Una *categoría* es una séxtupla $\mathcal{C} = \{O_\mathcal{C}, A_\mathcal{C}, dom_\mathcal{C}, cod_\mathcal{C}, \circ_\mathcal{C}, \mathsf{id}_\mathcal{C}\}$ donde: $\{O_\mathcal{C}, A_\mathcal{C}, dom_\mathcal{C}, codom_\mathcal{C}\}$ es un grafo, $\circ_\mathcal{C} : A \times_\mathcal{C} A \to A_\mathcal{C}$ y $\mathsf{id}_\mathcal{C} : O_\mathcal{C} \to A_\mathcal{C}$ son tales que, si notamos $\mathsf{id}_\mathcal{C}(a) = \mathrm{id}_a$ y $\circ_\mathcal{C}(f, g) = f \circ_\mathcal{C} g$,

1. $\mathrm{id}_a : a \to a \quad \forall a \in O_\mathcal{C}$.
2. $codom(f \circ_\mathcal{C} g) = codom f \quad$ y $\quad dom(f \circ_\mathcal{C} g) = dom g$.
3. $f \circ_\mathcal{C} \mathrm{id}_a = \mathrm{id}_b \circ_\mathcal{C} f = f, \quad \forall f : a \to b$.
4. Si (f, g) y $(g, h) \in A \times_\mathcal{C} A$, entonces $(f \circ_\mathcal{C} g) \circ h = f \circ (g \circ_\mathcal{C} h)$.

Si $a, b \in O_\mathcal{C}$, escribiremos $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(a, b)$ al conjunto de las flechas de a en b. También escribiremos $a, b \in \mathcal{C}$ en lugar de $a, b \in O_\mathcal{C}$, cuando sea claro que a y b son objetos de la categoría. A $\circ_\mathcal{C}$ la llamaremos *composición* de $\mathcal{C}$ y, cuando no exista lugar a confusión, escribiremos simplemente $\circ$. A id le llamaremos *identidad* de $\mathcal{C}$.

Ahora veremos algunos ejemplos clásicos de categorías.

Ejemplo 1.1.4. Llamaremos $\mathcal{S}et$ a la categoría cuyos objetos son todos los conjuntos, sus flechas son todas las funciones entre conjuntos, y el dominio, el codominio, la identidad y la composición son los usuales.

Ejemplo 1.1.5. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo fijo. Llamaremos $\mathcal{V}ect$ a la categoría cuyos objetos son todos los espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, los morfismos son las transformaciones lineales y el dominio, el codominio, la identidad y la composición son los usuales. Si V, W son espacios vectoriales, escribiremos $\mathrm{Hom}\,(V, W)$ al conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}ect}(V, W)$.

Ejemplo 1.1.6. Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son dos categorías, entonces
$\mathcal{C}\times\mathcal{D} = \{O_\mathcal{C} \times O_\mathcal{D}, A_\mathcal{C} \times A_\mathcal{D}, dom, codom, \circ, \mathrm{id}\,\}$ donde $dom(f, g) = (dom_\mathcal{C}(f), dom_\mathcal{D}(g))$, $codom(f, g) = (codom_\mathcal{C}(f), codom_\mathcal{D}(g))$, $(f, g) \circ (f', g') = (f \circ f', g \circ g')$ e $\mathrm{id}\,_{(a,b)} = (id_a, id_b)$, es una categoría. A esta categoría la llamaremos *categoría producto* de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$.

Definición 1.1.7. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías, un *functor covariante* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es $F = (F_O, F_A)$ donde $F_O : O_\mathcal{C} \to O_\mathcal{D}$ y $F_A : A_\mathcal{C} \to A_\mathcal{D}$ son funciones tales que:

1. $F_A(\mathrm{id}\,_c) = \mathrm{id}\,_{F_O(c)}$, $\forall c \in O_\mathcal{C}$.
2. $F_O\,(dom(f)) = dom\,(F_A(f))$ y $F_O\,(codom(f)) = codom\,(F_A(f))\,, \quad \forall f \in A_\mathcal{C}$,

   es decir que si $a \xrightarrow{\mathrm{f}} b$ con $a, b \in O_\mathcal{C}$, entonces $F_O(a) \xrightarrow{\mathrm{F_A(f)}} F_O(b)$.
3. Si g y f son dos flechas componibles en $\mathcal{C}$, entonces $F_A(g)$ y $F_A(f)$ son componibles en $\mathcal{D}$ y se cumple $F_A(g \circ f) = F_A(g) \circ F_A(f)$.

Definición 1.1.8. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías, un *functor contravariante* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es $F = (F_O, F_A)$ donde $F_O : O_\mathcal{C} \to O_\mathcal{D}$ y $F_A : A_\mathcal{C} \to A_\mathcal{D}$, tales que:

1. $F_A(\mathrm{id}\,_c) = \mathrm{id}\,_{F_O(c)}$, $\forall c \in O_\mathcal{C}$.
2. Si $a \xrightarrow{\mathrm{f}} b$ con $a, b \in O_\mathcal{C}$, entonces $F_O(b) \xrightarrow{\mathrm{F_A(f)}} F_O(a)$.
3. Si g y f son dos flechas componibles en $\mathcal{C}$, entonces $F_A(f)$ y $F_A(g)$ son componibles en $\mathcal{D}$ y se cumple $F_A(g \circ f) = F_A(f) \circ F_A(g)$.

De ahora en más, cuando decimos *functor* estaremos diciendo functor covariante. Cuando no produzca confusión, escribiremos $F_O(c) = F(c)$ y $F_A(f) = F(f)$.

Ejemplo 1.1.9. Sea $\mathcal{C}$ una categoría cualquiera. Sea $\mathcal{I}d : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ dado por:
$\mathcal{I}d_O(c) = c$, $\forall\, c \in O_\mathcal{C}$ e $\mathcal{I}d_A(f) = f$, $\forall\, f \in A_\mathcal{C}$.
Entonces $\mathcal{I}d$ es un functor covariante y lo llamaremos *functor identidad*.

Ejemplo 1.1.10. Sea $\mathcal{U} : \mathcal{V}ect \to \mathcal{S}et$ donde $\mathcal{U}_O(V)$ es el conjunto V y $\mathcal{U}_A(f)$ es la función f. Entonces $\mathcal{U}$ es un functor covariante.

A este functor se le llama *functor de olvido* ya que lo que hace es " olvidarse " de la estructura adicional que tienen los conjuntos y las funciones. Este es simplemente un ejemplo de functores de olvido, ya que el dominio de $\mathcal{U}$ puede ser cualquier categoría cuyos objetos sean conjuntos y cuyos morfismos sean funciones.

Ejemplo 1.1.11. Definimos $d : \mathcal{V}ect \to \mathcal{V}ect$ por $d_O(V) = V^* = \mathrm{Hom}\,(V, \mathbb{K})$ y $d_A(f) = f^*$, donde si $V \xrightarrow{\mathrm{f}} W$ entonces $W^* \xrightarrow{\mathrm{f^*}} V^*$ siendo $f^*(T) = T \circ f$, $\forall\, T \in W^*$. Entonces d es un functor contravariante.

Definición 1.1.12. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $a \xrightarrow{\mathrm{f}} b$ un morfismo en $\mathcal{C}$.

1. f es *invertible* si existe $b \xrightarrow{\mathrm{g}} a$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}\,_a \quad$ y $\quad f \circ g = \mathrm{id}\,_b$.
2. f es un *monomorfismo* si $\forall g_1, g_2 : c \to a$ tal que $f \circ g_1 = f \circ g_2$, se tiene que $g_1 = g_2$.
3. f es un *epimorfismo* si $\forall g_1, g_2 : b \to c$ tal que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, se tiene que $g_1 = g_2$.

Observar que tanto en $\mathcal{S}ets$ como en $\mathcal{V}ect$ los monomorfismos son los morfismos inyectivos, los epimorfismos son los morfismos sobreyectivos y los morfismos invertibles son los biyectivos.

Definición 1.1.13. Dada una categoría $\mathcal{C} = \{O_\mathcal{C}, A_\mathcal{C}, dom_\mathcal{C}, codom_\mathcal{C}, \circ_\mathcal{C}, \mathsf{id}_\mathcal{C}\}$, una *subcategoría* de $\mathcal{C}$ es una categoría $\mathcal{C}'$ cuyos objetos son objetos de $\mathcal{C}$ y sus flechas son flechas en $\mathcal{C}$, de forma tal que si restringimos el dominio, el codominio, la identidad y la composición de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$, obtenemos el dominio, el codominio, la identidad y la composición de $\mathcal{C}'$.

Definición 1.1.14. Sean $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dos functores.

1. Una *transformación natural* $\tau : F \to G$ es una función $\tau : O_\mathcal{C} \to A_\mathcal{D}$ tal que:

   (a) Si c es un objeto de $\mathcal{C}$, entonces $\tau(c) : F(c) \to G(c)$.

   (b) Si $c \xrightarrow{\mathrm{f}} d$ es una flecha en $\mathcal{C}$, el siguiente diagrama (en $\mathcal{D}$) conmuta :

$$\begin{tikzcd} F(c) \arrow[r, "\tau(c)"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(c) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(d) \arrow[r, "\tau(d)"'] & G(d) \end{tikzcd} .$$

   Es decir que $G(f) \circ \tau(c) = \tau(d) \circ F(f)$, $\forall\, c \xrightarrow{\mathrm{f}} d$.

2. Una transformación natural $\tau : F \to G$ es un *isomorfismo natural* si $\tau(c)$ es invertible para todo c objeto de $\mathcal{C}$.

A veces escribiremos $\tau(c) = \tau_c$ y $\tau : F \to G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ para establecer en una misma notación, tanto el dominio y codominio de τ como el dominio y codominio de F y G.

Ejemplo 1.1.15. Sea $d : \mathcal{V}ect \to \mathcal{V}ect$ el del Ejemplo 1.1.11. Entonces $d \circ d = d^2 : \mathcal{V}ect \to \mathcal{V}ect$ es un functor covariante. Sea $\tau : \mathcal{I}d \to d^2$ dado por: $\tau_V : V \to V^{**}$ siendo $(\tau_V(v))\,(f) = f(v)$. Entonces τ es una transformación natural.

Si en el último ejemplo, tomamos en vez de $\mathcal{V}ect$, la categoría de los espacios de dimensión finita ($\mathcal{V}ect_{fin}$), entonces τ es un isomorfismo natural.

Definición 1.1.16. Sea $\mathcal{C}$ una categoría.

1. Un *objeto terminal* en $\mathcal{C}$ es $t \in O_\mathcal{C}$ tal que $\#\,(\mathrm{Hom}\,(c,t)) = 1$, $\forall\, c \in O_\mathcal{C}$. Es decir que si c es un objeto de $\mathcal{C}$, entoces $\exists! \quad c \xrightarrow{\mathrm{f}} t$.

2. Un *objeto inicial* en $\mathcal{C}$ es $i \in O_\mathcal{C}$ tal que $\#\,(\mathrm{Hom}\,(i,c)) = 1$, $\forall\, c \in O_\mathcal{C}$. Es decir que si c es un objeto de $\mathcal{C}$, entonces $\exists! \quad i \xrightarrow{\mathrm{f}} c$.

3. Un *objeto cero* en $\mathcal{C}$ es un objeto terminal e inicial.

4. Sea z un objeto cero en $\mathcal{C}$ y a, b dos objetos en $\mathcal{C}$. El *morfismo nulo* de a en b es la composición de los morfismos $a \to z$ y $z \to b$. A este morfismo lo escribiremos $0_b^a : a \to b$.

Ejemplo 1.1.17. En $\mathcal{S}ets$, los objetos terminales son los conjuntos unitarios y el único elemento inicial es el conjunto vacío. Por lo tanto en $\mathcal{S}ets$ no hay elementos cero.

Ejemplo 1.1.18. En $\mathcal{V}ect$ el único objeto terminal es el espacio vectorial nulo, que también es inicial. Por lo tanto este espacio vectorial es un objeto cero de la categoría. Dados dos espacios vectoriales V y W, $0_W^V : V \to W$ es la transformación lineal nula.

1.2 Construcciones en categorías

En esta sección introduciremos los productos, coproductos, núcleos y conúcleos en una categoría $\mathcal{C}$, que generalizan dichas construcciones en espacios vectoriales. En toda esta sección trabajaremos con una categoría $\mathcal{C}$ fija.

Definición 1.2.1. Sea $X = \{x_j : j \in J\}$ una familia de objetos en $\mathcal{C}$. Decimos que X *admite un producto* si existe un objeto $\prod_{j\in J} x_j \in \mathcal{C}$ y una familia de morfismos en $\mathcal{C}$ $\left\{p_i : \prod_{j\in J} x_j \to x_i\,, i \in J\right\}$ tal que para todo otro objeto c y morfismos $\{f_i : c \to x_i\,, i \in J\}$ existe un único morfismo $f : c \to \prod_{j\in J} x_j$ tal que los siguientes diagramas conmutan $\forall\, i \in J$:

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, dotted, "f"'] & x_i\,. \\ \prod_{j\in J} x_j \arrow[ur, "p_i"'] & \end{tikzcd}$$

Definición 1.2.2. Sea $X = \{x_j : j \in J\}$ una familia de objetos en $\mathcal{C}$. Decimos que X *admite un coproducto* si existe un objeto $\coprod_{j\in J} x_j \in \mathcal{C}$ y una familia de morfismos en $\mathcal{C}$ $\left\{\imath_i : x_i \to \coprod_{j\in J} x_j\,, i \in J\right\}$ tal que para todo otro objeto c y morfismos $\{f_i : x_i \to c\,, j \in J\}$ existe un único morfismo $f : \coprod_{j\in J} x_j \to c$ tal que los siguientes diagramas conmutan $\forall\, i \in J$:

$$\begin{tikzcd} x_i \arrow[r, "\imath_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & \coprod_{j\in J} x_j\,. \arrow[d, dotted, "f"] \\ & c \end{tikzcd}$$

Ejemplo 1.2.3. Cualquier familia $X = \{V_j : j \in J\}$ en $\mathcal{V}ect$ admite productos y coproductos. Específicamente:

1. $\prod_{j\in J} V_j$ es el producto usual de espacio vectoriales y $p_i : \prod_{j\in J} V_j \to V_i$ es la proyección $p_i\left((v_j)_{j\in J}\right) = v_i$.
   Dado W un espacio vectorial y una familia de mapas $\{f_i : W \to V_i\,, i \in J\}$, el mapa $f : W \to \prod_{j\in J} V_j$ dado por
   $$f(w) \;=\; (f_j(w))_{j\in J}. \quad \forall\, w \in W$$
   cumple que $p_i \circ f = f_i$, $\forall\, i \in J$.

2. $\coprod_{j\in J} V_j = \bigoplus_{j\in J} V_j$ y $\imath_i : V_i \to \bigoplus_{j\in J} V_j$ es la inclusión $\imath_i(v) = (v_j)_{j\in J}$ donde $v_j = o$, $\forall\, j \neq i$ y $v_i = v$.

Dado W un espacio vectorial y una familia de mapas $\{f_i : V_i \to W\,, i \in J\}$, el mapa $f : \bigoplus_{j\in J} V_j \to W$ dado por

$$f((v_j)_{j\in J}) \;=\; \sum_{j\in J} f_j(v_j), \qquad \forall\, (v_j)_{j\in J} \in \bigoplus_{j\in J} V_j$$

cumple que $f \circ \imath_i = f_i$, $\forall\, i \in J$.

Definición 1.2.4. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero z y $f : a \to b$ un morfismo en $\mathcal{C}$

1. f tiene *núcleo* si existe $k : s \to a\ \in \mathcal{C}$ tal que:
   (a) $f \circ k = 0_b^s$
   (b) si $h : t \to a$ es tal que $f \circ h = 0_b^t$, entonces existe un único morfismo $h' : t \to s$ tal que $k \circ h' = h$. En tal caso, diremos que $k : s \to a$ es un núcleo de f y se lo nota $kerf$.
2. f tiene un *conúcleo* si existe $p : b \to c\ \in \mathcal{C}$ tal que
   (a) $p \circ f = 0_c^a$
   (b) si $h : b \to d$ es tal que $h \circ f = 0_d^a$, entonces existe un único morfismo $h' : c \to d$ tal que $h' \circ p = h$. En tal caso diremos que $p : b \to c$ es un conúcleo de f y se lo nota $cokerf$.

Ejemplo 1.2.5. Veamos estas construcciones en $\mathcal{V}ect$. Sean V y W dos espacios vecoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces $T : V \to W$ tiene núcleo y conúcleo; específicamente:
Un núcleo de f es la inclusión $\imath : S \to V$ donde $S = \{v\, \in V$ tal que $T(v) = 0_W\}$.
Un conúcleo de f es la proyección $\pi : W \to \frac{W}{\mathrm{Im}\, f}$.

Con estas construcciones ya estamos preparados para definir categorías con un poco más de estructura.

Definición 1.2.6.

1. Una categoría $\mathcal{C}$ es una *Ab-categoría* si $\mathrm{Hom}\,(a, b)$ tiene estructura de grupo abeliano $\forall a, b\, \in O_{\mathcal{C}}$ y si notamos con $+$ a la operación, se cumple que
$$f \circ (g + h) \circ k = f \circ g \circ k + f \circ h \circ k, \quad \forall f, g, h, k \in A_{\mathcal{C}}.$$
2. Una Ab-categoría es *aditiva* si tiene objeto cero y productos finitos.
3. Una categoría aditiva $\mathcal{C}$ es *abeliana* si:
   (a) existen $kerf$ y $cokerf$, $\forall\, a \xrightarrow{\text{f}} b\ \in A_{\mathcal{C}}$,
   (b) si f es un monomorfismo, entonces existe $g \in A_{\mathcal{C}}$ tal que $f = kerg$,
   (c) si f es un epimorfismo, entonces existe $g \in A_{\mathcal{C}}$ tal que $f = cokerg$.

Observación 1.2.7. Si $\mathcal{C}$ es una categoría aditiva con objeto cero z, entonces un morfismo f es un monomorfismo si y sólo si $dom(kerf) = z$ y es epimorfismo si y sólo si $codom(cokerf) = z$.

Definición 1.2.8. Una categoría abeliana es *completa* si admite productos y es *cocompleta* si admite coproductos.

Ejemplo 1.2.9. $\mathcal{V}ect$ es una categoría abeliana completa y cocompleta, donde dados V y W dos espacios vectoriales, la estructura de grupo de $\mathrm{Hom}\,(V, W)$ es la siguiente:

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v) \text{ y el neutro es } o(v) = O_W, \quad \forall\, v \in V.$$

Observar que con la multiplicación por escalares dada por $(kf)(v) = kf(v)$ $\forall k \in \mathbb{K}$, $f \in \mathrm{Hom}\,(V, W)$, $v \in V$, $\mathrm{Hom}\,(V, W)$ resulta un espacio vectorial.

1.3 Categorías monoidales

Definición 1.3.1. Una *categoría monoidal* es una séxtupla $(\mathcal{B}, \otimes, e, \alpha, r, l)$ donde $\mathcal{B}$ es una categoría, $\otimes : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ un functor, e un objeto, α, r, l isomorfismos naturales tales que si escribimos $\otimes(c, d) = c \otimes d$

1. los dominios y codominios de las transformaciones naturales son $\alpha_{a,b,c} : a \otimes (b \otimes c) \to (a \otimes b) \otimes c$, $r_a : e \otimes a \to a$ y $l_a : a \otimes e \to a$, $\forall\ a, b, c \in O_{\mathcal{B}}$,
2. vale $r_e = l_e$,
3. los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
a \otimes (b \otimes (c \otimes d)) \arrow[r, "\alpha_{a,b,c\otimes d}"] \arrow[d, "id_a \otimes \alpha_{b,c,d}"'] & (a \otimes b) \otimes c \otimes d \arrow[r, "\alpha_{a\otimes b,c,d}"] & ((a \otimes b) \otimes c) \otimes d \quad , \\
a \otimes ((b \otimes c) \otimes d) \arrow[rr, "\alpha_{a,b\otimes c,d}"'] & & (a \otimes (b \otimes c)) \otimes d \arrow[u, "\alpha_{a,b,c}\otimes id_d"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a \otimes (e \otimes c) \arrow[r, "\alpha_{a,e,c}"] \arrow[dr, "id_a \otimes r_c"'] & (a \otimes e) \otimes c \quad , \arrow[d, "l_a \otimes id_c"] \\
& a \otimes c
\end{tikzcd}$$

$\forall\ a, b, c, d \in O_{\mathcal{B}}$; (diagramas *pentagonal* y *triangular* respectivamente).

A α le llamaremos *restricción de asociatividad* y a r y l les llamaremos *restricción de unidad a derecha e izquierda* respectivamente. Cuando estos tres isomorfismos naturales son identidades, la categoría se llama *monoidal estricta*.

Ejemplo 1.3.2. La categoría $\mathcal{V}ect$ es monoidal definiendo $\otimes$ como el producto tensorial sobre $\mathbb{K}$, $e = \mathbb{K}$, $\alpha_{U,V,W} : U \otimes (V \otimes W) \to (U \otimes V) \otimes W$, es $\alpha_{U,V,W}(u \otimes (v \otimes w)) = (u \otimes v) \otimes w$, $\forall u \in U, v \in V, w \in W$, y las restricciones de la unidad son:
$r_V : V \otimes \mathbb{K} \to V$, es $r_V(v \otimes k) = kv$, $\forall v \in V, k \in \mathbb{K}$ y
$l_V : \mathbb{K} \otimes V \to V$, es $l_V(k \otimes v) = kv$, $\forall v \in V, k \in \mathbb{K}$.

Ahora generalizaremos la existencia de duales en $\mathcal{V}ect$, a categorías monoidales cualesquiera.

Definición 1.3.3. Sea $(\mathcal{B}, \otimes, e, \alpha, r, l)$ una categoría monoidal.

1. Diremos que $\mathcal{B}$ es *rígida a izquierda* si $\forall a \in O_{\mathcal{B}}$ existe un objeto ${}^\vee a$ y dos morfismos ${}^\vee ev_a : {}^\vee a \otimes a \to e$ y ${}^\vee coev_a : e \to a \otimes {}^\vee a$ tales que los siguientes diagramas conmutan $\forall\ a \in O_{\mathcal{B}}$:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "r_a^{-1}"] \arrow[drr, "l_a^{-1}"'] & e \otimes a \arrow[r, "{}^\vee coev_a \otimes id_a"] & a \otimes {}^\vee a \otimes a \quad , \arrow[d, "id_a \otimes {}^\vee ev_a"] \\
& & a \otimes e
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}^\vee a \arrow[r, "l^{-1}_{{}^\vee a}"] \arrow[drr, "r^{-1}_{{}^\vee a}"'] & {}^\vee a \otimes e \arrow[r, "id_{{}^\vee a} \otimes {}^\vee coev_a"] & {}^\vee a \otimes a \otimes {}^\vee a \quad , \arrow[d, "{}^\vee ev_a \otimes id_a"] \\
& & e \otimes {}^\vee a
\end{tikzcd}$$

A ${}^{\vee}ev$ la llamaremos *evaluación a izquierda* y a ${}^{\vee}coev$ *coevaluación a izquierda.*

2. Diremos que $\mathcal{B}$ es *rígida a derecha* si $\forall a \in O_{\mathcal{B}}$ existe un objeto $a^{\vee}$ y dos morfismos $ev_a^{\vee} : a \otimes a^{\vee} \to e$ y $coev_a^{\vee} : e \to a^{\vee} \otimes a$ tales que los siguientes diagramas conmutan $\forall\, a \in O_{\mathcal{B}}$:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "l_a^{-1}"] \arrow[drr, "r_a^{-1}"'] & a \otimes e \arrow[r, "id_a \otimes coev_a^{\vee}"] & a \otimes a^{\vee} \otimes a \arrow[d, "ev_a^{\vee} \otimes id_a"] \\ & & e \otimes a \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} a^{\vee} \arrow[r, "r_{a^{\vee}}^{-1}"] \arrow[drr, "l_{a^{\vee}}^{-1}"'] & e \otimes a^{\vee} \arrow[r, "coev_a^{\vee} \otimes id_{a^{\vee}}"] & a^{\vee} \otimes a \otimes a^{\vee} \arrow[d, "id_{a^{\vee}} \otimes ev_a^{\vee}"] \\ & & a^{\vee} \otimes e \end{tikzcd} \quad ,$$

A $ev^{\vee}$ la llamaremos *evaluación a derecha* y a $coev^{\vee}$ *coevaluación a derecha.*

3. La categoría $\mathcal{B}$ es *rígida* si es rígida a izquierda y a derecha.

Proposición 1.3.4. Sea $\mathcal{V}ect_{fin}$ con la estructura monoidal vista en el Ejemplo 1.3.2. Entonces $\mathcal{V}ect$ es rígida con la siguiente estructura:

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y V^* su espacio dual. Tomemos ${}^{\vee}V = V^{\vee} = V^*$.

Definimos las evaluaciones a izquierda y derecha de la siguiente forma:
${}^{\vee}ev_V : V^* \otimes V \to \mathbb{K}$ es $ev(\alpha, v) = \alpha(v) \overset{not}{=} \langle \alpha, v \rangle\,, \quad \forall v \in V, \alpha \in V^*$;
$ev_V^{\vee} : V \otimes V^* \to \mathbb{K}$ es $ev(v, \alpha) = \alpha(v) \overset{\text{not}}{=} \langle v, \alpha \rangle\,, \quad \forall v \in V, \alpha \in V^*$.

Sea $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base de V y $\left\{e^1, e^2, ..., e^n\right\}$ su base dual. Definimos la coevaluación a izquierda y derecha de la siguiente forma:

${}^{\vee}coev_V : \mathbb{K} \to V \otimes V^*$ es la transformación lineal tal que ${}^{\vee}coev_V(1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e^i$ y

$coev_V^{\vee} : \mathbb{K} \to V^* \otimes V$ es tal que $coev_V^{\vee}(1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} e^i \otimes e_i$.

Demostración: Es claro que ambas evaluaciones son transformaciones lineales. Veamos que los dos diagramas de rigidez a izquierda conmutan (los otros son análogos):

$$\begin{aligned} (\mathrm{id} \otimes^{\vee} ev_V) \circ ({}^{\vee}coev_V \otimes \mathrm{id}\,) \circ r^{-1}(v) &= (\mathrm{id} \otimes^{\vee} ev_V) \circ ({}^{\vee}coev_V \otimes \mathrm{id}\,)(1 \otimes v) \\ &= (\mathrm{id} \otimes^{\vee} ev_V) \left(\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e^i \otimes v \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_1 \otimes \left\langle e^i, v \right\rangle \\ &= v \otimes 1 \\ &= l^{-1}(v), \qquad \forall\, v \in V \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} ({}^{\vee}ev_V \otimes \mathrm{id}\,) \circ (\mathrm{id} \otimes^{\vee} coev_V) \circ l^{-1}(\alpha) &= ({}^{\vee}ev_V \otimes \mathrm{id}\,) \circ (\mathrm{id} \otimes^{\vee} coev_V)(\alpha \otimes 1) \\ &= ({}^{\vee}ev_V \otimes \mathrm{id}\,) \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha \otimes e_i \otimes e^i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha\,,\, e_i \rangle \otimes e^i \\ &= 1 \otimes \alpha \\ &= r^{-1}(\alpha), \qquad \forall\, \alpha \in V^*. \end{aligned}$$

$\square$

En una categoría monoidal $(\mathcal{B}, \otimes, e, \alpha, r, l)$, definimos $\otimes^{op} : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ como $\otimes^{op}(a, b) = \otimes(b, a) = b \otimes a$, $\forall a, b \in O_{\mathcal{B}}$ y $\otimes^{op}(f, g) = \otimes(g, f) = g \otimes f$, $\forall f, g \in A_{\mathcal{B}}$. Es claro que $\otimes^{op}$ es un functor de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ en $\mathcal{C}$.

Definición 1.3.5. Una categoría *trenzada* es una estructura $(\mathcal{B}, \otimes, e, \alpha, r, l, c)$ donde $(\mathcal{B}, \otimes, e, \alpha, r, l)$ es una categoría monoidal y c es un isomosfismo natural $c : \otimes \to \otimes^{op} : B \otimes B \to B$ (es decir que $c_{a,b} : a \otimes b \to b \otimes a$) tal que los siguientes diagramas *hexagonales* conmutan:

$$\begin{tikzcd}
(a \otimes b) \otimes c \arrow[r, "c_{a\otimes b,c}"] \arrow[d, "\alpha^{-1}_{a,b,c}"'] & c \otimes (a \otimes b) \arrow[d, "\alpha_{c,a,b}"] \\
a \otimes (b \otimes c) \arrow[d, "id_a \otimes c_{b,c}"'] & (c \otimes a) \otimes b \arrow[d, "c_{c,a} \otimes id_b"] \\
a \otimes (c \otimes b) \arrow[r, "\alpha_{a,c,b}"'] & (a \otimes c) \otimes b
\end{tikzcd} \quad , \quad
\begin{tikzcd}
a \otimes (b \otimes c) \arrow[r, "c_{a,b\otimes c}"] \arrow[d, "\alpha_{a,b,c}"'] & (b \otimes c) \otimes a \arrow[d, "\alpha^{-1}_{b,c,a}"] \\
(a \otimes b) \otimes c \arrow[d, "c_{a,b} \otimes id_c"'] & b \otimes (c \otimes a) \arrow[d, "id_b \otimes c_{c,a}"] \\
(b \otimes a) \otimes c \arrow[r, "\alpha^{-1}_{b,a,c}"'] & b \otimes (a \otimes c)
\end{tikzcd} \quad ,$$

$\forall\, a, b, c \in O_{\mathcal{B}}$.

Al isomorfismo c se le llama una *trenza* en $\mathcal{B}$.

Observar que si $\alpha = \mathrm{id}$, entonces los diagramas hexagonales se traducen a:

$$(\mathrm{id}_{\,b} \otimes c_{a,c}) \circ (c_{a,b} \otimes \mathrm{id}_{\,c}) = c_{a,b\otimes c} \quad \text{y}$$

$$(c_{a,c} \otimes \mathrm{id}_{\,b}) \circ (\mathrm{id}_{\,a} \otimes c_{b,c}) = c_{a\otimes b,c}, \qquad \forall\, a, b, c \in O_{\mathcal{B}}.$$

Ejemplo 1.3.6. $\mathcal{V}ect$ con la estructura monoidal del Ejemplo 1.3.2 y trenza τ la trasposición $(\tau(v \otimes w) = w \otimes v)$, es una categoría trenzada.

Proposición 1.3.7. Sea $(B, \otimes, e, \alpha, r, l, c)$ una categoría trenzada con $\alpha = \mathrm{id}$ y sean a, b, y c objetos de B. Entonces vale

$$(\mathrm{id}_{\,c} \otimes c_{a,b}) \circ (c_{a,c} \otimes \mathrm{id}_{\,b}) \circ (\mathrm{id}_{\,a} \otimes c_{b,c}) = (c_{b,c} \otimes \mathrm{id}_{\,a}) \circ (\mathrm{id} \otimes c_{a,c}) \circ (c_{a,b} \otimes \mathrm{id}_{\,c}).$$

Demostración: Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
a \otimes b \otimes c \arrow[r, "id_a \otimes c_{b,c}"] \arrow[d, "c_{a,b} \otimes id_c"'] \arrow[dr, "c_{a\otimes b,c}"] & a \otimes c \otimes b \arrow[d, "c_{a,c} \otimes id"] \\
b \otimes a \otimes c \arrow[d, "id \otimes c_{a,c}"'] \arrow[dr, "c_{b\otimes a,c}"] & c \otimes a \otimes b \arrow[d, "id \otimes c_{a,b}"] \\
b \otimes c \otimes a \arrow[r, "c_{b,c} \otimes id"'] & c \otimes b \otimes a
\end{tikzcd} .$$

Ambos diagramas triangulares son el segundo diagrama hexagonal tomando $\alpha = \mathrm{id}$, y por lo tanto conmutan. El diagrama central conmuta por naturalidad de la trenza. Por lo tanto, el diagrama externo conmuta. $\square$

Capítulo 2

Álgebras y módulos

A partir de esta sección $\mathbb{K}$ es un cuerpo fijo. Todos los espacios vectoriales y todos los productos tensoriales, a menos que se indique lo contrario, serán sobre $\mathbb{K}$. El isomorfismo $A \approx A \otimes \mathbb{K}$ es $a \mapsto a \otimes 1_k$ cuyo inverso es $a \otimes k \mapsto ka$ y análogamente para $A \approx \mathbb{K} \otimes A$. Cuando escribimos $a \otimes k \approx ka$ nos referimos a este isomorfismo. Un *mapa* entre espacios vectoriales querrá decir transformación lineal. El mapa $\tau = \tau_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$ es $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$. Si V es un espacio vectorial, $f \in V^*$ y $v \in V$ a veces escribiremos $\langle f \,, \, v \rangle$ a la evaluación de f en v. Una referencia para este capítulo es [Mon93].

2.1 Álgebras

Definición 2.1.1. Un álgebra es una terna (A, m, u) donde A es un espacio vectorial y $m : A \otimes A \to A$ y $u : \mathbb{K} \to A$ son mapas tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m \otimes id"] \arrow[d, "id \otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd} , \qquad
\begin{tikzcd}
& A \otimes A \arrow[dd, "m"] & \\
\mathbb{K} \otimes A \arrow[ur, "u \otimes id"] \arrow[dr, "\approx"'] & & A \otimes \mathbb{K} \arrow[ul, "id \otimes u"'] \arrow[dl, "\approx"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

(diagramas de *asociatividad* y *unidad* respectivamente). A m le llamaremos *multiplicación* y a u *unidad*. Escribiremos $m(a \otimes b) = ab$ y $u(1_{\mathbb{K}}) = 1_A$, (luego $u(k) = k1_A$, $\forall\, k \in \mathbb{K}$). Con esta notación, los diagramas de asociatividad y unidad se traducen a:

$$(ab)c = a(bc) \text{ y } a1_A = 1_A a = a, \; \forall a, b, c \in A.$$

Cuando no haya lugar a confusión, diremos el álgebra A en lugar de (A, m, u).

Definición 2.1.2. Sea A un álgebra e $I \subset A$ un subespacio de A,

1. I es un *ideal a izquierda* de A si $AI \subset I$.
2. I es un *ideal a derecha* de A si $IA \subset I$.
3. Si I es un ideal a izquierda y a derecha de A diremos que I es un *ideal bilateral* de A.

Definición 2.1.3. Sean (A, m_A, u_A) y (B, m_B, u_B) dos álgebras. Un mapa $f : A \to B$ es un *morfismo de álgebras* si los siguientes diagramas conmutan:

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\quad , \qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[r, "u_A"] \arrow[dr, "u_B"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& B
\end{tikzcd}
\quad ;
$$

o sea si $f(aa') = f(a)f(a'),\ \forall a, a' \in A$ y $f(1_A) = 1_B$.

Ejemplo 2.1.4. El cuerpo $\mathbb{K}$ con su multiplicación y unidad $u = id_{\mathbb{K}}$ es claramente un álgebra.

Ejemplo 2.1.5. Si $(G, *, e)$ es un grupo y consideramos

$KG := \left\{ \sum_{i=1}^{m} k_i g_i : k_i \in \mathbb{K}, g_i \in G, m \in \mathbb{N} \right\}$ y definimos $m : KG \otimes KG \to KG$ y $u : K \to KG$ por

$$m(g \otimes g') = (g * g') \text{ y } u(1) = e,\ \forall\, g, g' \in G$$

(y extendemos a KG por linealidad) , entonces la terna (KG, m, u) es un álgebra y se llama *álgebra del grupo G*.

Ejemplo 2.1.6. Si (A, m, u) es un álgebra e I es un ideal de A, entonces $(\frac{A}{I}, \hat{m}, \hat{u})$ es un álgebra, donde $\hat{m}$ y $\hat{u}$ son las inducidas por m y u. Específicamente: $\hat{m}\left(\overline{a} \otimes \overline{b}\right) = \overline{m\,(a \otimes b)}$ $\forall a, b \in A$ y $\hat{u}\,(1) = \overline{1_A}$.

Ejemplo 2.1.7. Sea V un espacio vectorial, entonces $\operatorname{End}(V) = \{T : V \to V \text{ tal que } T \text{ es lineal}\}$ es un álgebra con la siguiente estructura:

$$
\begin{aligned}
m(f \otimes g) &= f \circ g, \quad \forall\, f, g \in \operatorname{End}(V) \\
&\text{y} \\
u(1) &= \mathrm{id}_V.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.1.8. Es fácil ver que si (A, m, u) es un álgebra, entonces $A^{op} = (A, m^{op}, u)$ es también un álgebra, donde $m^{op} = m \circ \tau$.

Ejemplo 2.1.9. Sea V un espacio vectorial. Consideremos $T(V) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n(V)$ donde $T^0(V) = \mathbb{K}$ y $T^n(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n}$. Definimos $m : T(V) \otimes T(V) \to T(V)$ y $u : \mathbb{K} \to T(V)$ por:

$$m((v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) \otimes (d_1 \otimes \cdots \otimes d_n)) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_m \otimes d_1 \otimes \cdots \otimes d_n,$$

$m(k \otimes (v_1 \otimes \cdots \otimes v_m)) = m((v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) \otimes k) = k(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n),\ \forall\ (v_1 \otimes \cdots \otimes v_m),\ (d_1 \otimes \cdots \otimes d_n) \in T(V)$
y

$$u(k) = k,\ \forall\, k \in \mathbb{K}.$$

Entonces la terna $(T(V), m, u)$ es un álgebra y se llama *álgebra tensorial sobre V*.

Proposición 2.1.10. Si (A, m_A, u_A) y (B, m_B, u_B) son dos álgebras y definimos $m_{A\otimes B} : (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \to A \otimes B$ y $u_{A\otimes B} : \mathbb{K} \to A \otimes B$ como

$$
\begin{aligned}
(a \otimes b)(a' \otimes b') &= aa' \otimes bb' \\
&\text{y} \\
1_{A\otimes B} &= 1_A \otimes 1_B,
\end{aligned}
$$

entonces $(A \otimes B, m_{A\otimes B}, u_{A\otimes B})$ es un álgebra.

Demostración: Observar que $m_{A\otimes B} = (m_A \otimes m_B) \circ (id_A \otimes \tau_{B,A} \otimes id_B)$ y que $u_{A\otimes B} = (u_A \otimes u_B) \circ \varphi$, donde φ es el isomorfismo $\mathbb{K} \to \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}$. Por lo tanto $m_{A\otimes B}$ y $u_{A\otimes B}$ son lineales.
Veamos que $m_{A\otimes B}$ es asociativa:

$$\begin{aligned}
[(a \otimes b)(a' \otimes b')](a'' \otimes b'') &= (aa' \otimes bb')(a'' \otimes b'') \\
&= (aa')a'' \otimes (bb')b'' \\
&= a(a'a'') \otimes b(b'b'') \\
&= (a \otimes b)[(a' \otimes b')(a'' \otimes b'')], \quad \forall\, a, a', a'' \in A,\ b, b', b'' \in B.
\end{aligned}$$

Veamos ahora la conmutatividad del diagrama de unidad:

$$\begin{aligned}
1_{A\otimes B}(a \otimes b) &= (1_A \otimes 1_B)(a \otimes b) \\
&= 1_A a \otimes 1_B b \\
&= a \otimes b \\
&= (a \otimes b)(1_A \otimes 1_B) \\
&= (a \otimes b)1_{A\otimes B}.
\end{aligned}$$

□

De ahora en adelante, la estructura de álgebra de $A \otimes A$ será la de la proposición anterior.

2.2 Módulos sobre un álgebra

Definición 2.2.1. Sea A un álgebra, un A-*módulo a izquierda* es un par (M, ρ), donde M es un espacio vectorial y ρ es un mapa $\rho : A \otimes M \to M$ tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes M \arrow[r, "m\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes\rho"'] & A \otimes M \arrow[d, "\rho"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\rho"'] & A
\end{tikzcd}, \qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \otimes M \arrow[r, "u\otimes id"] \arrow[dr, "\approx"'] & A \otimes M \arrow[d, "\rho"] \\
& M
\end{tikzcd}.$$

A un mapa ρ en las condiciones anteriores se lo llama *acción*.

Notación 2.2.2. Escribiremos $\rho(a \otimes m) = a \cdot m$.

Con esta última notación los diagramas de arriba se traducen a:

$$a \cdot (b \cdot m) = (ab) \cdot m \text{ y } 1_A \cdot m = m \;\; \forall a, b \in A,\ m \in M.$$

Definición 2.2.3. Análogamente, un A-*módulo a derecha* es un par (M, ρ), donde M es un espacio vectorial y ρ es un mapa $\rho : M \otimes A \to M$, $\rho(m \otimes a) = m \cdot a$, tal que: $(m \cdot a) \cdot b = m \cdot (ab)$ y $m \cdot 1_A = m$, $\forall a, b \in A$, $m \in M$.

A menos que se indique lo contrario, un A-*módulo* será un A-módulo a izquierda.

Definición 2.2.4. Dados (M, ρ_M) y (N, ρ_N) dos A-módulos, un mapa $f : M \to N$ es un *morfismo de módulos* si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes M \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[d, "id\otimes f"'] & M \arrow[d, "f"] \\
A \otimes N \arrow[r, "\rho_N"'] & N
\end{tikzcd}$$

o sea, si $f(a \cdot m) = a \cdot f(m),\ \forall\, m \in M, a \in A$.

Observar que si $f : M \to N$ es un morfismo de módulos biyectivo, entonces $f^{-1} : N \to M$ es también un morfismo de módulos.

Definición 2.2.5. Sea (M, ρ_M) un A-módulo y $N \subset M$ un subespacio de M. Decimos que N es un A-*submódulo* de M (a izquierda) si $A \cdot N \subset N$, o sea si $a \cdot n \in N$, $\forall\, n \in N$, $a \in A$.

Observación 2.2.6. Si N es un A-submódulo de (M, ρ), entonces $(N, \rho_N = \rho\,|_{A\otimes N})$ es un A-módulo y la inclusión $\imath : N \to M$ resulta un morfismo de A-módulos

Observación 2.2.7. Si A y B son dos álgebras, M es un A-módulo y N es un B-módulo, entonces $M \otimes N$ es un $(A \otimes B)$-módulo con la acción dada por

$$(a \otimes b) \cdot (m \otimes n) = a \cdot m \otimes b \cdot n, \quad \forall\, a \in A,\ b \in B,\ m \in M,\ n \in N.$$

En particular $M \otimes M$ es un $(A \otimes A)$-módulo. Además, si $f : A \to B$ es un morfismo de álgebras, entonces N es también un A-módulo definiendo

$$a \cdot n = f(a) \cdot n, \quad \forall\, a \in A,\ n \in N.$$

Ejemplo 2.2.8. Si (A, m, u) es un álgebra, entonces A es un A-módulo con acción m. Observar que los diagramas de acción se transforman en los de asociatividad y unidad.

Proposición 2.2.9. Sea (M, ρ) un A-módulo y N un A-submódulo de M. Entonces existe un mapa $\hat{\rho} : A \otimes \frac{M}{N} \to \frac{M}{N}$ tal que $(\frac{M}{N}, \hat{\rho})$ es un A-módulo y $\pi : M \to \frac{M}{N}$ es un morfismo de módulos. Explícitamente,

$$\hat{\rho}(a \otimes \overline{m}) \quad = \quad \overline{\rho(a \otimes m)},\ \forall\, a \in A, m \in M.$$

Demostración: Sean $m, m' \in M$ tales que $\overline{m} = \overline{m'}$, i.e. $m - m' \in N$, y sea $a \in A$. Entonces

$$a \cdot m - a \cdot m' = a \cdot (m - m') \in N$$

y por lo tanto

$$\overline{a \cdot m} = \overline{a \cdot m'}.$$

Luego tiene sentido definir $\hat{\rho} : A \otimes \frac{M}{N} \to \frac{M}{N}$ mediante $\hat{\rho}(a \otimes \overline{m}) = \overline{a \cdot m}$, es decir definimos

$$a \cdot \overline{m} := \overline{a \cdot m},\ \forall a \in A, m \in M.$$

Veamos ahora que los diagramas de la Definición 2.2.1 conmutan para $\hat{\rho}$:

$$a \cdot (b \cdot \overline{m}) = a \cdot \overline{b \cdot m} = \overline{a \cdot (b \cdot m)} = \overline{(ab) \cdot m} = (ab) \cdot \overline{m},\ \forall\, a, b \in A,\ m \in M$$

y

$$1_A \cdot \overline{m} = \overline{1_A \cdot m} = \overline{m},\ \forall\, m \in M.$$

Claramente π resulta ser un morfismo de módulos. □

Definición 2.2.10. Llamaremos ${}_A\mathcal{M}$ a la categoría cuyos objetos son los A-módulos y cuyas flechas son los morfismos de A-módulos. Si M, N son dos A-módulos, escribiremos $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ al conjunto de los morfismos de A-módulos de M en N.

Observación 2.2.11. Sea $\emptyset = \{0_{\mathbb{K}}\}$ el espacio vectorial nulo. Entonces $(\emptyset, \rho)$ es un A-módulo, donde $\rho(a \otimes 0_{\mathbb{K}}) = 0_{\mathbb{K}}, \forall a \in A$. Este A-módulo es un objeto cero en ${}_A\mathcal{M}$.

Observar que como ${}_A\mathcal{M}$ es una subcategoría de $\mathcal{V}ect$, entonces dados M y N dos módulos, $\operatorname{Hom}(M, N)$ tiene estructura de grupo como en el Ejemplo 1.2.9, ya que $f+g$ es un morfismo de módulos para todo $f, g \in \operatorname{Hom}(M, N)$.

Observación 2.2.12. La categoría ${}_A\mathcal{M}$ tiene productos. Específicamente,

$$\prod_{i \in I}(M_i, \rho_i) = (M, \rho)$$

donde $M = \prod_{i \in I} M_i$ como espacio vectorial y $\rho(a \otimes (m_i)_{i \in I}) = (\rho_i(a \otimes m_i))_{i \in I}$. Es fácil ver que (M, ρ) es un módulo y que dado N otro módulo y una familia de morfismos de módulos $\{f_i : N \to M_i \,, i \in J\}$, el mapa $f : N \to \prod_{j \in J} M_j$ construído en el Ejemplo 1.2.3 es un morfismo de módulos.

Por lo tanto, de estas últimas observaciones, se concluye que ${}_A\mathcal{M}$ es aditiva.

Observación 2.2.13. Sea $f \in \operatorname{Hom}_A(M, N)$. Entonces es fácil ver que $\operatorname{Ker} f$ es un submódulo de M y que $\operatorname{Im} f$ es un submódulo de N, por lo tanto como la inclusión y la proyección son morfismos de módulos, ${}_A\mathcal{M}$ tiene núcleos y conúcleos.

Como los monomorfismos, epimorfismos, núcleos y conúcleos de ${}_A\mathcal{M}$, lo son también en $\mathcal{V}ect$, tenemos que ${}_A\mathcal{M}$ es abeliana completa.

Capítulo 3

Coálgebras y comódulos

En este capítulo, dualizamos las construcciones del Capítulo 2, (*i.e.* cambiamos el sentido de las flechas en los diagramas de las Definiciones 2.1.1 y 2.2.1), definiendo coálgebras y comódulos. Algunos temas de este capítulo pueden encontrarse desarrollados con mayor profundidad en [DNR01] y [Mon93].

3.1 Coálgebras

Definición 3.1.1. Una *coálgebra* es una terna (C, Δ, ε) donde C es un espacio vectorial y $\Delta : C \to C \otimes C$ y $\varepsilon : C \to \mathbb{K}$ son mapas tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes id"] \\ C \otimes C \arrow[r, "id \otimes \Delta"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \quad , \qquad \begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\approx"'] \arrow[dr, "\approx"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\ \mathbb{K} \otimes C & & C \otimes \mathbb{K} \\ & C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon \otimes id"] \arrow[ur, "id \otimes \varepsilon"'] & \end{tikzcd} \quad ,$$

(diagramas de *co-asociatividad* y *co-unidad* respectivamente).
A Δ le llamaremos *comultiplicación* y a ε *counidad*.

Notación de Sweedler.
Tenemos que $\Delta(x) = \sum_{i \in I} x_1^i \otimes x_2^i$ donde x_1^i y $x_2^i \in C$ y $\#I < \infty$.

Escribiremos $\Delta(x) = \displaystyle\sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$.

A veces escribiremos $\sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ en lugar de $\displaystyle\sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$.

Proposición 3.1.3. Consideremos $\Delta_n : C \to \underbrace{C \otimes \cdots \otimes C}_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, dados por:

$\Delta_1 = \Delta$ *y* $\Delta_n = (\Delta \otimes \mathrm{id}_{C^{\otimes n-1}}) \circ \Delta_{n-1}, \ \forall n \geq 2,$
entonces
$\Delta_n = (\mathrm{id}_{C^{\otimes p}} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}_{C^{\otimes n-1-p}}) \circ \Delta_{n-1}, \ \forall n \geq 2, \ p \in \{0, \cdots, n-1\}.$

Demostración: Probemos la igualdad por inducción en n.

Si $n=2$, tenemos que probar que probar que $(\Delta \otimes \mathrm{id}\,)\circ\Delta = (\mathrm{id}\,\otimes\Delta)\circ\Delta$, y esto es cierto pues Δ es coasociativa. Supongamos que vale $\Delta_n = (\mathrm{id}_{\,C^{\otimes p}}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id}_{\,C^{\otimes n-1-p}})\circ\Delta_{n-1}$, $\forall\, p\in\{0,\cdots,n-1\}$, veamos que $\Delta_{n+1} = (\mathrm{id}_{\,C^{\otimes p}}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id}_{\,C^{\otimes n-p}})\circ\Delta_n$, $\forall\ p\in\{0,\cdots,n\}$.

El caso $p=0$ es cierto por definición de Δ_{n+1}. Sea $p\in\{1,\cdots,n\}$, entonces

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id}_{\,C^{\otimes p}}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id}_{\,C^{\otimes n-p}})\circ\Delta_n &= (\mathrm{id}_{\,C^{\otimes p}}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id}_{\,C^{\otimes n-p}})\circ(\mathrm{id}_{\,C^{\otimes p-1}}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id}_{\,C^{\otimes n-p}})\circ\Delta_{n-1}\\
&= (\mathrm{id}_{\,C^{\otimes p-1}}\otimes(\mathrm{id}\,\otimes\Delta)\circ\Delta\otimes\mathrm{id}_{\,C^{\otimes n-p}})\circ\Delta_{n-1}\\
&= (\mathrm{id}_{\,C^{\otimes p-1}}\otimes\Delta\circ(\mathrm{id}\,\otimes\Delta)\otimes\mathrm{id}_{\,C^{\otimes n-p}})\circ\Delta_{n-1}\\
&= (\mathrm{id}_{\,C^{\otimes p-1}}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id}_{\,C^{\otimes n+1-p}})\circ(\mathrm{id}_{\,C^{\otimes p-1}}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id}_{\,C^{\otimes n-p}})\circ\Delta_{n-1}\\
&= (\mathrm{id}_{\,C^{\otimes p-1}}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id}_{\,C^{\otimes n-(p-1)}})\circ\Delta_n.
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que

$$(\mathrm{id}_{\,C^{\otimes p}}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id}_{\,C^{\otimes n-p}})\circ\Delta_n = (\mathrm{id}_{\,C^{\otimes p-1}}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id}_{\,C^{\otimes n-(p-1)}})\circ\Delta_n,\quad \forall p\in\{0,\cdots,n\}.$$

Tomando $p=1$, del lado derecho de la igualdad obtenemos Δ_{n+1}; por lo tanto, por inducción en p, tenemos que

$$(\mathrm{id}_{\,C^{\otimes p}}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id}_{\,C^{\otimes n-p}})\circ\Delta_n = \Delta_{n+1},\quad \forall p\in\{0,\cdots,n\}.$$

□

Notación 3.1.4. Siguiendo con la notación de Sweedler, $\forall n\geq 1$ escribiremos

$$\Delta_n(x) = \sum_{(x)} x_{(1)}\otimes\cdots\otimes x_{(n+1)}.$$

Observación 3.1.5. Con la Notación de Sweedler el diagrama de co-unidad se traduce en

$$\sum_{(x)}\varepsilon(x_{(1)})x_{(2)} = \sum_{(x)} x_{(1)}\varepsilon(x_{(2)}) = x,\ \ \forall x\in C.$$

Definición 3.1.6. Sea (C,Δ,ε) una coálgebra e I un subespacio de C,

1. I es un *coideal a izquierda de* C si $\Delta(I)\subset C\otimes I$.
2. I es un *coideal a derecha de* C si $\Delta(I)\subset I\otimes C$.
3. I es un *coideal de* C si $\Delta(I)\subset I\otimes C + C\otimes I$ y $\varepsilon(I)=0$.

Definición 3.1.7. Sean $(C,\Delta_C,\varepsilon_C)$ y $(D,\Delta_D,\varepsilon_D)$ dos coálgebras. Un mapa $f: C\to D$ es un *morfismo de coálgebras* si los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta_C"] \arrow[d, "f"'] & C\otimes C \arrow[d, "f\otimes f"] \\
D \arrow[r, "\Delta_D"'] & D\otimes D
\end{tikzcd}\ ,\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[d, "\varepsilon_D"] \\
 & \mathbb{K}
\end{tikzcd}\ ;$$

o sea si

$$\sum_{(x)} f(x_{(1)})\otimes f(x_{(2)}) = \sum_{(f(x))} f(x)_{(1)}\otimes f(x)_{(2)}\ \text{y}\ \varepsilon_C(x) = \varepsilon_D(f(x)),\ \forall\, x\in C.$$

Ejemplo 3.1.8. El cuerpo $\mathbb{K}$ con comultiplicación $\Delta(k) = k\otimes 1_{\mathbb{K}}$ y counidad $\varepsilon = id_{\mathbb{K}}$ es una coálgebra.

Ejemplo 3.1.9. Sea $(G,*,e)$ un grupo y KG el álgebra de grupo asociada. Sean $\Delta: KG\to KG\otimes KG$ y $\varepsilon: KG\to\mathbb{K}$ las extensiones por linealidad de $g\mapsto g\otimes g$ y $g\mapsto 1$, $\forall\ g\in G$. Entonces (KG,Δ,ε) es una coálgebra.

Ejemplo 3.1.10. Si (C, Δ, ε) es una coálgebra e I es un coideal de C, entonces $(\frac{C}{I}, \hat{\Delta}, \hat{\varepsilon})$ es una coálgebra donde $\hat{\Delta}$ y $\hat{\varepsilon}$ son los mapas inducidos por Δ y ε. Específicamente:

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}(\overline{c}) &= \sum_{(c)} \overline{c_{(1)}} \otimes \overline{c_{(2)}},\\ \hat{\varepsilon}(\overline{c}) &= \varepsilon(c), \ \forall\, c \in C.\end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.11. Es fácil ver que si (C, Δ, ε) es una coálgebra, entonces $C^{cop} = (C, \Delta^{op}, \varepsilon)$ es también una coálgebra, donde $\Delta^{op} = \tau \circ \Delta$.

Ejemplo 3.1.12. Sea (A, m, u) un álgebra de dimensión finita. Entonces $A^* = \mathrm{Hom}\,(A, \mathbb{K})$ es una coálgebra con la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}\Delta(f) &= \sum_{(f)} f_{(1)} \otimes f_{(2)} \iff \sum_{(f)} \left\langle f_{(1)}\,,\, a\right\rangle \left\langle f_{(2)}\,,\, b\right\rangle = f(ab), \ \forall\, a, b \in A,\\ \varepsilon(f) &= \langle f\,,\, 1_A\rangle\,, \qquad \forall\, f \in A^*.\end{aligned}$$

Observación 3.1.13. Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, como vimos en el Ejemplo 2.1.7, $\mathrm{End}\,(V)$ es un álgebra de dimensión finita. Por lo tanto $\mathrm{End}\,(V)^*$ es una coálgebra definiendo:

$$\begin{aligned}\Delta(f) &= \sum_{(f)} f_{(1)} \otimes f_{(2)} \iff \sum_{(f)} \left\langle f_{(1)}\,,\, \alpha\right\rangle \left\langle f_{(2)}\,,\, \beta\right\rangle = f(\alpha \circ \beta), \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathrm{End}\,(V),\\ \varepsilon(f) &= \langle f\,,\, \mathrm{id}_V\rangle\,, \qquad \forall\, f \in \mathrm{End}\,(V)^*.\end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.14. Sea $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ una coálgebra, entonces el álgebra tensorial sobre C admite una estructura de coálgebra definiendo $\Delta : T(C) \to T(C) \otimes T(C)$ y $\varepsilon : T(C) \to \mathbb{K}$ mediante:

$$\begin{aligned}\Delta(c^1 \otimes \cdots \otimes c^n) &= \sum_{(c^1), \cdots, (c^n)} ({c^1}_{(1)} \otimes \cdots \otimes {c^n}_{(1)}) \otimes ({c^1}_{(2)} \otimes \cdots \otimes {c^n}_{(2)}),\\ \Delta(1_{\mathbb{K}}) &= 1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}},\\ \varepsilon(c^1 \otimes \cdots \otimes c^n) &= \varepsilon(c^1) \cdots \varepsilon(c^n)\\ \varepsilon(1_{\mathbb{K}}) &= 1_{\mathbb{K}},\end{aligned}$$

para todo $c^1 \otimes \cdots \otimes c^n$ en $T^n(C)$, $n > 0$.

Proposición 3.1.15. Sean $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ y $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ dos coálgebras.

Sean $\Delta_{C \otimes D} : C \otimes D \to (C \otimes D) \otimes (C \otimes D)$ y $\varepsilon_{C \otimes D} : \mathbb{K} \to C \otimes D$ dadas por:

$$\begin{aligned}\Delta_{C \otimes D}(c \otimes d) &= \sum_{(c),(d)} (c_{(1)} \otimes d_{(1)}) \otimes (c_{(2)} \otimes d_{(2)}),\\ \varepsilon_{C \otimes D}(c \otimes d) &= \varepsilon_C(c) \varepsilon_D(d).\end{aligned}$$

Entonces $(C \otimes D, \Delta_{C \otimes D}, \varepsilon_{C \otimes D})$ es una coálgebra.

Demostración: Veamos la conmutatividad del diagrama de co-asociatividad:

$$
\begin{aligned}
((\Delta_{C\otimes D}\otimes \mathrm{id}\,)\circ \Delta_{C\otimes D})\,(c\otimes d) &= (\Delta_{C\otimes D}\otimes \mathrm{id}\,)\left(\sum_{(c),(d)}(c_{(1)}\otimes d_{(1)})\otimes(c_{(2)}\otimes d_{(2)})\right)\\
&= \sum_{(c),(d)}\Delta_{C\otimes D}(c_{(1)}\otimes d_{(1)})\otimes(c_{(2)}\otimes d_{(2)})\\
&= \sum_{(c),(d)}\big((c_{(1)})_{(1)}\otimes(d_{(1)})_{(1)}\otimes\big((c_{(1)})_{(2)}\otimes(d_{(1)})_{(2)}\big)\big)\otimes(c_{(2)}\otimes d_{(2)})\\
&= \sum_{(c),(d)}(c_{(1)}\otimes d_{(1)})\otimes(c_{(2)}\otimes d_{(2)})\otimes(c_{(3)}\otimes d_{(3)})\\
&= \sum_{(c),(d)}(c_{(1)}\otimes d_{(1)})\otimes\big((c_{(2)})_{(1)}\otimes(d_{(2)})_{(1)}\big)\otimes\big((c_{(2)})_{(2)}\otimes(d_{(2)})_{(2)}\big)\\
&= (\mathrm{id}\,\otimes\Delta_{C\otimes D})\left(\sum_{(c),(d)}(c_{(1)}\otimes d_{(1)})\otimes(c_{(2)}\otimes d_{(2)})\right)\\
&= ((\mathrm{id}\,\otimes\Delta_{C\otimes D})\circ\Delta_{C\otimes D})\,(c\otimes d),\quad \forall\, c\in C, d\in D.
\end{aligned}
$$

Veamos ahora que el diagrama de co-unidad conmuta:

$$
\begin{aligned}
\sum_{(c),(d)}(c\otimes d)_{(1)}\otimes\varepsilon_{C\otimes D}\big((c\otimes d)_{(2)}\big) &= \sum_{(c),(d)}c_{(1)}\otimes d_{(1)}\otimes\varepsilon_{C\otimes D}\big(c_{(2)}\otimes d_{(2)}\big)\\
&= \sum_{(c),(d)}c_{(1)}\otimes d_{(1)}\otimes\varepsilon_C\big(c_{(2)}\big)\,\varepsilon_D\big(d_{(2)}\big)\\
&= \sum_{(c)}\varepsilon_C\big(c_{(2)}\big)\,c_{(1)}\otimes\sum_{(d)}\varepsilon_D\big(d_{(2)}\big)\,d_{(1)}\otimes 1\\
&= c\otimes d\otimes 1,\quad \forall\, c\in C, d\in D.
\end{aligned}
$$

El otro diagrama de co-unidad se demuestra de forma análoga.

□

De ahora en adelante la estructura de coálgebra de $C\otimes C$ será la de la proposición anterior.

3.2 Comódulos sobre una coálgebra

Definición 3.2.1. Sea C una coálgebra. Un *C-comódulo a derecha* es un par (M,δ) donde M es un espacio vectorial y $\delta: M\to M\otimes C$ es un mapa tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & M\otimes C \arrow[d, "id\otimes\Delta"] \\
M\otimes C \arrow[r, "\delta\otimes id"'] & M\otimes C\otimes C
\end{tikzcd}
\quad,\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\approx"'] & M\otimes C \arrow[d, "id\otimes\varepsilon"] \\
& M\otimes\mathbb{K}
\end{tikzcd}
\ .
$$

A un mapa δ en las condiciones anteriores se lo llama *coacción*.

Notación de Sweedler.
Escribiremos
$$\delta(m)=\sum_{(m)}m_{(0)}\otimes m_{(1)}\ (\text{con } m_{(0)}\in M \text{ y } m_{(1)}\in C).$$

A veces escribiremos $\sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$ en lugar de $\sum\limits_{(m)} m_{(0)} \otimes m_{(1)}$.

Análogamente se pueden definir un *C-comódulo a izquierda* como un par (M, δ) donde m es un espacio vectorial y $\delta : M \to C \otimes M$ es un mapa tal que

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \mathrm{id}_M) \circ \delta &= (\mathrm{id}_C \otimes \delta) \circ \delta \\ &\text{y} \\ ((\varepsilon \otimes \mathrm{id}_M) \circ \delta)(m) &= 1 \otimes m, \qquad \forall\, m \in M. \end{aligned}$$

De ahora en adelante a un C-comódulo a derecha le diremos C-comódulo, o simplemente comódulo cuando no halla lugar a confusión.

Observación 3.2.3. Con la notación anterior los diagramas de coacción se traducen a:

$$\sum_{(m)} \delta\left(m_{(0)}\right) \otimes m_{(1)} = \sum_{(m)} m_{(0)} \otimes \Delta\left(m_{(1)}\right) \overset{\text{not}}{=} \sum_{(m)} m_{(0)} \otimes m_{(1)} \otimes m_{(2)}$$

y

$$\sum_{(m)} m_{(0)} \varepsilon\left(m_{(1)}\right) = m, \quad \forall m \in M.$$

Definición 3.2.4. Dados (M, δ) y (N, η) dos C-comódulos, un mapa $f : M \to N$ es un *morfismo de comódulos* si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta_M"'] & N \arrow[d, "\delta_N"] \\ M \otimes C \arrow[r, "f \otimes id"'] & N \otimes C \end{tikzcd} \quad ;$$

o sea si $\displaystyle \sum_{(m)} f\left(m_{(0)}\right) \otimes m_{(1)} = \sum_{(f(m))} f(m)_{(0)} \otimes f(m)_{(1)}$.

Observar que si $f : M \to N$ es un morfismo de comódulos invertible, entonces $f^{-1} : N \to M$ es también un morfismo de comódulos.

Definición 3.2.5. Dada una coálgebra (C, Δ, ε) llamaremos $\mathcal{M}^C$ a la categoría cuyos objetos son los C-comódulos y cuyas flechas son los morfismos de C-comódulos. Si M, N son dos C-comódulos, escribiremos $\mathrm{Hom}_C(M, N)$ al conjunto de los morfismos de C-comódulos de M en N.

Definición 3.2.6. Sea (M, δ) un C-comódulo y N un subespacio de M. Decimos que N *es un C-subcomódulo de M* si $\delta(N) \subset N \otimes C$.

Observación 3.2.7. Si N es un C-subcomódulo de (M, δ), entonces $(N, \delta_N = \delta \mid_N)$ es un C-comódulo y la inclusión $\imath : N \to M$ resulta un morfismo de C-comódulos.

Ejemplo 3.2.8. Si (C, Δ, ε) es una coálgebra, entonces C es un C-comódulo con coacción Δ. Observar que los diagramas de coacción se transforman en los de co-asociatividad y co-unidad.

Observación 3.2.9. Si C y D son dos coálgebras, (M, δ_M) es un C-comódulo y (N, δ_N) es un B-comódulo, entonces $M \otimes N$ es un $(C \otimes D)$-comódulo con la coacción dada por

$$\sum_{(m \otimes n)} (m \otimes n)_{(0)} \otimes (m \otimes n)_{(1)} = \sum_{(m),(n)} (m_{(0)} \otimes n_{(0)}) \otimes (m_{(1)} \otimes n_{(1)}), \quad \forall\, m \in M,\ n \in N.$$

En particular $M \otimes M$ es un $(C \otimes C)$-comódulo. Además, si $f : C \to D$ es un morfismo de coálgebras, entonces (M, δ) es un D-comódulo siendo $\delta = (\mathrm{id} \otimes f) \circ \delta_M$.

Ejemplo 3.2.10.
Si (V, δ) es un C-comódulo, entonces $(V, \overline{\delta})$ es un $T(C)$-comódulo donde $\overline{\delta}$ está dada por:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, dotted, "\overline{\delta}"'] & V \otimes C \arrow[d, "id\otimes\imath"] \\ & V \otimes T(C) \end{tikzcd} \quad ,$$

siendo $\imath$ la inclusión.

Proposición 3.2.11. Sea (M, δ) un C-comódulo y N un C-subcomódulo de M. Entonces existe un mapa $\hat{\delta} : \frac{M}{N} \to \frac{M}{N} \otimes C$ tal que $(\frac{M}{N}, \hat{\delta})$ es un C-comódulo y $\pi : M \to \frac{M}{N}$ es un morfismo de comódulos. Explícitamente es

$$\hat{\delta}\left(\overline{m}\right) = \sum_{(m)} \overline{m_{(0)}} \otimes m_{(1)}.$$

Demostración: Sea $\overline{\delta}$ dada por:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, dotted, "\overline{\delta}"'] & M \otimes C \arrow[d, "\pi\otimes\mathrm{id}"] \\ & \frac{M}{N} \otimes C \end{tikzcd} \quad .$$

Como N es un subcomódulo de M, resulta $N \subset \mathrm{Ker}\ \overline{\delta}$. Entonces existe un único mapa $\hat{\delta} : \frac{M}{N} \to \frac{M}{N} \otimes C$ de forma tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\overline{\delta}"] \arrow[d, "\pi"'] & \frac{M}{N} \otimes C \\ \frac{M}{N} \arrow[ur, dotted, "\hat{\delta}"'] & \end{tikzcd} \; ;$$

es decir $\hat{\delta}(\overline{m}) = \sum_{(m)} \overline{m_{(0)}} \otimes m_{(1)}$, $\forall\, m \in M$.

Veamos que $\hat{\delta}$ es una coacción:

$$\begin{aligned}
\left((\hat{\delta} \otimes \mathrm{id}\,) \circ \hat{\delta}\right)(\overline{m}) &= (\hat{\delta} \otimes \mathrm{id}\,)\left(\sum_{(m)} \overline{m_{(0)}} \otimes m_{(1)}\right) \\
&= \sum_{(m),(m_{(0)})} \overline{m_{(0)(0)}} \otimes m_{(0)(1)} \otimes m_{(1)} \\
&= \sum_{(m)} \overline{m_{(0)}} \otimes m_{(1)} \otimes m_{(2)} \\
&= (\mathrm{id}\, \otimes \Delta)\left(\sum_{(m)} \overline{m_{(0)}} \otimes m_{(1)}\right) \\
&= \left((\mathrm{id}\, \otimes \Delta) \circ \hat{\delta}\right)(m) \\
&\text{y} \\
\sum_{(m)} \overline{m_{(0)}}\varepsilon(m_{(1)}) &= \overline{\sum_{(m)} m_{(0)}\varepsilon(m_{(1)})} \\
&= \overline{m}, \qquad \forall\, m \in M.
\end{aligned}$$

Observar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\delta"'] & \frac{M}{N} \arrow[d, "\hat{\delta}"'] \\ M \otimes C \arrow[r, "\pi\otimes id"'] & \frac{M}{N} \otimes C \end{tikzcd}$$

y por lo tanto π es un morfismo de comódulos. □

Observación 3.2.12. Sea $\emptyset = \{0_{\mathbb{K}}\}$ el espacio vectorial nulo. Entonces $(\emptyset, \delta)$ es un comódulo, donde $\delta(0_{\mathbb{K}}) = 0_{\mathbb{K}\otimes C}$. Este comódulo es un objeto cero en $\mathcal{M}^C$.

Observar que como $\mathcal{M}^C$ es una subcategoría de $\mathcal{V}ect$, entonces dados M y N dos comódulos, $\mathrm{Hom}_C(M,N)$ tiene estructura de grupo como en el Ejemplo 1.2.9 ya que $f+g$ es un morfismo de comódulos para todo $f, g \in \mathrm{Hom}_C(M,N)$. Más aún, se tiene que $\mathrm{Hom}_C(M,N)$ es un subespacio de $\mathrm{Hom}\,(M,N)$.

Observación 3.2.13. La categoría $\mathcal{M}^C$ tiene productos finitos. Específicamente: $(M,\delta_M)\times(N,\delta_N) = (M\times N,\delta)$ donde $\delta(m,n) = \sum_{(m)}(m_{(0)},0)\otimes m_{(1)} + \sum_{(n)}(0,n_{(0)})\otimes n_{(1)}$. Es fácil ver que $(M\times N,\delta)$ es un comódulo y que dado W otro comódulo y un par de morfismos de comódulos $f_M : W \to M$, $f_N : W \to N$, el mapa $f : W \to M\times N$ construído en el Ejemplo 1.2.3 es también un morfismo de comódulos.

Por lo tanto, de estas últimas observaciones se concluye que $\mathcal{M}^C$ es aditiva.

Observación 3.2.14. Sea $f \in \mathrm{Hom}_C(M,N)$. Es fácil ver que $\mathrm{Ker}\ f$ es un subcomódulo de M y que $\mathrm{Im}\ f$ es un subcomódulo de N. Como la inclusión y la proyección son morfismos de comódulos, dada $f \in \mathrm{Hom}_C(M,N)$, el núcleo y conúcleo de f en $\mathcal{V}ect$ son también núcleo y conúcleo de f en $\mathcal{M}^C$. Por lo tanto $\mathcal{M}^C$ tiene núcleos y conúcleos.

Hemos probado entoces que $\mathcal{M}^C$ es abeliana.

Observación 3.2.15. La categoría $\mathcal{M}^C$ tiene coproductos. Explícitamente

$$\coprod_{i\in I}(M_i,\delta_i) = \left(\bigoplus_{i\in I} M_i, \delta\right),$$

donde si $\sum_{i\in I} m_i \in \bigoplus_{i\in I} M_i$ entonces $\delta\left(\sum_{i\in I} m_i\right) = \sum_{i\in I}\delta_i(m_i)$ pensando $M_i \subset \bigoplus_{j\in I} M_j,\ i\in I$.

Es fácil ver que $\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, \delta\right)$ es un comódulo y que dado otro comódulo N y una familia de morfismos de comódulos $\{f_i : M_i \to N\,, i\in J\}$, el mapa $f : \bigoplus_{j\in J} M_j \to N$ construído en el Ejemplo 1.2.3 es un morfismo de comódulos.

Por lo tanto $\mathcal{M}^C$ es co-completa.

Capítulo 4

Biálgebras y categorías monoidales

En este capítulo combinaremos las estructuras de los Capítulos 2 y 3 definiendo las biálgebras. En particular, veremos que las categorías de módulos y de comódulos sobre una biálgebra son monoidales. Dos referencias para este capítulo son [Kas95] y [Mon93].

4.1 Biálgebras

Definición 4.1.1. Una biágebra es una quíntupla $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ tal que:

1. (B, m, u) es un álgebra.
2. (B, Δ, ε) es una coálgebra.
3. Δ y ε son morfismos de álgebras.

Observación 4.1.2. La última condición nos dice que:

$$\Delta(bb') = \sum_{(b),(b')} b_{(1)}b'_{(1)} \otimes b_{(2)}b'_{(2)}, \quad \varepsilon(bb') = \varepsilon(b)\,\varepsilon(b')\,,\ \forall b, b' \in B$$

y

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1,\ \varepsilon(1) = 1,$$

lo cual es equivalente a que m y u sean morfismos de coálgebras.

Ejemplo 4.1.3. El cuerpo $\mathbb{K}$ con las estructuras de álgebra y coálgebra presentadas en los Ejemplos 2.1.4 y 3.1.8 es una biálgebra.

Ejemplo 4.1.4. Si $(G, *, e)$ es un grupo y tomamos sobre KG las estructuras de álgebra y coálgebra como en los Ejemplos 2.1.5 y 3.1.9, entonces KG es una biálgebra.

Ejemplo 4.1.5. Es fácil ver que si $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ es una biálgebra, entonces $B^{cop} = (B, m, u, \Delta^{op}, \varepsilon)$, $B^{op} = (B, m^{op}, u, \Delta, \varepsilon)$ y $B^{coop} = (B, m^{op}, u, \Delta^{op}, \varepsilon)$ son biálgebras.

Ejemplo 4.1.6. Si $(C, \Delta_C, \varepsilon)$ es una coálgebra, entonces el álgebra tensorial sobre C, T(C), es una biálgebra con las estructuras vistas en los Ejemplos 2.1.9 y 3.1.14.

Definición 4.1.7. Sean $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ y $\left(\tilde{B}, \tilde{m}, \tilde{u}, \tilde{\Delta}, \tilde{\varepsilon}\right)$ dos biálgebras. Un mapa $f : B \to \tilde{B}$ es un *morfismo de biálgebras* si es morfismo de álgebras y morfismo de coálgebras. Un *bi-ideal* de B, es un ideal de B que a su vez es un coideal de B.

Las siguientes proposiciones son fáciles de probar.

Proposición 4.1.8. Sea $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ una biálgebra e I un co-ideal de B. El ideal bilateral generado por I es un bi-ideal de B.

Proposición 4.1.9. Sea $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ una biálgebra e I un bi-ideal de B. Entonces $(\frac{B}{I}, \hat{m}, \hat{u}, \hat{\Delta}, \hat{\varepsilon})$ es una biálgebra con las estructuras de álgebra y coálgebra vistas en los Ejemplos 2.1.6 y 3.1.10.

4.2 Módulos y comódulos sobre una biálgebra

Ahora veremos que si B es una biálgebra, entonces ${}_B\mathcal{M}$ es una categoría monoidal, siendo la restricción de la asociatividad la identidad, y las restricciones de la unidad las naturales. Veremos también un recíproco parcial, probando que si B es un álgebra, ${}_B\mathcal{M}$ es monoidal y se cumple una hipótesis adicional, entonces B es una biálgebra. Probaremos también los resultados análogos para $\mathcal{M}^B$.

Observación 4.2.1. Si $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ es una biálgebra y $M, N \in {}_B\mathcal{M}$, en vista de la Observación 2.2.7, $M \otimes N$ es un $B \otimes B$-módulo, y como $\Delta : B \to B \otimes B$ es un morfismo de álgebras, $M \otimes N$ resulta ser un B- módulo con la acción

$$b \cdot (m \otimes n) = \sum_{(b)} b_{(1)} \cdot m \otimes b_{(2)} \cdot n, \quad \forall\, b \in B,\ m \in M, n \in N.$$

Teorema 4.2.2. Si $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ es una biálgebra, entonces $({}_B\mathcal{M}, \otimes, \mathbb{K}, \alpha, r, l)$ es una categoría monoidal donde $(M, \rho_M) \otimes (N, \rho_N) = (M \otimes N, \rho_{M\otimes N})$ siendo

$$\rho_{M\otimes N} = (\rho_M \otimes \rho_N) \circ (\mathrm{id}_M \otimes \tau_{B,M} \otimes \mathrm{id}_N) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}_{M\otimes N}),$$

es decir

$$b \cdot (m \otimes n) = \sum_{(b)} b_{(1)} \cdot m \otimes b_{(2)} \cdot n, \quad \forall\, b \in B,\ m \in M,\ n \in N,$$

α , r y l son los mismos que en $\mathcal{V}ect$.

Demostración: Vimos en la Observación 4.2.1 que dados $M, N \in_B \mathcal{M}$, $M \otimes N \in_B \mathcal{M}$ con la acción del enunciado. Ahora veamos que $\mathbb{K}$ es un B-módulo. Sea $\rho_{\mathbb{K}} : B \otimes \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ dada por $\rho(b \otimes k) = \varepsilon(b)k \quad \forall\, b \in B,\ k \in K$. Veamos que ρ_k es una acción:

$$(ab) \cdot k = \varepsilon(ab)k = \varepsilon(a)\varepsilon(b)k = \varepsilon(a)(b \cdot k) = a \cdot (b \cdot k), \ \ \forall\, a, b \in B,\ k \in \mathbb{K}.$$

y

$$1 \cdot k = \varepsilon(1)k = 1k = k, \ \ \forall\, k \in \mathbb{K}.$$

Ahora veamos que $r : \mathbb{K} \otimes M \to M$ y $l : M \otimes \mathbb{K} \to M$ son morfismos de módulos:

$$\begin{aligned}
r(b \cdot (m \otimes k)) &= r\left(\sum_{(b)} b_{(1)} \cdot m \otimes b_{(2)} \cdot k\right) \\
&= r\left(\sum_{(b)} b_{(1)} \cdot m \otimes \varepsilon(b_{(2)})k\right) \\
&= \sum_{(b)} \varepsilon(b_{(2)})kb_{(1)} \cdot m \\
&= kb \cdot m \\
&= b \cdot km \\
&= b \cdot (r(m \otimes k)), \quad \forall\, b \in B,\ m \in M,\ k \in \mathbb{K}.
\end{aligned}$$

De forma análoga se prueba que l es un morfismo de módulos. Resta ver que α es un morfismo de módulos. Sean M, N, P módulos y $(m \otimes n) \otimes p \in M \otimes N \otimes P$, $b \in B$, entonces:

$$
\begin{aligned}
b \cdot (\alpha((m \otimes n) \otimes p)) &= b \cdot (m \otimes (n \otimes p)) \\
&= \sum_{(b)} b_{(1)} \cdot m \otimes (b_{(2)} \cdot (n \otimes p)) \\
&= \sum_{(b)} b_{(1)} \cdot m \otimes \left(\sum_{(b_{(2)})} b_{(2)(1)} \cdot n \otimes b_{(2)(2)} \cdot p \right) \\
&= \alpha \left(\sum_{(b)} \left(\sum_{(b_{(1)})} b_{(1)(1)} \cdot m \otimes b_{(1)(2)} \cdot n \right) \otimes b_{(2)} \cdot p \right) \\
&= \alpha \left(\sum_{(b)} b_{(1)} \cdot (m \otimes n) \otimes b_{(2)} \cdot p \right) \\
&= \alpha(b \cdot (m \otimes n) \otimes p)).
\end{aligned}
$$

La conmutatividad de los diagramas pentagonal y triangular son triviales. $\square$

Teorema 4.2.3. Sea (B, m, u) un álgebra y $\Delta : B \to B \otimes B$ un mapa tal que $({}_B\mathcal{M}, \otimes, \mathbb{K}, \alpha, r, l)$ es monoidal donde $(M, \rho_M) \otimes (N, \rho_N) = (M \otimes N, \rho_{M \otimes N})$ siendo

$$\rho_{M \otimes N} = (\rho_M \otimes \rho_N) \circ (\mathrm{id}_M \otimes \tau_{B,M} \otimes \mathrm{id}_N) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}_{M \otimes N}),$$

y α, r y l los mismos que en $\mathcal{V}ect$.
Entonces existe un mapa $\varepsilon : B \to \mathbb{K}$ de forma tal que $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ es una biálgebra.

Demostración: Como $\mathbb{K} \in {}_B\mathcal{M}$, tenemos una acción $\rho_{\mathbb{K}} : B \otimes \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Sea $\varepsilon : B \to \mathbb{K}$ dada por:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(b) &= \rho_{\mathbb{K}}(b \otimes 1) \\
&= b \cdot 1, \qquad \forall\, b \in B.
\end{aligned}
$$

Veamos que (B, Δ, ε) es una coálgebra. Para esto escribiremos $\Delta(b) = \sum_{(b)} b_{(1)} \otimes b_{(2)}$ y por lo tanto tenemos que

$$b \cdot (m \otimes n) = \sum_{(b)} b_{(1)} \cdot m \otimes b_{(2)} \cdot n, \quad \forall\, b \in B,\ m \in M,\ n \in N,\ M, N \in {}_B\mathcal{M}.$$

Como ${}_B\mathcal{M}$ es monoidal, la restricción de asociatividad $\alpha : (M \otimes N) \otimes V \to M \otimes (N \otimes V)$ ($(m \otimes n) \otimes v \mapsto m \otimes (n \otimes v)$) es un morfismo de módulos para todo $M, N, V \in {}_B\mathcal{M}$ y como B es un álgebra, el propio B resulta un módulo sobre si mismo. Tomemos $M = N = V = B$, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
B \otimes (B \otimes B) \otimes B \arrow[r, "\rho_{(B \otimes B) \otimes B}"] \arrow[d, "id \otimes \alpha"'] & (B \otimes B) \otimes B . \arrow[d, "\alpha"] \\
B \otimes B \otimes (B \otimes B) \arrow[r, "\rho_{B \otimes (B \otimes B)}"'] & B \otimes (B \otimes B)
\end{tikzcd}
$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\left(\alpha\circ\rho_{(B\otimes B)\otimes B}\right)(b\otimes(1\otimes 1)\otimes 1) &= \left(\rho_{B\otimes(B\otimes B)}\circ(id\otimes\alpha)\right)(b\otimes(1\otimes 1)\otimes 1) \quad\Rightarrow\\
\sum_{(b)} b_{(1)}\cdot(1\otimes 1)\otimes b_{(2)}\cdot 1 &= \sum_{(b)} b_{(1)}\cdot 1\otimes b_{(2)}\cdot(1\otimes 1) \quad\Rightarrow\\
\sum_{(b)}\left(\sum_{(b_{(1)})}(b_{(1)})_{(1)}\otimes(b_{(1)})_{(2)}\right)\otimes b_{(2)} &= \sum_{(b)} b_{(1)}\otimes\left(\sum_{(b_{(2)})}(b_{(2)})_{(1)}\otimes(b_{(2)})_{(1)}\right), \qquad \forall\, b\in B.
\end{aligned}$$

Por lo tanto Δ es co-asociativa.

Como $r:\mathbb{K}\otimes M\to M$ y $l:M\otimes\mathbb{K}\to M$ son morfismos de módulos para todo $M\in{}_B\mathcal{M}$, tomando $M=B$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
r\circ\rho_{B\otimes\mathbb{K}} &= \rho_B\circ(\mathrm{id}\otimes r)\\
&\text{y}\\
l\circ\rho_{\mathbb{K}\otimes B} &= \rho_B\circ(\mathrm{id}\otimes l)
\end{aligned}$$

por lo tanto, aplicando estas igualdades a $b\otimes 1\otimes 1$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
r\left(\sum_{(b)} b_{(1)}\otimes\varepsilon(b_{(2)})\right) &= b\cdot 1\\
&\text{y}\\
l\left(\sum_{(b)}\varepsilon(b_{(1)})\otimes b_{(2)}\right) &= b\cdot 1
\end{aligned}$$

es decir que

$$\begin{aligned}
\sum_{(b)} b_{(1)}\varepsilon(b_{(2)}) &= b\\
&\text{y}\\
\sum_{(b)}\varepsilon(b_{(1)})b_{(2)} &= b, \qquad \forall\, b\in B.
\end{aligned}$$

Por lo tanto ε hace conmutar el diagrama de co-unidad y (B,Δ,ε) resulta una coálgebra.

Para ver que $(B,m,u,\Delta,\varepsilon)$ es una biálgebra, queda probar que Δ y ε son morfismos de álgebras. Como $B\in{}_B\mathcal{M}$, tenemos que $B\otimes B\in{}_B\mathcal{M}$ con la acción

$$b\cdot(c\otimes d)=\sum_{(b)} b_{(1)}c\otimes b_{(2)}d \quad \forall\, b,c,d\in B.$$

Entonces de

$$\begin{aligned}
a\cdot(b\cdot(1\otimes 1)) &= (ab)\cdot(1\otimes 1), \qquad \forall\, a,b\in B\\
&\text{y}\\
1\cdot(1\otimes 1) &= 1\otimes 1
\end{aligned}$$

se deduce,

$$\begin{aligned}
\sum_{(a)(b)} a_{(1)}b_{(1)}\otimes a_{(2)}b_{(2)} &= \sum_{(ab)}(ab)_{(1)}\otimes(ab)_{(2)}, \qquad \forall\, a,b\in B\\
&\text{y}\\
\Delta(1) &= 1\otimes 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, Δ es morfismo de álgebras.

Como $\rho_{\mathbb{K}}$ es una acción, tenemos que

$$a \cdot (b \cdot 1) = ab \cdot 1, \ \forall\, a, b \in B \text{ y } 1 \cdot 1 = 1 \qquad \Rightarrow$$
$$\varepsilon(a)\varepsilon(b) = \varepsilon(ab), \ \forall\, a, b \in B \text{ y } \varepsilon(1) = 1.$$

Por lo tanto ε es un morfismo de álgebras. □

Veamos ahora los resultados análogos para comódulos sobre una biálgebra.

Observación 4.2.4. $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ es una biálgebra y M, $N \in \mathcal{M}^B$, en vista de la Observación 3.2.9, $M \otimes N$ es un $B \otimes B$-comódulo, y como $m : B \otimes B \to B$ es un morfismo de coálgebras, $M \otimes N$ resulta ser un B-comódulo con la coacción

$$\delta(m \otimes n) = \sum m_{(0)} \otimes n_{(0)} \otimes m_{(1)} n_{(1)}, \quad \forall\, m \in M, n \in N.$$

Teorema 4.2.5. Si $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ es una biálgebra, entonces $\left(\mathcal{M}^B, \otimes, \mathbb{K}, \alpha, r, l\right)$ es una categoría monoidal donde $(M, \delta_M) \otimes (N, \delta_N) = (M \otimes N, \delta_{M \otimes N})$ siendo

$$\delta_{M \otimes N} = (\mathrm{id}_{M \otimes N} \otimes m) \circ (\mathrm{id}_M \otimes \tau_{B,N} \otimes \mathrm{id}_B) \circ (\delta_M \otimes \delta_N),$$

es decir

$$\sum (m \otimes n)_{(0)} \otimes (m \otimes n)_{(1)} = \sum m_{(0)} \otimes n_{(0)} \otimes m_{(1)} n_{(1)},$$

y α, r y l los mismos que en $\mathcal{V}ect$.

Demostración: En vista de la Observación 4.2.4, tenemos que dados $M, N \in \mathcal{M}^B$, $M \otimes N \in \mathcal{M}^B$ con la coacción del enunciado. Ahora veamos que $\mathbb{K}$ es un B-comódulo: Sea $\delta_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \to \mathbb{K} \otimes B$ dada por $\delta_{\mathbb{K}}(k) = k \otimes 1$, $\forall\, k \in \mathbb{K}$. Veamos que $\delta_{\mathbb{K}}$ es coacción:

$$\begin{aligned}
((\delta_{\mathbb{K}} \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_{\mathbb{K}})(k) &= (\delta_{\mathbb{K}} \otimes \mathrm{id})(k \otimes 1_B) \\
&= k \otimes 1_B \otimes 1_B \\
&= k \otimes \Delta(1_B) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \Delta)(k \otimes 1_B) \\
&= ((\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \delta_{\mathbb{K}})(k) \qquad \text{y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \delta_{\mathbb{K}})(k) &= (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(k \otimes 1_B) \\
&= k \otimes \varepsilon(1_B) \\
&= k \otimes 1 \\
&\approx k, \qquad \forall k \in \mathbb{K}
\end{aligned}$$

Ahora veamos que $r : \mathbb{K} \otimes M \to M$ y $l : M \otimes \mathbb{K} \to M$ son morfismos de módulos $\forall\, M \in \mathcal{M}^B$. Veamos que el diagrama de la Definición 3.2.4 conmuta para r y l:

$$\begin{aligned}
((r \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_{\mathbb{K} \otimes M})(k \otimes m) &= (r \otimes \mathrm{id}) \left(\sum k \otimes m_{(0)} \otimes m_{(1)} \right) \\
&= \sum k m_{(0)} \otimes m_{(1)} \\
&= k \delta_M(m) \\
&= \delta_M(km) \\
&= (\delta_M \circ r)(k \otimes m) \qquad \text{y}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
((l\otimes \mathrm{id}\,)\circ \delta_{M\otimes\mathbb{K}})\,(m\otimes k) &= (l\otimes \mathrm{id}\,)\left(\sum m_{(0)}\otimes k\otimes m_{(1)}\right)\\
&= \sum km_{(0)}\otimes m_{(1)}\\
&= k\delta_M(m)\\
&= \delta_M(km)\\
&= (\delta_M\circ l)\,(m\otimes k),
\end{aligned}
$$

$\forall\, k\in\mathbb{K},\ m\in M,\ M\in\mathcal{M}^B$

Veamos ahora que α es un morfismo de comódulos. Sean M, N, P comódulos, $(m\otimes n)\otimes p\in (M\otimes N)\otimes P$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\delta_{M\otimes(N\otimes P)}(\alpha((m\otimes n)\otimes p)) &= \delta(m\otimes(n\otimes p))\\
&= \sum m_{(0)}\otimes(n\otimes p)_{(0)}\otimes m_{(1)}(n\otimes p)_{(1)}\\
&= \sum m_{(0)}\otimes(n_{(0)}\otimes p_{(0)})\otimes m_{(1)}(n_{(1)}p_{(1)})\\
&= (\alpha\otimes \mathrm{id}\,)\left(\sum (m_{(0)}\otimes n_{(0)})\otimes p_{(0)}\otimes(m_{(1)}n_{(1)})p_{(1)}\right)\\
&= (\alpha\otimes \mathrm{id}\,)(\delta_{(M\otimes N)\otimes P}(m\otimes n)\otimes p).
\end{aligned}
$$

La conmutatividad de los diagramas pentagonal y triangular son triviales.

□

Teorema 4.2.6. Sea (B,Δ,ε) una coálgebra y $m: B\otimes B\to B$ un mapa tal que $(\mathcal{M}^B,\otimes,\mathbb{K})$ es monoidal donde $(M,\delta_M)\otimes(N,\delta_N)=(M\otimes N,\delta_{M\otimes N})$ siendo

$$\delta_{M\otimes N}=(\mathrm{id}\,_{M\otimes N}\otimes m)\circ(\mathrm{id}\,_M\otimes\tau_{B,N}\otimes \mathrm{id}\,_B)\circ(\delta_M\otimes\delta_N)\,,$$

$\alpha\,, r$ y l son los mismos que en $\mathcal{V}ect$. Entonces existe un mapa $u:\mathbb{K}\to B$ de forma tal que $(B,m,u,\Delta,\varepsilon)$ es una biálgebra.

Demostración: Como $\mathbb{K}\in\mathcal{M}^B$ tenemos una coacción $\delta_{\mathbb{K}}:\mathbb{K}\to\mathbb{K}\otimes B$ que puede escribirse como $\delta_{\mathbb{K}}(k)=1\otimes u(k)$, siendo $u:\mathbb{K}\to B$ un mapa. Definimos $1_B=u(1)$. Veamos que (B,m,u) es un álgebra.
Como $\mathcal{M}^B$ es monoidal, la restricción de asociatividad $\alpha:(M\otimes N)\otimes V\to M\otimes(N\otimes V)$ ($(m\otimes n)\otimes v\to m\otimes(n\otimes v)$) es un morfismo de comódulos para todo $M,N,V\in\mathcal{M}^B$ y como B es una coálgebra, B resulta un comódulo sobre si mismo. Tomemos $M=N=V=B$ y escribimos $m(a\otimes b)=ab$,

$$\delta_{B\otimes(B\otimes B)}\circ\alpha \;=\; (\alpha\otimes \mathrm{id}\,)\circ\delta_{(B\otimes B)\otimes B}.$$

Sea $(b\otimes c)\otimes d\in(B\otimes B)\otimes B$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\delta_{B\otimes(B\otimes B)}\,(b\otimes(c\otimes d)) &= \sum_{(b),(c),(d)}(\alpha\otimes id)\left((b_{(1)}\otimes c_{(1)})\otimes d_{(1)}\otimes(b_{(2)}c_{(2)})d_{(2)},\right.\\
\sum_{(b),(c),(d)} b_{(1)}\otimes(c_{(1)}\otimes d_{(1)})\otimes b_{(2)}(c_{(2)}d_{(2)}) &= \sum_{(b),(c),(d)} b_{(1)}\otimes(c_{(1)}\otimes d_{(1)})\otimes(b_{(2)}c_{(2)})d_{(2)}
\end{aligned}
$$

aplicando $\varepsilon\otimes\varepsilon\otimes\varepsilon\otimes \mathrm{id}$ a ambos lados de la última igualdad, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
1\otimes 1\otimes 1\otimes b(cd) &= 1\otimes 1\otimes 1\otimes(bc)d \quad\Rightarrow\\
b(cd) &= (bc)d, \qquad \forall\, b,c,d\in B.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, m es asociativa.
Como r y l son morfismos de comódulos, se cumple que

$$\begin{aligned} \delta_M \circ r &= (r \otimes \mathrm{id}\,) \circ \delta_{\mathbb{K}\otimes M} \\ &\text{y} \\ \delta_M \circ l &= (l \otimes \mathrm{id}\,) \circ \delta_{M\otimes\mathbb{K}}, \qquad \forall\, M \in \mathcal{M}^B. \end{aligned}$$

Tomando $M = B$ y $b \in B$ tenemos que:

$$\begin{aligned} (\Delta \circ r)(1 \otimes b) &= (r \otimes \mathrm{id}\,) \circ \delta_{\mathbb{K}\otimes B}(1 \otimes b) \\ &\text{y} \\ (\Delta \circ l)(b \otimes 1) &= (l \otimes \mathrm{id}\,) \circ \delta_{B\otimes\mathbb{K}}(b \otimes 1). \end{aligned}$$

Entonces

$$\sum_{(b)} b_{(1)} \otimes b_{(2)} = (r \otimes \mathrm{id}\,) \left(\sum_{(b)} 1 \otimes b_{(1)} \otimes 1_B b_{(2)} \right) = (l \otimes \mathrm{id}\,) \left(\sum_{(b)} b_{(1)} \otimes 1 \otimes b_{(2)} 1_B \right) \quad ,$$

luego

$$\sum_{(b)} b_{(1)} \otimes b_{(2)} = \sum_{(b)} b_{(1)} \otimes 1_B b_{(2)} = \sum_{(b)} b_{(1)} \otimes b_{(2)} 1_B.$$

Aplicando $\varepsilon \otimes \mathrm{id}$ en los tres términos, obtenemos:

$$b = 1_B b = b 1_B, \quad \forall b \in B.$$

Luego, (B, m, u) es un álgebra.
Para ver que $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ es una biálgebra, resta ver que ε y Δ son morfismos de álgebras.
Como $B \in \mathcal{M}^B$, tenemos que $B \otimes B$ es un comódulo con la coacción

$$\delta(b \otimes c) = \sum_{(b),(c)} b_{(1)} \otimes c_{(1)} \otimes b_{(2)} c_{(2)}\,,$$

por lo tanto δ hace conmutar los diagramas de la Definición 3.2.1, es decir:

$$\begin{aligned} b \otimes c \otimes 1 &= ((\mathrm{id}\, \otimes \varepsilon) \circ \delta)\,(b \otimes c) \\ &= (\mathrm{id}\, \otimes \varepsilon) \left(\sum_{(b),(c)} b_{(1)} \otimes c_{(1)} \otimes b_{(2)} c_{(2)} \right) \\ &= \sum_{(b),(c)} b_{(1)} \otimes c_{(1)} \otimes \varepsilon\left(b_{(2)} c_{(2)}\right) \end{aligned}$$

y aplicando $\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{id}$ y utilizando que ε es lineal, obtenemos

$$\varepsilon(bc) = \varepsilon(b)\varepsilon(c) \qquad \forall b, c \in B.$$

Además,

$$\begin{aligned} ((\mathrm{id}\, \otimes \Delta) \circ \delta)\,(b \otimes c) &= ((\delta \otimes \mathrm{id}\,) \circ \delta)\,(b \otimes c) \qquad \Rightarrow \\ (\mathrm{id}\, \otimes \Delta) \left(\sum_{(b),(c)} b_{(1)} \otimes c_{(1)} \otimes b_{(2)} c_{(2)} \right) &= (\delta \otimes \mathrm{id}\,) \left(\sum_{(b),(c)} b_{(1)} \otimes c_{(1)} \otimes b_{(2)} c_{(2)} \right) \qquad \Rightarrow \\ \sum_{(b),(c)} b_{(1)} \otimes c_{(1)} \otimes \Delta\left((b_{(2)} c_{(2)}\right) &= \sum_{(b),(c)} b_{(1)} \otimes c_{(1)} \otimes b_{(2)} c_{(2)} \otimes b_{(3)} c_{(3)}; \end{aligned}$$

aplicando $\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{id}$ a ambos lados de la igualdad obtenemos

$$\Delta(bc) \quad = \quad \sum_{(b),(c)} b_{(1)}c_{(1)} \otimes b_{(2)}c_{(2)} \qquad \forall\, b, c \in B.$$

Por lo tanto, sólo nos resta probar que $\varepsilon(1) = 1$ y que $\Delta(1) = 1 \otimes 1$. Veamos ésto: como $\delta_{\mathbb{K}}$ es coacción tenemos

$$\begin{array}{rcl} ((\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \delta_{\mathbb{K}})\,(1) & = & 1 \otimes 1 \\ & \text{y} & \\ ((\delta_{\mathbb{K}} \otimes \mathrm{id}\,) \circ \delta_{\mathbb{K}})\,(1) & = & ((\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \delta_{\mathbb{K}})\,(1), \end{array}$$

es decir,

$$\begin{array}{rcll} (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(1 \otimes 1_B) & = & 1 \otimes 1 & \\ & \text{y} & & \\ (\delta_{\mathbb{K}} \otimes \mathrm{id}\,)(1 \otimes 1_B) & = & (\mathrm{id} \otimes \Delta)(1 \otimes 1_B) & \qquad \Rightarrow \\ & & & \\ \varepsilon(1_B) & = & 1 & \\ & \text{y} & & \\ 1_B \otimes 1_B & = & \Delta(1_B). & \end{array}$$

$\square$

Capítulo 5

Álgebras de Hopf y rigidez

En este capítulo definiremos las *álgebras de Hopf*. Veremos ejemplos y propiedades de estas álgebras y estudiaremos las categorías de módulos y comódulos de dimensión finita sobre un álgebra de Hopf. Existe una numerosa fuente bibliográfica en el tema de álgebras de Hopf, como por ejemplo [DNR01], [Mon93] y [Sch95]. El contenido de este capítulo se basa esencialmente en las fuentes antes mencionadas.

5.1 Álgebras de Hopf

Definición 5.1.1. Sea (A, m, u) un álgebra y (C, Δ, ε) una coálgebra, el *producto de convolución* es la función $conv : \operatorname{Hom}(C, A) \otimes \operatorname{Hom}(C, A) \to \operatorname{Hom}(C, A)$ definida por:

$conv(f \otimes g) \overset{\text{not}}{=} f * g := m \circ (f \otimes g) \circ \Delta, \ \ \forall f, g \in \operatorname{Hom}(C, A)$; o sea,

$$(f * g)(x) = \sum_{(x)} f\left(x_{(1)}\right) g\left(x_{(2)}\right) \ , \ \forall x \in C.$$

Es fácil de probar que $conv$ es asociativo y que $u \circ \varepsilon$ es un neutro para $conv$, luego $(\operatorname{Hom}(C, A), conv, 1 = u \circ \varepsilon)$ es un álgebra.

Por lo tanto si $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ es una biálgebra, entonces $\operatorname{Hom}(B, B)$ es un álgebra con la estructura recién mencionada. A partir de este momento cuando decimos el álgebra $\operatorname{Hom}(C, A)$, nos referimos a $(\operatorname{Hom}(C, A), conv, u \circ \varepsilon)$.

Si $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ es una biálgebra, id_B es invertible en $\operatorname{Hom}(B, B)$ si y sólo si existe un mapa $\mathcal{S} : B \to B$ tal que $\mathcal{S} * \mathrm{id} = \mathrm{id} * \mathcal{S} = u \circ \varepsilon$. Es decir que

$$\sum_{(x)} \mathcal{S}\left(x_{(1)}\right) x_{(2)} = \sum_{(x)} x_{(1)} \mathcal{S}\left(x_{(2)}\right) = \varepsilon(x) 1_B, \quad \forall\, x \in B.$$

A un mapa $\mathcal{S}$ que cumple la igualdad anterior, se le llama una *antípoda* en B. Claramente, si existe una antípoda en $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$, es única.

Definición 5.1.2. Un *álgebra de Hopf* es una estructura $(H, m, u, \Delta, \varepsilon, \mathcal{S})$ donde $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ es una biálgebra y $\mathcal{S} : H \to H$ es una antípoda en H.

Ejemplo 5.1.3. El cuerpo $\mathbb{K}$ con la estructura de biálgebra del Ejemplo 4.1.3 y antípoda $\mathcal{S} = id$ es un álgebra de Hopf.

Ejemplo 5.1.4. Si $(G, *, e)$ es un grupo, entonces el álgebra de grupo KG con la estructura de biálgebra del Ejemplo 4.1.4 y antípoda la extensión a KG de $g \mapsto g^{-1}$, es un álgebra de Hopf.

Proposición 5.1.5. Si $(H, m, u, \Delta, \varepsilon, \mathcal{S})$ es un álgebra de Hopf, entonces:

1. La antípoda es un *antimorfismo de álgebras*, *i.e.* $\mathcal{S}(hk) = \mathcal{S}(k)\mathcal{S}(h),\ \forall h, k \in H$ y $\mathcal{S}(1) = 1$.
2. La antípoda es un *antimorfismo de coálgebras*, *i.e.* $\Delta \circ \mathcal{S} = \tau \circ (\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}) \circ \Delta$ y $\varepsilon \circ \mathcal{S} = \varepsilon$; es decir que :

$$\begin{array}{rcl} \sum_{(x)} \mathcal{S}(x)_{(1)} \otimes \mathcal{S}(x)_{(2)} & = & \sum_{(x)} \mathcal{S}(x_{(2)}) \otimes \mathcal{S}(x_{(1)}) \\ & \text{y} & \\ \varepsilon(\mathcal{S}(x)) & = & \varepsilon(x), \qquad \forall\, x \in H \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN:

1. Sean $\nu, \rho : H \otimes H \to H$ dadas por

$$\nu(x \otimes y) = \mathcal{S}(y)\mathcal{S}(x) \text{ y } \rho(x \otimes y) = \mathcal{S}(xy),\ \forall x, y \in H.$$

Es fácil probar que $\rho * m = m * \nu = u \circ \varepsilon$. Por lo tanto tenemos $\rho = \rho * (u \circ \varepsilon) = \rho * m * \nu = (u \circ \varepsilon) * \nu = \nu$; es decir

$$\mathcal{S}(xy) = \mathcal{S}(y)\mathcal{S}(x), \quad \forall x, y \in H.$$

Alicando la igualdad $\mathrm{id} * \mathcal{S}(x) = u \circ \varepsilon(x)$ en $x = 1$, obtenemos que $\mathcal{S}(1) = 1$.

2. Para probar que $\Delta^{op} \circ \mathcal{S} = (\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}) \circ \Delta$ veremos que $\Delta \circ \mathcal{S} = (\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}) \circ \Delta^{op}$. Sean ahora $\nu = (\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}) \circ \Delta^{op}$ y $\rho = \Delta \circ \mathcal{S}$. Como $\nu,\ \rho : H \to H \otimes H$, para probar que $\nu = \rho$ basta ver que

$$\rho * \Delta = \Delta * \nu = u_{H \otimes H} \circ \varepsilon.$$

Veamos ésto:

$$\begin{aligned} (\rho * \Delta)(x) &= \sum_{(x)} \Delta\left(\mathcal{S}(x_{(1)})\right) \Delta(x_{(2)}) \\ &= \Delta\left(\sum_{(x)} \mathcal{S}(x_{(1)}) x_{(2)}\right) \\ &= \Delta(\varepsilon(x)1) \\ &= (u_{H \otimes H} \circ \varepsilon)(x), \quad \forall\, x \in H \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (\Delta * \nu)(x) &= \sum_{(x)} \Delta(x_{(1)})(\mathcal{S} \otimes \mathcal{S})(x_{(3)} \otimes x_{(2)}) \\ &= \sum_{(x)} (x_{(1)} \otimes x_{(2)})(\mathcal{S}(x_{(4)}) \otimes \mathcal{S}(x_{(3)})) \\ &= \sum_{(x)} x_{(1)}\mathcal{S}(x_{(4)}) \otimes x_{(2)}\mathcal{S}(x_{(3)}) \\ &= \sum_{(x)} x_{(1)}\mathcal{S}(x_{(3)}) \otimes \varepsilon(x_{(2)})1 \\ &= \sum_{(x)} x_{(1)}\mathcal{S}(x_{(2)}) \otimes 1 \\ &= \varepsilon(x)1 \otimes 1 \\ &= (u_{H \otimes H} \circ \varepsilon)(x), \quad \forall\, x \in H. \end{aligned}$$

Veamos ahora que $\varepsilon \circ \mathcal{S} = \varepsilon$:

$$\varepsilon\left(\mathcal{S}(x)\right) = \varepsilon\left(\mathcal{S}\left(\sum_{(x)} \varepsilon(x_{(1)}) x_{(2)}\right)\right) = \varepsilon\left(\sum_{(x)} x_{(1)}\mathcal{S}(x_{(2)})\right) = \varepsilon(x),\ \forall\, x \in H.$$

□

Proposición 5.1.6. Si $(H, m, u, \Delta, \varepsilon, \mathcal{S})$ es un álgebra de Hopf y $\mathcal{S}$ es invertible (respecto a la composición) con inversa $\mathcal{S}^{-1}$, entonces

1. $\mathcal{S}^{-1}$ es un antimorfismo de álgebras y coálgebras.
2. $$\begin{array}{rcl} \sum_{(x)} \mathcal{S}^{-1}(x_{(2)})x_{(1)} & = & \varepsilon(x) \\ & \text{y} & \\ \sum_{(x)} x_{(2)}\mathcal{S}^{-1}(x_{(1)}) & = & \varepsilon(x), \qquad \forall\, x \in H. \end{array}$$

   En particular, $H^{cop} = (H, m, u, \Delta^{op}, \varepsilon)$ es un álgebra de Hopf con antípoda $\mathcal{S}^{-1}$.

Demostración:

1. (a) Veamos que $\mathcal{S}^{-1}$ es un antimorfismo de álgebras:
   $$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}^{-1}(xy) & = & \mathcal{S}^{-1}(\mathcal{S}\mathcal{S}^{-1}(x)\mathcal{S}\mathcal{S}^{-1}(y)) \\ & = & \mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}(\mathcal{S}^{-1}(y)\mathcal{S}^{-1}(x)) \\ & = & \mathcal{S}^{-1}(y)\mathcal{S}^{-1}(x)), \qquad \forall\, x, y \in H \end{array}$$
   y $\mathcal{S}^{-1}(1) = \mathcal{S}^{-1}(\mathcal{S}(1)) = 1$.

   (b) Veamos que $\mathcal{S}^{-1}$ es un antimorfismo de coálgebras:
   $$\begin{array}{rcl} \left(\tau \circ \left(\mathcal{S}^{-1} \otimes \mathcal{S}^{-1}\right) \circ \Delta\right)(x) & = & \left(\tau \circ \left(\mathcal{S}^{-1} \otimes \mathcal{S}^{-1}\right) \circ \Delta\right)\left(\mathcal{S}\mathcal{S}^{-1}(x)\right) \\ & = & \left(\tau \circ \left(\mathcal{S}^{-1} \otimes \mathcal{S}^{-1}\right) \circ \tau \circ (\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}) \circ \Delta\right)(\mathcal{S}^{-1}x) \\ & = & \Delta(\mathcal{S}^{-1}(x)) \\ & \text{y} & \\ \varepsilon\left(\mathcal{S}^{-1}(x)\right) & = & \varepsilon\left(\mathcal{S}\mathcal{S}^{-1}(x)\right) \\ & = & \varepsilon(x), \qquad \forall\, x \in H. \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rcl} \sum_{(x)} \mathcal{S}^{-1}(x_{(2)})x_{(1)} & = & \sum_{(x)} \mathcal{S}^{-1}(x_{(2)})\mathcal{S}^{-1}(\mathcal{S}(x_{(1)})) \\ & = & \mathcal{S}^{-1}\left(\sum_{(x)} \mathcal{S}(x_{(1)})x_{(2)}\right) \\ & = & \mathcal{S}^{-1}(\varepsilon(x)) \\ & = & \varepsilon(x), \qquad \forall\, x \in H. \end{array}$$

   La otra igualdad se prueba de forma análoga.

□

5.2 Módulos y comódulos sobre un álgebra de Hopf

Sea $(H, m, u, \Delta, \varepsilon, \mathcal{S})$ un álgebra de Hopf. Escribiremos ${}_H\mathcal{M}_{fin}$ a la categoría de H-módulos de dimensión finita y $\mathcal{M}^H_{fin}$ a la categoría de H-comódulos de dimensión finita. En esta sección, fijada un álgebra de Hopf $(H, m, u, \Delta, \varepsilon, \mathcal{S})$, estudiaremos la rigidez de las categorías ${}_H\mathcal{M}_{fin}$ y $\mathcal{M}^H_{fin}$.

Observación 5.2.1. Como $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ es una biálgebra, como vimos en los teoremas 4.2.2 y 4.2.5, las categorías ${}_H\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^H$ son monoidales. Además si M y $N \in {}_H\mathcal{M}_{fin}$, claramente $M \otimes N \in {}_H\mathcal{M}_{fin}$. Por lo tanto ${}_H\mathcal{M}_{fin}$ es una subcategoría monoidal de ${}_H\mathcal{M}$ y análogamente $\mathcal{M}^H_{fin}$ es una subcategoría monoidal de $\mathcal{M}^H$.

Teorema 5.2.2.

1. Si $(H, m, u, \Delta, \varepsilon, \mathcal{S})$ es un álgebra de Hopf, entonces ${}_H\mathcal{M}_{fin}$ es rígida a izquierda definiendo ${}^\vee(M, \rho) = (M^*, \bar{\rho})$ donde $\bar{\rho}(h \otimes \alpha) = h \cdot \alpha$ viene dada por:
$$\langle h \cdot \alpha \,, \, m \rangle = \langle \alpha \,, \, \mathcal{S}(h) \cdot m \rangle \,, \;\; \forall h \in H, \; \alpha \in M^*, \; m \in M$$
y la evaluación y coevaluación a izquierda son las mismas que en $\mathcal{V}ect_{fin}$.
2. Si además $\mathcal{S}$ es biyectiva, entonces ${}_H\mathcal{M}_{fin}$ es también rígida a derecha definiendo $(M, \rho)^\vee = (M^*, \tilde{\rho})$ donde $\tilde{\rho}(h \otimes \alpha) = h \cdot \alpha$ viene dada por:
$$\langle h \cdot \alpha \,, \, m \rangle = \left\langle \alpha \,, \, \mathcal{S}^{-1}(h) \cdot m \right\rangle \,, \;\; \forall h \in H, \; \alpha \in M^*, \; m \in M$$
y la evaluación y coevaluación a derecha son las mismas que en $\mathcal{V}ect_{fin}$.

Demostración:

1. Sea $M \in {}_H\mathcal{M}_{fin}$, veamos que $(M^*, \bar{\rho})$ es un módulo. Observar que si $h \in H, \; \alpha \in M^*$, entonces $h \cdot \alpha \in M^*$. Veamos que $\bar{\rho}$ es una acción:
$$\begin{aligned} \langle h \cdot (l \cdot \alpha) \,, \, m \rangle &= \langle l \cdot \alpha \,, \, \mathcal{S}(h) \cdot m \rangle \\ &= \langle \alpha \,, \, \mathcal{S}(l) \cdot (\mathcal{S}(h) \cdot m) \rangle \\ &= \langle \alpha \,, \, \mathcal{S}(l)\mathcal{S}(h) \cdot m \rangle \\ &= \langle \alpha \,, \, \mathcal{S}(hl) \cdot m \rangle \\ &= \langle (hl) \cdot \alpha \,, \, m \rangle \,, \qquad \forall \, h, l \in H, \, \alpha \in M^*, \, m \in M; \end{aligned}$$
por lo tanto
$$h \cdot (l \cdot \alpha) \;=\; (hl) \cdot \alpha, \qquad \forall \, h, l \in H, \, \alpha \in M^*.$$
Además
$$\begin{aligned} \langle 1 \cdot \alpha \,, \, m \rangle &= \langle \alpha \,, \, \mathcal{S}(1) \cdot m \rangle \\ &= \langle \alpha \,, \, m \rangle \,, \qquad \forall \, \alpha \in M^*, \, m \in M, \end{aligned}$$
por lo tanto
$$1 \cdot \alpha \;=\; \alpha, \qquad \forall \, \alpha \in M^*.$$
Resta ver que ${}^\vee ev$ y ${}^\vee coev$ son morfismos de módulos, es decir que los siguientes diagramas conmutan:
$$\begin{tikzcd} H \otimes M^* \otimes M \arrow[r, "\rho_{M^* \otimes M}"] \arrow[d, "id \otimes {}^\vee ev"'] & M^* \otimes M \arrow[d, "{}^\vee ev"] \\ H \otimes \mathbb{K} \arrow[r, "\rho_{\mathbb{K}}"'] & \mathbb{K} \end{tikzcd} \;,\qquad \begin{tikzcd} H \otimes \mathbb{K} \arrow[r, "\rho_k"] \arrow[d, "id \otimes {}^\vee coev"'] & \mathbb{K} \arrow[d, "{}^\vee coev"] \\ H \otimes M \otimes M^* \arrow[r, "\rho_{M \otimes M^*}"'] & M \otimes M^* \end{tikzcd} \;.$$

Calculamos:

$$\begin{aligned}
{}^{\vee}ev\,(h\cdot(\alpha\otimes m)) &= {}^{\vee}ev\left(\sum_{(h)} h_{(1)}\cdot\alpha\otimes h_{(2)}\cdot m\right)\\
&= \sum_{(h)}\left\langle h_{(1)}\cdot\alpha\,,\, h_{(2)}\cdot m\right\rangle\\
&= \left\langle \alpha\,,\, \sum_{(h)}\mathcal{S}(h_{(1)})\cdot(h_{(2)}\cdot m)\right\rangle\\
&= \left\langle \alpha\,,\, \left(\sum_{(h)}\mathcal{S}(h_{(1)})h_{(2)}\right)\cdot m\right\rangle\\
&= \langle\alpha\,,\,\varepsilon(h)m\rangle\\
&= \varepsilon(h)\,\langle\alpha\,,\,m\rangle\\
&= h\cdot^{\vee} ev(\alpha\otimes m),\qquad \forall\, h\in H,\ \alpha\in M^*,\ m\in M.
\end{aligned}$$

Sea $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ una base de M y $\left\{e^1,e^2,...,e^n\right\}$ su base dual. Identificando $M\otimes M^*$ con $\operatorname{Hom}(M,M)$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\left((\rho_{M\otimes M^*}\circ(\mathrm{id}\otimes^{\vee} coev))(h\otimes 1)\right)(m) &= \left(h\cdot\sum_{i=1}^{n} e_i\otimes e^i\right)(m)\\
&= \left(\sum_{(h)}\sum_{i=1}^{n} h_{(1)}\cdot e_i\otimes h_{(2)}\cdot e^i\right)(m)\\
&= \sum_{(h)}\sum_{i=1}^{n}\left\langle h_{(2)}\cdot e^i\,,\,m\right\rangle h_{(1)}\cdot e_i\\
&= \sum_{(h)} h_{(1)}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left\langle e^i\,,\,\mathcal{S}(h_{(2)})\cdot m\right\rangle e_i\\
&= \sum_{(h)} h_{(1)}\cdot(\mathcal{S}(h_{(2)})\cdot m)\\
&= \varepsilon(h)m,\qquad \forall\, h\in H,\ m\in M,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\left(({}^{\vee}coev\circ\rho_{\mathbb{K}})(h\otimes 1)\right)(m) &= \left(\varepsilon(h)\sum_{i=1}^{n} e_i\otimes e^i\right)(m)\\
&= \varepsilon(h)\sum_{i=1}^{n}\left\langle e^i\,,\,m\right\rangle e_i\\
&= \varepsilon(h)m,\qquad \forall\, h\in H,\ m\in M.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(\rho_{M\otimes M^*}\circ(\mathrm{id}\otimes^{\vee} coev))(h\otimes 1) = ({}^{\vee}coev\circ\rho_{\mathbb{K}})(h\otimes 1),\qquad \forall\, h\in H.$$

2. Sea $(M,\rho)\in {}_H\mathcal{M}_{fin}$. Observar que en la parte anterior, cuando probamos que $\bar{\rho}$ es una acción, lo que se utilizó fue que ρ es acción y que $\mathcal{S}$ es un antimorfismo de álgebras. Ahora estamos en la misma situación ya que $\mathcal{S}^{-1}$ es también un antimorfismo

de álgebras. Por lo tanto $(M^*, \tilde{\rho})$ es un módulo. Resta ver que $ev^\vee$ y $coev^\vee$ son morfismos de módulos, es decir que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} H\otimes M\otimes M^* \arrow[r, "\rho_{M\otimes M^*}"] \arrow[d, "id\otimes ev^\vee"'] & M\otimes M^* \arrow[d, "ev^\vee"] \\ H\otimes \mathbb{K} \arrow[r, "\rho_{\mathbb{K}}"'] & \mathbb{K} \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} H\otimes \mathbb{K} \arrow[r, "\rho_k"] \arrow[d, "id\otimes coev^\vee"'] & \mathbb{K} \arrow[d, "coev^\vee"] \\ H\otimes M^*\otimes M \arrow[r, "\rho_{M^*\otimes M}"'] & M^*\otimes M \end{tikzcd}.$$

Calculamos:

$$\begin{aligned} ev^\vee\left(h\cdot(m\otimes\alpha)\right) &= ev^\vee\left(\sum_{(h)} h_{(1)}\cdot m\otimes h_{(2)}\cdot\alpha\right)\\ &= \sum_{(h)}\left\langle h_{(2)}\cdot\alpha\,,\,h_{(1)}\cdot m\right\rangle\\ &= \left\langle \alpha\,,\,\sum_{(h)}\mathcal{S}^{-1}(h_{(2)})\cdot(h_{(1)}\cdot m)\right\rangle\\ &= \left\langle \alpha\,,\,\left(\sum_{(h)}\mathcal{S}^{-1}(h_{(2)})h_{(1)}\right)\cdot m\right\rangle\\ &= \langle\alpha\,,\,\varepsilon(h)m\rangle\\ &= \varepsilon(h)\,\langle\alpha\,,\,m\rangle\\ &= h\cdot ev^\vee(m\otimes\alpha), \qquad \forall\, h\in H,\ \alpha\in M^*,\ m\in M. \end{aligned}$$

Sea $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base de M y $\{e^1, e^2, ..., e^n\}$ su base dual; identificando $M^*\otimes M$ con $\mathrm{Hom}\,(M, M)$ tenemos:

$$\begin{aligned} \left((\rho_{M^*\otimes M}\circ(\mathrm{id}\otimes coev^\vee))(h\otimes 1)\right)(m) &= \left(h\cdot\sum_{i=1}^n e^i\otimes e_i\right)(m)\\ &= \left(\sum_{(h)}\sum_{i=1}^n h_{(1)}\cdot e^i\otimes h_{(2)}\cdot e_i\right)(m)\\ &= \sum_{(h)}\sum_{i=1}^n\left\langle h_{(1)}\cdot e^i\,,\,m\right\rangle h_{(2)}\cdot e_i\\ &= \sum_{(h)} h_{(2)}\cdot\sum_{i=1}^n\left\langle e^i\,,\,\mathcal{S}^{-1}(h_{(1)})\cdot m\right\rangle e_i\\ &= \sum_{(h)} h_{(2)}\cdot(\mathcal{S}^{-1}(h_{(1)})\cdot m) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{(h)} h_{(2)}\mathcal{S}^{-1}(h_{(1)})\right)\cdot m \\
&= \varepsilon(h)m \\
&= \varepsilon(h)\sum_{i=1}^{n}\left\langle e^i\,,\,m\right\rangle e_i \\
&= \left(\varepsilon(h)\sum_{i=1}^{n} e^i\otimes e_i\right)(m) \\
&= \left((coev^{\vee}\circ\rho_{\mathbb{K}})(h\otimes 1)\right)m, \qquad \forall\, h\in H,\, m\in M.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
(\rho_{M^*\otimes M}\circ(\mathrm{id}\otimes coev^{\vee}))(h\otimes 1) \;=\; (coev^{\vee}\circ\rho_{\mathbb{K}})(h\otimes 1), \qquad \forall\, h\in H.
$$

□

Ahora veamos los resultados análogos para la categoría $\mathcal{M}^H_{fin}$.

Teorema 5.2.3.

1. Si $(H,m,u,\Delta,\varepsilon,\mathcal{S})$ es un álgebra de Hopf, entonces $\mathcal{M}^H_{fin}$ es rígida a izquierda definiendo ${}^{\vee}(M,\delta)=\left(M^*,\bar{\delta}\right)$ donde $\bar{\delta}(\alpha)=\sum\alpha_{(0)}\otimes\alpha_{(1)}$ es tal que

$$
\sum\left\langle\alpha_{(0)},m\right\rangle\alpha_{(1)}=\sum\left\langle\alpha,m_{(0)}\right\rangle\mathcal{S}(m_{(1)}),\quad \forall m\,\in M
$$

y la evaluación y coevaluación a izquierda son las mismas que en $\mathcal{V}ect_{fin}$.

2. Si además $\mathcal{S}$ es biyectiva, entonces $\mathcal{M}^H_{fin}$ es también rígida a derecha definiendo $(M,\delta)^{\vee}=\left(M^*,\tilde{\delta}\right)$ donde $\tilde{\rho}(\alpha)=\sum\alpha_{(0)}\otimes\alpha_{(1)}$ es tal que

$$
\sum\left\langle\alpha_{(0)},m\right\rangle\alpha_{(1)}=\sum\left\langle\alpha,m_{(0)}\right\rangle\mathcal{S}^{-1}(m_{(1)}),\quad \forall m\,\in M
$$

y la evaluación y coevaluación a derecha son las mismas que en $\mathcal{V}ect_{fin}$.

Demostración:

1. Tenemos que probar que ${}^{\vee}(M,\delta)\in\mathcal{M}^H_{fin}$, $\forall M\in\mathcal{M}^H_{fin}$, y que los mapas ${}^{\vee}ev$ y ${}^{\vee}coev$ son morfismos de comódulos. La conmutatividad de los diagramas de rigidez ya la vimos en la Proposición 1.3.4.
Sea M un H-comódulo de dimensión finita. Observar que $M^*\otimes H\approx\mathrm{Hom}\,(M,H)$ como espacios vectoriales, donde

$$
(\alpha\otimes h)\,(m)=\langle\alpha,m\rangle\,h,\quad \forall\, m\in M,\alpha\in M^*,h\in H.
$$

Para todo $\alpha\in M^*$ consideramos $\bar{\alpha}\in\mathrm{Hom}\,(M,H)$ definida por

$$
\bar{\alpha}(m)=\sum\left\langle\alpha,m_{(0)}\right\rangle\mathcal{S}\left(m_{(1)}\right).
$$

En vista del isomorfismo anterior, sabemos que existe un único elemento $\sum\alpha_{(0)}\otimes\alpha_{(1)}\in M^*\otimes H$ tal que

$$
\sum\left\langle\alpha_{(0)},m\right\rangle\alpha_{(1)}=\sum\left\langle\alpha,m_{(0)}\right\rangle\mathcal{S}(m_{(1)}),\quad \forall m\,\in M.
$$

Luego la fórmula del enunciado define un mapa $\bar{\delta}:M^*\to M^*\otimes H$. Veamos que $\bar{\delta}$ es una coacción.

Ahora identificaremos $M^* \otimes H \otimes H$ con $\operatorname{Hom}(M, H \otimes H)$

$$
\begin{aligned}
\left(\left(\left(\bar{\delta} \otimes \mathrm{id}\right) \circ \bar{\delta}\right)(\alpha)\right)(m) &= \left(\sum (\alpha_{(0)})_{(0)} \otimes (\alpha_{(0)})_{(1)} \otimes \alpha_{(1)}\right)(m) \\
&= \sum \left\langle (\alpha_{(0)})_{(0)}, m \right\rangle (\alpha_{(0)})_{(1)} \otimes \alpha_{(1)} \\
&= \sum \left\langle \alpha_{(0)}, m_{(0)} \right\rangle \mathcal{S}\left(m_{(1)}\right) \otimes \alpha_{(1)} \\
&= \sum \mathcal{S}\left(m_{(1)}\right) \otimes \left\langle \alpha_{(0)}, m_{(0)} \right\rangle \alpha_{(1)} \\
&= \sum \mathcal{S}\left(m_{(2)}\right) \otimes \left\langle \alpha, m_{(0)} \right\rangle \mathcal{S}\left(m_{(1)}\right) \\
&= \sum \mathcal{S}\left(m_{(1)}\right)_{(1)} \otimes \left\langle \alpha, m_{(0)} \right\rangle \mathcal{S}\left(m_{(1)}\right)_{(2)} \\
&= \Delta\left(\sum \left\langle \alpha, m_{(0)} \right\rangle \mathcal{S}\left(m_{(1)}\right)\right) \\
&= \Delta\left(\sum \left\langle \alpha_{(0)}, m \right\rangle \alpha_{(1)}\right) \\
&= \sum \left\langle \alpha_{(0)}, m \right\rangle \left(\alpha_{(1)}\right)_{(1)} \otimes \left(\alpha_{(1)}\right)_{(2)} \\
&= \left(\sum \alpha_{(0)} \otimes \left(\alpha_{(1)}\right)_{(1)} \otimes \left(\alpha_{(1)}\right)_{(2)}\right)(m) \\
&= \left(\left(\left(\mathrm{id} \otimes \Delta\right) \circ \bar{\delta}\right)(\alpha)\right)(m)
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\left\langle \sum \varepsilon\left(\alpha_{(1)}\right) \alpha_{(0)}, m \right\rangle &= \sum \varepsilon\left(\alpha_{(1)}\right) \left\langle \alpha_{(0)}, m \right\rangle \\
&= \varepsilon\left(\sum \left\langle \alpha_{(0)}, m \right\rangle \alpha_{(1)}\right) \\
&= \varepsilon\left(\sum \left\langle \alpha, m_{(0)} \right\rangle \mathcal{S}\left(m_{(1)}\right)\right) \\
&= \sum \left\langle \alpha, m_{(0)} \right\rangle \varepsilon\left(\mathcal{S}\left(m_{(1)}\right)\right) \\
&= \sum \left\langle \alpha, m_{(0)} \right\rangle \varepsilon\left(m_{(1)}\right) \\
&= \left\langle \alpha, m \right\rangle, \qquad \forall\, \alpha \in M^*, m \in M.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\left(\bar{\delta} \otimes \mathrm{id}\right) \circ \bar{\delta} &= \left(\mathrm{id} \otimes \Delta\right) \circ \bar{\delta} \\
&\text{y} \\
\sum \varepsilon\left(\alpha_{(1)}\right) \alpha_{(0)} &= \alpha, \quad \forall\, \alpha \in M^*.
\end{aligned}
$$

Veamos que ${}^{\vee}ev$ y ${}^{\vee}coev$ son morfismos de comódulos.
Tenemos que probar que los siguientes diagramas conmutan:

$$
\begin{tikzcd}
M^* \otimes M \arrow[r, "{}^{\vee}ev"] \arrow[d, "\delta_{M^* \otimes M}"'] & \mathbb{K} \arrow[d, "\delta_{\mathbb{K}}"] \\
M^* \otimes M \otimes H \arrow[r, "{}^{\vee}ev \otimes id"'] & \mathbb{K} \otimes H
\end{tikzcd}
\quad , \quad
\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[r, "{}^{\vee}coev"] \arrow[d, "\delta_{\mathbb{K}}"'] & M \otimes M^* \arrow[d, "\delta_{M \otimes M^*}"] \\
\mathbb{K} \otimes H \arrow[r, "{}^{\vee}coev \otimes id"'] & M \otimes M^* \otimes H
\end{tikzcd}
\quad .
$$

$$\begin{aligned}
(\delta_{\mathbb{K}} \circ^{\vee} ev)(\alpha \otimes m) &= \delta_k(\langle \alpha, m\rangle) \\
&= \langle \alpha, m\rangle \otimes 1 \\
&\quad y \\
((^{\vee}ev \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_{M^*\otimes M})(\alpha \otimes m) &= (^{\vee}ev \otimes \mathrm{id})\left(\sum \alpha_{(0)} \otimes m_{(0)} \otimes \alpha_{(1)} m_{(1)}\right) \\
&= 1 \otimes \sum \left\langle \alpha_{(0)}, m_{(0)} \right\rangle \alpha_{(1)} m_{(1)} \\
&= 1 \otimes \sum \left\langle \alpha, m_{(0)} \right\rangle \mathcal{S}(m_{(1)}) m_{(2)} \\
&= 1 \otimes \sum \left\langle \alpha, m_{(0)} \right\rangle \varepsilon\left(m_{(1)}\right) 1 \\
&= \langle \alpha, m\rangle \otimes 1, \qquad \forall\, \alpha \in M^*, m \in M.
\end{aligned}$$

Para probar que *coev* es un morfismo de comódulos, fijemos una base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ del espacio vectorial M y $\left\{e^1, e^2, ..., e^n\right\}$ su base dual. Sea

$$\delta(e_i) = \sum_{j=1}^{n} e_j \otimes t_{ji}, \qquad t_{ji} \in H,\ i = 1, ..., n$$

Entonces, como δ es una coacción, tenemos que

$$\begin{aligned}
((\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \delta)(e_i) &= ((\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \delta)(e_i), \quad \forall i = 1, ..., n. \quad \Rightarrow \\
(\mathrm{id} \otimes \Delta)\left(\sum_{j=1}^{n} e_j \otimes t_{ji}\right) &= (\delta \otimes \mathrm{id})\left(\sum_{j=1}^{n} e_j \otimes t_{ji}\right) \quad \Rightarrow \\
\sum_{j=1}^{n} e_j \otimes \Delta(t_{ji}) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} e_k \otimes t_{kj} \otimes t_{ji} \\
&= \sum_{j=1}^{n} e_j \otimes \sum_{k=1}^{n} t_{jk} \otimes t_{ki}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Delta(t_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} \otimes t_{kj}, \qquad \forall\, i, j = 1, ..., n.$$

Además,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1} \varepsilon(t_{ji}) e_j &= \sum \varepsilon\left(e_{i(1)}\right) e_{i(0)} \\
&= e_i \qquad \Rightarrow \\
\varepsilon(t_{ij}) &= \delta_{ij}, \qquad \forall\, i, j = 1, ..., n.
\end{aligned}$$

Análogamente podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}(e^i) &= \sum_{j=1}^{n} e^j \otimes s_{ji}, \qquad s_{ji} \in H,\ i = 1, ..., n \quad \Rightarrow \\
\sum_{j=1}^{n} \left\langle e^j, m\right\rangle s_{ji} &= \sum \left\langle e^i, m_{(0)}\right\rangle \mathcal{S}(m_{(1)}), \quad \forall\, m \in M,\ i = 1, ..., n;
\end{aligned}$$

tomando $m = e_k$, tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \left\langle e^j, e_k\right\rangle s_{ji} &= \sum_{j=1}^{n} \left\langle e^i, e_j\right\rangle \mathcal{S}(t_{jk}), \quad \forall i, k = 1, ..., n \quad \Rightarrow \\
s_{ki} &= \mathcal{S}(t_{ik}), \qquad \forall\, i, k = 1, ..., n.
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que $\bar{\delta}(e^i) = \sum_{j=1}^n e^j \otimes \mathcal{S}(t_{ij})$, $\forall\, i = 1, ..., n$.
Entonces, identificando $M \otimes M^* \otimes H$ con $\operatorname{Hom}(M, M \otimes H)$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\left(\left(\delta_{M\otimes M^*} \circ^{\vee} coev\right)(1)\right)(m) &= \left(\delta_{M\otimes M^*}\left(\sum_{i=1}^n e_i \otimes e^i\right)\right)(m) \\
&= \left(\sum_{i,j,k=1}^n e_j \otimes e^k \otimes t_{ji}\mathcal{S}(t_{ik})\right)(m), \quad \forall\, m \in M.
\end{aligned}$$

Luego, tomando $m = e_h$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\left(\delta_{M\otimes M^*} \circ^{\vee} coev\right)(1)\right)(e_h) &= \left(\sum_{i,j,k=1}^n e_j \otimes e^k \otimes t_{ji}\mathcal{S}(t_{ik})\right)(e_h) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^n \left\langle e^k \,,\, e_h \right\rangle e_j \otimes t_{ji}\mathcal{S}(t_{ik}) \\
&= \sum_{i,j=1}^n e_j \otimes t_{ji}\mathcal{S}(t_{ih}) \\
&= \sum_{j=1}^n e_j \otimes \sum_{(t_{jh})} t_{jh(1)}\mathcal{S}(t_{jh(2)}) \\
&= \sum_{j=1}^n e_j \otimes \varepsilon\left(t_{jh}\right) 1 \\
&= e_h \otimes 1, \qquad \forall\, h = 1, ..., n
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\left(\left(\left({}^{\vee}coev \otimes \mathrm{id}\right) \circ \delta_{\mathbb{K}}\right)(1)\right)(e_h) &= \left(\left({}^{\vee}coev \otimes \mathrm{id}\right)(1 \otimes 1)\right)(e_h) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n e_i \otimes e^i \otimes 1\right)(e_h) \\
&= \sum_{i=1}^n \left\langle e^i \,,\, e_h \right\rangle e_i \otimes 1 \\
&= e_h \otimes 1, \qquad \forall\, h = 1, ..., n.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\delta_{M\otimes M^*} \circ^{\vee} coev \;=\; \left({}^{\vee}coev \otimes \mathrm{id}\right) \circ \delta_{\mathbb{K}}.$$

2. Sea $(M, \delta) \in \mathcal{M}^H_{fin}$, entonces de forma análoga a la parte anterior, se prueba que la fórmula del enunciado define $\tilde{\delta} : M^* \to M^* \otimes H$. Observar que en la parte anterior, cuando probamos que $\bar{\delta}$ es una coacción, lo que utilizamos fue que δ es coacción y que $\mathcal{S}$ es un antimorfismo de coálgebras. Ahora estamos en la misma situación ya que $\mathcal{S}^{-1}$ es también un antimorfismo de coálgebras. Por lo tanto $\left(M^*, \tilde{\delta}\right)$ es un comódulo. Resta ver que ev y $coev$ son morfismos de comódulos, es decir que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
M \otimes M^* \arrow[r, "ev^{\vee}"] \arrow[d, "\delta_{M\otimes M^*}"'] & \mathbb{K} \arrow[d, "\delta_{\mathbb{K}}"] \\
M \otimes M^* \otimes H \arrow[r, "ev^{\vee}\otimes id"'] & \mathbb{K} \otimes H
\end{tikzcd} \quad , \quad
\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[r, "coev^{\vee}"] \arrow[d, "\delta_{\mathbb{K}}"'] & M^* \otimes M \arrow[d, "\delta_{M^*\otimes M}"] \\
\mathbb{K} \otimes H \arrow[r, "coev^{\vee}\otimes id"'] & M^* \otimes M \otimes H
\end{tikzcd} \quad .$$

$$
\begin{aligned}
(\delta_{\mathbb{K}} \circ ev)\,(m \otimes \alpha) &= \delta_k\,(\langle \alpha, m\rangle) \\
&= \langle \alpha, m\rangle \otimes 1 \\
&\; y \\
((ev \otimes \mathrm{id}\,) \circ \delta_{M \otimes M^*})\,(m \otimes \alpha) &= (ev \otimes \mathrm{id}\,)\left(\sum \alpha_{(0)} \otimes m_{(0)} \otimes m_{(1)}\alpha_{(1)}\right) \\
&= 1 \otimes \sum \left\langle \alpha_{(0)}, m_{(0)} \right\rangle m_{(1)}\alpha_{(1)} \\
&= 1 \otimes \sum \left\langle \alpha, m_{(0)} \right\rangle m_{(2)}\mathcal{S}^{-1}(m_{(1)}) \\
&= 1 \otimes \sum \left\langle \alpha, m_{(0)} \right\rangle \varepsilon\left(m_{(1)}\right) 1 \\
&= \langle \alpha, m\rangle \otimes 1, \qquad \forall\, \alpha \in M^*, m \in M.
\end{aligned}
$$

Ahora tomemos una base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de M y $\left\{e^1, e^2, ..., e^n\right\}$ su base dual. Análogamente a la parte anterior, se prueba que si

$$
\begin{aligned}
\delta(e_i) &= \sum_{j=1}^{n} e_j \otimes t_{ji}, \qquad t_{ji} \in H \\
&\text{entonces} \\
\tilde{\delta}(e^i) &= \sum_{j=1}^{n} e^j \otimes \mathcal{S}^{-1}(t_{ij}), \quad \forall\, i = 1, ..., n.
\end{aligned}
$$

Veamos que

$$
((coev \otimes \mathrm{id}\,) \circ \delta_{\mathbb{K}})\,(1)(e_h) = (\delta_{M^* \otimes M} \circ coev)\,(e_h), \qquad \forall\, h = 1, ..., n.
$$

$$
\begin{aligned}
((\delta_{M^* \otimes M} \circ coev)(1))\,(e_h) &= \left(\sum_{i,j,k=1}^{n} e_j \otimes e^k \otimes \mathcal{S}^{-1}(t_{ik})t_{ji}\right)(e_h) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} \left\langle e^k\,,\, e_h\right\rangle e_j \otimes \mathcal{S}^{-1}(t_{ik})t_{ji} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} e_j \otimes \mathcal{S}^{-1}(t_{ih})t_{ji} \\
&= \sum_{j=1}^{n} e_j \otimes \sum_{(t_{jh})} \mathcal{S}^{-1}(t_{jh\,(2)})t_{jh\,(1)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} e_j \otimes \varepsilon\,(t_{jh})\,1 \\
&= e_h \otimes 1, \qquad \forall\, h = 1, ..., n
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
(((coev \otimes \mathrm{id}\,) \circ \delta_{\mathbb{K}})\,(1))\,(e_h) &= ((coev \otimes \mathrm{id}\,)(1 \otimes 1))\,(e_h) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e^i \otimes 1\right)(e_h) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle e^i\,,\, e_h\right\rangle e_i \otimes 1 \\
&= e_h \otimes 1, \qquad \forall\, h = 1, ..., n.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\delta_{M^*\otimes M} \circ coev \quad = \quad (coev \otimes \mathrm{id}\,) \circ \delta_{\mathbb{K}}.$$

$\square$

Capítulo 6

Biálgebras cuasi y cocuasi triangulares y categorías trenzadas

En este capítulo dada una biálgebra $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ presentamos condiciones necesarias y suficientes para que ${}_B\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^B$ sean categorías trenzadas. Dos referencias para este capítulo son [Kas95] y [Mon93].

6.1 Biálgebras cuasitriangulares

Definición 6.1.1. Una biálgebra $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ es *cuasi-coconmutativa* si existe un elemento $R \in B \otimes B$ invertible, tal que:

$$\Delta^{op}(x) = R\Delta(x)R^{-1}, \ \ \forall\, x \in B,$$

donde $\Delta^{op}(x) = \sum_{(x)} x_{(2)} \otimes x_{(1)} = (\tau \circ \Delta)(x)$. Es decir que si $R = \sum_i R_i^1 \otimes R_i^2$,

$$\sum_{(x),i} R_i^1 x_{(1)} \otimes R_i^2 x_{(2)} \quad = \quad \sum_{(x),i} x_{(2)} R_i^1 \otimes x_{(1)} R_i^2, \qquad \forall\, x \in B.$$

A una biálgebra de tal forma la escribiremos $(B, m, u, \Delta, \varepsilon, R)$. Observar que si $R = 1 \otimes 1$ entonces $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ es coconmutativa.

Notación 6.1.2. Sea $x \in B \otimes B$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes x_i^2$, $\ \ x_i^1, x_i^2 \in B$. Escribiremos:

$$x_{12} = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes x_i^2 \otimes 1_B = R \otimes 1,\ x_{13} = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes 1_B \otimes x_i^2 \text{ y } x_{23} = \sum_{i=1}^{n} 1_B \otimes x_i^1 \otimes x_i^2 = 1 \otimes R.$$

Definición 6.1.3. Una biálgebra $(B, m, u, \Delta, \varepsilon, R)$ cuasi-coconmutativa es *cuasitriangular* si

$$(\Delta \otimes id_B)(R) = R_{13} R_{23} \quad \text{y} \quad (id_B \otimes \Delta)(R) = R_{13} R_{12}.$$

Proposición 6.1.4. Sea $(B, m, u, \Delta, \varepsilon, R)$ una biálgebra cuasitriangular, vale:

1. $R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12}$.
2. $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_B)(R) = 1_{\mathbb{K} \otimes B} \quad$ y $\quad (\mathrm{id}_B \otimes \varepsilon)(R) = 1_{B \otimes \mathbb{K}}$.

Demostración:

1.
$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{12}(\Delta\otimes \mathrm{id}\,)(R) = \sum_i (R\otimes 1)(\Delta(R_i^1)\otimes R_i^2) = \sum_i R\Delta(R_i^1)\otimes R_i^2$$

y como $R\Delta(x) = \Delta^{op}(x)R,\ \forall x\in B$, tenemos

$$\begin{aligned} R_{12}R_{13}R_{23} &= \sum_i \Delta^{op}(R_i^1)R\otimes R_i^2 \\ &= (\Delta^{op}\otimes \mathrm{id}\,)(R)R_{12} \\ &= ((\tau_{B,B}\otimes \mathrm{id}\,)\,(\Delta\otimes \mathrm{id}\,))\,(R)R_{12} \\ &= (\tau_{B,B}\otimes \mathrm{id}\,)\,(R_{13}R_{23})R_{12} \\ &= R_{23}R_{13}R_{12}. \end{aligned}$$

2. Aplicando $\varepsilon\otimes$id $\otimes$id a la igualdad $(\Delta\otimes \mathrm{id}\,)(R) = R_{13}R_{23}$, obtenemos $R = (\varepsilon\otimes \mathrm{id}\,)(R)R$ y como R es invertible
$$(\varepsilon\otimes \mathrm{id}\,)(R) = 1.$$
Aplicando id $\otimes$ id $\otimes\,\varepsilon$ a la igualdad $(\mathrm{id}\,\otimes\Delta)(R) = R_{13}R_{12}$, obtenemos
$$(\mathrm{id}\,\otimes\varepsilon)(R) = 1.$$

□

Observación 6.1.5. Si $(B,m,\Delta,\varepsilon,R)$ es una biálgebra cuasitriangular, entonces
$$R^{-1}\Delta^{op}(x) = \Delta(x)R^{-1},\quad \forall\, x\in B.$$
Por lo tanto $\left(B^{cop},R^{-1}\right)$ y $\left(B^{op},R^{-1}\right)$ son biálgebras cuasitriangulares.

Teorema 6.1.6. Sea $(B,m,u,\Delta,\varepsilon,R)$ una biálgebra cuasitriangular. Entonces $({}_B\mathcal{M},\otimes,\mathbb{K})$ es una categoría trenzada de la siguiente forma

el functor $\otimes$ es el mismo que en el Teorema 4.2.2 y dados M y N dos B-módulos, $c_{M,N}: M\otimes N\to N\otimes M$ es
$$c_{M,N}(m\otimes n) = \sum_i R_i^2\cdot n\otimes R_i^1\cdot m,\quad \forall m\in M,\ n\in N.$$

Demostración:Recordar que $M\otimes N$ es un $(B\otimes B)$-módulo con la acción dada por:
$(\,b\otimes b'\,)\cdot(m\otimes n) = b\cdot m\otimes b'\cdot n.$

Entonces tenemos que $c_{M,N}(m\otimes n) = \tau(R\cdot(m\otimes n)),\ \forall\, m\in M,\ n\in N$. Veamos primero que $c_{M,N}$ es un morfismo de módulos. Tenemos que probar entonces que:
$$c_{M,N}\circ\rho_{M\otimes N} \quad=\quad \rho_{N\otimes M}\circ(\mathrm{id}\,\otimes c_{M,N}),\qquad \forall\, M,N\in\ {}_B\mathcal{M}.$$

Sean $M, N \in {}_B\mathcal{M}$, $m \in M$, $n \in N$, $b \in B$, entonces:

$$\begin{aligned}
c_{M,N}(b\cdot(m\otimes n)) &= c_{M,N}\left(\sum_{(b)} b_{(1)}\cdot m\otimes b_{(2)}\otimes n\right)\\
&= \sum_{(b),i} R_i^2\cdot(b_{(2)}\cdot n)\otimes R_i^1\cdot(b_{(1)}\cdot m)\\
&= \sum_{(b),i} R_i^2 b_{(2)}\cdot n\otimes R_i^1 b_{(1)}\cdot m\\
&= \sum_{(b),i} b_{(1)}R_i^2\cdot n\otimes b_{(2)}R_i^1\cdot m\\
&= b\cdot\left(\sum_i R_i^2\cdot n\otimes R_i^1\cdot m\right)\\
&= b\cdot c_{M,N}(m\otimes n).
\end{aligned}$$

Veamos que $c_{M,N}$ es invertible para todo $M, N \in {}_B\mathcal{M}$.

Si escribimos $R^{-1} = \sum_j T_j^1 \otimes T_j^2$, sea $d_{M,N} : N\otimes M \to M\otimes N$ dada por:

$\mathrm{d}_{M,N}(n\otimes m) = \sum_j T_j^1\cdot m\otimes T_j^2\cdot n$
$= \mathrm{R}^{-1}\cdot(m\otimes n) \quad = \quad R^{-1}\cdot\tau(m\otimes n)$.Entonces:

$$\begin{aligned}
(c_{M,N}\circ d_{M,N})(n\otimes m) &= c_{M,N}(R^{-1}\cdot(m\otimes n))\\
&= \tau(R\cdot(R^{-1}\cdot(m\otimes n)))\\
&= \tau(m\otimes n)\\
&= n\otimes m, \qquad \forall\, n\otimes m\in N\otimes M \quad \Rightarrow\\
c_{M,N}\circ d_{M,N} &= \mathrm{id}_{N\otimes M}
\end{aligned}$$

y de forma análoga se prueba que

$$d_{M,N}\circ c_{M,N} = \mathrm{id}_{M\otimes N}.$$

La naturalidad de c es trivial. Veamos que c hace conmutar el diagrama hexagonal. Como la restricción de la asociatividad es la identidad, tenemos que probar que:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id}_V\otimes c_{U,W})\circ(c_{U,V}\otimes\mathrm{id}_W) &= c_{U,V\otimes W}\\
&\text{y}\\
(c_{U,W}\otimes\mathrm{id}_W)\circ(\mathrm{id}_U\otimes c_{V,W}) &= c_{U\otimes V,W}, \qquad \forall\, U,V,W\in {}_B\mathcal{M}.
\end{aligned}$$

Observar que si $U, V, W \in {}_B\mathcal{M}$, entonces $U\otimes V\otimes W$ es un $(B\otimes B\otimes B)$- módulo, con la acción:

$$(a\otimes b\otimes c)\cdot(u\otimes v\otimes w) = a\cdot u\otimes b\cdot v\otimes c\cdot w.$$

Sea $u \otimes v \otimes w \in U \otimes V \otimes W$, entonces:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id}_V \otimes c_{U,W}) \circ (c_{U,V} \otimes \mathrm{id}_W)(u \otimes v \otimes w) &= (\mathrm{id}_V \otimes c_{U,W}) \left(\sum_i R_i^2 \cdot v \otimes R_i^1 \cdot u \otimes w \right) \\
&= \sum_{i,k} R_i^2 \cdot v \otimes R_k^2 \cdot w \otimes R_k^1 \cdot (R_i^1 \cdot u) \\
&= \tau_{B,B\otimes B} (R_{13}R_{12}) \cdot (v \otimes w \otimes u) \\
&= \tau_{B,B\otimes B} ((\mathrm{id} \otimes \Delta)(R)) \cdot (v \otimes w \otimes u) \\
&= \sum_i \Delta(R_i^2) \cdot (v \otimes w) \otimes R_i^1 \cdot u \\
&= \sum_i R_i^2 \cdot (v \otimes w) \otimes R_i^1 \cdot u \\
&= c_{U,V\otimes W}(u \otimes v \otimes w)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
(c_{U,W} \otimes \mathrm{id}_W) \circ (\mathrm{id}_U \otimes c_{V,W})(u \otimes v \otimes w) &= (c_{U,W} \otimes \mathrm{id}_W) \left(u \otimes \sum_i R_i^2 \cdot w \otimes R_i^1 \cdot v \right) \\
&= \sum_{i,k} R_k^2 \cdot (R_i^2 \cdot w) \otimes R_k^1 \cdot u \otimes R_i^1 \cdot v \\
&= \tau_{B\otimes B,B} (R_{13}R_{23}) \cdot (w \otimes u \otimes v) \\
&= \tau_{B\otimes B,B} ((\Delta \otimes \mathrm{id})(R)) \cdot (w \otimes u \otimes v) \\
&= \sum_i R_i^2 \cdot w \otimes \Delta(R_i^1) \cdot (u \otimes v) \\
&= \sum_i R_i^2 \cdot w \otimes R_i^1 \cdot (u \otimes v) \\
&= c_{U\otimes V,W}(u \otimes v \otimes w).
\end{aligned}$$

□

Teorema 6.1.7. Sea $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ una biálgebra tal que $({}_B\mathcal{M}, \otimes, \mathbb{K})$ es trenzada con trenza c. Entonces $(B, m, u, \Delta, \varepsilon, R)$ es cuasitriangular, donde

$$R = \tau_{B,B}(c_{B,B}(1 \otimes 1)).$$

Demostración: Sean M, N dos módulos, $m \in M$, $n \in N$ y $f : B \to M$, $g : B \to N$ morfismos de módulos dados por:

$$f(x) = x \cdot m \text{ y } g(x) = x \cdot n.$$

Entonces, por naturalidad de la trenza, tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
B \otimes B \arrow[r, "c_{B,B}"] \arrow[d, "f\otimes g"'] & B \otimes B \arrow[d, "g\otimes f"] \\
M \otimes N \arrow[r, "c_{M,N}"'] & N \otimes M
\end{tikzcd},$$

entonces

$$\begin{aligned}
c_{M,N}(m \otimes n) &= ((g \otimes f) \circ c_{B,B})(1 \otimes 1) \\
&= (g \otimes f)(\tau_{B,B}(R)) \\
&= \tau_{M,N}((f \otimes g)(R)) \\
&= \tau(R \cdot (m \otimes n)).
\end{aligned}$$

Veamos que R es invertible. Sea $T = c^{-1}_{B,B}(1\otimes 1)$. De forma análoga a la prueba anterior, se ve que

$$c^{-1}_{M,N}(n\otimes m) = T\cdot(m\otimes n) = T\cdot\tau(n\otimes m),\quad \forall M,N\in {}_B\mathcal{M}, m\in M, n\in N.$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} RT &= \tau(\tau(RT)) \\ &= \tau(c_{B,B}(T)) \\ &= \tau(c_{B,B}(c^{-1}_{B,B}(1\otimes 1))) \\ &= \tau(1\otimes 1) \\ &= 1\otimes 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TR &= T\tau(c_{B,B}(1\otimes 1)) \\ &= c^{-1}_{B,B}(c_{B,B}(1\otimes 1)) \\ &= 1\otimes 1, \end{aligned}$$

y por lo tanto R es invertible con $R^{-1} = T$.

Veamos que $(B, m, u, \Delta, \varepsilon, R)$ es una biálgebra cuasitriangular. Sea $x\in B$, entonces

$$\begin{aligned} \Delta^{op}(x)R &= R\Delta(x) && \Longleftrightarrow \\ \Delta(x)\tau(R) &= \tau(R\Delta(x)) && \Longleftrightarrow \\ \Delta(x)c_{B,B}(1\otimes 1) &= c_{B,B}(\Delta(x)) && \Longleftrightarrow \\ x\cdot c_{B,B}(1\otimes 1) &= c_{B,B}(x\cdot(1\otimes 1)) \end{aligned}$$

y la última igualdad es cierta pues $c_{B,B}$ es un morfismo de B-módulos. Veamos ahora que $(\mathrm{id}\otimes\Delta)(R) = R_{13}R_{12}$. Como c es una trenza, entonces los diagramas hexagonales conmutan; y como la restricción de la asociatividad es la unidad, tenemos que:

$$\begin{aligned} c_{B,B\otimes B} &= (\mathrm{id}_B\otimes c_{B,B})\circ(c_{B,B}\otimes \mathrm{id}_B) && \Rightarrow \\ c_{B,B\otimes B}(1\otimes 1\otimes 1) &= (\mathrm{id}_B\otimes c_{B,B})\left(\sum_{i=1}^n R_i^2\otimes R_i^1\otimes 1\right) && \Rightarrow \\ \tau_{B,B\otimes B}\left(\sum_{i=1}^n R_i^1\otimes R_i^2\cdot(1\otimes 1)\right) &= \sum_{i=1}^n R_i^2\otimes \tau_{B,B}(R(R_i^1\otimes 1)) && \Rightarrow \\ \tau_{B,B\otimes B}\left(\sum_{i=1}^n R_i^1\otimes \Delta\left(R_i^2\right)\right) &= \sum_{i=1}^n R_i^2\otimes \tau_{B,B}\left(\sum_{k=1}^n R_k^1R_i^1\otimes R_k^2\right) && \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^n R_i^1\otimes\Delta\left(R_i^2\right) &= \sum_{i,k=1}^n R_k^1R_i^1\otimes R_i^2\otimes R_k^2 && \Rightarrow \\ (\mathrm{id}\otimes\Delta)(R) &= R_{13}R_{12}. \end{aligned}$$

De forma análoga, utilizando la conmutatividad del otro diagrama hexagonal se prueba que

$$(\Delta\otimes\mathrm{id})(R) = R_{13}R_{23}.$$

□

6.2 Biálgebras cocuasitriangulares

Definición 6.2.1. Una biálgebra $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ es *cuasi-conmutativa* si existe un elemento $r \in \operatorname{Hom}(B \otimes B, \mathbb{K})$ invertible (respecto al producto de convolución), tal que:

$$m^{op} * r = r * m$$

donde $m^{op}(a \otimes b) = m(b \otimes a)$.

A una biálgebra de tal forma la escribiremos $(B, m, u, \Delta, \varepsilon, r)$. Observar que si $r = \varepsilon_{B \otimes B}$ entonces $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ es conmutativa.

Observación 6.2.2.

1. $m^{op} * r = r * m$ nos dice que:
$\sum y_{(1)} x_{(1)} \left\langle r, x_{(2)} \otimes y_{(2)} \right\rangle = \sum \left\langle r, x_{(1)} \otimes y_{(1)} \right\rangle x_{(2)} y_{(2)}, \qquad \forall\, x, y \in B.$
2. El hecho de que r sea invertible en $\operatorname{Hom}(B \otimes B, \mathbb{K})$ nos dice que existe $\bar{r} \in \operatorname{Hom}(B \otimes B, \mathbb{K})$ tal que: $r * \bar{r} = \bar{r} * r = \varepsilon_{B \otimes B}$, es decir que

$$\sum \left\langle r, x_{(1)} \otimes y_{(1)} \right\rangle \left\langle \bar{r}, x_{(2)} \otimes y_{(2)} \right\rangle = \varepsilon(x)\varepsilon(y) \quad \text{y}$$
$$\sum \left\langle \bar{r}, x_{(1)} \otimes y_{(1)} \right\rangle \left\langle r, x_{(2)} \otimes y_{(2)} \right\rangle = \varepsilon(x)\varepsilon(y), \quad \forall\, x, y \in B.$$

Notación 6.2.3. Sea $\alpha \in \operatorname{Hom}(B \otimes B, \mathbb{K})$, escribiremos:

$$\begin{aligned}
\alpha_{12} &= \alpha \otimes \varepsilon_B \ : B \otimes B \otimes B \to \mathbb{K}, \\
\alpha_{23} &= \varepsilon_B \otimes \alpha \ : B \otimes B \otimes B \to \mathbb{K}, \\
\alpha_{13} &= (\varepsilon_B \otimes \alpha)(\tau_{B,B} \otimes \operatorname{id}_B) \ : B \otimes B \otimes B \to \mathbb{K}.
\end{aligned}$$

Definición 6.2.4. Una biálgebra $(B, m, u, \Delta, \varepsilon, r)$ cuasi-conmutativa es *cocuasitriangular* si

$$r \circ (m \otimes \operatorname{id}_B) = r_{13} * r_{23} \quad \text{y} \quad r \circ (\operatorname{id}_B \otimes m) = r_{13} * r_{12},$$

es decir, si $r\,,\, xy \otimes z = \sum \left\langle r\,,\, x \otimes z_{(1)} \right\rangle \left\langle r\,,\, y \otimes z_{(2)} \right\rangle$ y $r\,,\, x \otimes yz = \sum \left\langle r\,,\, x_{(1)} \otimes z \right\rangle \left\langle r\,,\, x_{(2)} \otimes y \right\rangle$, $\forall x, y, z \in B$.

Proposición 6.2.5. Si $(B, m, u, \Delta, \varepsilon, r)$ es una biálgebra cocuasitriangular, entonces:

$$r_{12} * r_{13} * r_{23} = r_{23} * r_{13} * r_{12}.$$

Demostración: Sean $x, y, z \in B$, entonces

$$\begin{aligned}
r_{12} * r_{13} * r_{23}(x \otimes y \otimes z) &= r_{12} * (r \circ (m \otimes \operatorname{id}))(x \otimes y \otimes z) \\
&= \sum r_{12}(x_{(1)} \otimes y_{(1)} \otimes z_{(1)})(r \circ (m \otimes \operatorname{id}))(x_{(2)} \otimes y_{(2)} \otimes z_{(2)}) \\
&= \sum \left\langle r\,,\, x_{(1)} \otimes y_{(1)} \right\rangle \varepsilon(z_{(1)}) \left\langle r\,,\, x_{(2)} y_{(2)} \otimes z_{(2)} \right\rangle \\
&= \sum \left\langle r\,,\, x_{(1)} \otimes y_{(1)} \right\rangle \left\langle r\,,\, x_{(2)} y_{(2)} \otimes z \right\rangle \\
&= \sum \left\langle r\,,\, x_{(1)} \otimes y_{(1)} \right\rangle \left\langle r\,,\, x_{(2)} \otimes z_{(1)} \right\rangle \left\langle r\,,\, y_{(2)} \otimes z_{(2)} \right\rangle
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
r_{23} * r_{13} * r_{12}(x \otimes y \otimes z) &= r_{23} * (r \circ (\operatorname{id} \otimes m))(x \otimes y \otimes z) \\
&= \sum r_{23}(x_{(1)} \otimes y_{(1)} \otimes z_{(1)})(r \circ (\operatorname{id} \otimes m))(x_{(2)} \otimes y_{(2)} \otimes z_{(2)}) \\
&= \sum \left\langle r\,,\, y_{(1)} \otimes z_{(1)} \right\rangle \varepsilon(x_{(1)}) \left\langle r\,,\, x_{(2)} \otimes y_{(2)} z_{(2)} \right\rangle \\
&= \sum \left\langle r\,,\, y_{(1)} \otimes z_{(1)} \right\rangle \left\langle r\,,\, x \otimes y_{(2)} z_{(2)} \right\rangle \\
&= \sum \left\langle r\,,\, y_{(1)} \otimes z_{(1)} \right\rangle \left\langle r\,,\, x_{(1)} \otimes z_{(2)} \right\rangle \left\langle r\,,\, x_{(2)} \otimes y_{(2)} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Veamos que

$$\begin{aligned}\sum \left\langle r\,,\,x_{(1)}\otimes y_{(1)}\right\rangle \left\langle r\,,\,x_{(2)}\otimes z_{(1)}\right\rangle \left\langle r\,,\,y_{(2)}\otimes z_{(2)}\right\rangle \quad &= \\ \sum \left\langle r\,,\,y_{(1)}\otimes z_{(1)}\right\rangle \left\langle r\,,\,x_{(1)}\otimes z_{(2)}\right\rangle \left\langle r\,,\,x_{(2)}\otimes y_{(2)}\right\rangle .&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum \left\langle r\,,\,x_{(1)}\otimes y_{(1)}\right\rangle \left\langle r\,,\,x_{(2)}\otimes z_{(1)}\right\rangle \left\langle r\,,\,y_{(2)}\otimes z_{(2)}\right\rangle &= \sum \left\langle r\,,\,x_{(1)}\otimes y_{(1)}\right\rangle \left\langle r\,,\,x_{(2)}y_{(2)}\otimes z\right\rangle \\ &= \sum \left\langle r\,,\,\left\langle r\,,\,x_{(1)}\otimes y_{(1)}\right\rangle x_{(2)}y_{(2)}\otimes z\right\rangle \\ &= \sum \left\langle r\,,\,\left\langle r\,,\,x_{(2)}\otimes y_{(2)}\right\rangle y_{(1)}x_{(1)}\otimes z\right\rangle \\ &= \sum \left\langle r\,,\,x_{(2)}\otimes y_{(2)}\right\rangle \left\langle r\,,\,y_{(1)}x_{(1)}\otimes z\right\rangle \\ &= \sum \left\langle r\,,\,y_{(1)}\otimes z_{(1)}\right\rangle \left\langle r\,,\,x_{(1)}\otimes z_{(2)}\right\rangle \left\langle r\,,\,x_{(2)}\otimes y_{(2)}\right\rangle .\end{aligned}$$

□

Proposición 6.2.6. Si $\bar{r} : B\otimes B \to \mathbb{K}$ es la inversa de r respecto al producto de convolución, entonces:

1. Los mapas $\bar{r}_{12}, \bar{r}_{13}$ y $\bar{r}_{23}$ son las inversas respecto al producto de convolución de r_{12}, r_{13} y r_{23} respectivamente.
2. Vale $\bar{r} * m^{op} = m * \bar{r}$, es decir que

$$\sum \left\langle \bar{r}\,,\,x_{(1)}\otimes y_{(1)}\right\rangle y_{(2)}x_{(2)} \quad = \quad \sum \left\langle \bar{r}\,,\,x_{(2)}\otimes y_{(2)}\right\rangle x_{(1)}y_{(1)}, \quad \forall\, x,y\in B.$$

Demostración:

1.

$$\begin{aligned}\bar{r}_{12} * r_{12}(x\otimes y\otimes z) &= \sum \left\langle \bar{r}\,,\,x_{(1)}\otimes y_{(1)}\right\rangle \varepsilon(z_{(1)}) \left\langle \bar{r}\,,\,x_{(2)}\otimes y_{(2)}\right\rangle \varepsilon(z_{(2)}) \\ &= \varepsilon(x)\varepsilon(y)\sum \varepsilon(z_{(1)})\varepsilon(z_{(2)}) \\ &= \varepsilon(x)\varepsilon(y)\varepsilon(z), \quad \forall\, x,y,z\in B.\end{aligned}$$

Las otras igualdades se demuestran de forma análoga.

2.

$$\begin{aligned}m^{op} * r &= r * m \qquad \Rightarrow \\ \bar{r} * m^{op} * r * \bar{r} &= \bar{r} * r * m * \bar{r} \qquad \Rightarrow \\ \bar{r} * m^{op} &= m * \bar{r}.\end{aligned}$$

□

Teorema 6.2.7. Sea $(B, m, u, \Delta, \varepsilon, r)$ una biálgebra cocuasitriangular. Entonces $(\mathcal{M}^B, \otimes, \mathbb{K})$ es una categoría trenzada de la siguiente forma:

el functor $\otimes$ es el mismo que en el Teorema 4.2.5 y dados M y N dos B-comódulos $c_{M,N} : M\otimes N \to N\otimes M$ es

$$c_{M,N}(m\otimes n) = \sum \left\langle r, m_{(1)}\otimes n_{(1)}\right\rangle n_{(0)}\otimes m_{(0)}, \quad \forall\, m\in M,\ n\in N.$$

Demostración: Veamos primero que $c_{M,N}$ es un morfismo de comódulos. Tenemos que probar entonces que

$$(c_{M,N}\otimes \mathrm{id}\,)\circ \delta_{M\otimes N} \quad = \quad \delta_{N\otimes M}\circ c_{M,N} \qquad \forall\, M,N\in \mathcal{M}^B.$$

Sean $M, N \in \mathcal{M}^B$, $m \in M$, $n \in N$, entonces:

$$\begin{aligned}
((c_{M,N} \otimes \mathrm{id}\,) \circ \delta_{M\otimes N})\,(m \otimes n) &= (c_{M,N} \otimes \mathrm{id}\,) \left(\sum m_{(0)} \otimes n_{(0)} \otimes m_{(1)} n_{(1)}\right) \\
&= \sum \left\langle r, m_{(1)} \otimes n_{(1)} \right\rangle n_{(0)} \otimes m_{(0)} \otimes m_{(2)} n_{(2)} \\
&= \sum n_{(0)} \otimes m_{(0)} \otimes \left\langle r, m_{(1)} \otimes n_{(1)} \right\rangle m_{(2)} n_{(2)} \\
&= \sum n_{(0)} \otimes m_{(0)} \otimes \left\langle r, m_{(2)} \otimes n_{(2)} \right\rangle n_{(1)} m_{(1)} \\
&= \sum \left\langle r, m_{(2)} \otimes n_{(2)} \right\rangle \left(n_{(0)} \otimes m_{(0)} \otimes n_{(1)} m_{(1)}\right) \\
&= \delta_{N\otimes M} \left(\sum \left\langle r, m_{(1)} \otimes n_{(1)} \right\rangle n_{(0)} \otimes m_{(0)}\right) \\
&= (\delta_{N\otimes M} \circ c_{M,N})\,(m \otimes n).
\end{aligned}$$

Veamos ahora que $c_{M,N}$ es invertible para todo par M, N de comódulos. Sea $d_{M,N} : N \otimes M \to M \otimes N$ dada por:

$$d_{M,N}(n \otimes m) = \sum \left\langle \bar{r}, m_{(1)} \otimes n_{(1)} \right\rangle m_{(0)} \otimes n_{(0)} \; ,$$

donde $\bar{r}$ es la inversa de r respecto al producto de convolución. Entonces:

$$\begin{aligned}
c_{M,N} \circ d_{M,N}(n \otimes m) &= c_{M,N} \left(\sum \left\langle \bar{r}, m_{(1)} \otimes n_{(1)} \right\rangle m_{(0)} \otimes n_{(0)}\right) \\
&= \sum \left\langle \bar{r}, m_{(2)} \otimes n_{(2)} \right\rangle \left\langle r, m_{(1)} \otimes n_{(1)} \right\rangle n_{(0)} \otimes m_{(0)} \\
&= \sum \varepsilon(m_{(1)}) \varepsilon(n_{(1)}) n_{(0)} \otimes m_{(0)} \\
&= n \otimes m, \qquad \forall\, n \otimes m \in N \otimes M \qquad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$c_{M,N} \circ d_{M,N} = \mathrm{id}\,_{N\otimes M}$$

y de forma análoga se prueba que

$$d_{M,N} \circ c_{M,N} = \mathrm{id}\,_{M\otimes N}.$$

La naturalidad de c es trivial. Veamos que c hace conmutar el diagrama hexagonal. Como la restricción de la asociatividad es la identidad, tenemos que probar que:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id}\,_V \otimes c_{U,W}) \circ (c_{U,V} \otimes \mathrm{id}\,_W) &= c_{U,V\otimes W} \\
&\text{y} \\
(c_{U,W} \otimes \mathrm{id}\,_W) \circ (\mathrm{id}\,_U \otimes c_{V,W}) &= c_{U\otimes V,W}, \qquad \forall\, U, V, W \in \mathcal{M}^B
\end{aligned}$$

Sea $u \otimes v \otimes w \in U \otimes V \otimes W$, entonces:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{id}\,_V \otimes c_{U,W}) \circ (c_{U,V} \otimes \mathrm{id}\,_W)\,(u \otimes v \otimes w) \\
&\quad= (\mathrm{id}\,_V \otimes c_{U,W}) \left(\sum \left\langle r, u_{(1)} \otimes v_{(1)} \right\rangle v_{(0)} \otimes u_{(0)} \otimes w\right) \\
&\quad= \sum \left\langle r, u_{(2)} \otimes v_{(1)} \right\rangle \left\langle r, u_{(1)} \otimes w_{(1)} \right\rangle v_{(0)} \otimes w_{(0)} \otimes u_{(0)} \\
&\quad= \sum \left\langle r, u_{(1)} \otimes v_{(1)} w_{(1)} \right\rangle v_{(0)} \otimes w_{(0)} \otimes u_{(0)} \\
&\quad= c_{U,V\otimes W}(u \otimes v \otimes w)
\end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
&(c_{U,W} \otimes \mathrm{id}_W) \circ (\mathrm{id}_U \otimes c_{V,W})\,(u \otimes v \otimes w) \\
&\qquad = \quad (c_{U,W} \otimes \mathrm{id}_W)\left(u \otimes \sum \left\langle r, v_{(1)} \otimes w_{(1)} \right\rangle w_{(0)} \otimes v_{(0)}\right) \\
&\qquad = \quad \sum \left\langle r, v_{(1)} \otimes w_{(2)} \right\rangle \left\langle r, u_{(1)} \otimes w_{(1)} \right\rangle w_{(0)} \otimes u_{(0)} \otimes v_{(0)} \\
&\qquad = \quad \sum \left\langle r, u_{(1)} v_{(1)} \otimes w_{(1)} \right\rangle w_{(0)} \otimes u_{(0)} \otimes v_{(0)} \\
&\qquad = \quad c_{U\otimes V,W}(u \otimes v \otimes w).
\end{aligned}
$$

□

Teorema 6.2.8. Sea $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ una biálgebra tal que $(\mathcal{M}^B, \otimes, \mathbb{K})$ es trenzada con trenza c. Entonces $(B, m, u, \Delta, \varepsilon, r)$ es cocuasitriangular, donde

$$\langle r, a \otimes b\rangle = (m_{\mathbb{K}} \circ \varepsilon_{B\otimes B} \circ c_{B,B})\,(a \otimes b), \quad \forall\, a, b \in B.$$

Demostración: Veamos primero que r es invertible respecto al producto de convolución. Definimos

$$\langle \bar{r}\,,\, a \otimes b\rangle = \left(m_{\mathbb{K}} \circ \varepsilon_{B\otimes B} \circ c_{B,B}^{-1}\right)(b \otimes a), \quad \forall\, a, b \in B.$$

Sean V, W dos comódulos y $v \in V$, $w \in W$. Veamos que con r y $\bar{r}$ así definidas, se cumple que:

$$
\begin{aligned}
c_{V,W}(v \otimes w) \quad &= \quad \sum \left\langle r, v_{(1)} \otimes w_{(1)} \right\rangle w_{(0)} \otimes v_{(0)} \\
&\text{y} \\
c_{V,W}^{-1}(w \otimes v) \quad &= \quad \sum \left\langle \bar{r}\,,\, v_{(1)} \otimes w_{(1)} \right\rangle v_{(0)} \otimes w_{(0)}.
\end{aligned}
$$

Dado $f \in V^*$, observar que el mapa $\alpha_f : V \to B$,

$$\alpha_f(v) \quad = \quad \sum \left\langle f\,,\, v_{(0)} \right\rangle v_{(1)}$$

es un morfismo de comódulos. Sean $f \in V^*$ y $g \in W^*$. Entonces, como la trenza es una transformación natural, tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
V \otimes W \arrow[r, "c_{V,W}"] \arrow[d, "\alpha_f \otimes \alpha_g"'] & W \otimes V \arrow[d, "\alpha_g \otimes \alpha_f"] \\
B \otimes B \arrow[r, "c_{B,B}"'] & B \otimes B
\end{tikzcd}
.
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
((g \otimes f) \circ c_{V,W})\,(v \otimes w) \quad &= \quad ((\varepsilon \otimes \varepsilon) \circ (\alpha_g \otimes \alpha_f) \circ c_{V,W})\,(v \otimes w) \\
&= \quad ((\varepsilon \otimes \varepsilon) \circ c_{B,B} \circ (\alpha_f \otimes \alpha_g))\,(v \otimes w) \\
&= \quad ((\varepsilon \otimes \varepsilon) \circ c_{B,B})\left(\sum \left\langle f\,, v_{(0)} \right\rangle v_{(1)} \otimes \sum \left\langle g\,, w_{(0)} \right\rangle w_{(1)}\right) \\
&= \quad \sum \left\langle f\,, v_{(0)} \right\rangle \left\langle g\,, w_{(0)} \right\rangle (\varepsilon \otimes \varepsilon) c_{H,H}(v_{(1)} \otimes w_{(1)}) \\
&\approx \quad \sum \left\langle g\,, w_{(0)} \right\rangle \left\langle f\,, v_{(0)} \right\rangle \left\langle r\,,\, v_{(1)} \otimes w_{(1)} \right\rangle \\
&\approx \quad (g \otimes f)\left(\sum \left\langle r\,,\, v_{(1)} \otimes w_{(1)} \right\rangle w_{(0)} \otimes v_{(0)}\right);
\end{aligned}
$$

es decir que

$$((g \otimes f) \circ c_{V,W})\,(v \otimes w) \quad = \quad (g \otimes f)\left(\sum \left\langle r\,,\, v_{(1)} \otimes w_{(1)} \right\rangle w_{(0)} \otimes v_{(0)}\right), \quad \forall\, f \in V^*,\, g \in W^*;$$

entonces

$$c_{V,W}(v\otimes w) \;=\; \sum \left\langle r\,,\,v_{(1)}\otimes w_{(1)}\right\rangle w_{(0)}\otimes v_{(0)}.$$

La otra igualdad se demuestra de forma análoga. Entonces,

$$\begin{aligned}
r*\bar r(a\otimes b) &= \sum \left\langle r\,,\,a_{(1)}\otimes b_{(1)}\right\rangle \left\langle \bar r\,,\,a_{(2)}\otimes b_{(2)}\right\rangle\\
&= \left\langle r\,,\,\sum \left\langle \bar r\,,\,a_{(2)}\otimes b_{(2)}\right\rangle a_{(1)}\otimes b_{(1)}\right\rangle\\
&= \left\langle r\,,\,c^{-1}_{B,B}(b\otimes a)\right\rangle\\
&= (m_{\mathbb{K}}\circ(\varepsilon\otimes\varepsilon)\circ c_{B,B})\left(c^{-1}_{B,B}(b\otimes a)\right)\\
&= \varepsilon(a)\varepsilon(b), \quad \forall\, a,b\in B\\
&\text{y}\\
\bar r*r(a\otimes b) &= \sum \left\langle \bar r\,,\,a_{(1)}\otimes b_{(1)}\right\rangle \left\langle r\,,\,a_{(2)}\otimes b_{(2)}\right\rangle\\
&= \left\langle \bar r,\,\sum \left\langle r\,,\,a_{(2)}\otimes b_{(2)}\right\rangle a_{(1)}\otimes b_{(1)}\right\rangle\\
&= \langle \bar r\,,\,\tau(c_{B,B})\rangle\\
&= \left(m_{\mathbb{K}}\circ(\varepsilon\otimes\varepsilon)\circ c^{-1}_{B,B}\right)(c_{B,B(a\otimes b)})\\
&= \varepsilon(a)\varepsilon(b), \quad \forall\, a,b\in B.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $r*\bar r=\bar r*r=u_{\mathbb{K}}\circ\varepsilon_{B\otimes B}$.

Veamos que $r*m=m^{op}*r$. Como $c_{B,B}$ es un morfismo de comódulos, tenemos que

$$\begin{aligned}
(c_{B,B}\otimes \mathrm{id}\,)\circ\delta_{B\otimes B} &= \delta_{B\otimes B}\circ c_{B,B} \;\Rightarrow\\
\sum c_{B,B}(x_{(1)}\otimes y_{(1)})\otimes x_{(2)}y_{(2)} &= \delta_{B\otimes B}\left(\sum \left\langle r,x_{(2)}\otimes y_{(2)}\right\rangle y_{(1)}x_{(1)}\right) \;\Rightarrow\\
\sum \left\langle r,x_{(2)}\otimes y_{(2)}\right\rangle y_{(1)}\otimes x_{(1)}\otimes x_{(3)}y_{(3)} &= \sum \left\langle r,x_{(3)}\otimes y_{(3)}\right\rangle y_{(1)}\otimes x_{(1)}\otimes y_{(2)}x_{(2)}, \quad \forall\, x,y\in B;
\end{aligned}$$

aplicando a ambos lados $\varepsilon\otimes\varepsilon\otimes\mathrm{id}$ e identificando $\mathbb{K}\otimes\mathbb{K}\otimes B$ con B obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum \left\langle r,x_{(1)}\otimes y_{(1)}\right\rangle x_{(2)}y_{(2)} &= \sum \left\langle r,x_{(2)}\otimes y_{(2)}\right\rangle y_{(1)}x_{(1)}, \qquad \forall\, x,y\in B \quad\Rightarrow\\
r*m &= m^{op}*r.
\end{aligned}$$

Veamos ahora que $r\circ(id\otimes m)=r_{13}*r_{12}$. Como $c_{B,B}$ hace conmutar los diagramas hexagonales, tenemos que:

$$(\mathrm{id}\,\otimes c_{B,B})\circ(c_{B,B}\otimes\mathrm{id}\,)\,(x\otimes y\otimes z) \;=\; c_{B,B\otimes B}(x\otimes y\otimes z),$$

luego

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{id}\,\otimes c_{B,B})\left(\sum \left\langle r,x_{(2)}\otimes y_{(2)}\right\rangle y_{(1)}\otimes x_{(1)}\otimes z\right)=\\
&\qquad\qquad \sum \left\langle r,x_{(2)}\otimes y_{(2)}z_{(2)}\right\rangle y_{(1)}\otimes z_{(1)}\otimes x_{(1)} \qquad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum \left\langle r,x_{(3)}\otimes y_{(2)}\right\rangle \left\langle r,x_{(2)}\otimes z_{(2)}\right\rangle y_{(1)}\otimes z_{(1)}\otimes x_{(1)}=\\
&\qquad\qquad \sum \left\langle r,x_{(2)}\otimes y_{(2)}z_{(2)}\right\rangle y_{(1)}\otimes z_{(1)}\otimes x_{(1)},
\end{aligned}$$

y aplicando $\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \varepsilon$ obtenemos

$$\sum \left\langle r, x_{(2)} \otimes y \right\rangle \left\langle r, x_{(1)} \otimes z \right\rangle \quad = \quad \langle r, x \otimes yz \rangle\,, \qquad \forall\, x, y, z \in B.$$

Por lo tanto $r \circ (id \otimes m) = r_{13} * r_{12}$. También tenemos que:

$$((c_{B,B} \otimes \mathrm{id}\,) \circ \mathrm{id}\, \otimes c_{B,B})\,(x \otimes y \otimes z) \quad = \quad c_{B \otimes B,B}(x \otimes y \otimes z),$$

luego

$$(c_{B,B} \otimes \mathrm{id}\,) \left(\sum x \otimes \left\langle r, y_{(2)} \otimes z_{(2)} \right\rangle z_{(1)} \otimes y_{(1)} \right) = \\ \sum \left\langle r, x_{(2)} y_{(2)} \otimes z_{(2)} \right\rangle z_{(1)} \otimes x_{(1)} \otimes y_{(1)} \qquad \Rightarrow$$

$$\sum \left\langle r, y_{(2)} \otimes z_{(3)} \right\rangle \left\langle r, x_{(2)} \otimes z_{(2)} \right\rangle z_{(1)} \otimes x_{(1)} \otimes y_{(1)} = \\ \sum \left\langle r, x_{(2)} y_{(2)} \otimes z_{(2)} \right\rangle z_{(1)} \otimes x_{(1)} \otimes y_{(1)}$$

y aplicando $\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \varepsilon$ obtenemos

$$\sum \left\langle r, y \otimes z_{(2)} \right\rangle \left\langle r, x \otimes z_{(1)} \right\rangle \quad = \quad \langle r, xy \otimes z \rangle\,, \qquad \forall\, x, y, z \in B.$$

$\square$

Capítulo 7

Ecuación de trenzas y biálgebras cuadráticas

En este capítulo, presentamos la ecuación de trenzas y mostramos cómo en la categoría de módulos sobre una biálgebra cuasitriangular, y en la categoría de comódulos sobre una biálgebra cocuasitriangular, las respectivas trenzas son solución de dicha ecuación. También, basándonos en la construcción descrita en [Doi93], dada una solución de la ecuación de trenzas, construímos una biálgebra cocuasitriangular, de forma tal que en la categoría de sus comódulos se recupera dicha solución.

Definición 7.0.9. Sea V un espacio vectorial, y $S \in \mathrm{End}\,(V \otimes V)$; S verifica la *ecuación de trenzas* si

$$(S \otimes \mathrm{id}_V) \circ (\mathrm{id}_V \otimes S) \circ (S \otimes \mathrm{id}_V) \quad = \quad (\mathrm{id}_V \otimes S) \circ (S \otimes \mathrm{id}_V) \circ (\mathrm{id}_V \otimes S).$$

Recordar que si $(B, m, u, \Delta, \varepsilon, R)$ es una biálgebra cuasitriangular, entonces ${}_B\mathcal{M}$ es una categoría monoidal trenzada (ver Teorema 6.1.6). Dado un B-módulo V, tomando $a = b = c = V$ en la Proposición 1.3.7, resulta que la trenza $c_{V,V}$ es solución de la ecuación de trenzas en $V \otimes V$.

Análogamente, si $(B, m, u, \Delta, \varepsilon, r)$ es una biálgebra cocuasitriangular, entonces $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}$ es una categoría monoidal trenzada (ver Teorema 6.2.7). Dado un B-comódulo V, tomando $a = b = c = V$ en la Proposición 1.3.7, resulta que la trenza $c_{V,V}$ en solución de la ecuación de trenzas en $V \otimes V$.

Dado un espacio vectorial V de dimensión finita y $S \in \ \mathrm{End}(V \otimes V)$ una solución invertible de la ecuación de trenzas, construiremos una biálgebra cocuasitriangular $B(V, S)$ de forma tal que $V \in M^{B(V,S)}$ y $S = c_{V,V}$ en dicha categoría. La primera construcción en este sentido fue la biálgebra de FRT, presentada por L.Fadeev, N.Reshetikhin y L.Takhtajan en [FRT90]. A continuación desarrollamos la construcción descrita en [Doi93], que generaliza la construcción de FRT.

Definición 7.0.10. Sea (C, Δ, ε) una coálgebra y $\sigma \in (C \otimes C)^*$. Sea $J_\sigma \subset T(C)$ definido por

$$J_\sigma \quad = \quad \mathbb{K}\left\{\sum \left\langle \sigma\,, x_{(1)} \otimes y_{(1)}\right\rangle x_{(2)} \otimes y_{(2)} - y_{(1)} \otimes x_{(1)} \left\langle \sigma, x_{(2)} \otimes y_{(2)}\right\rangle : x, y \in C\right\}.$$

donde si A es un conjunto, $\mathbb{K}A = \left\{\sum_{i=1}^{n} k_i a_i : k_i \in \mathbb{K},\, a_i \in A,\, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Entonces J_σ es un co-ideal de $T(C)$, y luego $[J_\sigma]$, el ideal bilateral generado por J_σ, es un bi-ideal de $T(C)$. Por lo tanto tenemos que

$$M(C,\sigma) \quad = \quad \frac{T(C)}{[J_\sigma]}$$

es una biálgebra. A esta biálgebra la llamaremos *biálgebra cuadrática* asociada a (C,σ).

Definición 7.0.11. Sea C una coálgebra y $\sigma \in (C\otimes C)^*$ invertible. Decimos que σ es una *forma de Yang-Baxter* si

$$\sum_{(x),(y),(z)} \left\langle \sigma\,,\, x_{(1)}\otimes y_{(1)}\right\rangle \left\langle \sigma\,,\, x_{(2)}\otimes z_{(1)}\right\rangle \left\langle \sigma\,,\, y_{(2)}\otimes z_{(2)}\right\rangle =$$
$$\sum_{(x),(y),(z)} \left\langle \sigma\,,\, y_{(1)}\otimes z_{(1)}\right\rangle \left\langle \sigma\,,\, x_{(1)}\otimes z_{(2)}\right\rangle \left\langle \sigma\,,\, x_{(2)}\otimes y_{(2)}\right\rangle, \quad \forall\, x,y,z\in C;$$

es decir si

$$\sigma_{12}*\sigma_{13}*\sigma_{23} \quad = \quad \sigma_{23}*\sigma_{13}*\sigma_{12}.$$

A un par (C,σ) en las condiciones anteriores, se le llama *coálgebra de Yang-Baxter*.

Observación 7.0.12. Si σ^{-1} es la inversa de σ respecto al producto de convolución, como vimos en la Proposición 6.2.6, $\sigma_{12}^{-1},\sigma_{23}^{-1}$ y σ_{13}^{-1} son las inversas de σ_{12}, σ_{23} y σ_{13} respectivamente. Por lo tanto si σ es una forma de Yang-Baxter, se cumple que

$$\begin{aligned}\sigma_{23}*\sigma_{12}^{-1}*\sigma_{13}^{-1} \quad &= \quad \sigma_{13}^{-1}*\sigma_{12}^{-1}*\sigma_{23}\\ &\text{y}\\ \sigma_{13}^{-1}*\sigma_{23}^{-1}*\sigma_{12} \quad &= \quad \sigma_{12}*\sigma_{23}^{-1}*\sigma_{13}^{-1},\end{aligned}$$

es decir que

$$\sum_{(x),(y),(z)} \left\langle \sigma, y_{(1)}\otimes z_{(1)}\right\rangle \left\langle \sigma^{-1}, x_{(1)}\otimes y_{(2)}\right\rangle \left\langle \sigma^{-1}, x_{(2)}\otimes z_{(2)}\right\rangle =$$
$$\sum_{(x),(y),(z)} \left\langle \sigma^{-1}, x_{(1)}\otimes z_{(1)}\right\rangle \left\langle \sigma^{-1}, x_{(2)}\otimes y_{(1)}\right\rangle \left\langle \sigma, y_{(2)}\otimes z_{(2)}\right\rangle$$

y

$$\sum_{(x),(y),(z)} \left\langle \sigma^{-1}, x_{(1)}\otimes z_{(1)}\right\rangle \left\langle \sigma^{-1}, y_{(1)}\otimes z_{(2)}\right\rangle \left\langle \sigma, x_{(2)}\otimes y_{(2)}\right\rangle =$$
$$\sum_{(x),(y),(z)} \left\langle \sigma, x_{(1)}\otimes y_{(1)}\right\rangle \left\langle \sigma^{-1}, y_{(2)}\otimes z_{(1)}\right\rangle \left\langle \sigma^{-1}, x_{(2)}\otimes z_{(2)}\right\rangle, \quad \forall\, x,y,z\in B.$$

Teorema 7.0.13. Sea (C,σ) una coálgebra de Yang-Baxter, entonces $M(C,\sigma)$ es una biálgebra cocuasitrianguar.

Demostración: Tenemos σ y $\sigma^{-1}: C\otimes C \to \mathbb{K}$ y queremos definirlas en $M(C,\sigma)\otimes M(C,\sigma)$. Primero extendemos σ,σ^{-1} a $\overline{\sigma},\overline{\sigma^{-1}}: T(C)\otimes T(C)\to\mathbb{K}$. Observar que para esto, basta con definirlas en elementos de la forma $(x\otimes y)\otimes z$ y $x\otimes(y\otimes z)$, y luego extender por inducción y linealidad. Definimos entonces:

$$\begin{aligned}\langle\overline{\sigma}\,,\,(x\otimes y)\otimes z\rangle \quad &= \quad \sum_{(z)}\left\langle \sigma\,,\, x\otimes z_{(1)}\right\rangle \left\langle \sigma\,,\, y\otimes z_{(2)}\right\rangle\\ &\text{y}\\ \langle\overline{\sigma}\,,\, x\otimes(y\otimes z)\rangle \quad &= \quad \sum_{(x)}\left\langle \sigma\,,\, x_{(1)}\otimes z\right\rangle \left\langle \sigma\,,\, x_{(2)}\otimes y\right\rangle\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{\sigma^{-1}}\,,\,(x\otimes y)\otimes z\right\rangle &= \sum_{(z)}\left\langle \sigma^{-1}\,,\,y\otimes z_{(1)}\right\rangle\left\langle \sigma^{-1}\,,\,x\otimes z_{(2)}\right\rangle \\
&\text{y} \\
\left\langle \overline{\sigma^{-1}}\,,\,x\otimes (y\otimes z)\right\rangle &= \sum_{(x)}\left\langle \sigma^{-1}\,,\,x_{(1)}\otimes y\right\rangle\left\langle \sigma^{-1}\,,\,x_{(2)}\otimes z\right\rangle.
\end{aligned}$$

Como $M(C,\sigma)\otimes M(C,\sigma)=\frac{T(C)\otimes T(C)}{[J_\sigma]\otimes T(C)+T(C)\otimes[J_\sigma]}$ veamos que

$$[J_\sigma]\otimes T(C)+T(C)\otimes[J_\sigma]\quad\subset\quad \operatorname{Ker}\overline{\sigma}.$$

Tenemos que

$$\overline{\sigma}\left([J_\sigma]\otimes T(C)+T(C)\otimes[J_\sigma]\right)\quad=\quad 0$$

si y sólo si

$$\left\langle \overline{\sigma}\,,\,\left(\sum_{(x),(y)}\left\langle \sigma\,,\,x_{(1)}\otimes y_{(1)}\right\rangle x_{(2)}\otimes y_{(2)}-y_{(1)}\otimes x_{(1)}\left\langle \sigma\,,\,x_{(2)}\otimes y_{(2)}\right\rangle\right)\otimes z\right\rangle=0 \qquad \text{y}$$

$$\left\langle \overline{\sigma}\,,\,x\otimes\left(\sum_{(y),(z)}\left\langle \sigma\,,\,y_{(1)}\otimes z_{(1)}\right\rangle y_{(2)}\otimes z_{(2)}-z_{(1)}\otimes z_{(1)}\left\langle \sigma\,,\,y_{(2)}\otimes z_{(2)}\right\rangle\right)\right\rangle=0,\ \ \forall\, x,y,z\in C,$$

si y sólo si

$$\sum_{(x),(y)}\left\langle \sigma\,,\,x_{(1)}\otimes y_{(1)}\right\rangle\left\langle \overline{\sigma}\,,\,\left(x_{(2)}\otimes y_{(2)}\right)\otimes z\right\rangle-\left\langle \overline{\sigma}\,,\,\left(y_{(1)}\otimes x_{(1)}\right)\otimes z\right\rangle\left\langle \sigma\,,\,x_{(2)}\otimes y_{(2)}\right\rangle=0 \qquad \text{y}$$

$$\sum_{(y),(z)}\left\langle \sigma\,,\,y_{(1)}\otimes z_{(1)}\right\rangle\left\langle \overline{\sigma}\,,\,x\otimes\left(y_{(2)}\otimes z_{(2)}\right)\right\rangle-\left\langle \overline{\sigma}\,,\,x\otimes\left(y_{(2)}\otimes z_{(2)}\right)\right\rangle=0,\quad \forall\, x,y,z\in C,$$

si y sólo si

$$\begin{aligned}
&\sum_{(x),(y),(z)}\left\langle \sigma\,,\,x_{(1)}\otimes y_{(1)}\right\rangle\left\langle \sigma\,,\,x_{(2)}\otimes z_{(1)}\right\rangle\left\langle \sigma\,,\,y_{(2)}\otimes z_{(2)}\right\rangle= \\
&\qquad\sum_{(x),(y),(z)}\left\langle \sigma\,,\,y_{(1)}\otimes z_{(1)}\right\rangle\left\langle \sigma\,,\,x_{(1)}\otimes z_{(2)}\right\rangle\left\langle \sigma\,,\,x_{(2)}\otimes y_{(2)}\right\rangle,\quad \forall\, x,y,z\in C,
\end{aligned}$$

si y sólo si σ es una forma de Yang-Baxter.

Por lo tanto existe un único mapa $\widehat{\sigma}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
T(C)\otimes T(C) \arrow[r, "\overline{\sigma}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{K}\,; \\
M(C,\sigma)\otimes M(C,\sigma) \arrow[ur, dotted, "\widehat{\sigma}"'] &
\end{tikzcd}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{\sigma}\,,\,\overline{x}\otimes\overline{y}\rangle &= \langle \widehat{\sigma}\,,\,\overline{x\otimes y}\rangle \\
&= \langle \overline{\sigma}\,,\,x\otimes y\rangle\,,\qquad \forall\, x,y\in T(C).
\end{aligned}$$

Veamos ahora que

$$[J_\sigma]\otimes T(C)+T(C)\otimes[J_\sigma]\quad\subset\quad \operatorname{Ker}\overline{\sigma^{-1}}.$$

$$\overline{\sigma^{-1}}\left([J_\sigma]\otimes T(C)+T(C)\otimes[J_\sigma]\right) \quad = \quad 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\left\langle \overline{\sigma^{-1}}\,,\,\left(\sum_{(x),(y)} \left\langle \sigma\,,\,x_{(1)}\otimes y_{(1)}\right\rangle x_{(2)}\otimes y_{(2)} - y_{(1)}\otimes x_{(1)}\left\langle \sigma\,,\,x_{(2)}\otimes y_{(2)}\right\rangle\right)\otimes z\right\rangle = 0 \qquad \text{y}$$

$$\left\langle \overline{\sigma^{-1}}\,,\,x\otimes\left(\sum_{(y),(z)} \left\langle \sigma\,,\,y_{(1)}\otimes z_{(1)}\right\rangle y_{(2)}\otimes z_{(2)} - z_{(1)}\otimes y_{(1)}\left\langle \sigma\,,\,y_{(2)}\otimes z_{(2)}\right\rangle\right)\right\rangle = 0,$$

$\forall\, x,y,z\in C$; si y sólo si

$$\sum_{(x),(y)} \left\langle \sigma\,,\,x_{(1)}\otimes y_{(1)}\right\rangle \left\langle \overline{\sigma^{-1}}\,,\,\left(x_{(2)}\otimes y_{(2)}\right)\otimes z\right\rangle - \left\langle \overline{\sigma}\,,\,\left(y_{(1)}\otimes x_{(1)}\right)\otimes z\right\rangle \left\langle \sigma\,,\,x_{(2)}\otimes y_{(2)}\right\rangle = 0, \qquad \text{y}$$

$$\sum_{(y),(z)} \left\langle \sigma\,,\,y_{(1)}\otimes z_{(1)}\right\rangle \left\langle \overline{\sigma^{-1}}\,,\,x\otimes\left(y_{(2)}\otimes z_{(2)}\right)\right\rangle - \left\langle \overline{\sigma^{-1}}\,,\,x\otimes\left(z_{(1)}\otimes y_{(1)}\right)\right\rangle \left\langle \sigma\,,\,y_{(2)}\otimes z_{(2)}\right\rangle = 0,$$

$\forall\, x,y,z\in C$; si y sólo si

$$\begin{aligned}
\sigma_{23}*\sigma_{12}^{-1}*\sigma_{13}^{-1} &= \sigma_{13}^{-1}*\sigma_{12}^{-1}*\sigma_{23}\\
&\text{y}\\
\sigma_{13}^{-1}*\sigma_{23}^{-1}*\sigma_{12} &= \sigma_{12}*\sigma_{23}^{-1}*\sigma_{13}^{-1}
\end{aligned}$$

y estas dos últimas igualdades las vimos en la Observación 7.0.12. Por lo tanto existe un único mapa $\widehat{\sigma^{-1}}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
T(C)\otimes T(C) \arrow[r, "\overline{\sigma^{-1}}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{K} \\
M(C,\sigma)\otimes M(C,\sigma) \arrow[ur, dotted, "\widehat{\sigma^{-1}}"'] &
\end{tikzcd}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
\left\langle \widehat{\sigma^{-1}}\,,\,\overline{x}\otimes\overline{y}\right\rangle &= \left\langle \widehat{\sigma^{-1}}\,,\,\overline{x\otimes y}\right\rangle\\
&= \left\langle \overline{\sigma^{-1}}\,,\,x\otimes y\right\rangle, \qquad \forall\, x,y\in T(C).
\end{aligned}$$

Veamos ahora que $M(C,\widehat{\sigma})$ es una biálgebra cocuasitriangular. Recordar que $\left(M(C,\sigma),\overline{\Delta},\overline{\varepsilon}\right)$ es una biálgebra donde si Δ,ε son las estructuras de biálgebra de $T(C)$, entonces

$$\overline{\Delta}(\overline{x})=\overline{\Delta(x)}=\sum_{(x)}\overline{x_{(1)}}\otimes\overline{x_{(2)}}$$

y

$$\overline{\varepsilon}(\overline{x})=\varepsilon(x), \qquad \forall\, x\in T(C).$$

Primero veamos que $\widehat{\sigma^{-1}}$ es la inversa de $\widehat{\sigma}$ respecto al producto de convolución. Para probar que

$$\widehat{\sigma}*\widehat{\sigma^{-1}} \quad = \quad \varepsilon_{M(C,\sigma)\otimes M(C,\sigma)}$$

basta probar que si $x,y,z\in C$ entonces

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}*\widehat{\sigma^{-1}}\left(\overline{x}\otimes\left(\overline{y\otimes z}\right)\right) &= \overline{\varepsilon}\left(\overline{x}\right)\overline{\varepsilon}\left(\overline{y\otimes z}\right)\\
&\text{y}\\
\widehat{\sigma}*\widehat{\sigma^{-1}}\left(\left(\overline{x\otimes y}\right)\otimes z\right) &= \overline{\varepsilon}\left(\overline{x\otimes y}\right)\overline{\varepsilon}\left(\overline{z}\right).
\end{aligned}$$

Veamos ésto:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\sigma} * \widehat{\sigma^{-1}} \left(\overline{x} \otimes (\overline{y \otimes z})\right) &= \sum_{(\overline{x}),(\overline{y \otimes z})} \left\langle \widehat{\sigma}\,,\, \overline{x}_{(1)} \otimes (\overline{y \otimes z})_{(1)} \right\rangle \left\langle \widehat{\sigma^{-1}}\,,\, \overline{x}_{(2)} \otimes (\overline{y \otimes z})_{(2)} \right\rangle \\
&= \sum_{(x),(y \otimes z)} \left\langle \widehat{\sigma}\,,\, \overline{x_{(1)}} \otimes \overline{(y \otimes z)_{(1)}} \right\rangle \left\langle \widehat{\sigma^{-1}}\,,\, \overline{x_{(2)}} \otimes \overline{(y \otimes z)_{(2)}} \right\rangle \\
&= \sum_{(x),(y),(z)} \left\langle \widehat{\sigma}\,,\, \overline{x_{(1)}} \otimes \overline{y_{(1)} \otimes z_{(1)}} \right\rangle \left\langle \widehat{\sigma^{-1}}\,,\, \overline{x_{(2)}} \otimes \overline{y_{(2)} \otimes z_{(2)}} \right\rangle \\
&= \sum_{(x),(y),(z)} \left\langle \overline{\sigma}\,,\, x_{(1)} \otimes (y_{(1)} \otimes z_{(1)}) \right\rangle \left\langle \overline{\sigma^{-1}}\,,\, x_{(2)} \otimes (y_{(2)} \otimes z_{(2)}) \right\rangle \\
&= \sum_{(x),(y),(z)} \left\langle \sigma\,,\, x_{(1)} \otimes z_{(1)} \right\rangle \left\langle \sigma\,,\, x_{(2)} \otimes y_{(1)} \right\rangle \left\langle \sigma^{-1}\,,\, x_{(3)} \otimes y_{(2)} \right\rangle \left\langle \sigma^{-1}\,,\, x_{(4)} \otimes z_{(2)} \right\rangle \\
&= \sum_{(x),(z)} \varepsilon_C(x_{(2)}) \varepsilon(y) \left\langle \sigma\,,\, x_{(1)} \otimes z_{(1)} \right\rangle \left\langle \sigma^{-1}\,,\, x_{(3)} \otimes z_{(2)} \right\rangle \\
&= \sum_{(x),(z)} \varepsilon_C(y) \left\langle \sigma\,,\, x_{(1)} \otimes z_{(1)} \right\rangle \left\langle \sigma^{-1}\,,\, x_{(2)} \otimes z_{(2)} \right\rangle \\
&= \varepsilon_C(x)\varepsilon_C(y)\varepsilon_C(z) \\
&= \varepsilon(x)\varepsilon(y \otimes z) \\
&= \overline{\varepsilon}\,(\overline{x})\,\overline{\varepsilon}\,(\overline{y \otimes z})
\end{aligned}
$$

De forma análoga se pruebe la otra igualdad, y que

$$
\widehat{\sigma^{-1}} * \widehat{\sigma} \quad = \quad \varepsilon_{M(C,\sigma) \otimes M(C,\sigma)}
$$

Si $u \in T^n(C)$, $v \in T^m(C), w \in T(C)$, es trivial ver que:

$$
\begin{aligned}
\langle \widehat{\sigma}\,,\, \overline{u}\,\overline{v} \otimes \overline{w} \rangle &= \sum_{(w)} \left\langle \widehat{\sigma}\,,\, \overline{u} \otimes \overline{w}_{(1)} \right\rangle \left\langle \widehat{\sigma}\,,\, \overline{v} \otimes \overline{w}_{(2)} \right\rangle \\
&\text{y} \\
\langle \widehat{\sigma}\,,\, \overline{w} \otimes \overline{u}\,\overline{v} \rangle &= \sum_{(w)} \left\langle \widehat{\sigma}\,,\, \overline{w}_{(1)} \otimes \overline{v} \right\rangle \left\langle \widehat{\sigma}\,,\, \overline{w}_{(2)} \otimes \overline{u} \right\rangle
\end{aligned}
$$

ya que $\overline{u}\,\overline{v} = \overline{u \otimes v}$.

Por definición de $[J_\sigma]$ es fácil ver que

$$
\sum_{(u),(v)} \left\langle \widehat{\sigma}\,,\, u_{(1)} \otimes v_{(1)} \right\rangle u_{(2)} v_{(2)} \quad = \quad \sum_{(u),(v)} \left\langle \widehat{\sigma}\,,\, u_{(2)} \otimes v_{(2)} \right\rangle v_{(1)} u_{(1)}, \quad \forall\, u, v \in M(C, \sigma).
$$

□

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $S \in \operatorname{End}(V \otimes V)$. Entonces tenemos que $C = \operatorname{End}(V)^*$ es una coálgebra (ver la Observación 3.1.13). Como $\operatorname{End}(V \otimes V) \approx \operatorname{End}(V) \otimes \operatorname{End}(V)$, podemos pensar que $S \in \operatorname{End}(V) \otimes \operatorname{End}(V)$ y por lo tanto escribir

$$
\tau S \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} R^i \otimes R_i, \qquad R_i, R^i \in \operatorname{End}(V).
$$

Sea $\sigma_S : C \otimes C \to \mathbb{K}$ dada por

$$
\begin{aligned}
\langle \sigma_S\,,\, \alpha \otimes \beta \rangle \quad &:= \quad \langle \alpha \otimes \beta, \tau S \rangle \\
&\text{es decir} \\
\langle \sigma_S\,,\, \alpha \otimes \beta \rangle \quad &= \quad \sum_{i=1}^{n} \left\langle \alpha, R^i \right\rangle \langle \beta\,,\, R_i \rangle\,, \qquad \forall\, \alpha, \beta \in C = \operatorname{End}(V)^*.
\end{aligned}
$$

Proposición 7.0.14. Si $S \in \operatorname{End}(V \otimes V)$ es una solución invertible de la ecuación de trenzas, con inversa S^{-1} entonces $\sigma = \sigma_S$ es una forma de Yang-Baxter.

DEMOSTRACIÓN: Primero veamos que σ es invertible respecto al producto de convolución. Si escribimos

$$S^{-1}\tau \quad = \quad \sum_{j=1}^{m} T^j \otimes T_j, \qquad T_j, T^j \in \operatorname{End}(V),$$

como $S^{-1}\tau \circ \tau S = \mathrm{id}$ y $\tau S \circ S^{-1}\tau = \mathrm{id}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} T^j R^i \otimes T_j R_i &= \sum_{i,j} R^i T^j \otimes R_i T_j \\ &= \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}\,. \end{aligned}$$

Sea $\rho_S : C \otimes C \to \mathbb{K}$ dada por:

$$\langle \rho_S\,,\, \alpha \otimes \beta \rangle \quad = \quad \left\langle \alpha \otimes \beta\,,\, S^{-1}\tau \right\rangle$$

es decir

$$\langle \rho_S\,,\, \alpha \otimes \beta \rangle \quad = \quad \sum_{j=1}^{m} \left\langle \alpha\,,\, T^j \right\rangle \langle \beta\,,\, T_j \rangle\,, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \operatorname{End}(V)^*.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \rho_S * \sigma(\alpha \otimes \beta) &= \sum_{(\alpha),(\beta)} \left\langle \rho_S, \alpha_{(1)} \otimes \beta_{(1)} \right\rangle \left\langle \sigma, \alpha_{(2)} \otimes \beta_{(2)} \right\rangle \\ &= \sum_{i,j} \sum_{(\alpha),(\beta)} \left\langle \alpha_{(1)}\,,\, T^j \right\rangle \left\langle \beta_{(1)}\,,\, T_j \right\rangle \left\langle \alpha_{(2)}\,,\, R^i \right\rangle \left\langle \beta_{(2)}\,,\, R_i \right\rangle \\ &= \sum_{i,j} \left\langle \alpha\,,\, T^j R^j \right\rangle \langle \beta\,,\, T_j R_j \rangle \\ &= \left\langle \alpha \otimes \beta\,,\, \sum_{i,j} T^j R^i \otimes T_j R_i \right\rangle \\ &= \langle \alpha \otimes \beta\,,\, \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \rangle \\ &= \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta), \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \operatorname{End}(V)^*. \end{aligned}$$

De forma análoga se prueba que

$$\sigma * \rho_S(\alpha \otimes \beta) \quad = \quad \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta), \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \operatorname{End}(V)^*.$$

Sea $R = \tau S$, entonces

$$\begin{aligned} \tau S(u \otimes v) &= \sum_{i=1}^{n} R^i(u) \otimes R_i(v) \quad \Rightarrow \\ S(u \otimes v) &= \sum_{i=1}^{n} R_i(v) \otimes R^i(u), \quad \forall\, u, v \in V, \end{aligned}$$

entonces:

$$(S\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes S)(S\otimes \mathrm{id})(u\otimes v\otimes w) = (S\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes S)\left(\sum_{k=1}^{n} R_k(v)\otimes R^k(u)\otimes w\right)$$

$$= (S\otimes \mathrm{id})\left(\sum_{j,k=1}^{n} R_k(v)\otimes R_j(w)\otimes R^jR^k(u)\right)$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} R_iR_j(w)\otimes R^iR_k(v)\otimes R^jR^k(u), \quad \forall\, u,v,w\in V,$$

y

$$(\mathrm{id}\otimes S)(S\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes S)(u\otimes v\otimes w) = (\mathrm{id}\otimes S)(S\otimes \mathrm{id})\left(\sum_{k=1} u\otimes R_k(w)\otimes R^k(v)\right)$$

$$= (\mathrm{id}\otimes S)\left(\sum_{j,k=1} R_jR_k(w)\otimes R^j(u)\otimes R^k(v)\right)$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} R_jR_k(w)\otimes R_iR^k(v)\otimes R^iR^j(u) \quad \forall\, u,v,w\in V.$$

Por lo tanto

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} R_iR_j\otimes R^iR_k\otimes R^jR^k = \sum_{i,j,k=1}^{n} R_jR_k\otimes R_iR^k\otimes R^iR^j \qquad \Rightarrow$$

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} \langle \alpha, R_iR_j\rangle \langle \beta, R^iR_k\rangle \langle \gamma, R^jR^k\rangle = \sum_{i,j,k=1}^{n} \langle \alpha, R_jR_k\rangle \langle \beta, R_iR^k\rangle \langle \gamma, R^iR^j\rangle \qquad \Rightarrow$$

$$\sum_{(\alpha),(\beta),(\gamma)} \langle \alpha_{(1)}\otimes\beta_{(1)}, R\rangle \langle \alpha_{(2)}\otimes\gamma_{(1)}, R\rangle \langle \alpha_{(2)}\otimes\beta_{(2)}, R\rangle =$$

$$\sum_{(\alpha),(\beta),(\gamma)} \langle \beta_{(1)}\otimes\gamma_{(1)}, R\rangle \langle \alpha_{(1)}\otimes\gamma_{(2)}, R\rangle \langle \beta_{(2)}\otimes\gamma_{(2)}, R\rangle \qquad \Rightarrow$$

$$\sum_{(\alpha),(\beta),(\gamma)} \langle \sigma, \alpha_{(1)}\otimes\beta_{(1)}\rangle \langle \sigma, \alpha_{(2)}\otimes\gamma_{(1)}\rangle \langle \sigma_s, \beta_{(2)}\otimes\gamma_{(2)}\rangle =$$

$$\sum_{(\alpha),(\beta),(\gamma)} \langle \sigma, \beta_{(1)}\otimes\gamma_{(1)}\rangle \langle \sigma, \alpha_{(1)}\otimes\gamma_{(2)}\rangle \langle \sigma, \alpha_{(2)}\otimes\beta_{(2)}\rangle, \quad \forall\, \alpha,\beta,\gamma\in \mathrm{End}\,(V).$$

□

Observar que la proposición anterior implica que $M(C,\sigma_S)$ es una biálgebra cocuasitriangular, siendo $C = \mathrm{End}\,(V)^*$. Por lo tanto $\mathcal{M}^{M(C,\sigma_S)}$ es una categoría trenzada.

Teorema 7.0.15. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, $S\in \mathrm{End}\,(V\otimes V)$ una solución invertible de la ecuación de trenzas, entonces:

1. Existe una biálgebra cocuasitriangular $(M(V,S),r)$ de forma tal que $V\in\mathcal{M}^{M(V,S)}$.
2. El mapa S es un morfismo en $\mathcal{M}^{M(V,S)}$ y además se cumple que:

$$S(u\otimes v) = \sum \langle r\,,\, u_{(1)}\otimes v_{(1)}\rangle\, v_{(0)}\otimes u_{(0)}, \qquad \forall\, u,v\in V.$$

Es decir que si c es la trenza inducida por r en $\mathcal{M}^{M(V,S)}$, se cumple que

$$S = c_{V,V}.$$

Demostración:

1. Sea $(M(V,S),r) = (M(C,\sigma_S),\widehat{\sigma_S})$ donde $C = \mathrm{End}\,(V)^*$. Entonces por el Teorema 7.0.13 y la Proposición 7.0.14, $(M(V,S),r)$ es una biálgebra cocuasitriangular.
Veamos ahora que $V \in \mathcal{M}^{M(V,S)}$. Tenemos que $V \in \mathcal{M}^C$ de la siguiente forma:

$$\delta(v) \quad = \quad \sum v_{(0)} \otimes v_{(1)} \in V \otimes \mathrm{End}\,(V)^*$$

de forma tal que

$$\sum \left\langle v_{(1)}\,,\, \alpha \right\rangle v_{(0)} \quad = \quad \alpha(v), \qquad \forall\, \alpha \in \mathrm{End}\,(V),\ v \in V.$$

Es fácil ver que δ está bien definida y que es una coacción (de hecho, estamos dualizando la acción natural de $\mathrm{End}\,(V)$ en V). Por lo tanto como vimos en el Ejemplo 3.2.10, $\left(V,\overline{\delta}\right)$ es un $T(C)$-comódulo donde $\overline{\delta} = (\mathrm{id} \otimes \imath) \circ \delta$. Sea $\widehat{\delta} : V \to M(V,S)$ dada por:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\overline{\delta}"] \arrow[dr, dotted, "\widehat{\rho}"'] & V \otimes T(C) \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \pi"] \\ & V \otimes M(V,S) \end{tikzcd}$$

Es inmediato ver que $\widehat{\delta}$ es una coacción, y por lo tanto $V \in \mathcal{M}^{M(V,S)}$.

2. Veamos que $S(v \otimes w) = \sum w_{(0)} \otimes v_{(0)} \left\langle r\,,\, \overline{v_{(1)}} \otimes \overline{w_{(1)}} \right\rangle,\ \forall\, v, w \in V$.

$$\begin{aligned}
\sum w_{(0)} \otimes v_{(0)} \left\langle r\,,\, \overline{v_{(1)}} \otimes \overline{w_{(1)}} \right\rangle &= \sum w_{(0)} \otimes v_{(0)} \left\langle \widehat{\sigma_S}\,,\, \overline{v_{(1)}} \otimes \overline{w_{(1)}} \right\rangle \\
&= \sum w_{(0)} \otimes v_{(0)} \left\langle \sigma_S\,,\, v_{(1)} \otimes w_{(1)} \right\rangle \\
&= \sum w_{(0)} \otimes v_{(0)} \left\langle v_{(1)} \otimes w_{(1)}\,,\, \tau S \right\rangle \\
&= \sum \sum_{i=1}^{n} (w_{(0)} \otimes v_{(0)}) v_{(1)}(R^i) w_{(1)} R_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} R_i(w) R^i(v) \\
&= S(v \otimes w).
\end{aligned}$$

Por lo tanto S es $c_{V,V}$, la trenza inducida por r en $\mathcal{M}^{M(V,S)}$, y luego (ver el Teorema 6.2.7), S es un morfismo de comódulos.

$\square$

Bibliografía

[Doi93] Yukio Doi. *Braided bialgebras and quadratic bialgebras.* Communications in Algebra, 21(5):1731–1749, 1993.

[DNR01] S.Dăscălescu, C.Năstăsescu, S.Raianu. *Hopf Algebras : An Introduction* . Monographs and textbooks in Pure and Applied Mathematics, New York, 2001.

[FRT90] L.Fadeev, N. Reshetikhin, L.Takhtajan. *Quantization of Lie groups and Lie algebras.* Leningrad Journal of Math, 1: 193 - 225, 1990.

[Kas95] Christian Kassel. *Quantum Groups.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[Mac98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working Mathematician.* Springer-Verlang, New York , 1998.

[Mon93] Susan Montgomery. *Hopf Algebras and Their Actions on Rings.* American Mathematical Society, EEUU, 1993.

[Sch95] Hans - Jürgen Schneider. *Lectures on Hopf Algebras.* Trabajos de Matemática, Universidad Nacional de Córdoba, 31, 1995.

[Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to Homological Algebra.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.