

Facultad de Ciencias  
Universidad de la República

# Gravitación Termodinámica

La Ecuación de Einstein y la Primera Ley de la Termodinámica

Lic. Javier Peraza  
Montevideo, Uruguay  
2015

**Orientadores**  
Dr. Miguel Paternain  
Dr. Michael Reisenberger



## Resumen

Esta monografía está basada en el artículo "Thermodynamics of Spacetime: The Einstein Equation of State", escrito por T. Jacobson. El objetivo es realizar una exposición detallada del artículo en cuestión y demostrar la equivalencia entre la ecuación de gravitación de Einstein y un enunciado termodinámico, del estilo de la relación de Clausius  $dQ = T dS$ . Comienza con una introducción a la geometría pseudo-Riemanniana, repasando las principales definiciones y resultados que se utilizarán a lo largo del trabajo. En particular, se expone el comportamiento de la expansión de una congruencia de geodésicas temporales y nulas. Luego, se definen las 1-formas diferenciales de calor y entropía. En el núcleo del trabajo, se establece la equivalencia de la ecuación de Einstein clásica con el comportamiento termodinámico de los horizontes nulos. En el último capítulo, se plantean argumentos que validan la elección de las 1-formas de calor y entropía y se comenta el concepto de temperatura, en un espacio-tiempo relativista. Estos argumentos, junto con el resultado que se presenta en este trabajo, son parte de la profunda relación entre gravitación y termodinámica que se ha observado en los últimos cuarenta años.

## Abstract

This monograph is based on the paper *Thermodynamics of Spacetime: The Einstein Equation of State*, by T. Jacobson. Our aim is to present a detailed exposition of that paper, and to prove an equivalence between Einstein's equation for gravity and a thermodynamic statement, in the form of Clausius relation  $dQ = T dS$ . First, we give an introduction to pseudo-Riemannian geometry, studying the definitions and main results that we use throughout this work. In particular, we study the behaviour of the expansion rate for null and timelike geodesic congruences. Then, we give precise definitions for entropy and heat differentials 1-forms. The core of our work is chapter 3, where we prove the equivalence of Einstein's equation with an statement of the thermodynamic behaviour of the local null horizons. In the last chapter we show a series of arguments that support our election for entropy and heat differential forms, and is shown the concept of temperature in a relativistic spacetime. This arguments, together with the result we present, are part of the deep relation between gravitation and thermodynamics that has been observed during the last forty years.

# Índice

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Geometría pseudo-Riemanniana</b>	<b>4</b>
1.1. Preliminares	4
1.1.1. Notación tensorial	4
1.1.2. Integración sobre variedades	8
1.1.3. Métrica	8
1.1.4. Conexión y derivada covariante	9
1.1.5. Transporte paralelo y Geodésicas	11
1.1.6. Tensor de Riemann	12
1.1.7. Coordenadas Normales	13
1.2. Campos de Killing	14
1.2.1. Derivada de Lie	14
1.2.2. Campos de Killing	15
1.3. Ecuación de Raychaudhuri	16
1.3.1. Caso Temporal	17
1.3.2. Caso Nulo	19
1.3.3. Significado geométrico de la expansión $\theta$	24
1.4. Hipersuperficies y Teorema de Frobenius	26
1.4.1. Hipersuperficies	27
1.4.2. Teorema de Frobenius	27
<b>2. Superficies admisibles</b>	<b>30</b>
2.1. Superficies admisibles	30
2.2. 1-formas de calor y entropía	33
<b>3. Ecuación de gravitación de Einstein</b>	<b>34</b>
<b>4. Gravitación termodinámica</b>	<b>37</b>
4.1. Campos de Killing aproximados	37
4.2. Métrica de Rindler	38
4.3. Superficies de aceleración	39
4.4. Termodinámica de los horizontes	40
4.4.1. Temperatura	41
4.4.2. Entropía	42
4.4.3. Calor	44
4.5. Densidades y límite para grandes aceleraciones	45
4.6. Procesos Cuasiestáticos	47
4.7. Primera Ley de la Termodinámica	49
4.8. Conclusiones	50
<b>Bibliografía</b>	<b>52</b>

# Introducción

La relación entre las ecuaciones de la termodinámica y las ecuaciones de gravitación de Einstein tiene su origen en la investigación en agujeros negros, iniciada a mediados de la década de los setenta por S. Hawking, J. M. Bardeen, B. Carter, J. D. Bekenstein, J. Wheeler, entre otros.

Las cuatro leyes de la mecánica de los agujeros negros fueron un resultado puramente clásico, es decir, deducido a partir de la ecuación de Einstein [2] clásica:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab}$$

donde  $G$  es la constante de gravitación de Newton y  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío.

Escritas de una manera especial, estas leyes nos muestran una sorprendente analogía con las leyes de la termodinámica. Sin entrar en detalles, veamos cómo se enuncian las primeras tres leyes de la mecánica de los agujeros negros:

Ley 0. La gravedad superficial  $\kappa$  del horizonte de eventos de un agujero negro es constante.

Ley I. En un agujero negro estacionario se cumple:

$$\kappa\Delta A = 8\pi(\Delta M - \Omega\Delta J)$$

donde  $A$  es el área del horizonte,  $M$  la masa,  $J$  el momentum angular y  $\Omega$  la velocidad angular del horizonte de eventos.

Ley II. El área  $A$  del horizonte de eventos de un agujero negro no decrece con el tiempo:

$$\delta A \geq 0$$

Estas leyes están en clara correspondencia con las leyes de la termodinámica clásica:

Ley 0. La temperatura es una clase de equivalencia respecto al equilibrio térmico. En otras palabras, si un cuerpo  $A$  está en equilibrio térmico con los cuerpos  $B$  y  $C$ , entonces  $B$  y  $C$  están en equilibrio térmico.

Ley I. Se cumple la relación fundamental de la termodinámica:

$$dU = TdS - \sum_i X_i dx_i + \sum_j \mu_j dN_j$$

donde  $X_i, x_i$  son variables termodinámicas conjugadas (por ejemplo, la presión y el volumen) y  $\mu_j, N_j$  son el potencial químico y el número de partículas correspondientes a la  $i$ -ésima especie de sustancia, respectivamente.

Ley II. La entropía  $S$  de un sistema aislado no decrece en el tiempo:

$$\delta S \geq 0$$

La correspondencia entre las leyes induce a pensar que la gravedad superficial se comporta como una temperatura y el área del horizonte de eventos se comporta como la entropía.

No es tan clara la correspondencia ([35]) con la tercera ley de la termodinámica; ella establece (entre las múltiples formulaciones que posee tomaremos el Principio de Nernst) que el valor de la entropía tiende a cero cuando la temperatura tiende a cero, pues puede ocurrir que  $\kappa \rightarrow 0$ , a la vez que el área se mantiene constante ([34], capítulo 12). En [1], por ejemplo, se discute sobre la tercera ley de la mecánica de los agujeros negros; en [7] se discuten varias definiciones de  $\kappa$ .

Con el descubrimiento de la radiación de Hawking, [13], se entendió que un agujero negro emite partículas, debido a efectos cuánticos, con la misma distribución de energías que un cuerpo negro a temperatura ( $G = c = \hbar = k_B = 1$ , donde  $\hbar$  es la constante Planck reducida y  $k_B$  es la constante de Boltzmann):

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}$$

Es decir, a menos de un factor multiplicativo, la gravedad superficial es igual a la temperatura que debería tener un cuerpo negro emitiendo partículas como el agujero negro. Esto significó que la analogía vista entre los conjuntos de leyes era más profunda de lo que se pensaba.

En 1976, W. G. Unruh describe [31] el proceso por el que un detector de partículas acelerado en el vacío estándar de un campo cuántico, en el espacio de Minkowski, se comportará como si estuviera en un baño térmico de partículas. Este *baño térmico* de fondo, que experimenta el detector, tiene una temperatura característica que depende de la aceleración  $a$  del detector, en la proporción <sup>1</sup>

$$T = \frac{\hbar a}{2\pi c k_B}$$

La similitud de las expresiones de la temperatura de Unruh y de Hawkings, es parte de la profunda relación entre termodinámica y gravedad.

En mecánica estadística, el calor es el flujo de energía entre los grados de libertad de la estructura microscópica de la materia, como es el caso de la conducción térmica en un cristal. Bajo esta perspectiva, el hecho que un objeto macroscópico pueda ser *calentado* es un indicio de que contiene una estructura microscópica subyacente. Es decir, el solo hecho de poder definir una temperatura sobre un objeto, nos permite inferir la existencia de una estructura microscópica (tal como hizo Boltzmann al proponer que el calor es una forma de movimiento de los átomos en la estructura de la materia) (ver [21] para más información).

Lo visto anteriormente (temperatura de Hawking y de Unruh), nos indica que podemos *calentar* una porción del espacio tiempo, ya sea colapsando materia hasta formar un agujero negro o acelerando un detector de partículas. Esto, interpretado bajo la visión mecanoestadística, sugiere que el espaciotiempo debe tener una estructura microscópica.

Sin embargo, no es necesario conocer en detalle la estructura microscópica de un sistema para obtener información del mismo; como es sabido, las ecuaciones termodinámicas no contienen información sobre los detalles de la composición microscópica, pero nos dan el comportamiento macroscópico del sistema, a través de una o varias ecuaciones de estado.

En 1995, T. Jacobson publicó el artículo ([15]) sobre el que está basada esta monografía; en él propuso lo siguiente: cambiar el sentido de la lógica y, en lugar de obtener ecuaciones termodinámicas de las ecuaciones de gravitación, la idea fue deducir ecuaciones de gravitación de las ecuaciones termodinámicas. En particular, Jacobson propone utilizar la relación de Clausius (que relaciona las variaciones infinitesimales de calor y entropía en procesos reversibles)

$$dQ = T dS$$

para deducir la ecuación de Einstein clásica.<sup>2</sup> En este sentido, la ecuación de Einstein surge como una ecuación de estado del espacio tiempo, considerando la mínima cantidad de variables macroscópicas: entropía y energía.

<sup>1</sup> Cabe destacar que los intentos por medir el efecto Unruh aún no han sido satisfactorios. Esto se debe al pequeño valor de la constante que acompaña a la aceleración: Si un detector está en caída libre cerca de la superficie de la Tierra, su aceleración es  $9,8 \text{ m/s}^2$ , lo cual implica que debería observar, en el vacío, una temperatura de Unruh de aproximadamente  $4 \times 10^{-20} \text{ K}$

<sup>2</sup> La relación de Clausius la podemos considerar como un caso particular de la Primera Ley de la Termodinámica, cuando la función de entropía solo depende de la energía del sistema,  $S(E)$ .

A partir de la publicación del artículo de Jacobson, han sido escritos infinidad de artículos resultado de la investigación de sus ideas, en diferentes contextos (entre ellos [35], [9], [26], [32], [24], [17], [39]).

En este trabajo demostraremos que la ecuación de Einstein sobre una 4-variedad lorentziana es equivalente a una condición sobre la evolución de los horizontes nulos locales, expresada en términos termodinámicos.

Esta condición *termodinámica* es más restrictiva que pedir que se cumpla la relación de Clausius para los horizontes locales de Rindler, como hace Jacobson. Lo fundamental será considerar una definición de proceso cuasiestático en el contexto de nuestro trabajo, que será aplicada en la versión de la Primera Ley de la Termodinámica que usaremos. Esta definición, y su vinculación con la definición en termodinámica, será tratada en el capítulo final.

# Geometría pseudo-Riemanniana

Este capítulo es una introducción a la geometría pseudo-Riemanniana, donde definiremos los principales objetos de estudio.

En las primeras dos secciones se fijan las definiciones y la notación que usaremos. En la tercera sección, estudiaremos las dos ecuaciones de Raychadhuri, para el caso temporal y para el caso nulo, y veremos una fórmula para la expansión de una congruencia de geodésicas nulas en términos del área transversal. En la cuarta sección, veremos un caso particular de congruencias, las que son ortogonales a hipersuperficies, y enunciaremos el teorema de Frobenius.

No daremos un tratamiento profundo de los temas, sino solamente mencionaremos propiedades y fijaremos la notación que utilizaremos. Para un desarrollo completo, recomendamos al lector las referencias bibliográficas [8], [18], [20], [28], [33], [34] y [38].

## 1.1. Preliminares

### 1.1.1. Notación tensorial

**Definición 1.1.1.** Sea  $M$  una  $n$ -variedad diferenciable. Notaremos  $T_p M$  al espacio tangente a  $M$  en  $p$ , y  $T_p^* M$  al espacio cotangente a  $M$  en  $p$ .

**Definición 1.1.2.** Fibrados tangentes y cotangentes:

$$\begin{aligned} TM &:= \bigsqcup_{p \in M} T_p M \\ T^* M &:= \bigsqcup_{p \in M} T_p^* M \end{aligned}$$

cada uno de estos fibrados tiene una estructura de variedad diferenciable de dimensión  $2n$ .

A un campo de vectores lo podemos definir como una sección diferenciable de  $TM$ , al igual que a una 1-forma como una sección diferenciable de  $T^*M$ :

- un campo de vectores diferenciable,  $X$ , es una función diferenciable  $X : M \rightarrow TM$  tal que  $\pi \circ X = \text{id}_M$ , con  $\pi$  la proyección canónica del fibrado a la variedad. Haremos el abuso de notación  $X(p) \in T_p M$ .
- Una 1-forma diferencial  $\omega$  es una función diferenciable  $\omega : M \rightarrow T^* M$  tal que  $\pi \circ \omega = \text{id}_M$ . Igual que antes, haremos el abuso de notación  $\omega(p) \in T_p^* M$ .

**Definición 1.1.3.** Más en general, sobre  $T_p M$  podemos definir

$$\mathcal{T}_l^k(T_p M) := \left\{ T : \prod_{i=1}^l T_p^* M \times \prod_{j=1}^k T_p M \rightarrow \mathbb{R}, T \text{ es multilinear} \right\}$$

A partir de esta definición, podemos definir el fibrado de mapas multilineales:

**Definición 1.1.4.**

$$T_l^k M := \bigsqcup_{p \in M} \mathcal{T}_l^k(T_p M)$$

este fibrado tiene estructura de variedad diferencial, de dimensión  $n + n^{k+l}$ .

Utilizaremos la siguiente definición de tensor:

**Definición 1.1.5.** Un tensor de tipo  $(k, l)$  es una sección diferenciable del fibrado  $T_l^k M$ . Al conjunto de los tensores de tipo  $(k, l)$  lo notaremos  $\mathcal{T}_l^k(M)$ . Al igual que antes, haremos el abuso de notación de considerar los valores del tensor sobre  $\mathcal{T}_l^k(T_p M)$ , y no en  $T_l^k M$ .

La nomenclatura usual es llamar a los subíndices como índices *covariantes* y a los supraíndices como índices *contravariantes*. También es usual la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(M) &:= \mathcal{T}_0^{-1}(M) \\ \Omega^1(M) &:= \mathcal{T}_1^0(M) \end{aligned}$$

y notar  $C^\infty(M)$  al conjunto de las funciones  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  suaves.

De esta forma, estamos explicitando que los  $(1, 0)$  tensores son campos vectoriales, y los  $(0, 1)$  tensores son 1-formas.

La notación que usaremos para trabajar con tensores será la de [34]: las letras griegas  $(\mu, \nu, \sigma, \rho, \dots)$  en un tensor indican que estamos trabajando con sus componentes en algún sistema de coordenadas, mientras que letras latinas  $(a, b, c, d, \dots)$  indican que estamos trabajando con el tensor de manera abstracta (se la denomina notación de índices abstractos, ver también [27]).

Veamos esto con más detenimiento.

Si  $\{\partial_\mu\}$  es el referencial local asociado a alguna parametrización y  $\{dx^\mu\}$  su base dual, o co-referencial, entonces a un tensor  $T$  de tipo  $(k, l)$  lo podemos escribir, en el entorno coordenado, como:

$$T = \sum_{\mu_1, \dots, \nu_l=1}^n T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_k} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_l}$$

Sin embargo, podemos dejar explícito el carácter de tensor de tipo  $(k, l)$  escribiendo

$$T = T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$$

La ventaja de esta notación es ser muy útil a la hora de la manipulación algebraica de los tensores, sin necesidad de introducir referenciales locales. Por ejemplo, la contracción  $C_j^i$  de un tensor de tipo  $(k, l)$  la notamos:

$$T^{a_1 \dots a_{i-1} c a_{i+1} \dots a_k}_{b_1 \dots b_{j-1} c b_{j+1} \dots b_l} \quad (1.1)$$

En coordenadas, deberíamos escribir (usando el convenio de sumación de Einstein):

$$C_j^i(T)^{\mu_1 \dots \mu_{i-1} \mu_{i+1} \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_{j-1} \nu_{i+1} \dots \nu_l} = T^{\mu_1 \dots \mu_{i-1} \sigma \mu_{i+1} \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_{j-1} \sigma \nu_{i+1} \dots \nu_l}$$

Dos operaciones que se realizan habitualmente con tensores son la simetrización y la antisimetrización:

**Definición 1.1.6.** Sea  $T \in \mathcal{T}_2^0(M)$ . Entonces

$$\begin{aligned} T_{(ab)} &:= \frac{1}{2} (T_{ab} + T_{ba}) \\ T_{[ab]} &:= \frac{1}{2} (T_{ab} - T_{ba}) \end{aligned}$$

Más en general, si  $T \in \mathcal{T}_l^0(M)$ :

$$\begin{aligned} T_{(a_1 \dots a_l)} &:= \frac{1}{l!} \sum_{\pi} T_{\pi(a_1) \dots \pi(a_l)} \\ T_{[a_1 \dots a_l]} &:= \frac{1}{l!} \sum_{\pi} \text{sg}(\pi) T_{\pi(a_1) \dots \pi(a_l)} \end{aligned}$$

Si solo queremos hallar la componente simétrica de un tensor para algunos índices, entonces se divide con una barra |. Por ejemplo

$$T_{(a_1 | a_2 | a_3 \dots a_l)} := \frac{1}{(l-1)!} \sum_{\pi} T_{\pi(a_1) a_2 \pi(a_3) \dots \pi(a_l)}$$

Podemos multiplicar dos tensores, ambos de tipo  $(k, l)$  y  $(s, r)$ , obteniendo un tensor de tipo  $(k+s, l+r)$ . Esta multiplicación no es conmutativa, como podemos ver a partir de su definición:

**Definición 1.1.7.** Sean  $T \in \mathcal{T}_l^k(M), S \in \mathcal{T}_r^s(M)$ . El tensor  $T \otimes S$  está definido en coordenadas como

$$(T \otimes S)^{\mu_1 \dots \mu_{k+s}}_{\nu_1 \dots \nu_{l+r}} = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} S^{\mu_{k+1} \dots \mu_{k+s}}_{\nu_{l+1} \dots \nu_{l+r}}$$

Haremos uso de la notación abstracta para multiplicar tensores de la siguiente manera:

$$T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} S^{a_{k+1} \dots a_{k+s}}_{b_{l+1} \dots b_{l+r}} := (T \otimes S)^{a_1 \dots a_{k+s}}_{b_1 \dots b_{l+r}}$$

Por último, veamos algunas definiciones más.

**Definición 1.1.8.** Si  $\dim(M) = n$ , y  $k \leq n$ , definimos el espacio de las  $k$ -formas diferenciales como:

$$\Omega^k(M) := \{\omega \in \mathcal{T}_k^0(M) : \omega_{a_1 \dots a_k} = \omega_{[a_1 \dots a_k]}\}$$

Es decir, una  $k$ -forma diferencial es un tensor de tipo  $(0, k)$  totalmente antisimétrico.

**Definición 1.1.9.** Si tenemos dos formas diferenciales, no necesariamente del mismo tipo, las podemos multiplicar y obtener otra forma diferencial, de grado igual a la suma de los grados de las dos iniciales. Pero esta operación no es  $\otimes$ , pues es fácil ver que el producto de dos tensores antisimétricos no necesariamente es antisimétrico. Para evitar esto, introducimos el producto  $\wedge$ , definido como sigue: si  $\omega \in \Omega^k(M), \theta \in \Omega^l(M)$ , entonces

$$(\omega \wedge \theta)_{a_1 \dots a_k a_{k+1} \dots a_{k+l}} = \frac{(k+l)!}{k!l!} (\omega \otimes \theta)_{[a_1 \dots a_k a_{k+1} \dots a_{k+l}]}$$

*Observación 1.1.10.* De la definición anterior, tenemos que en  $T_p M$  podemos construir una base del espacio vectorial de los  $(0, k)$ -tensores totalmente antisimétricos:

$$\{dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} : 1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq n\}$$

que tendrá dimensión  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

A partir de la definición anterior, tenemos varias formas de expresar la misma  $k$ -forma:

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k=1}^n \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_k} \\ &= \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq n} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k=1}^n \text{sg}(\mu_1 \dots \mu_k) \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} \end{aligned}$$

**Definición 1.1.11.** Sea  $M$  una  $n$ -variedad diferencial. Definimos dos tensores muy importantes:

1. Delta de Kroenecker: es un  $(1, 1)$  tensor en  $T_p M$  que cumple:

$$\delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases}$$

O, en forma algebraica, es el  $(1, 1)$ -tensor asociado al mapa identidad de  $T_p M$ . Sobre la variedad, lo notaremos  $\delta^a_b$ . En coordenadas locales,

$$\delta = \partial x_1 \otimes dx^1 + \cdots + \partial x_n \otimes dx^n$$

2. Tensor de Levi-Civita: es un  $n$ -tensor en  $T_p M$  tal que cumple:

$$\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} = \text{sg}(\mu_1 \dots \mu_n)$$

donde  $\text{sg}(\mu_1 \dots \mu_n)$  es el signo de la permutación  $(\mu_1 \dots \mu_n)$ , y vale 0 si hay algún valor repetido. Es decir, en coordenadas locales,

$$\varepsilon = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

**Definición 1.1.12.** Sea  $\omega \in \Omega^k(M)$ , y  $\nu$  un campo vectorial en  $M$ . El **producto interior** de  $\omega$  con  $\nu$  es la  $(k-1)$ -forma  $\iota_\nu \omega$  siguiente:

$$\iota_\nu \omega(p)(v_1, \dots, v_{k-1}) := \omega(p)(\nu(p), v_1, \dots, v_{k-1}), \forall p \in M, \forall v_1, \dots, v_{k-1} \in T_p M$$

Ahora introduciremos la noción de *pullback* y *pushforward*.

**Definición 1.1.13.** Sean  $M$  y  $N$  dos variedades, y sea  $\phi : M \rightarrow N$  un mapa  $C^\infty$ . De manera natural, a una función  $f \in C^\infty(N)$  la podemos “tirar” hacia  $C^\infty(M)$ , simplemente componiendo con  $\phi$ :  $f \circ \phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Esto se denomina el **pullback** de la función  $f$  mediante  $\phi$ , y se nota  $\phi^* f$ .

También podemos llevar una 1-forma de  $\Omega^1(N)$  a  $\Omega^1(M)$ , como sigue:

$$(\phi^* \omega)(p)(v) = \omega(\phi(p))(d\phi_p(v)), \forall p \in M, v \in T_p M$$

En general, el pullback se define para tensores covariantes generalizando la definición anterior:

**Definición 1.1.14.** Si  $T \in \mathcal{T}_k^0(N)$  y  $v_i$  son vectores en  $T_p M$ ,

$$(\phi^* T)(p)(v_1, \dots, v_k) = T(\phi(p))(d\phi_p(v_1), \dots, d\phi_p(v_k))$$

Así,  $\phi^* T \in \mathcal{T}_k^0(M)$

Para vectores contravariantes, no alcanza con pedir diferenciabilidad, pues es necesario que el mapa  $\phi^{-1}$  esté bien definido. Para poder “empujar” hacia  $T_{\phi(p)} N$  vectores tangentes en  $T_p M$ , tenemos la siguiente definición

**Definición 1.1.15.** Sea  $\phi : M \rightarrow N$  un difeomorfismo. Sean  $\nu \in \mathcal{T}_0^1(M)$  un campo vectorial y  $q \in N$ . El **pushforward** de  $\nu$  mediante  $\phi$  es el siguiente campo vectorial sobre  $N$ :

$$\phi_* \nu(q) := d\phi_{\phi^{-1}(q)}(\nu(\phi^{-1}(q))) \in T_q N, \forall q \in N$$

Ahora que tenemos las definiciones de pullback y de pushforward, podemos transportar tensores mixtos de  $\mathcal{T}_k^l(M)$  a  $\mathcal{T}_k^l(N)$ , o viceversa.

**Definición 1.1.16.** Sean  $\phi : M \rightarrow N$  un difeomorfismo,  $T \in \mathcal{T}_l^k(M)$ ,  $S \in \mathcal{T}_l^k(N)$ ,  $v_i, w_i$  campos vectoriales en  $M$  y  $N$  respectivamente, y  $\omega_j, \theta_j$  1-formas diferenciales en  $M$  y  $N$  respectivamente. Sean  $p \in M$  y  $q \in N$ . Entonces:

$$\phi^* S(p)(v_1(p), \dots, v_k(p), \omega_1(p), \dots, \omega_l(p)) = S(\phi(p))(\phi_* v_1(p), \dots, \phi_* v_k(p), (\phi^{-1})^* \omega_1(p), \dots, (\phi^{-1})^* \omega_l(p))$$

$$\phi_* T(q)(w_1(q), \dots, w_k(q), \theta_1(q), \dots, \theta_l(q)) = T(\phi^{-1}(q))((\phi^{-1})_* v_1(q), \dots, (\phi^{-1})_* v_k(q), \phi^* \omega_1(q), \dots, \phi^* \omega_l(q))$$

### 1.1.2. Integración sobre variedades

No entraremos en detalle sobre la teoría de integración sobre variedades, solo enunciaremos algunas definiciones y resultados. Para ver las demostraciones, el lector puede consultar la bibliografía que dimos al inicio del presente capítulo.

**Definición 1.1.17.** Sea  $M$  una variedad,  $\omega \in \Omega^n(M)$  una  $n$ -forma. Sea, además,  $\{\rho_i\}$  una partición de la unidad subordinada al cubrimiento por cartas locales  $\{\varphi_i(U_i)\}$ . Definimos

$$\int_M \omega := \sum_i \int_{U_i} \varphi_i^*(\rho\omega)$$

**Teorema 1.1.18. Teorema de Stokes**

Sea  $M$  una  $k$ -variedad compacta con borde orientada, y consideremos  $\partial M$  con la orientación borde; sea  $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$  una  $(k-1)$ -forma diferenciable. Entonces

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

**Teorema 1.1.19. Derivación de una integral**

Sea  $D$  una  $k$ -variedad,  $M$  una  $n$ -variedad, con  $k \leq n$ ; sea  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  no vacío, y  $\phi : (a, b) \times D \rightarrow M$  una función  $C^\infty$ . Si  $x \in D$ , sea  $v(t)$  una familia de campos vectoriales tales que  $v(t)(\phi(t, x)) = d\phi_{(t,x)}(1, 0, \dots, 0) = \frac{\partial \phi}{\partial t}$ . Sea  $\omega(t) : (a, b) \rightarrow \Omega^k(M)$  una familia suave de  $k$ -formas diferenciables. Entonces:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\phi(t,D)} \omega(t) \right) = \int_{\phi(t,D)} \frac{d}{dt} \omega(t) + \int_{\phi(t,D)} \iota_v(d\omega(t)) + \int_{\partial \phi(t,D)} \iota_v \omega(t)$$

*Demostración.* Para un desarrollo completo de la demostración, remitimos al lector al artículo [12]. □

*Observación 1.1.20.* El teorema anterior es una generalización de la regla de Leibnitz para la derivación de una integral de la forma

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, t) dt$$

Cuando  $k = n = 3$ , el resultado anterior se reduce al teorema de transporte de Reynolds, utilizado en mecánica de medios continuos.

### 1.1.3. Métrica

**Definición 1.1.21.** Sea  $M$  una variedad diferencial. Una **métrica** en  $M$  es un tensor  $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$  simétrico y no degenerado, de signatura constante.

De manera más explícita, si tomamos una parametrización  $\phi : U \rightarrow M$  alrededor de un punto  $p$ ,  $\{\partial_\mu\}$  es su referencial local asociado y  $\{dx^\mu\}$  su co-referencial, entonces la métrica en  $U$  se escribe

$$g := \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$$

Diremos que  $g_{\mu\nu}$  son los coeficientes de la métrica en las coordenadas de  $\phi$ , que cumplen  $g_{\mu\nu} = g(\partial_\mu, \partial_\nu)$ .

Por otro lado, como  $g_{\mu\nu}$  es invertible en cada  $q \in U$ , podemos definir, en cada punto, al inverso de la métrica, que lo notamos  $g^{\mu\nu}$ . De esta forma, definimos sobre la variedad al  $(2, 0)$ -tensor,  $g^{ab}$ , que en cada entorno coordenado cumple

$$g^{\sigma\mu} g_{\mu\nu} = \delta^\sigma_\nu$$

O, en notación abstracta,  $g^{ab} g_{bc} = \delta^a_c$ .

Veamos tres ejemplos básicos:

- $\mathbb{R}_v^n$ : este espacio es  $\mathbb{R}^n$  munido con la métrica  $\text{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1)$ , donde la cantidad de  $-1$  es  $v$ .
- Espacio de Minkowski: es un caso particular del ejemplo anterior, cuando  $v = 1$ . A la métrica de este espacio la notaremos  $\eta_{\mu\nu}$ .
- $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ : parametrizada por coordenadas esféricas  $(\theta, \varphi)$ , la métrica de la esfera unidad es  $\text{diag}(1, \sin^2(\theta))$ .

La métrica nos permite definir un isomorfismo lineal entre  $T_p M$  y  $T_p^* M$  para cada  $p \in M$ , vía  $v \mapsto g(-, v)$ . Observar que  $g(-, v)$  significa la contracción  $C_2^1$  del tensor  $g \otimes v$ , pues pertenece a  $T_p^* M$ . En nuestra notación, esto lo escribimos como  $g_{ab} v^b$ .

Es decir, estamos mapeando  $v^a$  al covector  $g_{ab} v^b$ . Es usual escribir a este último como  $v_a$ .

De esta forma, cuando escribimos  $w^a v_a$ , estamos simbolizando  $g(w, v)$ , pues calculamos el valor de la función  $g(-, v)$  en el vector  $w$ .

En general,  $g_{ab}$  nos ayuda a construir isomorfismos lineales entre  $\mathcal{T}_l^k(M)$  y  $\mathcal{T}_{l+1}^{k-1}(M)$ . De igual manera,  $g^{ab}$  induce isomorfismos lineales entre  $\mathcal{T}_l^k(M)$  y  $\mathcal{T}_{l-1}^{k+1}(M)$ . Por eso, siempre que elevemos o bajemos índices, estos isomorfismos estarán implícitos.

**Definición 1.1.22.** Sea  $0 \neq v \in \mathcal{T}_0^1(M)$ , y sea  $\{\partial_\mu\}$  el referencial local. Tenemos dos vectores duales asociados a  $v$ , que en general no coincidirán. Uno lo introducimos arriba, y será  $v_a = g_{ab} v^b$ . Este covector tiene la ventaja que no depende de la base utilizada.

El otro vector dual asociado a  $v$  es el siguiente. Al ser  $v \neq 0$ , podemos suponer que  $\exists \mathcal{B}$  base de  $T_p M$  tal que  $v \in \mathcal{B}$ . Entonces, definimos  $v^*$  como el vector dual asociado a  $v$  en la base  $\mathcal{B}$ . Para expresarlo en coordenadas de  $\{dx^\mu\}$ , hacemos el cambio de coordenadas correspondiente, desde  $\mathcal{B}$  a  $\{\partial_\mu\}$ .

Por tanto, una vez fijada una base que contenga a  $v$  como elemento, el vector dual  $v^*$  está bien definido.

*Observación 1.1.23.* Dada una  $n$ -variedad pseudo-Riemanniana (de Riemann o de Lorentz)  $(M, g)$ , la forma de volumen  $\epsilon \in \Omega^n(M)$  cumple

$$\epsilon(p) = \sqrt{\det(g(p))} \epsilon$$

donde  $\epsilon$  es el tensor de Levi-Civita en  $T_p M$ .

**Definición 1.1.24.** Cuando integremos contracciones de tensores, para no introducir entornos coordenados y recargar la notación, a veces usaremos la siguiente convención: cada índice mudo de integración de una  $k$ -forma lo notaremos con  $\cdot$ . Por ejemplo, si tenemos una hipersuperficie espacial  $\Sigma$  de dimensión 3 y codimensión 1, y queremos calcular su volumen, tomamos su normal  $n^a$  y calculamos la integral de volumen:

$$\text{vol}(\Sigma) := \int_{\Sigma} \iota_n(\epsilon) = \int_{\Sigma} n^a \epsilon_{a\cdot\cdot\cdot}$$

donde  $\epsilon \in \Omega^4(M)$  es la 4-forma de volumen sobre la variedad.

### 1.1.4. Conexión y derivada covariante

**Definición 1.1.25.** El **corchete de Lie**  $[\cdot, \cdot]$  es un mapa de  $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ , tal que a dos campos  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  les asigna el campo  $[X, Y]^b$ , dado por <sup>1</sup>

$$[X, Y]^b = X^a \partial_a Y^b - Y^a \partial_a X^b$$

**Definición 1.1.26.** Una **conexión** en una variedad diferencial  $M$  es una función  $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  tal que

<sup>1</sup>Hay que remarcar que cuando notamos  $\partial_a$  nos estamos refiriendo a la derivada covariante que consiste en tomar las derivadas parciales ordinarias. Por ejemplo,  $v^a \partial_a g_{bc}$  en coordenadas corresponde a  $\sum_{\mu} v^{\mu} \partial_{\mu} g_{\nu\rho}$ , donde  $\partial_{\mu}$  es, por abuso de notación, la derivada  $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ .

- $\nabla_X Y$  es  $C^\infty(M)$ -lineal en  $X$ .
- $\nabla_X Y$  es  $\mathbb{R}$ -lineal en  $Y$ .
- $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + (X(f))Y$ ,  $\forall f \in C^\infty(M)$ .

Se dice que  $\nabla_X Y$  es la derivada covariante de  $Y$  respecto de  $X$  en la conexión  $\nabla$ .

**Definición 1.1.27.** ■ Diremos que la conexión es **compatible con la métrica** si

$$Z(X^a Y_a) = (\nabla_Z X)^a Y_a + X^a (\nabla_Z Y)_a$$

para todos  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ .

- Una conexión  $\nabla$  se dice **libre de torsión** si

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

para todos  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$

Recordamos el Teorema Fundamental de Geometría pseudo-Riemanniana (ver [20]):

**Teorema 1.1.28.** *Sea  $M$  una variedad pseudo-Riemanniana. Entonces existe una única conexión  $\nabla$  libre de torsión y compatible con la métrica, que llamamos conexión de Levi-Civita.*

**Observación 1.1.29.** ■ Los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{jk}^i$  asociados a una conexión son las funciones que cumplen:

$$\nabla_{\partial x_i} \partial x_j = \Gamma_{ij}^k \partial x_k$$

En el caso de la conexión de Levi-Civita, los símbolos de Christoffel se expresan en función de la métrica por la siguiente fórmula

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} g^{\mu\sigma} (\partial_\nu g_{\sigma\rho} + \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\rho})$$

- Si  $\nabla$  es la conexión de Levi-Civita, también diremos que la derivada covariante  $\nabla_X$  es de Levi-Civita.

Dado  $X \in \mathcal{X}(M)$ , la derivada covariante  $\nabla_X$  se puede extender a una **derivada tensorial**  $\nabla_X$  (ver [20] para una exposición más detallada), que cumple la propiedad de ser, además,  $C^\infty(M)$ -lineal en  $X$ . Esto nos permite hacer la siguiente definición.

**Definición 1.1.30.** Dada una conexión  $\nabla$ , el **diferencial covariante** de un tensor  $T \in \mathcal{T}_l^k(M)$  es el tensor  $\nabla T \in \mathcal{T}_{(l+1)}^k(M)$  tal que

$$(\nabla T)^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_{l+1}} V^c = (\nabla_V T)^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} V^c$$

donde  $\nabla_V T$  es la derivada tensorial de  $T$  respecto a  $\nabla_V$ .

Es usual notar  $\nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  en lugar de  $(\nabla T)^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ . Observar que con esta notación,

$$(\nabla_X Y)^b = X^a \nabla_a Y^b$$

y vinculamos la conexión con el diferencial covariante.

Se suele denominar al operador “diferencial covariante” como **derivada covariante**, pues generaliza al concepto de derivada covariante de un campo vectorial respecto a otro. Nosotros utilizaremos esta convención.

El teorema fundamental de Geometría pseudo-Riemanniana lo podemos reformular en términos de la derivada covariante:

**Proposición 1.1.31.** Si  $g_{ab}$  es la métrica de la variedad, entonces existe una única derivada covariante, libre de torsión,  $\nabla$  que satisface

$$\nabla_a g_{bc} = 0$$

Además, la conexión asociada a esta derivada covariante es la de Levi-Civita.

*Observación 1.1.32.* A partir de ahora, la derivada covariante que usaremos será la de Levi-Civita.

Daremos a continuación una fórmula que sirve para calcular derivadas covariantes de tensores arbitrarios. La demostración se puede encontrar en [34].

**Proposición 1.1.33.** Sea  $T \in \mathcal{T}_l^k(M)$ . Entonces

$$\nabla_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} = \partial_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} + \sum_{i=1}^k \Gamma_{ad}^{b_i} T^{b_1 \dots d \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} - \sum_{j=1}^l \Gamma_{ac_j}^d T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots d \dots c_l} \quad (1.2)$$

**Definición 1.1.34.** Sea  $\omega \in \Omega^k(M)$ . La **derivada exterior**  $d$  es un operador  $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ , tal que a la  $k$ -forma  $\omega$  le asigna  $d\omega$ , con

$$d\omega := (k+1)\nabla_{[a}\omega_{a_1 \dots a_k]}$$

**Definición 1.1.35.** Diremos que una  $k$ -forma diferencial  $\omega$  es cerrada si  $d\omega = 0$ , y que es exacta si existe una  $k-1$ -forma diferencial  $\eta$  tal que  $d\eta = \omega$ .

*Observación 1.1.36.* Es sencillo demostrar que  $d^2 = d \circ d = 0$ .

### 1.1.5. Transporte paralelo y Geodésicas

**Definición 1.1.37.** Sea  $\alpha$  una curva y  $t^a$  su vector velocidad. Un campo de vectores sobre la curva es **transportado paralelamente** a lo largo de  $\alpha$  si

$$t^a \nabla_a v^b = 0$$

o, equivalentemente, si en cada entorno de coordenadas se cumple

$$t^\mu \partial_\mu v^\nu + t^\mu \Gamma_{\mu\sigma}^\nu v^\sigma = 0$$

*Observación 1.1.38.* Si la curva está parametrizada con el parámetro  $s$ , entonces  $t^\mu \partial_\mu v^\nu = \frac{dv^\nu}{ds}$ .

**Definición 1.1.39.** En las hipótesis de la definición anterior, un  $(k, l)$  tensor  $T$  arbitrario es transportado paralelamente a lo largo de  $\alpha$  si

$$t^a \nabla_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} = 0$$

Las geodésicas son aquellas curvas que en las que la velocidad es transportada paralelamente. Es decir:

**Definición 1.1.40.** Sea  $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  una curva con vector tangente  $t^a$ . Diremos que  $\alpha$  es una geodésica si

$$t^a \nabla_a t^b = 0$$

En coordenadas locales, donde  $t^\mu = \dot{x}^\mu$ , tenemos que la ecuación de geodésicas es

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\sigma = 0 \quad (1.3)$$

**Definición 1.1.41.** Dada una geodésica  $\alpha(t)$ , al parámetro  $t$  lo denominaremos **parámetro afín**.

Observar que el parámetro afín de una geodésica está definido a menos de una constante multiplicativa. Si queremos fijar uno, imponemos las siguientes condiciones:

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\sigma = 0 \quad (1.4)$$

$$\dot{x}^\mu(0) = v^\mu \quad (1.5)$$

es decir, fijamos la velocidad inicial. Esto lo haremos en el capítulo siguiente, cuando fijemos un vector en un punto y construyamos la geodésica con velocidad igual a ese vector.

### 1.1.6. Tensor de Riemann

**Definición 1.1.42.** El **tensor de Riemann** o **tensor de curvatura**  $R$  es el siguiente (1,3) tensor: para  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ ,

$$R(X, Y, Z) = \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z \in \mathcal{X}(M)$$

Siendo  $\nabla$  la conexión de Levi-Civita de la variedad.

Verificar que esto es un tensor es una cuenta sencilla. En un referencial local, vemos que en cada punto del entorno coordenado vale:

$$R = R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma dx^\sigma \otimes dx^\nu \otimes dx^\rho \otimes \partial_\mu$$

donde  $R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma$  son las componentes del tensor de Riemann en las coordenadas de la parametrización.

Por definición, las componentes están dadas por:

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma = dx^\rho (R(\partial_\mu, \partial_\nu, \partial_\rho)) = \Gamma_{\mu\rho, \nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\rho, \mu}^\sigma + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma$$

En notación de índices abstractos, al tensor de Riemann lo notamos  $R_{abc}{}^d$ .

**Proposición 1.1.43.** El tensor de curvatura cumple las siguientes propiedades:

- i.  $R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d$ .
- ii. Si  $R_{abcd} := R_{abc}{}^e g_{ed}$ , entonces  $R_{abcd} = R_{cdab}$ .
- iii. Primera identidad de Bianchi:  $R_{[abc]}{}^d = 0$ .
- iv. Segunda identidad de Bianchi:  $\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = 0$ .

*Demostración.* Se pueden encontrar en [34] y [20]. □

Operando con la derivada covariante

$$\begin{aligned} R_{abc}{}^d X^a Y^b Z^c &= (X^a \nabla_a Y^b - Y^a \nabla_a X^b) \nabla_b Z^d - X^a \nabla_a (Y^b \nabla_b Z^d) + X^b \nabla_b (X^a \nabla_a Z^d) \\ &= Y^a X^b \nabla_a \nabla_b Z^d - X^a Y^b \nabla_a \nabla_b Z^d \\ &= X^a Y^b (\nabla_b \nabla_a - \nabla_a \nabla_b) Z^d \end{aligned}$$

podemos deducir que

$$R_{abc}{}^d Z^c = (\nabla_b \nabla_a - \nabla_a \nabla_b) Z^d$$

Utilizando las propiedades enunciadas anteriormente, y bajando el índice  $d$ , reescribimos la ecuación anterior como

$$R_{abdc} Z^c = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) Z_d \tag{1.6}$$

A partir del tensor de Riemann, podemos definir varios objetos que contienen información acerca de la curvatura de la variedad.

**Definición 1.1.44.** Sea  $n = \dim(M)$ ,  $g_{ab}$  la métrica (Riemanniana o pseudo-Riemanniana). Definimos los siguientes tensores:

1. Tensor de Ricci (la única contracción no trivial del tensor de Riemann):

$$R_{ab} := R_{acb}{}^c = R^c{}_{acb}$$

2. Curvatura escalar:

$$R := R_a{}^a$$

(no confundir  $R$  curvatura escalar con  $R$  el tensor de Riemann. Para evitar esto, siempre notaremos al último como  $R_{abc}{}^d$ ).

3. Tensor de Weyl:

$$C_{abcd} := R_{abc}{}^e g_{ed} - \frac{2}{n-2} (g_{a[c} R_{d]b} - g_{b[c} R_{d]a}) - \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{a[c} g_{d]b}$$

4. Tensor de Einstein:

$$G_{ab} := R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}$$

*Observación 1.1.45.* El tensor de Einstein cumple, además, la importante propiedad de tener divergencia nula, también llamada identidad de Bianchi:

$$\nabla^a G_{ab} = 0$$

La demostración puede ser encontrada, por ejemplo, en [34] y en [20].

### 1.1.7. Coordenadas Normales

En general, dadas coordenadas  $x^\mu$  en un entorno de un punto  $p \in M$ , la matriz asociada a la métrica en  $p$  será simétrica, con signatura  $(+\dots+)$  en el caso Riemanniano o  $(-\dots+)$  en el caso Lorentziano. Pero más no podremos decir acerca de la estructura de la matriz, a menos que tengamos más datos.

Un referencial muy útil, a la hora de hacer cálculos, es el sistema de coordenadas normales.

**Definición 1.1.46.** Dado  $p \in M$ ,  $w \in T_p M$ , escribiremos como  $\gamma_w$  a la geodésica que cumple

$$\begin{aligned} \gamma_w(0) &= p \\ \dot{\gamma}_w(0) &= w \end{aligned}$$

Como la ecuación de geodésicas 1.3 tiene solución localmente en  $p$  (Teorema de Picard), entonces la definición tiene sentido.

La demostración de la siguiente proposición se puede encontrar en los libros de geometría diferencial que mencionamos al comienzo:

**Proposición 1.1.47.** *Sea  $M$  una variedad con una conexión. Existe un abierto  $U \subset TM$  que contiene a todos los vectores nulos  $(p, 0)$ , sobre el que la aplicación  $\exp : U \rightarrow M$  definida como  $\exp(p, w) = \gamma_w(1)$  es diferenciable.*

El mapa  $\exp$  se llama mapa exponencial de  $M$ . A partir de este mapa, podemos definir  $\exp_p$  como la composición  $U \cap T_p M \xrightarrow{i} U \xrightarrow{\exp} M$ .

Se puede demostrar que  $d\exp_p \equiv Id_{T_p M}$ , por lo que localmente  $\exp_p$  es un difeomorfismo. Las coordenadas normales son, por definición, las que surgen de parametrizar a un entorno de  $p$ , donde  $\exp_p$  sea un difeomorfismo, por el propio mapa  $\exp_p$ . A tal entorno se le denomina entorno normal.

La siguiente proposición nos muestra cómo son la métrica y los símbolos de Christoffel, en las coordenadas normales. Para una demostración, ver [20], [33].

**Proposición 1.1.48.** *Sea  $p \in M$  un punto, y consideremos la parametrización por coordenadas normales de un entorno  $U$  de  $p$ . Se cumple:*

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(p) &= \eta_{\mu\nu} \\ \Gamma_{\mu\nu}^\sigma(p) &= 0 \end{aligned}$$

donde  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1)$ , con la misma signatura que la métrica.

Usaremos la siguiente aproximación en coordenadas normales, en un entorno de un punto  $p$  (no la demostraremos, pero se puede encontrar en [33]):

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{3} R_{\sigma\mu\nu\rho} x^\sigma x^\rho - \frac{1}{6} (\nabla_\zeta R_{\sigma\mu\nu\rho}) x^\zeta x^\sigma x^\rho + o(|x|^3) \quad (1.7)$$

## 1.2. Campos de Killing

En esta sección veremos los conceptos de derivada de Lie y de campo de Killing. Para un desarrollo completo ver [38], [11], [16] y [34].

### 1.2.1. Derivada de Lie

**Definición 1.2.1.** Sea  $Y \in \mathcal{X}(M)$ , y sea  $\phi : D \rightarrow M$ , con  $M \times \{0\} \subset D \subseteq M \times \mathbb{R}$  un abierto, el flujo generado por  $Y$ . Notaremos  $\phi(x, t) = \phi_t(x)$ . Si  $T \in \mathcal{T}_l^k(M)$  es un campo tensorial, la **derivada de Lie** de  $T$  respecto a  $Y$  se define como:

$$\mathcal{L}_Y T(p) := \frac{d}{dt} ((\phi_{-t})_* T(\phi_t(p)))|_{t=0} \quad (1.8)$$

A continuación enunciaremos algunas propiedades de la derivada de Lie.

**Proposición 1.2.2.** Sean  $Y \in \mathcal{X}(M)$ ,  $f \in C^\infty(M)$ ,  $T \in \mathcal{T}_l^k(M)$ ,  $S \in \mathcal{T}_l^{k'}(M)$ , e  $Y_i$  campos tensoriales que puedan ser contraídos con  $T$ . Entonces:

- i.  $\mathcal{L}_Y f = Y(f)$
- ii.  $\mathcal{L}_Y(S \otimes T) = \mathcal{L}_Y(S) \otimes T + S \otimes \mathcal{L}_Y(T)$
- iii.  $\mathcal{L}_Y(T(Y_1, \dots, Y_n)) = \mathcal{L}_Y T(Y_1, \dots, Y_n) + \sum_{i=1}^n T(Y_1, \dots, \mathcal{L}_Y(Y_i), \dots, Y_n)$ .
- iv. *Fórmula de Cartan para  $k$ -formas:*

$$\mathcal{L}_X \omega = \iota_X d\omega + d(\iota_X \omega)$$

En particular,

$$d(\mathcal{L}_X \omega) = \mathcal{L}_X d\omega = d(\iota_X(d\omega))$$

**Proposición 1.2.3.**  $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$

*Demostración.* Tenemos que  $df(Y) = Y(f)$ , para toda  $f \in C^\infty(M)$ . Entonces, por la propiedad iv:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(df(Y)) &= \mathcal{L}_X(Y(f)) \\ \text{Por iii: } \mathcal{L}_X(df(Y)) + df(\mathcal{L}_X Y) &= \mathcal{L}_X(Y(f)) \\ \text{Por i y iv: } d(\mathcal{L}_X f)(Y) + (\mathcal{L}_X Y)(f) &= X(Y(f)) \\ Y(X(f)) + (\mathcal{L}_X Y)(f) &= X(Y(f)) \end{aligned}$$

Por tanto,  $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ . □

**Proposición 1.2.4.** Si  $\omega \in \Omega^1(M)$ ,  $(\mathcal{L}_X \omega)_a = X^b \nabla_b \omega_a + \omega_b \nabla_a X^b$

*Demostración.* Sea  $v^a$  un campo vectorial arbitrario. Por un lado:

$$\mathcal{L}_X(\omega_a v^a) = X(\omega_a v^a) = X^b \nabla_b(\omega_a v^a) = X^b \omega_a \nabla_b(v^a) + X^b v^a \nabla_b(\omega_a)$$

Por otro lado:

$$\mathcal{L}_X(\omega_a v^a) = \mathcal{L}_X(\omega(v)) = \mathcal{L}_X(\omega)(v) + \omega(\mathcal{L}_X(v))$$

que en notación tensorial es  $v^a \mathcal{L}_X(\omega)_a + \omega_a [X, v]^a$ . Uniendo las dos expresiones:

$$\begin{aligned} v^a \mathcal{L}_X(\omega)_a + \omega_a [X, v]^a &= X^b \omega_a \nabla_b(v^a) + X^b v^a \nabla_b(\omega_a) \\ v^a \mathcal{L}_X(\omega)_a + \omega_a X^b \nabla_b v^a - \omega_a v^b \nabla_b X^a &= X^b \omega_a \nabla_b(v^a) + X^b v^a \nabla_b(\omega_a) \end{aligned}$$

Así que

$$v^a \mathcal{L}_X(\omega)_a = X^b v^a \nabla_b(\omega_a) + \omega_a v^b \nabla_b X^a$$

Cambiando índices:

$$v^a \left( \mathcal{L}_X(\omega)_a - X^b \nabla_b(\omega_a) - \omega_b \nabla_a X^b \right) = 0$$

Como la igualdad anterior se cumple para todo campo vectorial  $v^a$ , y el producto interno es no degenerado, tenemos que

$$\mathcal{L}_X(\omega)_a = X^b \nabla_b(\omega_a) + \omega_b \nabla_a X^b$$

□

La siguiente proposición nos indica cómo calcular la derivada de Lie de un campo tensorial arbitrario, y se demuestra de manera inductiva, siendo la base de inducción los dos casos probados anteriormente:

**Proposición 1.2.5.** Si  $T \in \mathcal{T}_l^k(M)$ , entonces:

$$(\mathcal{L}_X T)^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = X^c \nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} - \sum_{i=1}^k T^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \nabla_c X^{a_i} + \sum_{j=1}^l T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l} \nabla_{b_j} X^c \quad (1.9)$$

Como aplicación de lo anterior, tenemos que si  $X$  es un campo, entonces  $\mathcal{L}_X g_{ab} = X^c \nabla_c g_{ab} + \nabla_b X_a + \nabla_a X_b = 2\nabla_{(a} X_{b)}$ .

## 1.2.2. Campos de Killing

**Definición 1.2.6.** Un difeomorfismo  $\phi: M \rightarrow M$  se dice **isometría** si  $\phi^* g_{ab} = g_{ab}$ .

**Definición 1.2.7.** Un campo vectorial  $\xi^a$  se dice que es de Killing si el flujo asociado  $\Phi$  da lugar a una familia uniparamétrica de isometrías  $\phi_t = \Phi(-, t)$ .

*Observación 1.2.8.* Para que  $\xi$  sea un campo de Killing, es necesario y suficiente que se cumpla  $\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 0$ .

**Proposición 1.2.9.**  $\xi^a$  es un campo de Killing si y sólo si  $\nabla_{(a} \xi_{b)} = 0$ .

*Demostración.*  $\mathcal{L}_X g_{ab} = 2\nabla_{(a} X_{b)}$ , de donde se deduce el resultado. □

A continuación demostraremos dos propiedades importantes de los campos de Killing:

**Proposición 1.2.10.** Sea  $\xi^a$  un campo de Killing. Entonces:

- Si  $\gamma$  curva geodésica con tangente  $u^a$ , entonces  $\xi_a u^a = \text{cte}$  a lo largo de la geodésica.
- Se cumple  $\nabla_a \nabla_b \xi_c = -R_{bca}{}^d \xi_d$ .

*Demostración.* a.

$$\begin{aligned} u^b \nabla_b (\xi_a u^a) &= u^b u^a \nabla_b \xi_a + \xi_a u^b \nabla_b u^a \\ &= u^b u^a \nabla_b \xi_a \\ &= u^a u^b \nabla_a \xi_b \\ &= -u^a u^b \nabla_b \xi_a \end{aligned}$$

Así que  $u^b \nabla_b (\xi_a u^a) = 0$ , pues  $u^b u^a \nabla_b \xi_a = -u^a u^b \nabla_b \xi_a$ .

- Por definición del tensor de Riemann y por ser  $\xi^a$  un campo de Killing:  $\nabla_a \nabla_b \xi_c = R_{abc}{}^d \xi_d + \nabla_b \nabla_a \xi_c = R_{abc}{}^d \xi_d - \nabla_b \nabla_c \xi_a$ . Entonces:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_a \nabla_b \xi_c + \nabla_b \nabla_c \xi_a &= R_{abc}{}^d \xi_d \quad (+) \\ \nabla_b \nabla_c \xi_a + \nabla_c \nabla_a \xi_b &= R_{bca}{}^d \xi_d \quad (+) \\ \nabla_c \nabla_a \xi_b + \nabla_a \nabla_b \xi_c &= R_{cab}{}^d \xi_d \quad (-) \end{aligned} \right\} \rightarrow 2\nabla_b \nabla_c \xi_a = (R_{abc}{}^d + R_{bca}{}^d - R_{cab}{}^d) \xi_d$$

Utilizando la primera identidad de Jacobi, resulta:

$$2\nabla_b \nabla_c \xi_a = -2R_{cab}{}^d \xi_d$$

□

*Observación 1.2.11.* Calculemos los campos de Killing en el espacio de Minkowski de cuatro dimensiones:

Tenemos que  $g_{\mu\nu}(p) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \forall p \in M$ , por lo que  $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = 0$ . Por tanto, la derivada covariante de Levi-Civita es  $\partial$ , i.e. la derivada parcial ordinaria.

De la proposición 1.2.9, tenemos que  $\partial_{(\mu}\xi_{\nu)} = 0$ . Entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{\mu}\xi_{\nu} + \partial_{\nu}\xi_{\mu} \\ 0 &= \partial^{\mu}\partial_{\mu}\xi_{\nu} \end{aligned}$$

Donde usamos que  $g^{\sigma\nu}\partial_{\sigma}\partial_{\nu}\rho_{\mu} = g^{\sigma\nu}R_{\mu\nu\sigma\rho}\xi^{\rho} = 0$ , por ser el tensor de Riemann cero. La última ecuación vale en todo  $M$  y su solución es conocida:  $\square\xi_{\nu} = 0$  implica que

$$\xi_{\nu} = \Lambda_{\nu\rho}x^{\rho} + a_{\nu}$$

Con  $\Lambda$  una matriz y  $a$  un 4-vector constantes.

La primera de las ecuaciones nos lleva a  $\Lambda_{\mu\nu} = -\Lambda_{\nu\mu}$ . Esta condición nos dice que  $\Lambda$  es anti-simétrica.

De esta forma, obtenemos una base de campos de Killing en  $M = \mathbb{R}_1^4$ <sup>2</sup>:

- Cuatro campos de traslaciones independientes:  $\partial_t, \partial_x, \partial_y$  y  $\partial_z$ .
- Tres correspondientes a rotaciones espaciales:  $x\partial_y - y\partial_x, y\partial_z - z\partial_y$  y  $z\partial_x - x\partial_z$ .
- Tres **boosts**:  $x\partial_t + t\partial_x, y\partial_t + t\partial_y$  y  $z\partial_t + t\partial_z$ .

### 1.3. Ecuación de Raychaudhuri

En esta sección demostraremos uno de los resultados centrales que utilizaremos: la ecuación de Raychaudhuri. Esta ecuación relaciona la expansión de geodésicas próximas (temporales o nulas) con el tensor de Ricci y otras cantidades. En el resto del capítulo, a menos que se diga lo contrario, trabajaremos sobre una variedad Lorentziana, que llamaremos  $M$ .

**Definición 1.3.1.** Sea  $M$  una variedad,  $O \subset M$  un conjunto abierto. Una **congruencia** en  $O$  es una familia de curvas  $\{\gamma_{\alpha}\}_{\alpha}$  tales que  $\forall p \in O, \exists! \alpha : p \in \text{Im}(\gamma_{\alpha})$ .

Por tanto, si tenemos una congruencia en  $O$ ,  $\{\gamma_{\alpha}\}_{\alpha}$ , podemos tomar el campo de vectores (no necesariamente continuo)  $X$ , tal que  $X(p) = \dot{\gamma}_p$ , siendo  $\gamma_p$  la única curva de la congruencia que contiene a  $p$ . Llamaremos a este campo con el nombre **campo vectorial asociado a la congruencia**.

**Definición 1.3.2.** Diremos que una congruencia  $\{\gamma_{\alpha}\}_{\alpha}$  en  $O$  es **suave** si el campo vectorial  $X$  asociado a la congruencia es suave.

**Definición 1.3.3.** Sea  $\{\gamma_{\alpha}\}_{\alpha}$  una congruencia suave en  $O$ , y sea  $X \in \mathcal{X}(O)$  su campo asociado. Entonces:

- Si  $X(p)$  es un vector temporal  $\forall p \in O$ , diremos que la congruencia es temporal.
- Si  $X(p)$  es un vector nulo  $\forall p \in O$ , diremos que la congruencia es nula.

Por último, estaremos interesados en aquellas congruencias en las que las curvas son geodésicas:

**Definición 1.3.4.** Decimos que una congruencia suave  $\{\gamma_{\alpha}\}_{\alpha}$  en  $O$  es **geodésica** si  $\gamma_{\alpha}$  es una geodésica  $\forall \alpha$ .

<sup>2</sup>El subíndice nos indica cuántos signos – tenemos en la signatura de la métrica.

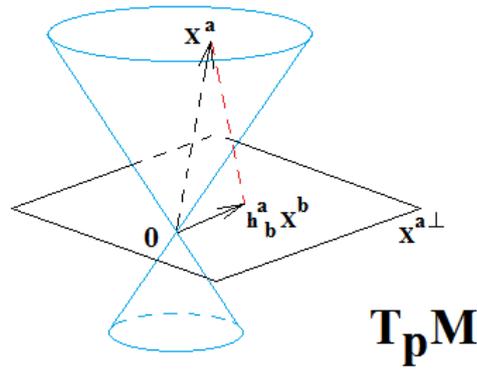


Figura 1.1: Esquema de la acción del operador  $h^a_b(p)$  sobre los vectores de  $T_p M$ .

### 1.3.1. Caso Temporal

En lo que sigue,  $\{\gamma_\alpha\}_\alpha$  será una congruencia geodésica temporal suave en un abierto  $O$  de la variedad  $M$ . Para no recargar la notación, la notaremos  $\{\gamma\}$ , sobreentendiendo que es una familia de curvas. En la sección siguiente, veremos la ecuación de Raychaudhuri para congruencias geodésicas nulas suaves.

**Definición 1.3.5.** El campo vectorial asociado a la congruencia de geodésicas será  $X$ .

*Observación 1.3.6.* Podemos parametrizar cada geodésica por su longitud de arco,  $\gamma_p(\tau)$ . Se llama a esta parametrización **tiempo propio** de la geodésica. Por tanto, podemos suponer que  $X^a X_a = -1$ .

**Definición 1.3.7.** Sea  $B_{ab} \in \mathcal{T}_2^0(O)$  el siguiente campo tensorial

$$B_{ab} = \nabla_b X_a \quad (1.10)$$

**Proposición 1.3.8.** Sea  $B_{ab}$  como en la definición 1.3.7. Entonces  $B_{ab} X^b = 0 = B_{ab} X^a$ .

*Demostración.* Como  $X^a$  es el campo vectorial asociado a la congruencia de geodésicas, tenemos  $X^c \nabla_c X^a = 0$ , de donde se deduce la primera igualdad. Para la segunda, basta ver que  $X^a X_a$  es constante igual a  $-1$  a lo largo de todas las curvas, implicando  $\frac{1}{2} \nabla_b (X^a X_a) = 0$ .  $\square$

**Definición 1.3.9.** Sea  $h_{ab} \in \mathcal{T}_2^0(O)$  el campo tensorial

$$h_{ab} = g_{ab} + X_a X_b \quad (1.11)$$

donde  $g_{ab}$  es la métrica de  $M$  (restringida a  $O$ ).

A este tensor se lo denomina métrica transversal, debido a la siguiente

**Proposición 1.3.10.** El tensor  $h^a_b$  es la proyección en  $T_p O \cong T_p M$  sobre el subespacio  $X(p)^\perp$

*Demostración.* Sea  $v^a \in T_p M$ . Calculamos

$$\begin{aligned} \left\langle h^a_b v^b, X^c \right\rangle_g &= h^a_b v^b g_{ac} X^c \\ &= (g^a_b + X^a X_b) v^b g_{ac} X^c \\ &= v^b g_{bc} X^c - X_b v^b \\ &= v^b X_b - X_b v^b = 0 \end{aligned}$$

$\square$

**Definición 1.3.11.** Definimos los siguientes tensores:

- $\theta = B^{ab}h_{ab}$ , expansión escalar.
- $\sigma_{ab} = B_{(ab)} - \frac{1}{3}\theta h_{ab}$ , tensor de cizalla (shear tensor).
- $\omega_{ab} = B_{[ab]}$ , tensor de vorticidad.

Esto es análogo a lo que se hace en mecánica de fluidos o en física del estado sólido: una vez que tenemos el tensor de estrés, lo descomponemos como suma de su traza, una componente simétrica de traza cero y una componente antisimétrica. Clásicamente, la traza es la tasa de expansión del fluido o del sólido, la componente simétrica corresponde a las fuerzas cortantes (perpendiculares a una dirección dada), y la componente antisimétrica se corresponde al momento angular del fluido.

**Proposición 1.3.12.** *Propiedades:*

- a.  $\text{tr}(h_{ab}) = 3$ .
- b.  $\text{tr}(B_{ab}) = \theta$ .
- c.  $\text{tr}(\sigma_{ab}) = 0$ .
- d.  $B_{ab} = \frac{1}{3}\theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab}$ .

*Demostración.* a.  $\text{tr}(h_{ab}) = \text{tr}(g_{ab}) + \text{tr}(X_a X_b) = g_{ab}g^{ba} + X_a X^a = 4 - 1 = 3$ .

b.

$$\begin{aligned}\text{tr}(B_{ab}) &= B^a{}_a = B^{ab}g_{ab} \\ &= B^{ab}(h_{ab} - X_a X_b) \\ &= B^{ab}h_{ab} = \theta\end{aligned}$$

donde en el paso del segundo al tercer renglón usamos el resultado 1.3.8.

c.

$$\begin{aligned}\text{tr}(\sigma_{ab}) &= \text{tr}(B_{(ab)}) - \frac{1}{3}\theta\text{tr}(h_{ab}) \\ &= \text{tr}(B_{ab}) - \theta = 0\end{aligned}$$

d.  $B_{ab} = B_{(ab)} + B_{[ab]} + \frac{1}{3}\theta h_{ab} - \frac{1}{3}\theta h_{ab}$ . □

**Proposición 1.3.13.** *Se cumple la siguiente ecuación:*

$$X^c \nabla_c \theta = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab} - R_{ab}X^a X^b. \quad (1.12)$$

donde  $R_{ab}$  es el tensor de Ricci.

*Demostración.* Utilizando la ecuación 1.6, tenemos:

$$\begin{aligned}X^c \nabla_c B_{ab} &= X^c \nabla_c \nabla_b X_a \\ &= X^c \left( \nabla_b \nabla_c X_a + R_{adcb} X^d \right) \\ &= \nabla_b (X^c \nabla_c X_a) - (\nabla_c X_a) (\nabla_b X^c) + X^c R_{adcb} X^d \\ &= 0 - B_{ac} B^c{}_b + R_{adcb} X^c X^d\end{aligned}$$

donde nuevamente usamos que  $X^c \nabla_c X^b = 0$ . Contrayendo la ecuación anterior:

$$X^c \nabla_c B^a{}_a = -B^a{}_c B^c{}_a + R^a{}_{dca} X^c X^d = -B^a{}_c B^c{}_a - R^a{}_{dac} X^c X^d$$

Veamos ahora el valor de  $B^a_c B^c_a$ : aplicando varias veces la proposición anterior,

$$\begin{aligned}
 B^a_c B^c_a &= \left( \frac{1}{3} \theta h^a_c + \sigma^a_c + \omega^a_c \right) \left( \frac{1}{3} \theta h^c_a + \sigma^c_a + \omega^c_a \right) \\
 &= \frac{1}{9} \theta^2 h^a_c h^c_a + (\sigma^a_c + \omega^a_c) (\sigma^c_a + \omega^c_a) + \frac{1}{3} \theta h^a_c (\sigma^c_a + \omega^c_a) + (\sigma^a_c + \omega^a_c) \frac{1}{3} \theta h^c_a \\
 &= \frac{1}{9} \theta^2 \text{tr}(h_{ac}) + (\sigma^a_c + \omega^a_c) (\sigma^c_a - \omega^c_a) + \frac{1}{3} \theta h^a_c (\sigma^c_a - \omega^c_a) + (\sigma^a_c + \omega^a_c) \frac{1}{3} \theta h^c_a \\
 &= \frac{1}{3} \theta^2 + \sigma_{ac} \sigma^{ac} - \omega_{ac} \omega^{ac} + \frac{1}{3} \theta (2 \text{tr}(\sigma_{ab})) \\
 &= \frac{1}{3} \theta^2 + \sigma_{ab} \sigma^{ab} - \omega_{ab} \omega^{ab}
 \end{aligned}$$

Por otro lado,  $R^a_{dac} X^c X^d = R_{dc} X^c X^d = R_{cd} X^c X^d$ , por definición de tensor de Ricci. Por último, por la proposición 1.3.12, tenemos que  $B^a_a = \theta$ .  $\square$

La ecuación 1.12 se puede escribir de manera más clara, teniendo en cuenta que  $X^c \nabla_c$  es el operador  $\frac{d}{d\tau}$  a lo largo de las curvas  $\gamma_p$ ,  $\forall p \in O$ . Entonces, 1.12 resulta

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3} \theta^2 - \sigma_{ab} \sigma^{ab} + \omega_{ab} \omega^{ab} - R_{ab} X^a X^b \quad (1.13)$$

### 1.3.2. Caso Nulo

Sea  $\{\gamma\}$  una congruencia geodésica nula suave, parametrizada por un parámetro afin  $\lambda$ . Sea  $k^a$  el campo de velocidades de la congruencia. Como son geodésicas, se debe cumplir:

$$k^a \nabla_a k^b = 0$$

*Observación 1.3.14.* A diferencia del caso anterior, tenemos que  $k^a \in \{k^a\}^\perp$ , así que es más difícil aislar la parte transversal pura de la métrica, que en el caso anterior hicimos mediante el tensor  $h_{ab}$ .

A continuación, expondremos dos maneras de deducir la ecuación de Raychaudhuri. El primer desarrollo que veremos será el que está presente en [34], que tiene la ventaja de ser abstracto en su formulación, y la desventaja de que no tenemos control sobre las cantidades geométricas al hacer cálculos. El segundo desarrollo que veremos será el que usaremos en el capítulo 2, está expuesto en [29] y tiene la ventaja de ser muy útil a la hora de hacer cálculos.

*Observación 1.3.15.* Para no recargar la notación, en esta sección notaremos  $V_p$  al espacio tangente  $T_p M$  para  $p \in M$ .

**Definición 1.3.16.** Sea  $p \in O$ , y sea  $\tilde{V}_p$  el subespacio perpendicular a  $k^a(p)$ . Tenemos que  $k^a(p) \in \tilde{V}_p$ , así que podemos tomar el cociente  $\frac{\tilde{V}_p}{\langle k^a(p) \rangle}$ , que llamaremos  $\hat{V}_p$  ( $\langle k^a(p) \rangle$  es el subespacio generado por  $k^a(p)$ ). Sea  $\pi: \tilde{V}_p \rightarrow \hat{V}_p$  la proyección canónica.

*Observación 1.3.17.* Es claro que  $\dim(\tilde{V}_p) = 3$ , y por tanto  $\dim(\hat{V}_p) = 2$ .

Ahora veremos que a ciertos tensores en  $V_p$  los podemos ver como tensores en  $\hat{V}_p$  de manera canónica.

*Observación 1.3.18.* Si consideramos la restricción de la métrica en el espacio  $\tilde{V}_p$ , entonces no sería un producto interno no degenerado en ese espacio, pues contiene una degeneración correspondiente al vector nulo  $k^a$ .

**Definición 1.3.19.**  $\hat{\cdot}$  será un operador que asocie ciertos tensores en  $V_p$  con tensores en  $\hat{V}_p$ , de la siguiente manera:

- Si  $t \in \mathcal{T}_0^1(V_p)$  y  $g_{ab}(p)(t, k) = 0$ , entonces definiremos  $\hat{t} \in \mathcal{T}_0^1(\hat{V}_p)$  como  $\hat{t} = \pi(t)$ .

- b. Si  $w \in \mathcal{T}_1^0(V_p)$  y  $w(k) = 0$ , entonces definiremos  $\hat{w} \in \mathcal{T}_1^0(\hat{V}_p)$  punto a punto como  $\hat{w}(\hat{v}) = w(v)$ , donde  $v$  es un representante de la clase de equivalencia  $\hat{v}$  (i.e.,  $v$  cumple el ítem anterior).
- c. Si  $T \in \mathcal{T}_m^n(V_p)$  y cumple que
- $T(w_1, \dots, k_i, \dots, w_m, t^1, \dots, t^n) = 0, \forall i, \forall t_k \in \mathcal{T}_0^1(V_p), w_j \in \mathcal{T}_1^0(V_p)$  tales que cumplen a. y b..
  - $T(w_1, \dots, w_m, t^1, \dots, k^j, \dots, t^n) = 0, \forall j, \forall t_k \in \mathcal{T}_0^1(V_p), w_j \in \mathcal{T}_1^0(V_p)$  tales que cumplen a. y b. respectivamente.

Entonces definiremos  $\hat{T} \in \mathcal{T}_m^n(\hat{V}_p)$  como  $\hat{T}(\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_m, \hat{t}_1, \dots, \hat{t}_n) = T(w_1, \dots, w_m, t_1, \dots, t_n)$ .

**Proposición 1.3.20.** *El operador  $\hat{\cdot}$  está bien definido.*

- Demostración.* a. Si  $g_{ab}(p)(t, k) = 0$ , entonces  $t \in \tilde{V}_p$ . Por tanto,  $\hat{t} = \pi(t) \in \mathcal{T}_0^1(\hat{V}_p)$  está bien definido.
- b. Si  $w(k) = 0$ , entonces el vector asociado a  $w$  en  $V_p$  pertenece a  $\tilde{V}_p$ , y es  $g_b^a(p)(w)$ . Entonces, la definición punto a punto es:

$$\hat{w}(\hat{v}) = g_{cd}(p)(g_b^a(p)(w), v)$$

Este valor no depende del representante que elijamos: si  $\hat{v} = \hat{v}'$ , entonces  $v = v' + lk$ , con  $l \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$\hat{w}(\hat{v}) = g_{cd}(p)(g_b^a(p)(w), v) = g_{cd}(p)(g_b^a(p)(w), v' + lk) = g_{cd}(p)(g_b^a(p)(w), v') = \hat{w}(\hat{v}')$$

- c. Como hicimos en los ítems a y b, es sencillo verificar que no depende del representante elegido. □

La definición 1.3.19 nos indica cuáles son los campos tensoriales que podemos llevar mediante el cociente a  $\hat{V}_p$ , para cada  $p$ . En particular, la métrica cumple el ítem c. de la proposición, pues, si  $t^a \in \mathcal{T}_0^1(O)$  y  $t^a k_a = 0$ :

$$g_{ab} t^a k^b = t^a k_a = 0 \tag{1.14}$$

Entonces, existe  $\hat{g}_{ab}$ , que, para evitar confusiones, denotaremos  $\hat{h}_{ab}$ . Este campo tensorial está bien definido en  $\hat{V}_p$ , tal como vimos en la proposición anterior.

*Observación 1.3.21.* También es importante remarcar que dado un  $S \in \mathcal{T}_m^n(\hat{V}_p)$ , lo podemos extender de manera natural a un  $S' \in \mathcal{T}_m^n(\tilde{V}_p)$ . A su vez, a  $S'$  también tenemos una manera natural de extenderlo a  $V_p$ . De esta manera, el operador  $\hat{\cdot}$  es sobreyectivo.

**Proposición 1.3.22.**  *$\hat{h}_{ab}(p)$  es definido positivo en  $\hat{V}_p$ .*

*Demostración.* Basta con probar que si  $n \in \mathcal{X}(\mathbb{R}_1^n)$  es un vector nulo en un espacio n-dimensional de Minkowski, entonces  $\{n\}^\perp$  no contiene vectores temporales. Sea  $v$  tal que  $\eta_{\mu\nu} v^\mu n^\nu = 0$ , entonces en componentes:

$$0 = -v_0 n_0 + \vec{v} \cdot \vec{n}$$

Por Cauchy-Schwarz:

$$v_0 n_0 = \vec{v} \cdot \vec{n} \leq |\vec{v}| |\vec{n}| = |\vec{v}| |n_0|$$

porque como  $n$  es nulo cumple que  $|\vec{n}| = |n_0|$ . Entonces  $|v_0| \leq |\vec{v}|$ , de donde  $v$  es nulo o espacial.

En caso de valer la igualdad, tendríamos que  $|v_0| = |\vec{v}|$ , de donde deducimos que  $v$  es un vector nulo. Además, por la propiedad de la desigualdad de Cauchy-Schwarz en una métrica euclídea, si se da la igualdad, entonces las componentes espaciales de  $n$  y  $v$ ,  $\vec{n}$  y  $\vec{v}$ , son proporcionales en un factor, digamos  $\alpha$ . Entonces:

$$v_0 n_0 = \vec{v} \cdot \vec{n} = \alpha |\vec{n}|^2 = \alpha n_0^2$$

de donde  $v_0 = \alpha n_0$ , lo que implica que  $v = \alpha n$ .

Por otro lado,  $\dim(\{n\}^\perp) = 3$ , y recién vimos que cualquier vector nulo en  $\{n\}^\perp$  pertenece a  $\langle n \rangle$ . Por lo tanto, al hacer el cociente por  $\langle n \rangle$ , estamos “eliminando” los eventuales vectores nulos. Si  $\hat{w} \in \hat{V}_p$ :

$$0 \geq \hat{h}(p)(\hat{w}, \hat{w}) = g(p)(w, w)$$

entonces  $w$  es nulo o temporal, y como pertenece a  $\{n\}^\perp$  (por la definición 1.3.19), resulta que  $w$  es nulo y además  $w \in \langle n \rangle$ . Por tanto, por definición de  $\hat{\cdot}$ , tenemos que  $\hat{w} = 0 \in \hat{V}_p$ .

Esto nos dice que  $\hat{h}$  es definida positiva y, por tanto, la podemos considerar como una métrica Riemanniana en  $\hat{V}_p$ .  $\square$

**Proposición 1.3.23.** *El campo tensorial  $B_{ab}$ , definido como  $B_{ab} = \nabla_b k_a$ , puede llevarse en cada  $p \in O$  a un tensor en  $\hat{V}_p$  mediante el operador  $\hat{\cdot}$ .*

*Demostración.* Como ya vimos en la sección pasada:

$$k^b B_{ab} = 0 = B_{ab} k^a$$

La primera se deduce por ser una congruencia de geodésicas y la última por ser el producto  $k^a k_a = 0$  constante en todas las geodésicas de la congruencia.

Por tanto, al contraer  $k^b B_{ab}$  o  $B_{ab} k^a$  con cualquier vector dará cero. Esto nos implica que  $B_{ab}$  entra en la condición b. de la definición 1.3.19.  $\square$

Al igual que antes, descomponemos  $\hat{B}_{ab}$  en traza, componente simétrica de traza cero y componente antisimétrica:

**Definición 1.3.24.** Sea  $\hat{B}_{ab}$  como antes. Entonces definimos

- a.  $\hat{\theta} = \hat{B}^{ab} \hat{h}_{ab}$
- b.  $\hat{\sigma} = \hat{B}_{(ab)} - \frac{1}{2} \hat{\theta} \hat{h}_{ab}$
- c.  $\hat{\omega} = \hat{B}_{[ab]}$

*Observación 1.3.25.* En la definición de  $\hat{\sigma}$ , el cambio en el denominador del sumando que contiene a  $\theta$  de 3 a 2 es debido a que la métrica  $\hat{h}$  con la que trabajamos tiene signatura 2, y no 3 como en el caso temporal.

La siguiente proposición es análoga a la proposición 1.3.12, pero aplicada al caso actual, y su demostración semejante.

**Proposición 1.3.26.** *Dados  $\hat{\theta}, \hat{\sigma}_{ab}$  y  $\hat{\omega}_{ab}$  como antes, tenemos:*

- a.  $\text{tr}(\hat{h}_{ab}) = 2$ .
- b.  $\text{tr}(\hat{B}_{ab}) = \hat{\theta}$ .
- c.  $\text{tr}(\hat{\sigma}_{ab}) = 0$ .
- d.  $\hat{B}_{ab} = \frac{1}{2} \hat{\theta} \hat{h}_{ab} + \hat{\sigma}_{ab} + \hat{\omega}_{ab}$ .

**Proposición 1.3.27.** *Sean  $\hat{\theta}, \hat{\sigma}_{ab}$  y  $\hat{\omega}_{ab}$  como antes. Entonces:*

$$k^c \nabla_c \hat{\theta} = -\frac{1}{2} \hat{\theta}^2 - \hat{\sigma}_{ab} \hat{\sigma}^{ab} + \hat{\omega}_{ab} \hat{\omega}^{ab} - R_{ab} k^a k^b \quad (1.15)$$

*Demostración.* En la demostración de la ecuación 1.12, aplicada a los vectores  $k^a$ , vimos que:

$$k^c \nabla_c B_{ab} = -B_{ac} B^c_b - R_{acbd} k^c k^d$$

Contrayendo esta identidad, tenemos

$$k^c \nabla_c B^a_a = -B^b_c B^c_b - R^b_{cbd} k^c k^d = -B^b_c B^c_b - R_{cd} k^c k^d$$

Por la proposición 1.3.23,  $B_{ab}$  se puede llevar naturalmente a  $\hat{B}_{ab}$ ; lo mismo es aplicable a  $B^c_b$ .  $R_{cd} k^c k^d$  es un escalar, que queda invariante al hacerle actuar  $\hat{\cdot}$ , al igual que  $k^c \nabla_c B^a_a$ .

La ecuación anterior resulta:

$$k^c \nabla_c B^a_a = -\hat{B}^b_c \hat{B}^c_b - R_{cd} k^c k^d$$

Tenemos que  $\hat{\theta} = \text{tr}(\hat{B}_{ab}) = \hat{B}_{ab} \hat{h}^{ab} = B_{ab} g^{ab} = \text{tr}(B)$ . Así que la ecuación es:

$$k^c \nabla_c \hat{\theta} = -\hat{B}^b_c \hat{B}^c_b - R_{cd} k^c k^d$$

Usando los resultados de 1.3.26, de igual manera a como en la proposición 1.3.13 utilizamos 1.3.12, deducimos el resultado. □

Al igual que antes,  $k^c \nabla_c$  es el operador derivada respecto al parámetro afín con el que parametrizamos la geodésica. Reescribiendo el miembro de la izquierda, resulta la ecuación de Raychaudhuri para congruencias suaves de geodésicas nulas:

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\hat{\theta}^2 - \hat{\sigma}_{ab}\hat{\sigma}^{ab} + \hat{\omega}_{ab}\hat{\omega}^{ab} - R_{ab}k^a k^b \quad (1.16)$$

Ahora veremos la segunda forma de deducir la ecuación 1.15. En este caso, en lugar de trabajar con el espacio  $\hat{V}_p$ , tomaremos un campo auxiliar que sea linealmente independiente con  $k^a$  en cada punto  $p \in O$ .

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} V_p & \xrightarrow{g(k,-)} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & \nearrow \exists! f & \nearrow \\ \frac{V_p}{\hat{V}_p} & & \end{array}$$

En cada punto  $p \in O$ , tomaremos un representante nulo de  $f^{-1}(-1)$ , que notaremos  $N^a(p)$ . No es difícil ver que existen infinitas de estas congruencias (basta pensarlo para un espacio de Minkowski  $\mathbb{R}_1^3$  o de mayor dimensión, ver la figura 1.2). Para cada elección, tendremos ciertos valores para las magnitudes que construyamos. Sin embargo, la expansión  $\theta$  no dependerá de la elección de  $N^a$ .

Elegimos los  $N^a(p)$  de manera que las componentes  $N^\mu$  sean continuas. Esto es posible debido a la continuidad de las funciones  $k^\mu$  en cada entorno coordenado de  $O$  y, por lo tanto, la variación continua de las coordenadas de los hiperplanos  $\pi^{-1}(f^{-1}(-1)) \subset V_p$  al variar  $p \in O$ .

**Definición 1.3.28.** Sea  $N^a$  el campo tensorial en  $\mathcal{X}(O)$  definido en los dos párrafos anteriores.

**Definición 1.3.29.** Sea  $h \in \mathcal{T}_2^0(M)$  el campo tensorial definido como

$$h_{ab} = g_{ab} + 2k_{(a} N_{b)}$$

A este tensor lo denominaremos métrica transversal.

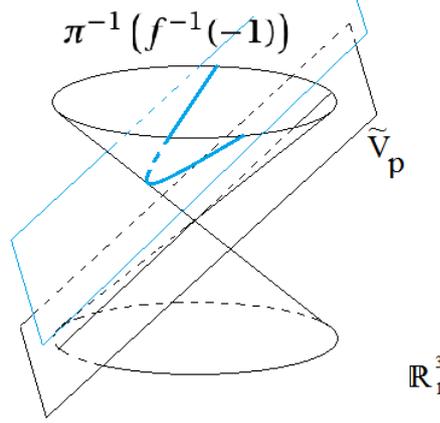


Figura 1.2: en esta figura vemos  $\mathbb{R}_1^3$ , el espacio  $\tilde{V}_p$  y, paralelo a él, el plano determinado por  $\pi^{-1}(f^{-1}(-1))$ . En un trazo más grueso se muestra un segmento de la parábola que describen los vectores nulos en  $\pi^{-1}(f^{-1}(-1))$ .

*Observación 1.3.30.* La acción de  $h^a_b$  sobre un vector arbitrario en  $V_p$ , para algún  $p \in O$ , es la de proyectar sobre un espacio vectorial bidimensional, ortogonal a  $k^a$  y  $N^a$  simultáneamente, como se puede apreciar a partir de las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} h_{ab}k^a &= 0 \\ h_{ab}N^a &= 0 \end{aligned}$$

Por otro lado,  $\text{tr}(h_{ab}) = h_{ab}g^{ab} = 2$ . Visto bajo la perspectiva de la demostración anterior, podemos ver que el  $(0, 2)$ -tensor  $h$ , restringido al espacio bidimensional  $S_p = \{N^a(p)\}^\perp \cap \{k^a(p)\}^\perp$ , es una métrica Riemanniana, siendo  $h_{ab}(p)$  un producto interno que, bajo la acción del operador  $\hat{\cdot}$ , es el producto interno  $\hat{h}$  en  $\tilde{V}_p$  que definimos en la demostración anterior.

**Definición 1.3.31.** Al igual que antes, definimos  $B_{ab} = \nabla_b k_a$ .

Ahora, en lugar de llevar un tensor de  $V_p$  al cociente  $\hat{V}_p$  tomando  $\hat{B}_{ab}$ , consideramos el siguiente tensor:

**Definición 1.3.32.** Sea  $\tilde{B}_{ab} := h_a^c h_b^d B_{cd}$ .

*Observación 1.3.33.* Este tensor representa la parte transversal pura de  $B_{ab}$ , pues al contraerlo con dos vectores  $v^a, w^b$ , resulta:

$$\tilde{B}_{ab}v^a w^b = (v^a h_a^c)(w^b h_b^d)B_{cd}$$

y cada uno de los términos entre paréntesis es un vector ortogonal a ambas geodésicas.

A partir de su definición, es fácil verificar la siguiente ecuación:

$$\tilde{B}_{ab} = B_{ab} + k_a N^c B_{cb} + k_b B_{ac} N^c + k_a k_b B_{cd} N^c N^d \quad (1.17)$$

**Definición 1.3.34.** Descomponemos  $\tilde{B}_{ab}$  en sus componentes simétrica de traza cero, antisimétrica y su traza:

$$\begin{aligned} \theta &:= \tilde{B}^a_a = \tilde{B}_{ab}g^{ab} = \tilde{B}_{ab}h^{ab} = B^a_a \\ \sigma_{ab} &:= \tilde{B}_{(ab)} - \frac{1}{2}\theta h_{ab} \\ \omega_{ab} &:= \tilde{B}_{[ab]} \end{aligned}$$

*Observación 1.3.35.* La traza de  $\tilde{B}_{ab}$ , o **expansión**, no depende del campo vectorial auxiliar  $N^a$ .

**Proposición 1.3.36.** *Se cumple la ecuación de Raychaudhuri para el caso nulo.*

*Demostración.* En la demostración de la ecuación 1.15 vimos que

$$k^c \nabla_c B_{ab} = -B_{ac} B^c{}_b + R_{adcb} k^c k^d$$

Esta igualdad es en general, no depende del tipo de vector que es  $k^a$ . Contrayendo los índices  $a$  y  $b$ :

$$k^c \nabla_c B^a{}_a = -B_{ac} B^{ac} - R_{dc} k^c k^d$$

Por otro lado, de la ecuación 1.17, tenemos que  $B^a{}_a = \tilde{B}^a{}_a = \theta$ :

$$k^c \nabla_c \theta = -B_{ac} B^{ac} - R_{dc} k^c k^d$$

La misma ecuación nos indica que  $B_{ab} B^{ab} = \tilde{B}_{ab} \tilde{B}^{ab}$ , así que

$$k^c \nabla_c \theta = -\tilde{B}_{ab} \tilde{B}^{ab} - R_{dc} k^c k^d$$

Como  $\tilde{B}_{ab} \tilde{B}^{ab} = -\frac{1}{2}\theta^2 + \sigma_{ab}\sigma^{ab} - \omega_{ab}\omega^{ab}$  (la misma operación que en 1.3.13), se deduce la ecuación 1.15.  $\square$

### 1.3.3. Significado geométrico de la expansión $\theta$

En esta sección estudiaremos el significado geométrico de la expansión: demostraremos que  $\theta = \frac{1}{\rho} k^c \nabla_c \rho$ , siendo  $\rho$  la densidad de área transversal a la congruencia  $\{\gamma\}$ . Es decir, la expansión es una magnitud relacionada con la tasa de cambio del área transversal a la congruencia. Para un desarrollo más detallado, remitimos al lector a [29].

Comencemos primero por fijar una geodésica,  $\gamma$ , y punto  $p \in \gamma \subset M$ , perteneciente al abierto  $O$  de la congruencia. Notaremos por  $\gamma_x$  a la geodésica nula que contiene al punto  $x$ .

Supondremos que todas las geodésicas están parametrizadas con un parámetro afín,  $\lambda$ , y notaremos  $\lambda_p = \lambda(p)$ .

Sea  $\{\beta\}$  la congruencia de curvas nulas auxiliar, de vectores tangentes  $N^a$ , parametrizadas con un parámetro  $\mu$ , de forma que  $\mu$  es constante sobre las geodésicas de  $\{\gamma\}$ . También notaremos  $\mu_p = \mu(p)$ .

Tomemos un entorno abierto  $U \subset O$  de  $p$ . El conjunto  $S_p$  será aquel de puntos  $q \in U$  tales que

- i.  $\forall q \in S_p, \exists \gamma_q \in \{\gamma\}$  y  $\beta_q \in \{\beta\}$ .
- ii.  $\lambda(q) = \lambda_p, \mu(q) = \mu_p$ .

De esta manera,  $S_p$  es una superficie bidimensional. En  $p$ , como consecuencia de la definición de  $S_p$ , tenemos que  $k^a(p)$  y  $N^a(p)$  son ortogonales a  $T_p S_p$ . De esta manera, como  $\{k^a(p)\}^\perp \cap \{N^a(p)\}^\perp$  es un plano espacial (como ya vimos en la subsección anterior), resulta que  $S_p$  en un entorno suficientemente chico de  $p$  es una superficie bidimensional espacial.

Sobre  $S_p$  introducimos coordenadas  $y^1, y^2$ .

Junto con los parámetros  $\lambda$  y  $\mu$ , estas coordenadas pueden ser usadas para parametrizar un entorno de  $p$  como sigue: los puntos en  $S_p$  son  $(\lambda_p, \mu_p, y^1, y^2)$ . A cada geodésica  $\gamma_q$  que pasa por  $S_p$  la etiquetamos con las coordenadas  $y^1, y^2$ . De esta forma, al variar el parámetro  $\lambda$ , estamos transportando las coordenadas de la superficie, a lo largo de las geodésicas correspondientes a la congruencia  $\{\gamma\}$ . Lo mismo ocurre para el parámetro  $\mu$ : transportamos las coordenadas sobre las curvas nulas de la congruencia  $\{\beta\}$  (ver figura 1.3).

Así, a cada sección  $S_q$ , para  $q$  suficientemente cerca de  $p$  (i.e.,  $q \in U$ ), le colocamos las coordenadas  $y^1, y^2$ .

Por tanto, si las coordenadas locales iniciales son  $x^\alpha$ , ahora tenemos  $x^\alpha(\lambda, \mu, y^1, y^2)$ .

Nombraremos  $e_i^a$  a los vectores tangentes a  $S_q$ , con  $i = 1, 2$  y  $q \in U$ , asociados  $y^1$  e  $y^2$ .

En coordenadas, tenemos las siguientes identidades:

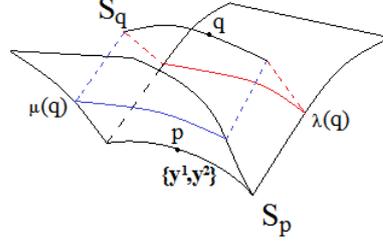


Figura 1.3: transporte de coordenadas de  $S_p$  a todo un entorno de  $p$ .

$$k^\alpha = \frac{\partial(x^\alpha(\lambda, \mu, y^1, y^2))}{\partial \lambda}$$

$$e_i^\alpha = \frac{\partial(x^\alpha(\lambda, \mu, y^1, y^2))}{\partial y^i}$$

Nos interesará el comportamiento de las superficies  $S$  al variar el punto  $p \in \gamma$ . Para no recargar la notación, nos referiremos a las superficies como  $S(\lambda)$ .

**Definición 1.3.37.** Consideremos el siguiente  $(0,2)$ -tensor en  $\mathcal{F}_2^0(S(\lambda))$ :

$$H_{ij} = g_{ab} e_i^a e_j^b$$

**Proposición 1.3.38.** El tensor  $H_{ij}$  actúa como una métrica Riemanniana en cada superficie  $S(\lambda)$ .

*Demostración.* Si  $V, W \in T_q S(\lambda)$ , entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{\eta, \nu} g_{\eta\nu} dx^\eta \otimes dx^\nu (V, W) &= \sum_{\eta, \nu} g_{\eta\nu} \left( \sum_i \frac{\partial x^\eta}{\partial y^i} dy^i \right) \otimes \left( \sum_j \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j} dy^j \right) (V, W) \\ &= \sum_{i,j} \sum_{\eta, \nu} \left( g_{\eta\nu} \frac{\partial x^\eta}{\partial y^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j} \right) dy^i \otimes dy^j (V, W) \\ &= \sum_{i,j} H_{ij} dy^i \otimes dy^j (V, W) \end{aligned}$$

Además, como cada  $S(\lambda)$  es una superficie espacial,  $H_{ij}$  es definida positiva. Por tanto, es una métrica Riemanniana sobre  $S(\lambda)$ .  $\square$

**Definición 1.3.39.** La densidad de área transversal se define como  $\rho := \sqrt{\det(H)}$ .

Enunciaremos la siguiente proposición, sin demostrarla (ver [29]):

**Proposición 1.3.40.** Sobre la geodésica  $\gamma$ , se cumplen las siguientes igualdades:

- i.  $\mathcal{L}_k e_1 = \mathcal{L}_k e_2 = 0$ .
- ii.  $H_{ij} = h_{ab} e_i^a e_j^b$ .
- iii.  $h^{ab} = H^{ij} e_i^a e_j^b$ .

Ahora estamos en condiciones de probar el resultado que anticipamos al comienzo de esta sección:

**Proposición 1.3.41.** *Sobre la geodésica  $\gamma$ , se cumple*

$$\theta = \frac{1}{\rho} k^a \nabla_a \rho = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\lambda} \quad (1.18)$$

*Demostración.* Primero, calculemos  $\frac{dH_{ij}}{d\lambda}$ , usando lo enunciado en la proposición anterior:

$$\begin{aligned} \frac{dH_{ij}}{d\lambda} &= k^c \nabla_c H_{ij} \\ &= k^c \nabla_c (g_{ab} e_i^a e_j^b) \\ &= g_{ab} (k^c \nabla_c e_i^a) e_j^b + g_{ab} (k^c \nabla_c e_j^b) e_i^a \\ &= g_{ab} (e_i^c \nabla_c k^a) e_j^b + g_{ab} (e_j^c \nabla_c k^b) e_i^a \\ &= (e_i^c \nabla_c k_b) e_j^b + (e_j^c \nabla_c k_a) e_i^a \\ &= e_i^c B_{bc} e_j^b + e_j^c B_{ac} e_i^a \\ &= 2B_{(ab)} e_i^a e_j^b \end{aligned}$$

Contrayendo con  $H^{ij}$ :

$$\begin{aligned} H^{ij} \frac{dH_{ij}}{d\lambda} &= 2B_{(ab)} e_i^a e_j^b H^{ij} \\ &= 2B_{(ab)} h^{ab} \\ &= 2\theta \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\theta = \frac{1}{2} H^{ij} \frac{dH_{ij}}{d\lambda}$$

Recordando la expresión de la inversa de una matriz expresada en los cofactores y el determinante y operando, se obtiene

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{1}{\det(H)} \frac{d \det(H)}{d\lambda}$$

Escrito de otra forma

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{\det(H)}} \frac{d\sqrt{\det(H)}}{d\lambda} \quad (1.19)$$

como queríamos demostrar.  $\square$

## 1.4. Hipersuperficies y Teorema de Frobenius

En esta sección comenzaremos por definir hipersuperficie, cómo se clasifican en el caso de una geometría Lorentziana y enunciaremos el teorema de Frobenius, que nos servirá para anular el término de vorticidad en la ecuación de Raychaudhuri.

La definición de hipersuperficie y el enunciado del Teorema de Frobenius están extraídos de [38]; el lector podrá encontrar un desarrollo más completo.

### 1.4.1. Hipersuperficies

**Definición 1.4.1.** Sea  $M$  una  $n$ -variedad,  $S$  una  $k$ -variedad. Sea  $\theta : S \rightarrow M$  una inmersión inyectiva. Diremos que  $(S, \theta)$  es una **subvariedad** de  $M$ . Una **hipersuperficie** es una subvariedad de codimensión 1.

*Observación 1.4.2.* Sea  $S$  una hipersuperficie,  $p \in S$ . Entonces  $d\theta : T_p S \rightarrow T_{\theta(p)} M$  es inyectiva, por definición de inmersión. Por tanto,  $\dim(d\theta(T_p S)) = n - 1$ ; así que para cada  $p \in S$  existe  $n(p) \in T_{\theta(p)} M$ , tal que  $g_p(n(p), v) = 0, \forall v \in d\theta(T_p S)$ . Al vector  $n(p)$  lo llamaremos **vector ortogonal** a la subvariedad en  $p$ .

*Observación 1.4.3.* La métrica en  $M$  induce una métrica en  $S$ , vía el pullback  $\theta^*$ .

La hipersuperficie  $S$  puede ser clasificada, según el tipo de vector ortogonal que esté definido sobre ella.

**Definición 1.4.4.** Sea  $S$  una hipersuperficie en  $M$ ,  $n$  un campo vectorial ortogonal a  $S$ . Diremos que  $S$  es

- **nula**, si  $g^{ab} n_a n_b = 0$  en todo punto de  $S$ .
- **espacial**, si  $g^{ab} n_a n_b < 0$ , en todo punto de  $S$ .

Es claro que en cada uno de estos casos, la métrica  $\theta^*(g_{ab})$  degenerada y definida positiva, respectivamente.

### 1.4.2. Teorema de Frobenius

En esta sección enunciaremos el teorema de Frobenius en sus versiones más conocidas: para vectores y para formas diferenciales. Las demostraciones de los resultados expuestos se puede encontrar en [38].

**Definición 1.4.5.** Sean  $M$  una  $n$ -variedad y  $k$  un entero tal que  $0 < k < n$ . Una **distribución  $k$ -dimensional**  $\mathcal{D}$  en  $M$  es una elección de espacios  $k$ -dimensionales  $\mathcal{D}(q)$  en  $T_q M$  para cada  $q \in M$ .

$\mathcal{D}$  es suave si para cada  $q \in M$  existe un entorno  $U$  de  $q$  y existen  $k$  campos vectoriales  $X_1, \dots, X_k$  de clase  $C^\infty$  en  $U$  tales que generen a  $\mathcal{D}$  en  $U$ .

**Definición 1.4.6.** Un campo  $X \in \mathcal{X}(M)$  está contenido en  $\mathcal{D}$  si  $X(q) \in \mathcal{D}(q) \forall q \in M$ . Notamos  $X \in \mathcal{D}$ .

Una distribución suave  $\mathcal{D}$  es **involutiva** si cada vez que  $X, Y \in \mathcal{D}$ , entonces  $\mathcal{L}_X Y \in \mathcal{D}$ .

**Definición 1.4.7.** Una subvariedad  $(N, \psi)$  de  $M$  es una variedad **integrable** de una distribución  $\mathcal{D}$  si

$$d\psi(T_q N) = \mathcal{D}(T_{\psi(q)} M) \forall q \in N$$

La pregunta a la que da respuesta el teorema de Frobenius es la siguiente: dada una variedad, y una distribución sobre ella, ¿cuándo es posible que exista una familia de subvariedades integrables de la distribución dada?. Por ejemplo, si tomamos un campo vectorial suave, estamos haciendo una elección de subespacios de dimensión 1 en los espacios tangentes de la variedad inicial. Por el teorema de Picard, sabemos que hay curvas integrales de tal campo.

**Teorema 1.4.8. Teorema de Frobenius:** Sea  $\mathcal{D}$  una distribución  $k$ -dimensional sobre una  $n$ -variedad  $M$ , involutiva y de clase  $C^\infty$ . Sea  $p \in M$ . Entonces, existe una subvariedad integrable de  $\mathcal{D}$  que contiene a  $p$ .

*Observación 1.4.9.* El teorema anterior es equivalente al siguiente enunciado:

*Una distribución admite una familia de subvariedades integrables si y sólo si es involutiva.*

Este es el enunciado que usaremos en lo que sigue de la sección.

Veremos ahora la versión del teorema de Frobenius para formas diferenciales, que luego aplicaremos al caso particular de 1-formas.

**Definición 1.4.10.** Sea  $\mathcal{D}$  un distribución suave  $p$ -dimensional en  $M$ . Diremos que una  $q$ -forma  $\omega$  **anula** a  $\mathcal{D}$  si para cada  $m \in M$

$$\omega(m)(v_1, \dots, v_q) = 0$$

si  $v_1, \dots, v_q \in \mathcal{D}(m)$ . Sea  $\mathcal{I}(\mathcal{D})$  el conjunto

$$\mathcal{I}(\mathcal{D}) := \{\omega \in \Omega^*(M) : \omega \text{ anula a } \mathcal{D}\}$$

siendo  $\Omega^*(M)$  el conjunto de todas las formas diferenciales en  $M$ .

**Definición 1.4.11.** Una colección  $\omega_1, \dots, \omega_n$  de 1-formas en  $M$  es **independiente** si, para cada  $m \in M$ , forman un conjunto linealmente independiente en  $V_m^*$ .

**Proposición 1.4.12.** Sea  $\mathcal{D}$  una distribución suave  $p$ -dimensional en  $M$ . Entonces:

- $\mathcal{I}(\mathcal{D})$  es un ideal en  $\Omega^*(M)$ .
- $\mathcal{I}(\mathcal{D})$  es localmente generado por  $d - p$  1-formas independientes.<sup>3</sup>
- Si  $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$  es un ideal localmente generado por  $d - p$  1-formas independientes, entonces existe una única distribución  $\mathcal{D}$  de dimensión  $p$  en  $M$  tal que  $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathcal{D})$ .

**Definición 1.4.13.** Un ideal  $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$  es **diferencial** si es cerrado al tomar derivada exterior:

$$d(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$$

**Proposición 1.4.14.** Una distribución suave  $\mathcal{D}$  en  $M$  es involutiva si y sólo si el ideal  $\mathcal{I}(\mathcal{D})$  es un ideal diferencial.

**Definición 1.4.15.** Una subvariedad  $(N, \psi)$  de  $M$  se dice **variedad integral del ideal**  $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$  si para toda  $\omega \in \mathcal{I}$ ,  $\psi^*(\omega) = 0$ . Una variedad integral conexa de un ideal  $\mathcal{I}$  es **maximal** si su imagen no es un subconjunto propio de la imagen de otra variedad integral conexa de  $\mathcal{I}$ .

El siguiente teorema es la versión dual del teorema de Frobenius.

**Teorema 1.4.16.** Sea  $\mathcal{I} \subset \Omega^*(M)$  un ideal diferencial localmente generado por  $d - p$  1-formas independientes. Sea  $m \in M$ . Entonces, existe una única variedad integral conexa y maximal de  $\mathcal{I}$  en  $m$ , de dimensión  $p$ .

**Proposición 1.4.17.** Sea  $X^a$  un campo vectorial. Es ortogonal a hipersuperficies en  $M$  si y sólo si  $X_{[a} \nabla_b X_{c]} = 0$ .

*Demostración.* Consideremos el ideal  $\mathcal{I} = \langle X_a \rangle = \{X_a \wedge \omega : \omega \in \Omega^*(M)\}$ . El campo  $X$  es ortogonal a hipersuperficies si y sólo si la distribución que generan los planos perpendiculares es involutiva, y esto es equivalente a que el ideal  $\mathcal{I}$  sea diferencial, por la proposición anterior al teorema.

Como es un ideal diferencial, entonces existe  $\omega \in \Omega^*(M)$  tal que

$$d(X_a) = X_a \wedge \omega$$

Como  $X_a$  es una 1-forma, entonces  $\omega$  también es una 1-forma. La igualdad anterior se cumple si y sólo si  $X_b \wedge d(X_a) = 0$ , y esto es equivalente a (recordando la definición 1.1.34, que relaciona la derivada exterior con la derivada covariante):

$$X_{[a} \nabla_b X_{c]} = 0$$

□

<sup>3</sup>No entraremos en detalle sobre la definición de ideales localmente generados. Ver [38] para una exposición detallada.

*Observación 1.4.18.* Veamos cómo usamos lo anterior para demostrar que  $\omega_{ab} = 0$ , en el caso nulo.

Si  $k^a$  es ortogonal a hipersuperficies, entonces  $k_{[a} \nabla_b k_{b]} = 0$ . Por tanto:

$$0 = \frac{1}{3!} (k_a B_{[bc]} + k_b B_{[ca]} + k_c B_{[ab]})$$

Contrayendo con  $N^a$ :

$$B_{[bc]} = k_b B_{[ca]} N^a + k_c B_{[ab]} N^a$$

Operando

$$\begin{aligned} B_{[bc]} &= k_b B_{[ca]} N^a + k_c B_{[ab]} N^a \\ &= \frac{1}{2} (k_b B_{ca} N^a - k_b B_{ac} N^a + k_c B_{ab} N^a - k_c B_{ba} N^a) \\ &= k_{[b} B_{c]a} N^a + B_{a[b} k_{c]} N^a \\ &= B_{[ab]} - \tilde{B}_{[ab]} \end{aligned}$$

donde la última igualdad se deduce de la ecuación 1.17.

Por tanto,  $0 = \tilde{B}_{[ab]} = \omega_{ab}$ .

**Teorema 1.4.19.** *La ecuación de Raychadhuri para una congruencia de geodésicas nulas, ortogonales a hipersuperficies, es:*

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} - R_{ab}k^a k^b \quad (1.20)$$

# Superficies admisibles

En este capítulo introducimos las coordenadas que utilizaremos en el capítulo siguiente y definiremos dos 1-formas sobre geodésicas nulas, que serán las formas de entropía y calor.

A menos que se indique lo contrario,  $M$  será una 4-variedad lorentziana, con una métrica  $g_{ab}$  de signatura  $(-, +, +, +)$ .

En la primer sección definiremos *par admisible* en  $p \in M$ . Luego demostraremos que todo punto de  $M$  admite pares admisibles y la demostración nos conducirá a las coordenadas que usaremos en lo que resta del trabajo.

## 2.1. Superficies admisibles

En esta sección fijaremos las coordenadas que utilizaremos en este trabajo, mediante la definición de un tipo especial de 2-superficies  $\Sigma$  espaciales sobre la variedad.

**Definición 2.1.1.** Como elementos iniciales tomaremos la 4-variedad lorentziana  $M$  y un punto  $p \in M$ . Diremos que un par  $(\Sigma, \gamma)$  es **admisible en  $p$**  si:

- $\Sigma$  es una 2-superficie espacial que contiene a  $p$  en su interior (con la topología relativa).
- $\{\gamma\}$  es una congruencia de geodésicas nulas en un abierto de  $p$ , tal que son ortogonales a la superficie  $\Sigma$ .
- La expansión,  $\theta$ , y la cizalla,  $\sigma_{ab}$ , de la congruencia  $\{\gamma\}$  son 0 en  $p$ .

Si  $(\Sigma, \gamma)$  es un par admisible, a la superficie la llamaremos **superficie admisible**.

*Observación 2.1.2.* Si  $(\Sigma, \gamma)$  es un par admisible, y  $\Sigma' \subset \Sigma$  tal que contiene a  $p$  en su interior (con la topología relativa de  $M$ ), entonces  $(\Sigma', \gamma)$  también es un par admisible.

### **Proposición 2.1.3. Existencia de superficies admisibles**

*Dada  $M$  una 4-variedad lorentziana,  $p \in M$  un punto, y  $k_0 \in T_p M$  un vector nulo, existe un par admisible  $(\Sigma, \gamma)$  en  $p$  tal que  $\gamma_p(0) = p$  y  $\dot{\gamma}_p(0) = k_0$ .*

*Demostración.* Consideremos una superficie espacial de dimensión 2,  $\Sigma \subset M$ , que sea la imagen de una 2-bola espacial de radio  $\delta > 0$  por el mapa exponencial  $\exp_p$ . Además, exigimos que la 2-bola esté contenida en el espacio perpendicular a  $k_0$  en  $T_p M$  y no contenga a  $k_0$  (recordar que esto es posible por la demostración de la proposición 1.3.22). Sea  $B$  un entorno normal que contenga a la superficie  $\Sigma$ ; esto es posible, achicando eventualmente  $\delta$  (ver la figura 2.1).

Las coordenadas sobre  $\Sigma$  serán  $y^1, y^2$  tales que  $\partial_{y^1}$  y  $\partial_{y^2}$  son ortogonales en  $p$ .

Sea  $\{\gamma\}$  una congruencia de geodésicas nulas en  $B$ , parametrizadas con parámetro afín  $\lambda$ , de forma que  $\Sigma$  está contenida en la hipersuperficie donde  $\lambda = 0$ . Esta congruencia la construimos como sigue.

Consideremos una hipersuperficie  $N$  espacial alrededor de  $p$  que contenga a  $\Sigma$ ; para fijar ideas,  $N$  es la imagen por el mapa exponencial de una 3-bola espacial de radio  $\delta$  que contenga a

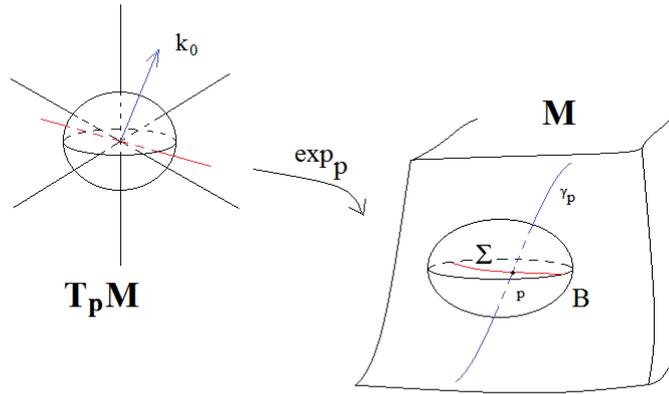


Figura 2.1: En esta imagen vemos la superficie  $\Sigma$  definida como la imagen por el mapa exponencial de una bola de 2 dimensiones.

$\exp_p^{-1}(\Sigma)$ . En un entorno suficientemente chico de  $p$ , existe una familia suave de vectores sobre  $N$  que extiende a  $k_0$  y que es perpendicular a  $\Sigma$  (por ejemplo, transportando paralelamente a  $k_0$  por las geodésicas espaciales sobre  $N$  que define el mapa exponencial). Al estar en un entorno normal, consideremos la familia de geodésicas generadas por los vectores anteriores. Esta familia es una congruencia de geodésicas, pues en un entorno suficientemente chico de  $p$  (reduciendo eventualmente  $B$ ) el flujo de las geodésicas es una familia de difeomorfismos que transporta a  $N$ . La parametrización de la geodésica que contiene a  $p$ , que notamos  $\gamma_p$ , es tal que  $\gamma_p(0) = p$  y  $\dot{\gamma}_p(0) = k_0$ ; con esto estamos fijando el parámetro afín de la geodésica, que notaremos  $\lambda$ . Los parámetros afines de las otras geodésicas los fijamos estableciendo que sobre  $N$  valgan 0.

Al ser una congruencia de geodésicas, genera un flujo local en  $B$ , que notaremos  $\Psi$ . Como ya dijimos, reduciendo  $B$  podemos suponer que  $\Psi$  es una familia de difeomorfismos, para valores de tiempo del flujo entre  $[-\epsilon, \epsilon]$ , con  $\epsilon > 0$ . Sea  $\mathcal{R} = \Psi(\Sigma, [-\epsilon, \epsilon])$ , y  $\mathcal{H} = \Psi(\Sigma, [-\epsilon, 0])$  (ver la figura 2.2). A  $\mathcal{H}$  también lo llamaremos el **horizonte local de Rindler**, nombre que quedará más claro en el capítulo 4.

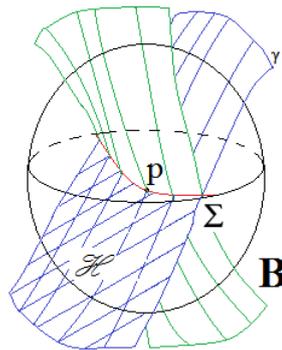


Figura 2.2: Esquema del comportamiento de las congruencias nulas en el entorno  $B$  de  $p$ . Se observa la congruencia  $\{\gamma\}$  y la congruencia de vectores tangentes  $l$ . El horizonte local de Rindler  $\mathcal{H}$  se señala sobre la congruencia  $\{\gamma\}$  (rayado). También se observa la hipersuperficie nula  $\Theta(\Sigma, [-\epsilon, \epsilon])$ .

Consideremos ahora, sobre cada punto  $q$  de  $\mathcal{R}$  un vector  $l(q)$  que sea linealmente independiente con  $k(q)$ , y tal que:

- $l(q)$  es nulo  $\forall q \in \mathcal{R}$ .

- $g(l(q), k(q)) = -1, \forall q \in \mathcal{R}$ .
- $l$  es perpendicular a  $\Sigma$  en  $p$ .

Por lo visto en el capítulo 1, sección 1.3.3, estos vectores sobre  $\mathcal{R}$  se pueden elegir de forma que las componentes  $l^\mu$  sean  $C^\infty$ .

Para cada  $l(q), q \in \mathcal{R}$ , tomemos la geodésica que en  $q$  tiene velocidad  $l(q)$ . La parametrización de estas curvas geodésicas la realizamos de manera que sobre  $\mathcal{R}$  es constante. Al flujo local en  $B$  de esta congruencia nula de geodésicas lo notaremos  $\Theta$ .

De esta forma, los parámetros son:  $y^1, y^2$ , las dos coordenadas correspondientes a la superficie  $\Sigma$ , dadas por el mapa exponencial;  $\lambda$ , el parámetro afín de la congruencia de geodésicas  $\{\gamma\}$ ; y  $\lambda_-$ , el parámetro afín de las curvas de la congruencia de velocidades  $l$ .

La parametrización, entonces, estará dada por  $\phi : (a, b) \times (c, d) \times B_2(0, \delta) \rightarrow B \subset M$ , con

$$\phi(t, s, x, y) = \Theta(\Psi(\exp_p(x, y), t), s)$$

*Observación 2.1.4.* La primer componente será la correspondiente a  $\lambda$ , la segunda a  $\lambda_-$ , y las últimas dos a las coordenadas de la superficie  $y^1, y^2$ .

Observar que como son congruencias nulas, para calcular la expansión, cizalla y la vorticidad no es necesario usar al operador  $\hat{\cdot}$ , porque definimos a las congruencias linealmente independientes entre sí, tal como en 1.3.3. El término de vorticidad correspondiente a la congruencia de velocidades  $k$  es cero sobre la hipersuperficie  $\mathcal{R}$ , por ser ortogonal a ella.

**Proposición 2.1.5.** En  $p$ , se cumple que  $\nabla_b k_a = 0$ .

*Demostración.* Sea  $v^a \in T_p M$ . Podemos descomponer al vector como una suma  $v^a = w^a + n^a$ , donde  $w^a \in T_p N$ , la hipersuperficie espacial que contiene a  $\Sigma$ , y  $n^a \in T_p \gamma_p$ , pues  $T_p N \oplus T_p \gamma_p = T_p M$ .

Entonces

$$v^a \nabla_a k_b = (w^a + n^a) \nabla_a k_b = w^a \nabla_a k_b + n^a \nabla_a k_b$$

El primer sumando es 0, pues sobre  $N$  transportamos al vector  $k_0$  sobre las geodésicas espaciales. El segundo sumando también es 0, por ser  $\gamma_p$  una geodésica.

Por tanto, en  $p$ ,  $\nabla_a k_b = 0$ .

Recordando la definición 1.3.34,  $\theta(0) = \sigma(0) = 0$ . □

Por lo tanto, hemos demostrado que  $(\Sigma, \gamma)$  es un par admisible que cumple  $\dot{\gamma}_p(0) = k_0$ . □

*Observación 2.1.6.* La métrica en  $p$  tiene la forma:

$$g_{\mu\nu}(p) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Además, tenemos que  $\forall q \in \Sigma$ :

$$g_{\mu\nu}(q) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

es decir, aún tenemos bastante información de la métrica sobre la superficie, con \* indicando los términos que no conocemos a priori. Los términos correspondientes a  $g_{33}, g_{44}$  y  $g_{34}$  se pueden deducir de la ecuación 1.7 y de la definición de  $\phi$ .

*Observación 2.1.7.* Como para todo vector nulo existe un par admisible con las hipótesis de la proposición 2.1.3, a partir de ahora, cuando hagamos referencia a los pares admisible, nos estaremos refiriendo a los construidos en la demostración anterior. Además, a menos que se indique lo contrario, asumiremos que las coordenadas que utilizamos son las de la demostración anterior.

## 2.2. 1-formas de calor y entropía

En esta sección definiremos las 1-formas de calor y entropía, que serán los objetos centrales del capítulo siguiente.

**Definición 2.2.1.** Sobre la variedad  $M$  consideraremos dado un  $(0,2)$ -tensor no nulo, que notaremos  $T_{ab}$ , y que cumple las siguientes propiedades:

- $T_{(ab)} = T_{ab}$ , i.e., es simétrico.
- $\nabla^a T_{ab} = 0$ , i.e.,  $T$  es de divergencia nula.

*Observación 2.2.2.* La familia de los  $(0,2)$ -tensores que satisfacen la proposición anterior es no vacía, pues en particular la métrica cumple ambas hipótesis.

**Definición 2.2.3.** Sean  $p \in M$  un punto y  $(\Sigma, \gamma)$  un par admisible en  $p$ .  $\Psi$  es el flujo de la congruencia  $\{\gamma\}$ , y notamos  $\Sigma_\lambda = \Psi(\Sigma, \lambda)$ . La densidad de área  $\rho$  será la función  $\rho : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}$  que a cada  $\lambda$  le asocia la densidad de área de la superficie  $\Sigma_\lambda$ .

**Definición 2.2.4.** Sea  $T_{ab}$  un  $(0,2)$ -tensor como en la definición anterior,  $p \in M$  un punto y  $(\Sigma, \gamma)$  un par admisible en  $p$ . Sea  $\gamma_p$  la geodésica de  $\{\gamma\}$  que contiene a  $p$ , parametrizada con parámetro afín  $\lambda$ , y sea  $k^a$  el campo de velocidades de la congruencia  $\{\gamma\}$ . Definimos la 1-forma diferencial de **calor**  $dq \in \Omega^1(\gamma_p)$  como:

$$dq := \left( -\lambda T_{ab} k^a k^b \rho \right) d\lambda$$

donde  $d\lambda \in \Omega^1(\gamma_p)$  es el dual de  $k$  en  $T_p\gamma_p$  (i.e.,  $d\lambda(k) = 1$ ).

**Definición 2.2.5.** En las mismas hipótesis que la definición anterior, la 1-forma de **entropía**  $ds \in \Omega^1(\gamma_p)$  es:

$$ds := \eta \theta \rho d\lambda$$

donde  $\theta$  es la expansión de la congruencia  $\{\gamma\}$  y  $\eta \in \mathbb{R}^+$  es una constante.

*Observación 2.2.6.* Podemos definir la **función** entropía como

$$s := \eta \rho$$

que es una función  $C^\infty(\gamma_p)$ . La 1-forma de entropía, entonces, es la derivada exterior de la función entropía. La definición de  $s$  está motivada por la proporcionalidad entre entropía y área, como veremos luego. Sin embargo, la formulación en términos de la derivada de  $s$  es más adecuada para el siguiente capítulo.

# Ecuación de gravitación de Einstein

En este capítulo derivaremos la ecuación de campo gravitatorio de Einstein, a menos de una constante multiplicativa indeterminada  $\eta$ . Primero, estableceremos la condición para que se cumpla la primera ley de la termodinámica sobre la variedad, en términos de  $dq$  y  $ds$ .

**Definición 3.0.1.** Sea  $M$  una 4-variedad lorentziana,  $T_{ab}$  un tensor simétrico de divergencia nula. Diremos que se cumple la **primera ley de la termodinámica respecto a  $T_{ab}$** , si para todo punto  $p \in M$  y para todo par admisible  $(\Sigma, \gamma)$  en  $p$ , la resta  $dq(\lambda) - \frac{1}{2\pi} ds(\lambda) = -f(\lambda)d\lambda$  cumple que  $\frac{df}{d\lambda}(0) = 0$ .

*Observación 3.0.2.* La función  $f$  de la definición anterior cumple  $f(0) = 0$ .

Ahora estamos en condiciones de enunciar y demostrar el resultado de Jacobson.

**Teorema 3.0.3.** Sea  $M$  una 4-variedad lorentziana conexa, y  $T_{ab}$  un  $(0,2)$ -tensor simétrico y de divergencia nula. Se cumple la primera ley de la termodinámica respecto a  $T_{ab}$  si y sólo si la métrica  $g_{ab}$  de  $M$  cumple la ecuación

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = \frac{2\pi}{\eta} T_{ab} \quad (3.1)$$

para alguna constante  $\Lambda \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Primero, probaremos el directo.

Para empezar, fijemos un punto  $p \in M$  y  $k_0 \in T_p M$ . Sea  $(\Sigma, \gamma)$  un par admisible en  $p$  tal que  $\dot{\gamma}_p(0) = k_0$ .

Tenemos

$$dq(\lambda) - \frac{1}{2\pi} ds(\lambda) = -\left(\lambda T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \rho + \frac{\eta}{2\pi} \theta \rho\right) d\lambda$$

donde los índices  $\mu$  y  $\nu$  son índices del sistema de coordenadas de la demostración 2.1.3, asociado al par admisible  $(\Sigma, \gamma)$ .

Por hipótesis, la función entre paréntesis de la expresión anterior tiene derivada nula en  $\lambda = 0$ . Calculemos la derivada:

$$T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \rho + \lambda \frac{d}{d\lambda} (T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \rho) + \frac{\eta}{2\pi} \frac{d\theta}{d\lambda} \rho + \frac{\eta}{2\pi} \theta \frac{d\rho}{d\lambda}$$

A continuación, usamos la ecuación de Raychaudhuri 1.20 y la ecuación 1.18 para sustituir  $\frac{d\theta}{d\lambda}$  y  $\frac{d\rho}{d\lambda}$  respectivamente:

$$T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \rho + \lambda \frac{d}{d\lambda} (T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \rho) - \frac{\eta}{2\pi} \left( R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu + \frac{\theta^2}{2} + \sigma^2 \right) \rho + \frac{\eta}{2\pi} \theta^2 \rho \quad (3.2)$$

Evaluamos en  $\lambda = 0$ :

$$\frac{2\pi}{\eta} T_{\mu\nu} k_0^\mu k_0^\nu - R_{\mu\nu} k_0^\mu k_0^\nu = 0$$

donde usamos que  $\rho(0) > 0$ , pues la densidad de área es positiva, y  $\theta(0) = \sigma^2(0) = 0$ , estas igualdades se cumplen por estar trabajando con un par admisible.

Así que en  $p$  se tiene que  $\left(\frac{2\pi}{\eta} T_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}\right) k_0^\mu k_0^\nu = 0$ .

En la proposición 2.1.3 demostramos que para todo vector nulo existe un par admisible. Por tanto, por hipótesis, tenemos que en  $p$  para todo vector nulo  $k_0^\mu$  se cumple  $\left(\frac{2\pi}{\eta} T_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}\right) k_0^\mu k_0^\nu = 0$ .

Entonces  $g_{\mu\nu}$  y  $\left(\frac{2\pi}{\eta} T_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}\right)$  son formas bilineales simétricas no nulas que tienen el mismo cono de vectores nulos (por hipótesis,  $T_{\mu\nu}$  es simétrico, y de las simetrías del tensor de Riemann se deduce que  $R_{\mu\nu}$  es simétrico, así que una combinación lineal de ambos es simétrica).

Esto implica que en  $p$ , la métrica  $g_{\mu\nu}$  y el  $(0,2)$  tensor  $\left(\frac{2\pi}{\eta} T_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}\right)$  son proporcionales:

$$\left(\frac{2\pi}{\eta} T_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}\right) = m g_{\mu\nu}$$

donde la constante de proporcionalidad  $m$  es un número real (puede ser cero). Realizando el procedimiento que hicimos para  $p$  en todo punto de la variedad, resulta que la métrica  $g_{ab}$  y el  $(0,2)$  tensor  $\left(\frac{2\pi}{\eta} T_{ab} - R_{ab}\right)$  son proporcionales en un factor multiplicativo  $m(p)$ , que depende del punto de la variedad:

$$\left(\frac{2\pi}{\eta} T_{ab} - R_{ab}\right) = m(p) g_{ab}, \forall p \in M$$

Es claro que  $m$  es suave, pues:

$$\frac{1}{4} g^{ab} \left(\frac{2\pi}{\eta} T_{ab} - R_{ab}\right) = m(p), \forall p \in M$$

Al ser suaves los tensores del miembro izquierdo,  $m$  varía suavemente. Entonces

$$\left(\frac{2\pi}{\eta} T_{ab} - R_{ab}\right) = m g_{ab}$$

con  $m \in C^\infty(M)$ .

$T_{ab}$ , por definición, cumple  $\nabla^a T_{ab} = 0$ , así que calculamos la divergencia de la ecuación anterior, usando la ecuación de la observación 1.1.45:

$$\begin{aligned} \nabla^a \left(\frac{2\pi}{\eta} T_{ab} - R_{ab}\right) &= \nabla^a m g_{ab} \\ -\nabla^a R_{ab} &= g_{ab} \nabla^a m \\ -\nabla^a \left(\frac{1}{2} R g_{ab}\right) &= g_{ab} \nabla^a m \\ -\nabla_b \left(\frac{1}{2} R\right) &= \nabla_b m \end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que  $\nabla_b \left(\frac{1}{2} R + m\right) = 0$ , así que  $\frac{1}{2} R + m = \Lambda$ , una constante.

Por tanto, se cumple

$$\frac{2\pi}{\eta} T_{ab} - R_{ab} = \left(\Lambda - \frac{1}{2} R\right) g_{ab}$$

es decir

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = \frac{2\pi}{\eta} T_{ab}$$

completando la demostración del directo.

Veamos ahora el recíproco.

Fijemos un punto  $p$  y tomemos un par admisible  $(\Sigma, \gamma)$ , junto con una parametrización. Sea  $f \in C^\infty(M)$  tal que  $dq - \frac{1}{2\pi} ds = -f d\lambda$ . Queremos demostrar que la derivada respecto a  $\lambda$  de la función  $f$  es cero en  $p$ .

$$dq(\lambda) - \frac{1}{2\pi} ds(\lambda) = -\left(\lambda T_{ab} k^a k^b + \frac{\eta}{2\pi} \theta\right) \rho d\lambda$$

Derivando la función anterior, volvemos a la ecuación 3.2; evaluando en  $\lambda = 0$ , volvemos a obtener

$$T_{ab} k_0^a k_0^b - \frac{\eta}{2\pi} R_{ab} k_0^a k_0^b \tag{3.3}$$

pues recordar que para las superficies admisibles teníamos que la expansión y la cizalla eran cero en el punto  $p$ .

Ahora bien, la hipótesis es que sobre la variedad se cumple la ecuación de Einstein

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = \frac{2\pi}{\eta} T_{ab}$$

Al sustituir  $T_{ab}$  por el miembro izquierdo de la ecuación anterior en la ecuación 3.3 obtenemos:

$$\eta \left( -\frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} \right) k_0^a k_0^b$$

y esto último es cero. Por tanto,  $\frac{df}{d\lambda}(0) = 0$ .

Como  $p$  es arbitrario y existen pares admisibles en  $p$  asociados a cada vector nulo futuro en  $T_p M$  (proposición 2.1.3), queda demostrado el recíproco.  $\square$

# Gravitación termodinámica

En este capítulo realizamos la conexión entre lo expuesto en el artículo [15] por Jacobson y lo que hemos hecho en los capítulos 2 y 3.

El objetivo es dar una motivación para las definiciones de las 1-formas  $dq$  y  $ds$ , basándonos en lo investigado en agujeros negros y en lo escrito por Jacobson. También, una vez motivadas las definiciones anteriores, estudiaremos la versión que vimos de la primera ley de la termodinámica sobre la variedad.

La construcción de los diferenciales de calor y entropía están fundadas en la investigación en agujeros negros, en donde un campo de Killing representa las simetrías del horizonte de eventos. El campo de Killing permite definir magnitudes integrales sobre el horizonte y luego se estudia cómo se comportan estas magnitudes al perturbar el sistema (ver, por ejemplo, [35]).

La presencia de un campo de Killing, de dirección temporal, es importante para que la métrica sea localmente estacionaria, permitiéndonos tratar a la materia, de forma aproximada, con la termodinámica clásica.

En nuestro caso, la variedad  $M$  no tienen ninguna simetría particular, por lo que no existe un campo de Killing global sobre el que podamos trabajar. Necesitamos entonces un campo auxiliar, que llamaremos **campo de Killing aproximado**, que cumplirá en  $p$ , hasta segundo orden, la ecuación de un campo de Killing.

## 4.1. Campos de Killing aproximados

Fijemos  $p \in M$ ,  $k_0 \in T_p M$  un vector nulo, y sea  $(\Sigma, \gamma)$  un par admisible tal que  $\dot{\gamma}_p(0) = k_0$ . Sea  $k$  el campo de velocidades de la congruencia  $\{\gamma\}$ . A menos que se indique lo contrario, utilizaremos la carta local definida en la demostración de 2.1.3 a lo largo del capítulo. Sea  $B = B(r, 0) \subset T_p M$  el entorno alrededor de cero donde está definida la parametrización  $\phi$ .

El plano tangente  $T_p M$  con la métrica  $g_{ab}(p)$  en  $p$  resulta ser un espacio de Minkowski, con ejes ortogonales en las direcciones  $\partial y_1, \partial y_2, k(p) + l(p)$  y  $k(p) - l(p)$ .

**Definición 4.1.1.** Dado un vector nulo  $k \in \mathbb{R}_1^4$ , y un plano espacial  $V \subset \{k\}^\perp$  que no contenga a  $k$ , a cualquier vector  $w \in \{k\}^\perp$  lo podemos descomponer como una suma  $w = v + \lambda k$ , donde  $v \in V$ . A la función que asocia a cada  $w$  el correspondiente  $\lambda$  la notaremos  $\lambda : \{k\}^\perp \rightarrow \mathbb{R}$  (es un abuso de notación, pero será claro a partir del contexto en que se usa).

Llamaremos a esta función **parámetro del horizonte respecto de  $k$  y  $V$** .

**Proposición 4.1.2.** Sea  $M = \mathbb{R}_1^4$ , el espacio-tiempo de Minkowski. Sea  $k$  un vector nulo futuro y  $V \subset \{k\}^\perp$  un subespacio espacial de dimensión 2. Entonces existe un único campo de Killing  $\chi^\mu$  tal que en el horizonte generado por  $k$  sobre  $V$ ,  $\chi^\mu(x) = -\lambda(x)k$ , siendo  $\lambda$  el parámetro del horizonte respecto de  $k$  y  $V$ .

*Demostración.* Por la observación 1.2.11, tenemos que  $\chi^\mu$  es de Killing si  $\chi_\mu(x) = a_\mu + L_{\mu\nu}x^\nu$ , donde  $L$  es antisimétrico.

En 0,  $\chi_\mu = 0$ , entonces  $a_\mu = 0$ .

Sobre los puntos de  $V$ ,  $\chi_\mu(x) = L_{\mu\nu}x^\nu = 0$ . Sea  $e_1, e_2$  una base de vectores en  $V$ . Entonces  $L_{\mu\nu}e_i^\nu = 0$ . Esto implica que  $L_{\mu\nu}$  es proporcional al bivector tangente a  $V$  contraído con la forma de volumen,  $e_1^{[\mu} e_2^{\nu]} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ :

$$L_{\mu\nu} = \kappa e_1^{[\rho} e_2^{\sigma]} \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu}$$

Tomemos un punto  $v \in \{k_0\}^\perp$ . Entonces será de la forma  $v = n + \lambda(v)k$ , con  $n \in V$ :

$$\chi_\mu(v) = \lambda(v)L_{\mu\nu}k^\nu$$

Contrayendo con  $k^\mu$  nos da cero, pues  $L$  es antisimétrico. Así que  $\chi_\mu$  se anula sobre  $\{k\}^\perp$ , lo cual implica que es proporcional a  $k_\mu$ .

La prueba termina fijando  $\kappa$  de forma tal que  $L_{\mu\nu}k^\nu = -k_\mu$ .  $\square$

El campo de Killing de la proposición anterior asociado a la 2-superficie  $\phi^{-1}(\Sigma) \subset T_p M$  lo notaremos  $\chi^\mu$ .

Sobre  $B$ , definimos una función chichón  $\beta: B \rightarrow [0, 1]$ , de manera que existen  $r_1 < r_2 < r$  tales que  $\beta|_{B(r_1, 0)} = 1$ , y  $\beta|_{B(r, 0) \setminus B(r_2, 0)} = 0$ .

Al campo de Killing  $\chi$  lo llevamos del plano tangente a la variedad mediante el pushforward de la parametrización  $\phi$  de la demostración 2.1.3:

$$\xi(q) := \begin{cases} \phi_*(\beta\chi)(q), & \text{si } q \in \phi(B) \\ 0, & \text{si } q \notin \phi(B) \end{cases} \quad (4.1)$$

De esta manera nos queda bien definido el campo  $\xi \in \mathcal{X}(M)$ .

**Definición 4.1.3.** El campo  $\xi$  anterior es el **campo de Killing aproximado** en un entorno  $\phi(B)$  de  $p$ .

*Observación 4.1.4.* Se puede verificar que hasta segundo orden, en la expansión de Taylor de las coordenadas del campo de Killing aproximado, se satisface la ecuación  $\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} = 0$ .

## 4.2. Métrica de Rindler

Consideremos la métrica:

$$g_{\mu\nu}(t, x) = \begin{pmatrix} -x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ ; a esta variedad pseudo-Riemanniana la llamaremos **espacio de Rindler**.

El tensor de curvatura es 0, indicándonos que las coordenadas anteriores describen un espacio-tiempo plano. Sin embargo, cuando  $x \rightarrow 0$ , la métrica parece tener una singularidad: su determinante se hace 0.

Se demuestra (ver [34]) que el espacio de Rindler y la región del espacio de Minkowski  $(T, X) \in \mathbb{R}_1^2$  determinada por la desigualdad  $X > |T|$ , están relacionados mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{X^2 - T^2} \\ t &= \tanh^{-1}(T/X) \\ X &= x \cosh(t) \\ T &= x \sinh(t) \end{aligned}$$

En la figura 4.1 vemos las curvas de  $t$  y  $x$  constantes.

En particular, las curvas de  $x$  constante se corresponden en el espacio de Minkowski con las curvas que describen observadores acelerados, con aceleración constante  $\frac{1}{x}$ .

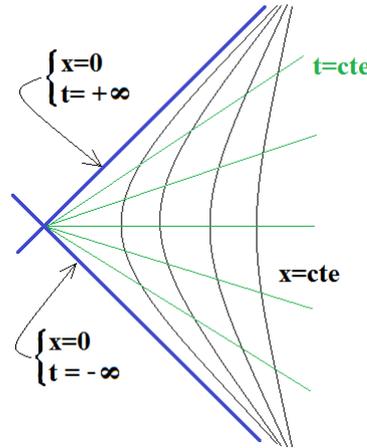


Figura 4.1: en esta figura vemos el cono de luz del espacio de Minkowski  $\mathbb{R}_1^2$  y dentro de la región  $X > |T|$  vemos las coordenadas de Rindler.

*Observación 4.2.1.* Las coordenadas de Rindler son muy importantes para el estudio de la gravitación termodinámica:

Primero, las simetrías de traslación temporal, en las coordenadas de Rindler, se corresponden con simetrías de boosts en el espacio de Minkowski. Esto es importante en el análisis termodinámico que se hace sobre los observadores acelerados, pues una simetría implica que las coordenadas de la métrica no cambian según el observador. Es decir, tenemos una noción de estaticidad.

Por otro lado, en los resultados de Hawking [13] y Unruh [31], trabajar con coordenadas de Rindler permite estudiar de manera muy parecida los campos cuánticos sobre el horizonte de un agujero negro y sobre el observador acelerado.

**Definición 4.2.2.** Dado un vector nulo  $k \in \mathbb{R}_1^4$  y un plano espacial  $V \subset \{k\}^\perp$  que no contenga a  $k$ , llamaremos **horizonte de Rindler** de  $k$  y  $V$  al conjunto

$$\{v \in \{k\}^\perp : \lambda(v) \leq 0\}$$

donde  $\lambda$  es el parámetro del horizonte respecto de  $k$  y  $V$

**Definición 4.2.3.** El **horizonte local de Rindler** será

$$\mathcal{H} := \Phi(\Sigma, [-\epsilon, 0])$$

donde, al igual que antes,  $\Phi$  es el flujo de las geodésicas de  $\{\gamma\}$  del par admisible en  $p(\Sigma, \gamma)$ .

*Observación 4.2.4.*

$$\mathcal{H} \subset \phi(\{v \in \{k\}^\perp : \lambda(v) \leq 0\} \cap B)$$

**Definición 4.2.5.** A partir de ahora, consideraremos el campo de Killing  $\chi^a \in \mathcal{X}(T_p M)$  que surge de considerar la proposición 4.1.2 aplicada al vector nulo  $k_0$  y al espacio  $V$  que contiene a  $\phi^{-1}(\Sigma)$ . Diremos que  $\chi^a$  **genera** al horizonte de Rindler de  $k_0$  y  $V$ .  $\xi^a$  será el campo de Killing aproximado (construido a partir de  $\chi^a$ ) sobre la variedad.

**Definición 4.2.6.** El **tiempo de Rindler** es la coordenada temporal del espacio de Rindler. Dado un observador uniformemente acelerado en el espacio de Minkowski, el tiempo de Rindler asociado a él es el correspondiente al espacio de Rindler que tiene como horizonte al del observador.

### 4.3. Superficies de aceleración

Los observadores acelerados cerca de  $p$  los podemos describir utilizando la carta local  $\phi$  y las curvas integrales de los campos de Killing sobre  $T_p M$ .

**Definición 4.3.1.** Sobre  $T_p M$  definimos las hipersuperficies  $S_\alpha$  como

$$S_\alpha := \{v \in T_p M : \chi^\mu(v)\chi_\mu(v) = \alpha^2\}$$

En otras palabras, son aquellas superficies que están a distancia  $\alpha$  de  $N$ .

Estas superficies contienen la línea de mundo de un observador, en un espacio-tiempo plano, experimentando una aceleración constante  $\frac{1}{\alpha}$  (esto último lo veremos en la sección siguiente).

**Proposición 4.3.2.** Los conjuntos  $\{v \in \{k_0\}^\perp : \lambda(v) < 0\}$  y  $S_\alpha$  son difeomorfos para cada  $\alpha$ , mediante el mapa que asocia a cada  $v \in S_\alpha$  un vector en  $\{v \in \{k_0\}^\perp : \lambda(v) \leq 0\}$ , dado por rayos lumínicos paralelos que atraviesen ambas superficies. ([26]; [30])

*Demostración.* El difeomorfismo es el que se observa en la figura 4.2. Para ver un esbozo de la demostración, ver [30].  $\square$

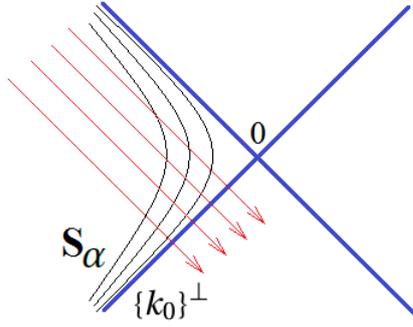


Figura 4.2: las curvas lumínicas hacia el pasado son las que determinan el difeomorfismo.

La propiedad importante que cumplen las superficies de aceleración, que no es difícil de probar, es que, en el límite  $\alpha \rightarrow 0$ , las superficies de aceleración tienden al horizonte de Rindler. Bajo la luz de la proposición 4.3.2, en el límite  $\alpha \rightarrow 0$  tenemos  $S_\alpha \rightarrow \{v \in \{k_0\}^\perp : \lambda(v) < 0\}$ .

De manera más precisa, tomando una superficie  $S_\alpha$ , y una recta lumínica paralela a  $l(p)$ , cuando  $\alpha \rightarrow 0$  tenemos que el punto de intersección de la superficie con el rayo lumínico tiende a la intersección del rayo con el horizonte de Rindler.

En cada una de las superficies  $S_\alpha$  hay una curva,  $C_\alpha$ , que en el límite  $\alpha \rightarrow 0$  tiende a  $\{tk_0 : t < 0\}$ . Esta curva la podemos construir tomando rectas lumínicas paralelas a  $l(p)$ , que contengan al conjunto  $\{tk_0 : t < 0\}$  y consideramos su intersección con la superficie  $S_\alpha$ .

Sobre la variedad, definimos  $\mathcal{S}_\alpha := \phi(S_\alpha)$  y  $\mathcal{C}_\alpha = \phi(C_\alpha)$ . Estas superficies cumplen que, cuando  $\alpha \rightarrow 0$ , las curvas  $\mathcal{C}_\alpha \rightarrow \gamma_p(\lambda < 0)$  (por continuidad de la parametrización).

Sobre cada hipersuperficie  $\mathcal{S}_\alpha$  consideramos la parametrización por las dos coordenadas espaciales  $y^1, y^2$  y por  $\lambda$ , de forma que la parametrización por  $\lambda$  se corresponde con el difeomorfismo 4.3.2.

Entonces, tenemos sobre  $\mathcal{S}_\alpha$  superficies bidimensionales espaciales, que llamaremos  $\mathcal{S}_{\alpha,\lambda}$ , que en el límite  $\alpha \rightarrow 0$  tienden a  $\Sigma_\lambda$ .

En la figura 4.3 vemos un esquema de una superficie de aceleración en el plano tangente.

## 4.4. Termodinámica de los horizontes

Los horizontes locales de Rindler, es decir,  $\mathcal{H} = \Psi(\Sigma, [-\epsilon, 0])$ , manteniendo la notación del capítulo 2, son los sistemas sobre los que trabajamos. La motivación de las definiciones de  $dq$  y  $ds$  la veremos a continuación.

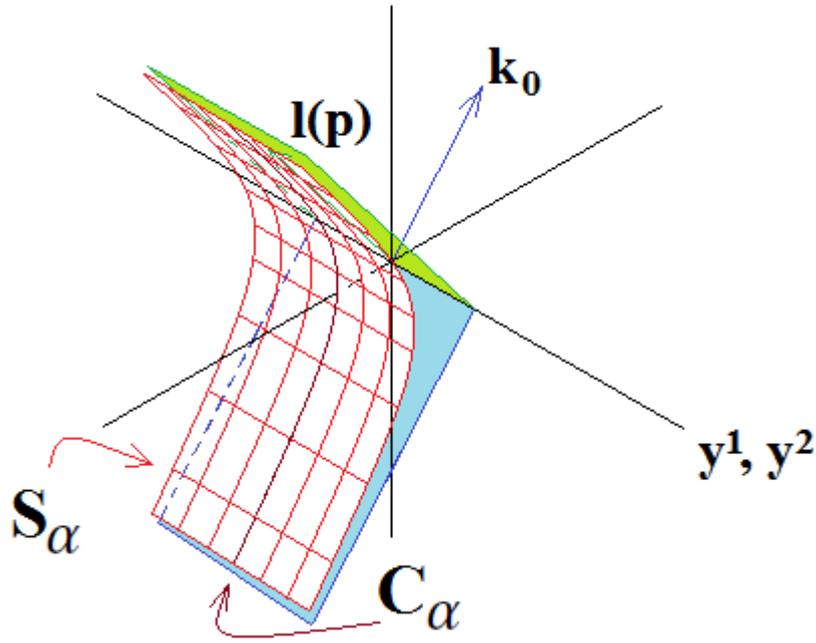


Figura 4.3: en esta figura se observa una superficie de aceleración,  $S_\alpha$ , y la curva  $C_\alpha$  sobre ella. Debajo de la superficie, se aprecia el horizonte de Rindler sobre el plano tangente,  $\phi^{-1}(\mathcal{H})$ .

#### 4.4.1. Temperatura

Veamos primero cómo asociarle una temperatura a una porción del espacio-tiempo. Comencemos explicando el efecto Unruh.

Este efecto consiste en que un observador acelerado en el vacío estándar de un campo cuántico en el espacio de Minkowski, con aceleración propia  $a$ , está en un baño térmico de temperatura

$$T_a = \frac{\hbar a}{2\pi c k_B} \quad (4.2)$$

En unidades del sistema geométrico, tenemos  $T = \frac{a}{2\pi}$ .

De manera más específica, un observador acelerado en el vacío estándar de un campo cuántico en el espacio de Minkowski, con un detector de partículas, detecta radiación de cuerpo negro correspondiente a la temperatura dada por 4.2.

*Observación 4.4.1.* ■ La aceleración  $a$  a la que hacemos referencia es la derivada de la velocidad en tiempo propio del observador. Es decir,  $\frac{du}{d\tau}$ .

- La temperatura de Unruh está definida para observadores uniformemente acelerados, pero no para observadores arbitrarios. En particular, *a priori* no tiene sentido definir la temperatura del horizonte local de Rindler, en el mismo sentido que la temperatura de Unruh. Sin embargo, ya vimos que podemos aproximar el horizonte local de Rindler por trayectorias de observadores acelerados tanto como queramos.
- Sea  $\chi^\mu$  el campo de Killing que genera el horizonte de Rindler (a menos que se diga lo contrario, supondremos que es el de  $k_0$  y  $V$ ). La cantidad  $\alpha := \sqrt{-\chi^\mu \chi_\mu}$ , se suele usar en lugar de la aceleración. Demostraremos a continuación que  $\alpha = \frac{1}{a}$ . Respecto a este parámetro, en unidades geométricas, la temperatura de Unruh es

$$T_\alpha := \frac{1}{2\pi\alpha}$$

**Proposición 4.4.2.**

$$\sqrt{-\chi^a \chi_a} = \frac{1}{a}$$

donde  $a$  es el módulo de la aceleración,  $\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$ , del observador acelerado.

*Demostración.* En el espacio de Minkowski, la trayectoria de un observador que experimenta una aceleración constante está dada por

$$x(\tau) = \left( \frac{1}{a} \sinh(a\tau), \frac{1}{a} \cosh(a\tau), y_0, z_0 \right)$$

donde  $\tau$  es el tiempo propio, y estamos suponiendo, sin pérdida de generalidad, que la aceleración está en la dirección  $x$ . La primera coordenada la podemos pensar como la coordenada de tiempo  $t$  de un observador inercial y la segunda coordenada como la coordenada  $x$  medida por ese observador.

El campo de Killing que genera estas órbitas es  $\partial_t x + \partial_x t$  o algún múltiplo de éste. Si fijamos que en  $(1, 1, 0, 0)$  valga  $\partial_t + \partial_x = (1, 1, 0, 0)$ , entonces la constante multiplicativa es 1.

La velocidad es:

$$u(\tau) = \frac{dx}{d\tau} = (\cosh(a\tau), \sinh(a\tau), 0, 0)$$

y la aceleración es

$$a(\tau) = \frac{d^2 x}{d\tau^2} = (a \sinh(a\tau), a \cosh(a\tau), 0, 0)$$

verificamos así que la aceleración es  $a$ .

El campo de Killing en  $x(\tau)$  es el vector

$$\left( \frac{1}{a} \cosh(a\tau), \frac{1}{a} \sinh(a\tau), 0, 0 \right)$$

(observar que es un vector temporal).

O sea, el módulo del campo de Killing en  $x(\tau)$  es  $\frac{1}{a}$ , como queríamos demostrar.  $\square$

En unidades del tiempo de Rindler, la temperatura de Unruh es adimensional, de valor ([31])

$$\frac{1}{2\pi}$$

*Observación 4.4.3.* El postulado que realiza Jacobson es que en un espacio-tiempo curvo la temperatura que observa un detector acelerado es, aproximadamente, la del efecto Unruh. Esta aproximación se justifica cuando la aceleración es muy grande, momento en que la radiación, debido al efecto Unruh, sería dominante sobre los efectos de la curvatura espacio-temporal.

#### 4.4.2. Entropía

Un horizonte causal es una frontera entre dos zonas del espacio-tiempo, una accesible y otra no, dependiendo esto último del observador que se elija.

La justificación que hace Jacobson de que la entropía del horizonte local de Rindler es proporcional al área, está basada en que el horizonte separa el espacio-tiempo en dos componentes respecto a un determinado observador. Si bien se observa que un agujero negro es un objeto termodinámico (ver [3], [4] y [2]), donde el área del horizonte de eventos se comporta como la entropía, lo que importa, como menciona Jacobson, es la propiedad que el horizonte sea causal, y no que en particular sea el horizonte de eventos de un agujero negro. La entropía de entrelazamiento cuántico, debida a la creación de pares partícula-antipartícula en el horizonte, es divergente si las longitudes de onda son arbitrariamente chicas. Pero si hay una estructura microscópica subyacente que desconocemos, es natural pensar en una longitud mínima,  $l_c$ , a partir de la cual la distribución de longitudes de onda se hace cero. Considerando esto último, la entropía de entrelazamiento no diverge y es proporcional al área en unidades de  $l_c^2$  (si el radio de curvatura del espacio-tiempo es muy grande comparado con  $l_c$ ).

De esta manera, tiene sentido asociarle entropía a un horizonte de Rindler.

La fórmula de entropía para agujeros negros es ([2],[3])

$$S = \frac{k_b c^3}{4G\hbar} A$$

Por tanto, a menos de una constante, que llamaremos  $\eta$ , tenemos que  $S \propto A$ , donde  $A$  es el área del horizonte.

Dada una sección pequeña del horizonte, por ejemplo una superficie admisible de un par admisible asociado a un punto del horizonte, podemos asociarle una función entropía que sea

$$S(t) = \eta \int_{\Psi(\Sigma, t)} a$$

para  $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ , donde  $\Psi$  es el flujo de las geodésicas del par admisible. Esta entropía es proporcional al área. Calculemos la derivada exterior como una 0-forma en  $\gamma_p$  (usando el teorema 1.1.19):

$$\begin{aligned} dS(t) &= \eta \left( \frac{d}{dt} \int_{\Psi(\Sigma, t)} a \right) k^* \\ &= \eta \left( \int_{\Psi(\Sigma, t)} \dot{a} + \int_{\Psi(\Sigma, t)} i_k da + \int_{\partial\Psi(\Sigma, t)} i_k a \right) k^* \end{aligned}$$

Analicemos cada sumando, utilizando las coordenadas de 2.1.3:

- $\int_{\Psi(\Sigma, t)} \dot{a}$  es el cambio de la 2-forma de área en el tiempo, sin variar el punto. Esto es cero, pues la métrica de la variedad es fija, y, por tanto, la 2-forma de área permanece constante en cada punto.

▪

$$\begin{aligned} \int_{\Psi(\Sigma, t)} i_k da &= \int_{\phi^{-1}(\Psi(\Sigma, t))} \phi^* (i_k da) \\ &= \int_{\phi^{-1}(\Psi(\Sigma, t))} (d(\phi^*(\rho) dy_1 \wedge dy_2))_{\mu\nu\sigma} k^\mu \\ &= \int_{\phi^{-1}(\Psi(\Sigma, t))} \left( \phi^* \left( \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} \right) d\lambda \wedge dy^1 \wedge dy^2 + \phi^* \left( \frac{\partial \rho}{\partial \lambda_-} \right) d\lambda_- \wedge dy^1 \wedge dy^2 \right)_{\mu\nu\sigma} k^\mu \\ &= \int_{\phi^{-1}(\Psi(\Sigma, t))} \phi^* \left( \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} \right) dy^1 \wedge dy^2 \end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos que  $d\lambda(k) = 1, d\lambda_-(k) = dy^1(k) = dy^2(k) = 0$ .

▪

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Psi(\Sigma, t)} i_k a &= \int_{\phi^{-1}(\partial\Psi(\Sigma, t))} \phi^* (i_k a) \\ &= \int_{\phi^{-1}(\Psi(\Sigma, t))} (\phi^*(\rho) dy^1 \wedge dy^2)^{\mu\nu} k^\mu = 0 \end{aligned}$$

por la misma razón que en el ítem anterior.

Por tanto,

$$\begin{aligned} dS(t) &= \eta \left( \int_{\Psi(\Sigma, t)} i_k da \right) k^* \\ &= \eta \left( \int_{\phi^{-1}(\Psi(\Sigma, t))} \phi^* \left( \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} \right) dy^1 \wedge dy^2 \right) k^* \\ &= \eta \left( \int_{\phi^{-1}(\Psi(\Sigma, t))} \phi^* (\theta \rho) dy^1 \wedge dy^2 \right) k^* \end{aligned}$$

En la última igualdad usamos la ecuación 1.18:  $\frac{\partial \rho}{\partial \lambda} = \theta \rho$ .  
Es decir,

$$dS(t) = \eta \left( \int_{\Psi(\Sigma, t)} \theta a \right) k^* \quad (4.3)$$

La 1-forma en  $\Omega^1(\gamma_p)$  de entropía que definimos en 2.2.5 es

$$ds(\lambda) = \eta \theta \rho k^*$$

Esta 1-forma es la densidad de  $dS$ , como se puede apreciar de la ecuación 4.3. Es decir,  $ds$  es una medida del cambio en la entropía por unidad de área y por unidad de “tiempo” de la superficie que estamos estudiando.

Incorporando el concepto de campo de Killing aproximado, podemos definir la 1-forma de entropía sobre las trayectorias de observadores localmente acelerados con aceleración constante:

$$dS_\alpha(\lambda) = \eta (\xi^a \nabla_a A) dt_R$$

donde  $A$  es el área de las superficies  $\mathcal{S}_{\alpha, \lambda}$  y  $t_R$  el tiempo de Killing, y de igual manera trabajar con la densidad de entropía sobre estas superficies. En [36], R. M. Wald propone que la entropía es una forma de carga de Noether, derivada de las simetrías locales del horizonte de los agujeros negros. La generalización de la entropía de Wald, a horizontes en teorías de la gravitación más generales que la de Einstein, ha permitido realizar el argumento de Jacobson de manera más sistemática, por ejemplo como hacen M. Parikh y S. Sarkar en [26]. Justamente, utilizar campos de Killing aproximados es una pieza clave en ese artículo.

En el caso que nosotros estudiamos, la teoría de Einstein en 4-dimensiones, la variación de entropía de Wald para una hipersuperficie  $\Sigma$  es

$$\delta S = \frac{1}{4\kappa} \int_{\Sigma} R^{db} \xi_d \epsilon_{b\dots} \quad (4.4)$$

Hay que resaltar que la variación de la entropía de Wald es, a primer orden, la misma expresión que se obtiene al integrar  $dS$  sobre la geodésica  $\gamma_p$  y sustituir por la ecuación de Raychaudhuri. Por tanto, a primer orden, ambas expresiones de entropía coinciden.

### 4.4.3. Calor

El calor es el flujo de energía entre los grados de libertad de los componentes microscópicos del sistema (tal como se lo define en mecánica estadística).

Cuando un objeto, con contenido de materia-energía  $\delta E$ , está cerca del horizonte<sup>1</sup>, éste transfiere su contenido energético hacia la zona de la variedad inaccesible al observador acelerado. Su interacción con el horizonte se ve reflejada en el campo gravitatorio que genera, y, por ende, en el comportamiento del horizonte.

Es decir, el flujo de materia-energía induce una perturbación de la estructura del horizonte. Es plausible, entonces, tomar el flujo de energía a través del horizonte como el análogo al calor en la ecuación termodinámica.

Para un observador con velocidad  $u^a$ , el flujo de materia-energía hacia el futuro a través de una superficie de normal  $n^a$  es  $-T_{ab} u^a n^b$ , donde  $T_{ab}$  es el tensor de stress-energía. En coordenadas locales, para una superficie  $\mathcal{S}_{\alpha, \lambda}$ , tiene sentido definir la 1-forma diferencial de calor para un observador acelerado como

$$dQ_\alpha(\lambda) := \left( \int_{\phi^{-1}(\mathcal{S}_{\alpha, \lambda})} -T_{\mu\nu} u^\mu n^\nu \beta_\rho dy_1 \wedge dy_2 \right) d\tau$$

donde  $\tau$  es el tiempo propio del observador.

Esta 1-forma está en  $\Omega^1(\mathcal{C})$ , siendo  $C$  la trayectoria del observador en  $M$ .

<sup>1</sup>Al decir “cerca” nos referimos a unas pocas unidades de Planck, pues, en tiempo de Rindler, el objeto tarda infinito en caer a través del horizonte

*Observación 4.4.4.* El tensor  $T_{ab}$  es el que contiene la información de la distribución de masa-energía sobre la variedad. Es simétrico y la conservación local de masa-energía implica que  $\nabla^a T_{ab} = 0$ . Por tanto, está dentro de las hipótesis sobre el  $(0, 2)$ -tensor de las definiciones 2.2.4 y 3.0.1.

Para independizarnos de los observadores acelerados, podemos trabajar con las coordenadas locales de Rindler, usando que la simetría de traslación temporal, en estas coordenadas, es un boost generado por el campo de Killing aproximado que construimos en 4.1. La definición de la 1-forma de calor en estas coordenadas es:

$$dQ_\alpha(\lambda) = \left( \int_{\mathcal{S}_{\alpha,\lambda}} -T_{ab} \xi^a n^b \right) dt_R$$

donde  $a$  es la 2-forma de área de las superficies y  $t_R$  es el tiempo de Rindler.

## 4.5. Densidades y límite para grandes aceleraciones

En esta sección veremos que cuando la aceleración de los observadores cerca de  $p$  (es decir, los observadores con aceleración local constante) tiende a infinito, o, lo que es lo mismo, cuando  $\alpha \rightarrow 0$ , entonces las densidades de las expresiones de calor y entropía anteriores coinciden con las expresiones que definimos sobre  $\gamma_p$  en el capítulo 2. En la figura 4.4 vemos una representación en 2 dimensiones de un entorno coordenado del punto  $p$  en el plano tangente. El vector nulo  $k_0$  es el vector celeste, los vectores verdes son los del campo de Killing  $\chi^\mu$  y en rojo se observan las normales a las hipersuperficies  $S_\alpha$ .

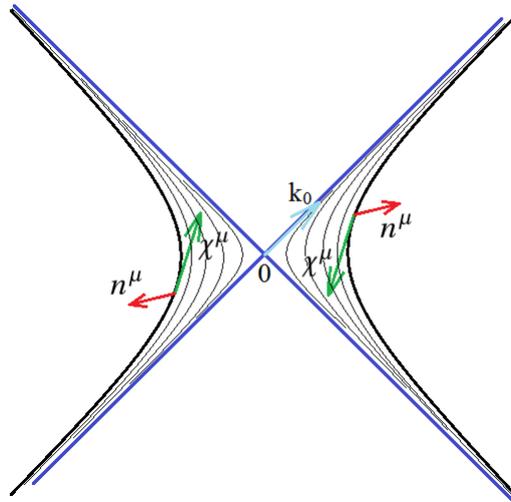


Figura 4.4: en esta figura se ve una representación en dos dimensiones del plano tangente en  $p$ , junto con algunas de las curvas integrales del campo de Killing  $\chi^\mu$  (tangente a ellas), y las normales  $n^\mu$  a las hipersuperficies  $S_\alpha$ . Como referencia mostramos a  $k_0$  sobre el horizonte nulo.

Veamos el comportamiento de  $T$  y  $dQ$  cuando  $\alpha \rightarrow 0$ , usando las definiciones que hicimos para el tiempo propio del observador:

- La temperatura  $T$  diverge.
- El término  $dQ_\alpha(\lambda)$ :

$$\begin{aligned}
 dQ_\alpha(\lambda) &:= \left( \int_{\phi^{-1}(\mathcal{S}_{\alpha,\lambda})} -T_{\mu\nu} u^\mu n^\nu \beta \rho dy_1 \wedge dy_2 \right) d\tau \\
 &= \left( \int_{\phi^{-1}(\mathcal{S}_{\alpha,\lambda})} -\frac{\lambda^2}{\alpha^2} T_{\mu\nu} \frac{\alpha}{\lambda} u^\mu \frac{\alpha}{\lambda} n^\nu \beta \rho dy_1 \wedge dy_2 \right) \frac{\alpha}{\lambda} \frac{\lambda}{\alpha} d\tau \\
 &= \frac{1}{\alpha} \left( \int_{\phi^{-1}(\mathcal{S}_{\alpha,\lambda})} -\lambda T_{\mu\nu} \frac{u^\mu}{\lambda} \frac{n^\nu}{\lambda} \beta \rho dy_1 \wedge dy_2 \right) \lambda d\tau
 \end{aligned}$$

Esta última cantidad diverge.

Sin embargo, el cociente  $\frac{dQ_\alpha}{T}(\lambda)$  converge a

$$2\pi \left( \int_{\Sigma_\lambda} -\lambda T_{bc} k^b k^c a \right) d\lambda$$

pues  $\frac{\alpha}{\lambda} u^\mu \rightarrow -k^\mu$ ,  $\frac{\alpha}{\lambda} n^\mu \rightarrow k^\mu$  y  $\frac{\lambda}{\alpha} d\tau \rightarrow -d\lambda$ .

Ahora veamos qué ocurre si realizamos el límite según la definición en las coordenadas de Rindler, y pasamos a las coordenadas de  $\phi^{-1}$ :

- La temperatura es constante:  $T = \frac{1}{2\pi}$ .
- El término  $dS_\alpha(\lambda)$ : fijando  $\lambda$  y tomando  $\alpha \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 dS_\alpha(\lambda) &= \eta(\xi^\mu \nabla_\mu A) dt_R \\
 &= \eta \left( \lambda \frac{\xi^\mu}{\lambda} \nabla_\mu A \right) \frac{1}{\lambda} \lambda dt_R \\
 &\rightarrow \eta(\lambda (-k^a) \nabla_a A) \frac{1}{\lambda} (-d\lambda) = \eta \left( \int_{\Sigma_\lambda} \theta a \right) d\lambda
 \end{aligned}$$

donde  $A$  es el área de las superficies  $\Sigma_\lambda$ , y en la última igualdad utilizamos lo que vimos en la subsección 4.4.2.

- El calor  $dQ_\alpha(\lambda)$ :

$$\begin{aligned}
 \left( \int_{\mathcal{S}_{\alpha,\lambda}} -T_{\mu\nu} \xi^\mu n^\nu a \right) dt_R &= \left( \int_{\mathcal{S}_{\alpha,\lambda}} -\alpha T_{\mu\nu} \lambda \frac{1}{\lambda} \xi^\mu \frac{\lambda}{-\alpha} \frac{1}{\lambda} n^\nu a \right) \frac{1}{\lambda} \lambda dt_R \\
 &\rightarrow \left( \int_{\phi^{-1}(\Sigma_\lambda)} -\lambda^2 T_{\mu\nu} (-k^\mu) k^\nu a \right) \frac{1}{\lambda} (-d\lambda) \\
 &= \left( \int_{\phi^{-1}(\Sigma_\lambda)} -\lambda T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu a \right) d\lambda
 \end{aligned}$$

donde el factor  $\alpha$  que aparece en la primer ecuación es debido al cambio de coordenadas de Rindler a coordenadas de Minkowski.

Las definiciones en 2.2.5 y 2.2.4 de  $ds$  y  $dq$ , son los integrandos de las 1-formas anteriores (multiplicados por  $d\lambda$ )

$$\begin{aligned}
 dq &= \left( -\lambda T_{bc} k^b k^c a \right) d\lambda \\
 ds &= \eta \theta \rho d\lambda
 \end{aligned}$$

Aclaremos que no es necesario que  $dq$  y  $ds$  sean 1-formas para la demostración del teorema 3.0.3, sólo es una manera de recordar que provienen de funciones definidas sobre curvas que, en el caso de la demostración del teorema 3.0.3, son geodésicas nulas.

Es interesante notar que  $ds$  proviene de la derivada exterior de  $s = \eta\rho$ , la densidad de área multiplicada por una constante. Esto es claro a partir de la definición de  $S$ , y de ver a  $ds$  como la densidad por unidad de área de  $dS$ .

Para  $dq$ , tenemos que

$$dq(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \int_{-c}^{\lambda} -x T_{\mu\nu} k^{\mu} k^{\nu} \rho dx$$

donde la integral está calculada sobre las geodésicas  $\gamma_p$ , para algún  $c$  fijo. Podemos interpretar que

$$q(\lambda) = \int_{-c}^{\lambda} -x T_{\mu\nu} k^{\mu} k^{\nu} \rho dx$$

es la densidad de calor.

Observar que  $s$  depende solamente de la superficie que elijamos, mientras que  $q$ , además, depende de la evolución pasada del sistema. Esto es análogo a lo que sucede en termodinámica clásica: la función “calor” depende de la historia del sistema.

## 4.6. Procesos Cuasiestáticos

Veremos ahora la noción de proceso cuasiestático que utilizamos para formular la primera ley de la termodinámica sobre una variedad lorentziana.

En termodinámica, un proceso cuasiestático es aquel que, al representarlo en el espacio de configuraciones, es una curva sobre la hipersuperficie de estados de equilibrio; más precisamente, es un conjunto denso de estados de equilibrio (ver [6]).

Esta definición no involucra consideraciones de tasas de cambios de magnitudes, ni velocidades, ni tiempo. Es por esto que se suele decir que podemos considerar cualquier proceso real como cuasiestático si se realiza suficientemente “lento”. En general, pedir que la derivada primera de la evolución de un sistema en el tiempo sea nula en un instante, es semejante a pedir que la evolución del sistema alrededor de ese instante sea lenta: a primer orden, el sistema está en equilibrio.

En nuestro caso, un sistema es una 2-superficie espacial  $\Sigma$ , y un proceso dependerá de la evolución de las 2-superficies  $\Sigma_{\lambda}$ , al variar el parámetro  $\lambda$ . Por construcción, las geodésicas no se intersectan en un entorno de  $\lambda = 0$  (ver la demostración de 2.1.3).

Para definir un proceso cuasiestático primero debemos ver cuáles son los estados en equilibrio. El sistema está en equilibrio si la expansión de la congruencia de geodésicas es cero, es decir, si los generadores del horizonte no focalizan. Esto es cierto en general solo para espacios-tiempos en los que  $R_{abc}{}^d = 0$ . Ahora bien, en una variedad en la que las entradas del tensor de curvatura no sean todas nulas, podemos hacer uso de la parametrización dada por el mapa exponencial: en un entorno suficientemente chico de un punto, podemos aproximar la variedad con un espacio de Minkowski  $\mathbb{R}_1^4$ , donde la curvatura estará incluida en la métrica alrededor  $p$  en términos de orden  $|x^{\mu}|^2$  (recordar la expresión 1.7). Esto nos permite llevar desde la variedad al plano tangente horizontales locales de Rindler, y ver cómo se comportan en un espacio plano. Como la aproximación de la métrica es válida sólo en  $p$ , podremos estudiar la estaticidad del proceso solamente cuando la congruencia pasa por  $p$ .

Al tomar 2-superficies  $\Sigma$  arbitrarias, aunque siempre dentro de un entorno normal, la aproximación mediante un espacio de Minkowski no es necesariamente buena, es decir, los efectos de la curvatura en el horizonte no son despreciables. No estamos diciendo que queremos eliminar los efectos de la curvatura en el horizonte, sino que queremos tomar una aproximación en la que la curvatura no sea el factor más importante. Al estar tratando con 2-superficies, los efectos de la curvatura en el horizonte en el punto  $p$  los podemos esquivar si tomamos el límite cuando el área tiende a cero: el área es  $o(|x^{\mu}|)$ , al igual que los términos no constantes de la métrica alrededor de  $p$ .

Por tanto, podemos caracterizar la evolución del sistema en  $p$  al tomar el límite en el que las superficies  $\Sigma$  se contraen a  $p$ . De esta manera, un proceso cuasiestático en  $p$  será aquel que, al tomar 2-superficies  $\Sigma$  cada vez más cerca de  $p$ , tienda a un proceso cuasiestático en 0 sobre  $T_p M$ , vía las coordenadas exponenciales. Es decir, la evolución del horizonte es cuasiestática en

un punto  $p$  de la variedad si, sobre  $T_p M$ , la imagen del sistema por el mapa  $\exp_p$  está instantáneamente en equilibrio en el 0, en el límite cuando  $\Sigma$  se contrae a  $p$ . La figura 4.5 es un esquema de lo que acabamos de explicar: sobre la variedad, vamos tomando horizontes generados por superficies cada vez más cerca de  $p$ , que se corresponden con hipersuperficies sobre  $T_p M$ , que a su vez representan, al acercarnos a 0, procesos que tienden a ser estacionarios en 0.

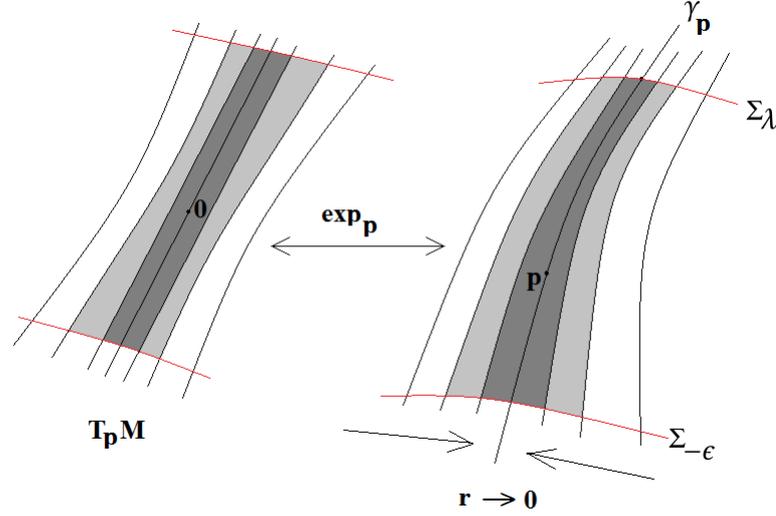


Figura 4.5: en la figura se observa el límite cuando la superficie se contrae hacia  $p$ , sobre la variedad y sobre el plano tangente en  $p$ , con las coordenadas dadas por el inverso del mapa exponencial.

Una vez fijada la superficie  $\Sigma = \phi(B^2(0, r))$ , la función entropía (con el factor de temperatura  $\frac{1}{2\pi}$  incorporado) será

$$S(r, x) = \int_{-\epsilon}^x \phi^*(dS)$$

y la energía absorbida por el horizonte (es decir, la energía que para un observador interior entra al horizonte) será

$$U(r, x) = \int_{-\epsilon}^x \phi^*(dQ)$$

donde escribimos explícitamente la dependencia de estas funciones con el radio  $r$ .  $dS$  y  $dQ$  son las 1-formas que resultan del límite que vimos en la sección anterior.

La hipótesis fundamental sobre el sistema es que la entropía solo depende de la energía absorbida, i.e.,  $S = S(U)$ , función que es desconocida. Por tanto,  $dS = \frac{\partial S}{\partial U} dU$ , que es la ecuación fundamental. De aquí se obtiene la ecuación de estado del sistema.

Durante el proceso, la versión de la primera ley que usamos es  $(\Delta U - T\Delta S) \simeq \left(\frac{d}{dx}U - \frac{d}{dx}S\right)\Delta x$  en cada punto, donde  $T = \frac{1}{2\pi}$  es constante.

Considerando lo anterior, para que el proceso sea cuasiestático en  $p$ , debe ser estacionario en 0 en  $T_p M$ , y esto se logra cuando la derivada del proceso es nula en 0. Es decir, si pedimos que  $f = \frac{d}{dx}U - T\frac{d}{dx}S$  y su derivada sean  $o(\int_{\Sigma} a)$  en  $p$ , estamos pidiendo que el proceso sea *cuasiestático* en  $p$ :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(0)}{\int_{\phi(B^2(0,r))} a} = 0$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{df}{dx}(0)}{\int_{\phi(B^2(0,r))} a} = 0$$

Recordar que nosotros trabajamos con densidades; debemos plantear la definición de proceso cuasiestático en términos de densidades. Para eso, usemos el siguiente resultado de cálculo:

**Proposición 4.6.1.** Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones continuas, con  $n$  un entero, y  $B_r \subset \mathbb{R}^n$  una bola en el origen de radio  $r$ . Supongamos que  $g(0) > 0$ . Entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{B_r} f}{\int_{B_r} g} = 0$$

si y sólo si  $f(0) = 0$ .

*Demostración.*  $\Rightarrow$  Supongamos que  $f(0) > 0$ . Por continuidad, existen  $\epsilon > 0$  y  $r > 0$  tales que

$$f(x) \geq \epsilon g(x) \forall x \in B_r$$

Así que

$$\int_{B_r} f \geq \epsilon \int_{B_r} g$$

de donde  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{B_r} f}{\int_{B_r} g} \neq 0$ . El caso  $f(0) < 0$  es análogo.

$\Leftarrow$  Sea  $\epsilon > 0$ . Por continuidad de ambas funciones, existe  $\delta > 0$  tal que, si  $x \in B_\delta$ :

$$|f(x)| < \frac{\epsilon}{2} g(0)$$

y

$$g(x) > \frac{g(0)}{2}$$

Luego,  $|f(x)| < \frac{\epsilon}{2} g(0) < \epsilon g(x)$ . Entonces

$$\left| \int_{B_\delta} f \right| \leq \int_{B_\delta} |f| < \int_{B_\delta} \epsilon g(x)$$

de donde se deduce que el límite es cero. □

La proposición anterior nos da la conexión necesaria para llevar nuestro concepto de proceso cuasiestático a las densidades que definimos sobre las geodésicas nulas: si ahora  $dq - \frac{1}{2\pi} ds = -f d\lambda$ , la condición de proceso cuasiestático es que la nueva función  $f$  cumpla  $f'(0) = 0$ .

## 4.7. Primera Ley de la Termodinámica

La relación de Clausius  $TdS = dQ$ , como ya hemos visto, es un caso especial de la primera ley de la Termodinámica, cuando las únicas variables macroscópicas del sistema son la energía y la entropía, y tenemos una de las funciones  $S(E)$  o  $E(S)$  (identificamos el flujo de calor con el flujo de energía). Estos sistemas son los más simples con los que se puede trabajar.

En [15], la idea es deducir la ecuación de Einstein asumiendo que se cumple una igualdad del tipo  $TdS = dQ$  entre dos cantidades. Respecto a esto, podríamos decir que las ecuaciones de Einstein se deducen de considerar el caso más simple de sistema termodinámico, con la mínima cantidad de variables posibles, sólo la entropía y la energía. Esto guarda semejanza con la deducción clásica de la ecuación a partir de la acción  $\int (R + \mathcal{L}_m) \epsilon \dots$ .

En la figura 4.6 vemos intuitivamente lo que significa la primera ley de la termodinámica, en el contexto que estamos trabajando: el cambio en el flujo de energía a través del horizonte, que determina la focalización de las geodésicas, es igual al cambio en el área de las superficies  $\Sigma_\lambda$ .

El tensor de stress-energía, en relatividad general, se asume simétrico y de divergencia nula (esto último debido a la conservación local de energía). Por tanto, cumple las hipótesis de la definición 3.0.1.

Esto nos permite hacer la última conexión con el resultado de Jacobson: si en el teorema 3.0.3 sustituimos el tensor  $T_{ab}$  por el tensor de estrés-energía, el enunciado nos dice que la validez de

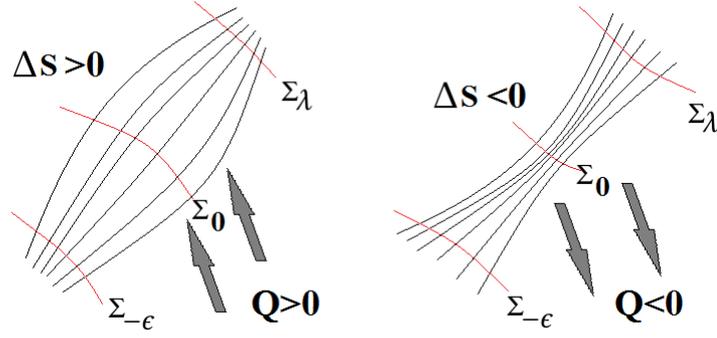


Figura 4.6: vemos el efecto que tiene el paso de energía a través del horizonte. Observar que el caso  $Q < 0$  no es permitido si asumimos la condición débil de energía, donde  $T_{ab}X^aX^b \geq 0$  para todo campo vectorial temporal  $X^a$ , y que por continuidad vale para los vectores nulos.

la versión de la primera ley de la termodinámica que adoptamos es equivalente a la ecuación de gravitación de Einstein para la métrica:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = \frac{2\pi}{\eta} T_{ab}$$

La constante cosmológica aparece como una constante de integración y no la podemos calcular a partir de otras constantes.

Por último, un comentario respecto a la constante  $\eta$ . Si tomamos como cierta en general la relación entre entropía y área para el horizonte de un agujero negro, entonces

$$\eta = \frac{1}{4}$$

de donde obtenemos la ecuación clásica de Einstein:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab} \quad (4.5)$$

## 4.8. Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado el artículo escrito por T. Jacobson, [15], con el objetivo de poder formalizar su deducción de la ecuación de Einstein clásica, a partir de la relación de Clausius  $dQ = TdS$ .

Antes de definir formalmente entropía y calor, introducimos el concepto de par admisible, que nos llevó a definir coordenadas útiles sobre las que operar en el resto del trabajo. Lo remarkable de los pares admisibles es que nos garantizan que para cada punto existen congruencias en todas las direcciones nulas, tales que su expansión en  $p$  es cero.

Dimos una definición diferencial de densidad de entropía, junto con una definición diferencial de densidad de calor, sobre la variedad. Las definiciones del capítulo 2 son sobre geodésicas nulas que contienen a  $p$ , pero en la sección 4.4, se muestra cómo esas definiciones provienen de tomar el límite para grandes aceleraciones de magnitudes definidas para observadores uniformemente acelerados cerca de  $p$ .

En el capítulo 3 damos una equivalencia entre la ecuación de gravitación clásica de Einstein y la evolución cuasiestática de ciertos horizontes nulos. Este resultado es el que propone Jacobson en su artículo, demostrado de manera rigurosa.

Como podrá comprobar el lector, si en lugar de pedir que  $dq - \frac{1}{2\pi} ds$  sea cuasiestático, pedimos que sea una identidad sobre las geodésicas nulas, entonces la deducción de la ecuación de Einstein es igual a la presentada en nuestro trabajo, tomando  $f = 0$ . Sin embargo, para demostrar el recíproco sería necesario que  $\theta$  sea cero en un entorno de  $p$ , sobre la geodésica que contiene a  $p$ , para algunas congruencias, en todas las direcciones nulas; en espacios con curvatura no nula esto, en general, no es cierto.

Para poder demostrar el recíproco es necesario un límite en  $p$ , que seleccionara el comportamiento de la expansión en ese punto. Para eso, consideramos el límite cuando la superficie admisible se contrae hacia  $p$ , y pedimos que la derivada de la función  $dq - \frac{1}{2\pi} ds$ , en cero, tienda a cero más rápido que el área de la superficie misma. Utilizando las densidades de los diferenciales de entropía y calor, simplificamos la parte operativa de la demostración, como se comenta en la sección 4.6.

La ecuación de Raychaudhuri juega un papel central en el teorema 3.0.3. Esta ecuación expresa la derivada de la expansión  $\theta$  de la congruencia nula en términos, entre otros, del tensor de Ricci. Intuitivamente, nos muestra cómo actúa la geometría en la focalización de las congruencias de geodésicas.

Es interesante notar que la constante cosmológica  $\Lambda$  se obtiene como constante de integración, dejando abierta la posibilidad de una constante cosmológica no nula. Observar que su valor no puede ser calculado en función de las cantidades con las que trabajamos.

En este trabajo las argumentaciones sobre la elección de las 1-formas  $dq$  y  $ds$  las expusimos en la sección 4.4; sin embargo, está fuera del alcance del presente trabajo hacer una exposición completa de lo relacionado con la elección de las magnitudes utilizadas. Nos basamos principalmente en [15] y en diversos artículos: [2], [17], [19], [21]-[25], [26], [34] - [37] y [39].

En el caso de la deducción en el artículo [15], la temperatura es la de Unruh para observadores acelerados, que, como ya dijimos, es un efecto cuántico en el espacio de Minkowski (generalizable a espacio-tiempos curvos, ver [35]). El hecho que haya una noción de temperatura justifica la definición de calor como un flujo de energía a través del horizonte. Para esto, lo más natural es definir un flujo a partir del vector  $\xi$  sobre la variedad. Por lo tanto, en lo que respecta a temperatura y calor, no hay ambigüedad en sus definiciones, al menos hasta sus segundas derivadas (donde aparecen las ambigüedades del campo de Killing aproximado).

La identificación de la entropía como proporcional al área, tiene origen en las investigaciones en el comportamiento de campos cuánticos cerca del horizonte de eventos de agujeros negros ([2]), pero en [15] se intenta dar una base por fuera de los resultados demostrados, a partir de las ecuaciones de gravitación, invocando la entropía de entrelazamiento cuántico entre las dos porciones que separa el horizonte local de Rindler.

Es esperable que teorías más generales de la gravitación (por ejemplo teorías con Lagrangeanos  $\sqrt{-\det(\bar{g})} f(R) + \mathcal{L}_M$ , donde  $f(R)$  es una función suave de la curvatura escalar) necesiten definiciones de entropía que generalicen las presentadas en este trabajo, e incluyan más “variables termodinámicas” en la ecuación de la primera ley de la termodinámica (ver [10] y más recientemente [39]). Esto es tema actual de investigación.

Por último, mencionamos que el hecho que la ecuación de Einstein sea equivalente a un enunciado termodinámico es una indicación más de la existencia de una estructura microscópica del espacio-tiempo.

# Bibliografía

- [1] W. BALLIK, K. LAKE, *The volume of stationary black holes and the meaning of the surface gravity*, <http://arxiv.org/pdf/1005.1116.pdf>.
- [2] J. M. BARDEEN, B. CARTER, S.W. HAWKING, *The Four Laws of Black Hole Mechanics*, Communications in Mathematical Physics, Volume 31, 1973.
- [3] J. D. BEKENSTEIN, *Black Holes and Entropy*, Physical review, Volume 7(8), 1973.
- [4] L. BOMBELLI, R. K. KOUL, J. LEE, R. D. SORKIN, *Quantum source of entropy for black holes*, Physical Review, Volume 34(2), pp. 373-383.
- [5] J. J. CALLAHAN, *The Geometry of Spacetime*, Springer-Verlag, 2000.
- [6] H. B. CALLEN, *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*, Second Edition, John Wiley & Sons, 1985.
- [7] B. CROPP, S. LIBERATI, M. VISSER, *Surface gravities for non-Killing horizons*, <http://arxiv.org/pdf/1302.2383.pdf>
- [8] M. P. DO CARMO, *Riemannian Geometry*, 2<sup>a</sup> Edición, Birkhäuser, 1993.
- [9] C. ELING, *Thermodynamics of spacetime in generally covariant theories of gravitation*, <http://www.physics.umd.edu/grt/taj/776b/eling.pdf>.
- [10] C. ELING, R. GUEDENS, T. JACOBSON, *Non-equilibrium Thermodynamics of Spacetime*, <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0602001>.
- [11] G. F. R. ELLIS, S. W. HAWKING, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, 1976.
- [12] H. FLANDERS, *Differentiation under the integral sign*, American Mathematical Monthly 80 (6), 615–627, 1973.
- [13] S. W. HAWKING, *Particle Creation by Black Holes*, Communications in Mathematical Physics, Volume 43, 1975.
- [14] S.W. HAWKING, R. PENROSE, *The Nature of Space and Time*, Princeton University Press, 1996.
- [15] T. JACOBSON, *Thermodynamics of Spacetime: The Einstein Equation of State*, <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9504004v2>.
- [16] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry*, Volúmenes 1 y 2, Interscience Publishers, 1963.
- [17] D. KOTHAWALA, *The thermodynamic structure of Einstein tensor*, <http://arxiv.org/abs/1010.2207v2>.
- [18] S. LANG, *Differential and Riemannian Manifolds*, GTM-160, Springer-Verlag, 1996.
- [19] J. MÄKELÄ, *A simple quantum-mechanical model of Spacetime II: thermodynamics of space-time*, <http://arxiv.org/abs/0805.3955v3>.

- [20] B. O'NEILL, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, 1983.
- [21] T. PADMANABHAN, *Thermodynamical aspects of Gravity: new insights*, Review Article, <http://arxiv.org/abs/0911.5004v2>.
- [22] T. PADMANABHAN, *Equipartition of energy in the horizon degrees of freedom and the emergence of gravity*, <http://arxiv.org/abs/0912.3165v2>.
- [23] T. PADMANABHAN, *Dark energy and gravity*, <http://arxiv.org/abs/0705.2533v1>.
- [24] T. PADMANABHAN, *Classical and Quantum Thermodynamics of horizons in spherically symmetric spacetimes*, <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0204019v2>.
- [25] T. PADMANABHAN, *Entropy density of spacetime and thermodynamic interpretation of field equations of gravity in any diffeomorphism invariant theory*, <http://arxiv.org/abs/0903.1254v1>.
- [26] M. PARIKH, S. SARKAR, *Beyond the Einstein Equation of State: Wald Entropy and Thermodynamical Gravity*, <http://arxiv.org/abs/0903.1176v1>.
- [27] R. PENROSE, W. RINDLER, *Spinors and space-time*, Cambridge University Press, 1984.
- [28] P. PETERSEN, *Riemannian geometry*, GTM-171, 2<sup>a</sup> Edición, Springer-Verlag, 2006.
- [29] E. POISSON, *A relativist's toolkit*, Cambridge University Press, 2004.
- [30] D. A. MACDONALD, R. H. PRICE, K. S. THORNE, *Black Holes: The Membrane Paradigm*, Yale University Press, 1986.
- [31] W. G. UNRUH, *Notes on black-hole evaporation*, Physical Review, Volumen 14(4), 1976.
- [32] E. VERLINDE, *On the Origin of Gravity and the Laws of Newton*, <http://arxiv.org/abs/1001.0785>.
- [33] J. A. VIACLOVSKY, *Topics in Riemannian Geometry*, 2011.
- [34] R. M. WALD, *General Relativity*, The University of Chicago Press, 1984.
- [35] R. M. WALD, *Quantum field theory in curved spacetime and Black hole thermodynamics*, The University of Chicago Press, 1994.
- [36] R. M. WALD, *Black Hole entropy is Noether Charge*, <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9307038v1>.
- [37] R. M. WALD, *Some Properties of Noether Charge and a Proposal for Dynamical Black Hole Entropy*, <http://arxiv.org/pdf/gr-qc/9403028>.
- [38] F. W. WARNER, *Foundations of differentiable manifolds and Lie Groups*, GTM-94, Springer-Verlag, 1983.
- [39] Y. YOKOKURA, *Entropy balance equation of spacetime thermodynamics in  $f(R)$  gravity*, <http://arxiv.org/abs/1106.3149v5>.